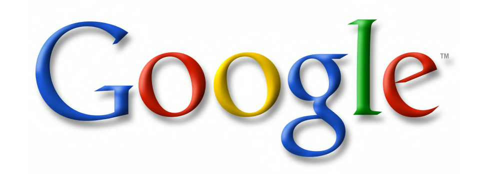




PHYSIKALISCHE

KRYSTALLOGRAPHIE

Laboratory Copy.



PHYSIKALISCHE

KRYSTALLOGRAPHIE

UND EINLEITUNG

IN DIE

KRYSTALLOGRAPHISCHE KENNTNIS

DER

WICHTIGSTEN SUBSTANZEN

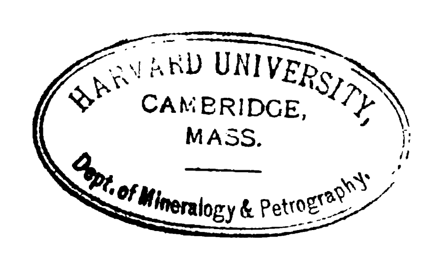
VON

P. GROTH

VIERTE, NEUBEARBEITETE AUFLAGE

MIT 750 ABBILDUNGEN IM TEXT UND 3 BUNTDRUCKTAFELN

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1905



Vorwort.

Bei der Bearbeitung der vorliegenden vierten Auflage der physikalischen Krystallographie war der Verfasser bestrebt, einerseits die neuesten Fortschritte dieser Wissenschaft in möglichster Vollständigkeit zu berücksichtigen, andererseits den Charakter des Werkes als den eines elementaren Lehrbuches der Krystallphysik zu wahren.

In der I. Abteilung, der Beschreibung der Eigenschaften der krystallisierten Körper im allgemeinen, besteht die wesentlichste Änderung in der Wahl einer Systematik, welche es ermöglichte, die Gesetze der Abhängigkeit der Eigenschaften von der Richtung, d. h. die Symmetrieverhältnisse der Krystalle, dem Anfänger in einem stetigen Fortschreiten vom Einfachen zum Complicierten klarzustellen. Während in bezug auf das optische, thermische usw. Verhalten sich zunächst nur fünf Gruppen von Krystallen verschiedener Symmetrie unterscheiden lassen, erhöht sich diese Zahl durch die Eigenschaften der Spaltbarkeit und Elasticität auf sieben bzw. neun, und schließlich ergeben sich durch das Verhalten bei der Auflösung und dem Wachstum die sämtlichen möglichen zweiunddreißig Symmetrieklassen der Krystalle. Bei der Betrachtung der optischen Eigenschaften konnten, da die durch Lord Kelvins Arbeiten und Fletchers klare Darstellung unhaltbar gewordene »Elasticität« des Äthers bereits in der dritten Auflage beseitigt war, die Änderungen sich im wesentlichen auf einzelne Ergänzungen, z. B. bei der Totalreflexion, und auf schärfere Fassung der Begriffe beschränken, wie z. B. die Vermeidung des oft in falschem Sinne angewandten Wortes »Phasendifferenz« und die alleinige Anwendung des »Gangunterschiedes«, welcher alle Verhältnisse klar zu definieren gestattet. Für die thermische Ausdehnung konnte eine knappere Behandlung gefunden werden, welche der bisherigen vorzuziehen sein dürfte. Wesentlich neu bearbeitet wurden die Abschnitte über homogene Deformationen und über Cohäsion, ganz besonders aber diejenigen über die Auflösung und das Wachstum der Krystalle. Der darauf folgende Abschnitt über Krystallstructur enthält u. a. auch die nähere Begründung der von dem Verfasser in seiner »Einleitung in die chemische Krystallographie, Leipzig 1904« zugrunde gelegten Anschauung, welche vielleicht geeignet erscheint,

der weiteren Forschung über die Beziehungen zur chemischen Constitution als Wegweiser zu dienen. — Gern hätte der Verfasser, statt nur einige Beispiele der Sohnckeschen »regelmäßigen Punktsysteme« zu beschreiben, diese vollständig behandelt, wenn dadurch das Buch nicht zu umfangreich geworden wäre. Indessen beabsichtigt Herr A. Sommerfeldt demnächst als Ergänzuug eine übersichtliche Darstellung der Sohnckeschen Theorie mit stereoskopischen Abbildungen aller Punktsysteme, welche die Modelle derselben möglichst ersetzen sollen, herauszugeben. — Aus der Theorie der Krystallstructur ergibt sich unmittelbar das Rationalitäts- und Zonengesetz, und daher ist dieses nicht mehr, wie in der vorigen Auflage, als Erfahrungsgesetz in der II. Abteilung behandelt, sondern im Anschlusse an jene Theorie mit den übrigen allgemeinen Eigenschaften der Krystalle vereinigt worden. Die jetzt gewählte Darstellung dieses Gesetzes dürfte geeignet sein, die vielfach ventilierte Frage der Kriterien für die richtige Aufstellung der Krystalle einigermaßen zu klären. Auf die jedenfalls in Zukunft, wenn erst die Zahl der ihrer Structur nach näher erforschten krystallisierten Körper größer sein wird, noch wichtiger werdenden Betrachtungen Fedorows über jene Frage einzugehen, mußte sich der Verfasser leider mit Rücksicht auf die Bestimmung des vorliegenden Buches für Anfänger versagen. Den Schluß des allgemeinen Teiles bildet die Darstellung der Symmetriegesetze und die dadurch gewonnene Einteilung der Krystalle in 32 Klassen.

Die II. Abteilung liefert nun die systematische Beschreibung der 32 Symmetrieklassen, in welcher jetzt die Structurverhältnisse und die obenerwähnte Frage der richtigen Aufstellung der Krystalle eine geeignetere Behandlung erfahren konnte als früher. Die Beispiele sind durch neue vermehrt worden, besonders solche, deren Aufnahme mit Rücksicht auf des Verfassers »Einleitung in die chemische Krystallographie« sich als notwendig erwies, während einige minder wichtige dafür weggelassen wurden. Bei vielen Körpern konnten die Vorarbeiten des Verfassers für die demnächst beginnende Herausgabe eines vollständigen Handbuches der chemischen Krystallographie, zum Teil mit den für letzteres bestimmten Figuren, benutzt werden. Eine besondere Berücksichtigung wurde den pseudosymmetrischen Krystallen und denjenigen mit Drehungsvermögen zuteil. Mit Rücksicht auf die immer größer werdende Wichtigkeit des sogenannten Pasteurschen Gesetzes (s. S. 325) über die Krystallform der optisch activen Substanzen wurden diese unter den Beispielen der betr. Klassen getrennt behandelt, und hier konnten auch die Resultate der während des Druckes erschienenen Arbeit von Dufet (s. Nachträge S. XIII) berücksichtigt werden. Einen Anhang bildet, wie in den vorhergehenden Auflagen, die Vergleichungstabelle der früheren krystallographischen Bezeichnungen, welche dem Anfänger das

Studium der älteren Literatur ermöglicht und auch deshalb unentbehrlich ist, weil diese Bezeichnungen leider auch heute noch vielfach als Ballast in der Wissenschaft mit fortgeschleppt werden. So groß deren Nutzen bei ihrer in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts erfolgten Aufstellung gewesen ist, so haben die Fortschritte der Wissenschaft doch nun gezeigt, daß dieselben sich jetzt nicht mehr aufrechterhalten lassen (in dieser Beziehung sei z. B. auf die Anmerk. S. 542 verwiesen). Da aber selbst bei denjenigen Krystallographen, welche sich der Bezeichnung durch die Indices bedienen, die Erkenntnis noch immer nicht allgemein ist, daß für Körper mit rhomboedrischer Krystallstructur nur die auf die Kanten des Grundrhomboeders bezogenen Millerschen Symbole zu einer rationellen Bezeichnung der Krystallformen geeignet sind, so hat der Verfasser S. 552 f. eine tabellarische Darstellung der Beziehungen zwischen den kubischen und den rhomboedrischen Formen eingefügt, durch welche im Zusammenhange mit der Beschreibung des trigonalen Systemes die angegebene Bedeutung der Millerschen Symbole wohl über jeden Zweifel gestellt worden ist.

Die III. Abteilung behandelt die Methoden zur Untersuchung der Krystalle und umfaßt eine für den Anfänger bestimmte Anleitung zu deren Anwendung. An die übliche krystallographische Berechnung und Projection hat der Verfasser einen neuen Abschnitt über die graphische Berechnung nach den Methoden von Fedorow, Wulff und Penfield angeschlossen. Da eine vollständige Darstellung der letzteren durch die Rücksicht auf den Umfang dieses Lehrbuches ausgeschlossen war und auch ohne die Penfieldschen Constructions-Utensilien nutzlos gewesen wäre, so wird die Verlagsfirma die Herausgabe eines besonderen kleinen Buches (durch Herrn Prof. Stöckl, s. S. 619 Anmerk.) über die stereographische Projection im allgemeinen und über die Penfieldschen Methoden im besonderen vorbereiten, welchem die erwähnten Utensilien beigegeben werden sollen. — Bei der Beschreibung der Apparate hat der Verfasser mit Rücksicht auf den Anfänger zunächst die einfachsten und daher für die Einführung in die Methoden geeignetsten Instrumente in derselben Weise wie früher beschrieben, andererseits aber auch die neueren Constructionen berücksichtigt. Letztere, immer zahlreicher und immer complicierter werdend, sind jedoch, da der mit ihnen arbeitende Specialist jedenfalls die Originalliteratur benutzen muß, unter Verweisung auf diese kürzer behandelt. Der Verfasser kann nicht umhin auszusprechen, daß er in der wachsenden Complication der Instrumente keinen durchweg zu begrüßenden Fortschritt in der Wissenschaft erblickt und daß ihm die damit zusammenhängende Darstellung der Winkelverhältnisse durch sphärische Coordinaten, welche in neuester Zeit in den Beschreibungen der Krystalle Mode zu werden beginnt, nicht geeignet scheint, die Hauptaufgabe der krystallographischen Forschung, nämlich die

tiefergehende Erkenntnis der Beziehungen zwischen der Beschaffenheit der krystallisierten Körper und ihrer chemischen Natur, wesentlich zu fördern.

Zum Schlusse muß der Verfasser dankend erwähnen, daß die Herren Collegen Beckenkamp und Graetz ihn durch mehrfache Ratschläge freundlichst unterstützt haben, und daß die Verlagsfirma allen seinen Wünschen in bereitwilligster Weise entgegengekommen ist, wodurch es ermöglicht wurde, die Tafeln I und II durch zwei neue zu ersetzen, für welche unter Leitung des Verfassers (mit dankenswerter Unterstützung durch den zweiten Conservator der hiesigen mineral. Sammlung, Herrn Dr. Grünling) durch die lithographische Kunstanstalt von Hub. Köhler in München neue Originale hergestellt und in einer dem jetzigen Stande der Technik entsprechenden Weise reproduciert wurden.

München, Ende März 1905.

P. Groth.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abteilung (allgemeine physikalische Krystallographie).

Die Eigenschaften der Krystalle.

A. Bivectorielle Eigenschaften von höherer Symmetrie (Ellipsoideigenschaften).

1. Optische Eigenschaften.





Anhang.

III. Abteilung.

Die Methoden zur Untersuchung der Krystalle.

Berechnung und graphische Darstellung der Krystallformen.



Berichtigungen und Ergänzungen während des Druckes.

Seite 30, Z. 12 v. o. ergänze nach »werden«: »(Methode von Wollaston)«.

Seite 57, Z. 18 v. o. Hierzu ist zu bemerken, daß nach einer Mitteilung in der von Lummer herausgegebenen neuesten Auflage von Müller-Pouillets Physik die richtige Schreibart des Namens des ausgezeichneten Tübinger Physikers nicht Nörremberg, sondern Nörrenberg ist.

Seite 125, Z. 1 v. o. Statt »parallel einem« lies: »parallel dem Hauptschnitte eines«.

Seite 138 f. Zu diesem Abschnitte muß bemerkt werden, daß in neuerer Zeit von verschiedenen optischen Firmen (Fuess, Steeg u. Reuter) $\frac{1}{4}$Undulationsglimmerplatten, Gypslamellen mit Rot I. Ordn. usw. in umgekehrter Orientierung, so daß die längere Seite parallel der Schwingungsrichtung der größeren der beiden Lichtgeschwindigkeiten ist (s. auch C. Leiss, die optischen Instrum. der Firma Fuess, Leipzig 1899, S. 210—212), geliefert werden. Auf Wunsch sind von denselben natürlich noch solche mit der früher üblichen, S. 138 f. zugrunde gelegten Orientierung zu erhalten.

Seite 154, Z. 4 v. o. Lies: »des Körpers« statt »des Krystalles«.

Seite 155, Z. 23 v. o. ist zu ergänzen: »act. Amylamin-Alaun, Coniin-Alaun«.

Seite 155, Z. 11 v. u. Lies: »Kaliumlithiumsulfat und -seleniat«.

Seite 161, nach Z. 14 v. o. ist hinzuzufügen: »Die Airyschen Spiralen erhält man auch, wenn man statt der zweiten Quarzplatte einen circularen Analysator, d. h. die Combination eines Nicols mit einer $\frac{1}{4}$ Undulationsglimmerplatte, verwendet«.

Seite 161, nach Z. 30 v. o.: »In einer während des Druckes erschienenen Arbeit hat Dufet (Recherches expérimentales sur l'existence de la polarisation rotatoire dans les cristaux biaxes. Bull. soc. franç. d. minéral. Par. 1904, **27**, 156 f.) das Drehungsvermögen für eine weitere Reihe von zweiaxigen Krystallen nachgewiesen und namentlich gezeigt, daß dasselbe parallel den beiden optischen Axen eines Krystalles gleich groß ist, wenn deren Winkel von einer optischen Symmetrieebene (s. S. 121) halbiert wird, andernfalls verschieden (wie das Beispiel des Rohrzuckers zeigt, kann der Sinn der Drehung dann sogar ein entgegengesetzter sein)«.

Seite 183, Z. 1 v. o. Hierzu ist zu bemerken, daß aus kinematischen, von Burmester angestellten Betrachtungen folgt, daß diese Unveränderlichkeit nur für eine bestimmte Temperatur gilt, d. h. daß die Richtung, in welcher der Ausdehnungscoefficient = 0 ist, sich mit der Temperatur ändert.

Seite 189, Z. 3 v. o. Die eben erwähnten Betrachtungen führen hiervon abweichend zu der Anschauung, daß man eine Ebene und eine dazu schiefe oder senkrechte Gerade als fest annehmen kann.

Seite 349, Z. 6 v. o. Lies »Pinakoide« statt »Pinakoid«. Ebenso wäre es geeigneter, auch in den entsprechenden Tabellen der folgenden Klassen die Namen derjenigen Formen, deren unter dem betr. Zeichen mehrere zu verstehen sind, in den Plural zu setzen.

Seite 358, Z. 16 v. o. ist zu »homogene Deformation« hinzuzufügen: »bei welcher einer der drei Hauptschnitte des Deformationsellipsoides mit der Ebene (010) zusammenfällt«.

Seite 373, Z. 13 v. o. Lies: »Fig. 7, Taf. II.« statt »Fig. 6, Taf. II.«

Seite 494: Rechtsweinsaures Antimonyl-Baryum + salpetersaures Kalium gehört nach den neuerdings publizierten Beobachtungen Karandeeffs über die Ätzfiguren zur 23. Klasse.

Zu S. 508 ist betreffs der Structur der kubischen Krystalle zu bemerken, daß neuerdings Fedorow (Zeitschr. f. Kryst. 1905, **40**, 529f.) darauf aufmerksam gemacht hat, wie sich das häufigere Auftreten der Form {211} gegenüber {111} bei manchen Substanzen aus der Flächendichtigkeit im Falle einer dodekaedrischen Structur (Raumgitter Fig. 160 *b*) erkläre.

I.

Allgemeine physikalische Krystallographie.

Die Eigenschaften der Krystalle.



Einleitung.

Körper, welche an allen Stellen gleichartig beschaffen sind, so daß irgend zwei gleiche und ähnliche, sowie gleich orientierte Teile eines solchen Körpers durch keine Verschiedenheit irgendeiner Eigenschaft unterschieden werden können, nennt man homogen.

Die homogenen Körper zerfallen in zwei Klassen: 1. Solche, in denen nicht nur alle Stellen, sondern auch alle Richtungen gleichwertig sind, d. h. in welchen die verschiedenen Richtungen durch keine physikalische Eigenschaft des Körpers unterschieden werden können. Diese Körper nennt man amorphe, weil sie keine eigene Gestalt besitzen, oder isotrope, weil sie jede Art von Bewegungen nach allen Richtungen gleichartig fortpflanzen. Hierher gehören alle Gase und Dämpfe, fast alle tropfbaren Flüssigkeiten, endlich eine Anzahl sogenannter »fester« Körper, wie Colloide, Harze, Gläser, welche von den tropfbaren Flüssigkeiten nicht scharf getrennt sind, z. B. bei Temperaturerhöhung durch den erweichten bzw. sirupösen Zustand allmählich in den tropfbar flüssigen übergehen.

2. Homogene Körper, deren Eigenschaften von der Richtung abhängen, so daß der Wert irgendeiner Eigenschaft in gewissen Richtungen ein Maximum, in andern ein Minimum erreicht (dies kann auch der Fall sein nur für einzelne physikalische Eigenschaften, während für andere eine Gleichheit ihres Wertes für alle Richtungen in der Natur der betreffenden Eigenschaft begründet sein kann). Körper dieser Art besitzen die Fähigkeit, zu krystallisieren, d. h. eine eigene regelmäßige Form anzunehmen, welche mit der Verschiedenwertigkeit der Richtungen innerhalb derselben in gesetzmäßigem Zusammenhange steht, und werden daher krystallisierte oder krystallinische Körper genannt.

Die physikalischen Eigenschaften werden unterschieden in scalare und vectorielle.

Scalar heißt eine Eigenschaft, wenn dieselbe durch eine einzige Größe dargestellt wird, welche von der Richtung unabhängig ist, wie Temperatur, Dichte, specifische Wärme usw.

Vectoriell wird eine Eigenschaft genannt, wenn sie durch einen Zahlenwert und durch eine Richtung gegeben wird. Ist der Zahlenwert der Eigenschaft notwendig der gleiche auch in der entgegengesetzten Richtung, d. h. sind die beiden von einem beliebigen Punkte ausgehenden, der gleichen

Geraden angehörigen Richtungen jedesmal vollkommen gleichwertig in bezug auf eine Eigenschaft, so nennt man die letztere eine bivectorielle[1]).

Aus vorstehenden Definitionen folgt, daß die amorphen Körper nur scalare Eigenschaften besitzen können, während den krystallisierten Körpern außer diesen auch vectorielle und bivectorielle Eigenschaften zukommen.

Die Darstellung der gesetzmäßigen Beziehungen zwischen den von der Richtung abhängigen Eigenschaften der Krystalle, zu denen auch ihre geometrische Form gehört, ist der Gegenstand der physikalischen Krystallographie. Eine plausible Erklärung der Gesetze derselben liefert uns die Molekularhypothese, wenn wir annehmen, daß in den Krystallen die Moleküle zwar in Bewegung sind, aber Schwingungen um gewisse mittlere Orte ausführen, und daß diese Orte im Raume regelmäßig angeordnet sind[2]). Die Art dieser Anordnung, welche man als Krystallstructur bezeichnet, entspricht dann einem stabilen Gleichgewichtszustande der inneren Kräfte. Da aber dieses Gleichgewicht durch die von dem Wärmeinhalt des Körpers abhängigen Schwingungen beeinflußt wird, so kann die Anordnung, welche dem stabileren Gleichgewichte entspricht, für andere Temperaturen eine andere sein. In diesem Falle liefert die Krystallisation unter andern Temperatur- und Druckverhältnissen eine von der ersten verschiedene Anordnung, und es wird bei Überschreitung einer bestimmten Grenztemperatur eine Umwandlung des ersten krystallisierten Körpers in einen zweiten, chemisch gleichen, aber physikalisch von ersterem verschiedenen krystallisierten Körper eintreten, gerade so, wie bei dem sog. Schmelz- oder Erstarrungspunkt eine Umwandlung aus dem krystallisierten Zustande in den amorphen oder umgekehrt stattfindet. Ebenso wie der Schmelz- oder Erstarrungspunkt ohne Umwandlung überschritten werden kann, wobei dann der Zustand ein labiler wird, so kommt das gleiche auch vor bei der Umwandlung der verschiedenen krystallisierten Zustände oder »Modificationen« ineinander. Die Eigenschaft eines Stoffes, in mehreren krystallisierten Modificationen aufzutreten, nennt man Polymorphie (Dimorphie, Trimorphie usw.) oder, um sie von der chemischen Isomerie zu unterscheiden, physikalische Isomerie. Die Unterschiede der polymorphen Modificationen eines Körpers existieren nur im krystallisierten Zustande, der

1) Statt des gebräuchlicheren Ausdruckes »bivectoriell« hat Voigt den Namen »tensoriell« vorgeschlagen, doch erscheint für krystallographische Zwecke der erstere anschaulicher.

2) Im Gegensatze hierzu muß für die amorphen Körper eine »unregelmäßige« Verteilung der Moleküle im Raume angenommen werden, was für Gase und Flüssigkeiten unmittelbar klar ist. Ein amorpher Körper ist danach nur scheinbar homogen, d. h. seine Inhomogenitäten sind wegen ihres zu raschen Wechsels auf kleinstem Raume der physikalischen Prüfung nicht mehr zugänglich, und letztere liefert uns daher für jede Eigenschaft nur einen Mittelwert, welcher natürlich sich für alle Richtungen gleich groß ergibt. Aus diesem Grunde hat man auch die Krystalle als die einzigen wirklich homogenen Körper und »krystallisiert« und »homogen« als gleichbedeutend bezeichnet.



Übergang in den amorphen Zustand (Schmelzung oder Verdampfung, ebenso Lösung) hebt sie notwendig auf.

Da nach den vorhergehenden Annahmen die Krystallstructur eines Körpers von der Natur seiner Moleküle abhängt, so muß eine gesetzmäßige Beziehung zwischen dieser Structur und der chemischen Constitution des Körpers existieren; die Darstellung dieser Beziehung ist der Gegenstand der chemischen Krystallographie. Diese lehrt, daß zwei chemisch verwandte Körper in krystallisierten Modificationen auftreten können, deren Structuren zueinander in naher Beziehung stehen, so daß es möglich ist, die Änderung zu bestimmen, welche durch eine Änderung der Zusammensetzung des Moleküls in der Krystallstructur hervorgebracht wird; solche Beziehungen nennt man morphotrope. Dieselben sind am innigsten (stets correspondierende Modificationen für die Vergleichung vorausgesetzt), wenn es sich um zwei Körper handelt, deren Moleküle sich nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle eines Atoms in dem Molekül des ersten ein Atom eines gleichwertigen und jenem sehr nahe stehenden Elementes getreten ist. In solchen Fällen ist die Krystallstructur beider Körper so ähnlich, daß ihre Krystallform sehr nahe gleich, unter Umständen sogar vollkommen identisch ist; daher werden derartige krystallisierte Substanzen als isomorphe bezeichnet. Isomorphe Körper vermögen zusammen zu krystallisieren, d. h. in wechselnden Verhältnissen sich zu mischen zu Krystallen (sog. »isomorphe Mischungen«), welche sich physikalisch wie homogene Körper verhalten und deren Eigenschaften sich mit der Zusammensetzung continuierlich ändern.

Um den gesetzmäßigen Zusammenhang der von der Richtung abhängigen physikalischen Eigenschaften der Krystalle darzustellen, müssen diese Eigenschaften in ein System gebracht werden, aus welchem sich die einzelnen Gesetzmäßigkeiten als notwendig ergeben. Die Grundlage dieses Systems bildet die Symmetrie. Wenn ein Körper so beschaffen ist, daß die von jedem beliebigen Punkte ausgehenden beiden entgegengesetzten Richtungen vollkommen gleichwertig sind, so sagen wir, er habe ein »Centrum der Symmetrie«; daher werden die bivectoriellen Eigenschaften auch als »centrisch symmetrische« und im Gegensatz zu ihnen die vectoriellen als »acentrische« bezeichnet.

Die bivectoriellen Eigenschaften unterscheiden sich ferner in solche von höherer Symmetrie und solche von niederer Symmetrie.

Die ersteren haben das gemeinsam, daß ihr Zahlenwert für alle beliebigen Richtungen bestimmt ist durch höchstens drei Zahlengrößen, welche sich auf drei bestimmte, zueinander senkrechte Richtungen beziehen; und zwar ist der Zahlenwert einer bestimmten derartigen Eigenschaft für eine beliebige Richtung proportional dem ihr entsprechenden Radius vector eines dreiaxigen Ellipsoides, dessen drei Halbaxen jenen drei für diese Eigenschaft gültigen Zahlengrößen proportional sind. Die »bivectoriellen Eigenschaften von höherer Symmetrie« heißen daher auch »Ellipsoideigenschaften«.

Für den speciellen Fall, daß die drei Hauptaxen des Ellipsoides gleich groß sind, geht das Ellipsoid in eine Kugel über, d. h. der Zahlenwert der betreffenden Eigenschaft wird von der Richtung unabhängig, wie derjenige einer scalaren Eigenschaft. Aus diesem Grunde bieten die Ellipsoideigenschaften die einfachsten Verhältnisse dar, daher die Darstellung am geeignetsten mit ihnen beginnt, und zwar mit den optischen Eigenschaften. Diese werden, ihrer praktischen Wichtigkeit wegen, im folgenden nicht nur von den Grundbegriffen aus entwickelt, sondern auch so weit im einzelnen behandelt, wie es die praktische Anwendung der optischen Methoden zur Bestimmung krystallisierter Gebilde in der chemischen Krystallographie, der Mineralogie, Petrographie und andern Naturwissenschaften erfordert. Die übrigen Ellipsoideigenschaften, d. s. thermische, elektrische und magnetische, sind so vollkommen analog den optischen, daß sie nur eine kurze Darstellung erfordern.

Compliciertere Verhältnisse bieten die Eigenschaften der Elasticität und der Cohäsion der Krystalle dar, deren Abhängigkeit von der Richtung sich nicht mehr durch eine Fläche von so einfacher Gestalt, wie ein Ellipsoid bzw. eine Kugel, darstellen läßt, sondern nur durch eine Fläche von complicierterer Form und im allgemeinen geringerem Grade der Symmetrie. Diese Eigenschaften sollen daher von denen höherer Symmetrie, den Ellipsoideigenschaften, als solche von niederer Symmetrie unterschieden werden.

Den niedrigsten Grad der Symmetrie besitzen endlich die vectoriellen Eigenschaften, d. h. diejenigen, in bezug auf welche selbst die beiden der gleichen Geraden angehörigen, entgegengesetzten Richtungen nicht notwendig gleichwertig sind. Zu ihnen gehören die Eigenschaften der Auflösung und des Wachstums der Krystalle; letztere sind diejenigen Eigenschaften, vermöge deren der Krystall seine bestimmte geometrische Form annimmt.

Diejenigen bivectoriellen und vectoriellen Eigenschaften, bei denen es sich um Einwirkung mechanischer Kräfte auf die Krystalle handelt, sind deshalb von besonders hoher theoretischer Bedeutung, weil bei jenen Einwirkungen die Kräfte überwunden werden müssen, welche die kleinsten Teilchen des Krystalls aufeinander ausüben. Die Betrachtung dieser Eigenschaften führt deshalb auf diejenige der Ursachen der Krystallstructur und somit zur Betrachtung dieser letzteren selbst. Für die Behandlung der in Betracht kommenden Theorien der Krystallstructur sind gewisse Begriffe aus der Geometrie[1]) erforderlich, welche auch deshalb von Wichtigkeit sind, weil sie ebenso für die Theorien über die Configuration der Atome in den

1) Danach ist die Geometrie eine Hilfswissenschaft der Krystallographie, nicht letztere ein Teil der ersteren, denn die Geometrie beschäftigt sich mit der Form, die Krystallographie mit dem Inhalt derselben, d. h. mit der Materie der Krystalle als Trägerin der Eigenschaften, zu denen u. a. auch die Form gehört.



Molekülen gelten und daher als Grundlage stereochemischer Anschauungen betrachtet werden können. Es werden daher zunächst diese Begriffe erläutert und dann mit ihrer Hilfe sämtliche Gesetze, welche die geometrischen Formen der Krystalle beherrschen, abgeleitet werden, während die Darstellung der Verhältnisse der einzelnen Symmetrieklassen, welche sich aus jenen allgemeinen Gesetzen ergeben, und die Beschreibung einer Anzahl von krystallisierten Körpern, welche besonders wichtige oder interessante Beispiele der Verhältnisse dieser Klassen bilden, der II. Abteilung vorbehalten bleiben.

A. Bivectorielle Eigenschaften von höherer Symmetrie (Ellipsoideigenschaften).

I. Optische Eigenschaften.

Die Natur des Lichtes.

Zur Erklärung der Eigenschaften des Lichtes wird angenommen, daß dasselbe eine periodische Bewegung der kleinsten Teilchen einer Materie, des Lichtäthers, sei, welche den Weltraum und ebenso die Körper durchdringt, in letzteren aber unter dem Einflusse der wägbaren Materie gewisse Eigentümlichkeiten annimmt.

Denken wir uns diesen Äther in Ruhe, d. h. die zwischen den Teilchen desselben wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, und werde ein Ätherteilchen aus der diesem Gleichgewichte entsprechenden Lage durch einen Impuls entfernt, werde ihm also in irgendeiner Richtung eine gewisse Geschwindigkeit verliehen, so wird nach dieser Theorie eine Kraft geweckt, welche das Teilchen nach seiner Ruhelage zurücktreibt, seine Geschwindigkeit also verringert, und zwar genau nach demselben Gesetze, wie die Schwere auf ein durch einen Stoß in Bewegung gesetztes Pendel wirkt[1]). Das Ätherteilchen wird daher bei einem gewissen Abstande von seiner ursprünglichen Lage die Geschwindigkeit Null erhalten, alsdann unter der Einwirkung jener Kraft mit beschleunigter Geschwindigkeit zurückkehren und die Gleichgewichtslage mit derselben Geschwindigkeit erreichen, welche es durch den ersten Impuls erhielt, aber in entgegengesetzter Richtung, so daß es sich nun in derselben Weise nach der andern Seite von dem Ausgangspunkte, infolge der erwähnten Kraft mit abnehmender Geschwindigkeit,

1) Diese Kraft bezeichnet man nach Huyghens, dem Begründer der Theorie des Lichtäthers, gewöhnlich als eine elastische und spricht daher von der »Elasticität des Äthers«; jedoch muß bemerkt werden, daß zur Erklärung der Erscheinungen des Lichtes keine weitere Annahme erforderlich ist, als die obige, ganz allgemeine, daß durch eine Verschiebung der Ätherteilchen eine Kraft geweckt wird, welche eine den Gesetzen der Pendelbewegung entsprechende Schwingung erzeugt. Für diese Eigenschaft des Äthers, auf welcher die Fortpflanzung des Lichtes beruht, hat Fletcher (The optical Indicatrix and the transmission of Light in Crystals, S. 97) den Namen »Resilienz« vorgeschlagen. Denkt man sich eine Reihe parallel nebeneinander befindlicher Pendel, zwischen denen irgendeine jene Kraft repräsentierende Verbindung besteht, und erteilt einem derselben eine Bewegung, so erhält man das vollständige Analogon der im folgenden beschriebenen Bewegung einer Reihe von Ätherteilchen.



entfernt bis zu dem gleichen Abstande wie vorher, und von da mit zunehmender Geschwindigkeit zurückkehrt. Ist das Teilchen endlich wieder im Anfangspunkte seiner Bewegung angelangt, so besitzt es genau wieder dieselbe Geschwindigkeit in derselben Richtung, wie im Anfange; es beginnt daher eine zweite Schwingung, wie man eine derartige hin und her gehende Bewegung nennt. Deren Weite, also der während derselben von den Teilchen zurückgelegte Weg, heißt die Maximalamplitude oder schlechtweg die Amplitude der Schwingung, die Zeit, welche zur Ausführung einer ganzen Schwingung, d. h. bis zur nächsten Wiederkehr des gleichen Schwingungszustandes vergeht, die Schwingungsdauer oder die Periode. Die Amplitude hängt ab von der Anfangsgeschwindigkeit, mit welcher das Teilchen aus der Ruhelage entfernt wird, und ist dieser Geschwindigkeit proportional. Ist z. B. der erste Impuls derart, daß er dem Teilchen die doppelte Anfangsgeschwindigkeit verleiht, so legt es in derselben Zeit den doppelten Weg zurück, erreicht also die doppelte Maximalamplitude, während die Schwingungsdauer constant bleibt.

Wenn der Äther ein homogenes Medium im eigentlichen Sinne (vgl. Anmerk. [2]) S. 4) ist, so müssen seine Teilchen auf einer Geraden gleiche Abstände besitzen, und diese müssen dem Gleichgewicht der zwischen ihnen und den umgebenden Teilchen wirkenden (anziehenden und abstoßenden) Kräfte entsprechen. Denken wir uns nun eines der Teilchen einer solchen äquidistanten Reihe, z. B. α, Fig. 1, durch einen Impuls in die geschilderte Vibrationsbewegung versetzt, z. B. ihm eine Geschwindigkeit in der Richtung nach α' hin gegeben, so wird sein Abstand von β vergrößert, und infolge der dadurch geweckten Kraft müssen diese Teilchen sich einander zu nähern streben; α wird in seiner neuen Stellung α' nicht nur von β zurückgezogen, sondern dieses wird auch nach α' hingezogen werden, und zwar um so mehr, je größer jene im Äther geweckte Kraft ist. Gegen die Bewegung von β nach α' hin wirkt aber vermöge derselben Kraft die Anziehung von γ, so daß β, infolge dieser beiden Anziehungen von α' und von γ, eine mittlere Bewegungsrichtung, nämlich die parallel $\alpha\alpha'$[1]), einschlägt. In derselben Weise wird hierauf das Teilchen γ durch die Bewegung von β veranlaßt, sich nach derselben Richtung hin zu bewegen, usf. alle folgenden. Wenn die Bewegung sich bis zu einem bestimmten Teilchen ν (Fig. 2), welches eben seine Bewegung beginnt, fortgepflanzt hat,

Fig. 1.

α β γ δ ε ζ
α'

Fig. 2.

α β γ δ ε ζ η ϑ ι κ λ μ ν

[1]) Weil die Verschiebung $\alpha\alpha'$ als verschwindend klein, der Winkel zwischen $\alpha'\beta$ und $\beta\gamma$ daher als unendlich wenig von 180° verschieden anzusehen ist.

so bildet in diesem Momente die vorher geradlinige Punktreihe eine Welle, bestehend aus einem Wellenberg und einem gleich langen Wellental. Eine derartige Bewegung nennt man eine Wellenbewegung, den Abstand $\alpha\nu$, bis zu welchem sich dieselbe fortgepflanzt hat, während das erste Teilchen eine ganze Schwingung ausführte, eine Wellenlänge und bezeichnet sie mit λ. Innerhalb einer Wellenlänge sind alle Schwingungszustände nebeneinander vorhanden, welche ein und dasselbe Teilchen während der Dauer einer Schwingung nacheinander besitzt. Je zwei Teilchen, deren Abstand $= \frac{1}{2}\lambda$, befinden sich in entgegengesetztem Schwingungszustand. Die Größe λ ist offenbar proportional sowohl der Geschwindigkeit, mit der sich die Bewegung fortpflanzt, als auch der Schwingungsdauer; denn wenn eine Wellenbewegung dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit, aber die doppelte Schwingungsdauer hätte, so müßte sich dieselbe doppelt so weit fortgepflanzt haben, während das erste Teilchen eine ganze Schwingung vollführt; ebenso müßte aber λ doppelt so groß werden, wenn bei gleicher Schwingungsdauer die Fortpflanzung der Bewegung doppelt so schnell vor sich ginge.

Hat sich die Bewegung durch eine größere Reihe von Punkten fortgepflanzt, so bilden diese nunmehr einen Wellenzug, der in eine Anzahl Wellenlängen geteilt erscheint, welche gleich groß sind, wenn die Verhältnisse auf der ganzen Punktreihe, also auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung, dieselben bleiben. Sämtliche Teilchen des Wellenzuges, welche um λ oder um ein ganzes Vielfaches von λ voneinander abstehen, befinden sich in dem gleichen Schwingungszustand; dagegen besitzen alle diejenigen, deren Abstand $\frac{1}{2}\lambda$ oder ein ungerades Vielfaches davon beträgt, entgegengesetzten Schwingungszustand. Ein solcher Wellenzug stellt aber natürlich den Zustand einer Reihe von Ätherteilchen nur in einem bestimmten Momente dar; in jedem darauf folgenden Augenblicke befinden sich sämtliche Teilchen in einem der folgenden Schwingungszustände, je nach der Geschwindigkeit, mit welcher die Wellenbewegung fortschreitet.

Denkt man sich die S. 9 betrachtete Reihe von Ätherteilchen links von α in gleicher Weise fortgesetzt, so muß für alle hier auf α folgenden Teilchen dieselbe Betrachtung gelten, d. h. wenn in irgendeinem Punkte einer solchen Reihe eine Lichtbewegung erregt wird, so muß dieselbe sich von diesem Punkte aus nach beiden entgegengesetzten Richtungen in derselben Weise fortpflanzen. Hierauf beruht die Zugehörigkeit der optischen Eigenschaften zu den bivectoriellen und der Umstand, daß jede optische Construction auch im umgekehrten Sinne gültig ist.

Ein Lichtstrahl ist somit nach obiger Theorie, der sogenannten »Undulationstheorie des Lichtes«, ein Wellenzug, d. h. eine geradlinige Reihe von Ätherteilchen, in welcher sich eine Wellenbewegung mit einer zwar endlichen, aber sehr großen Geschwindigkeit fortpflanzt. Die Amplitude der Schwingungen bestimmt die Helligkeit des Strahles, während die

Farbe desselben bedingt wird durch die Schwingungsdauer. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Weltraume ist für alle Farben die gleiche (etwa 298500 Kilometer pro Sekunde), und da die Wellenlänge λ diejenige Strecke ist, um welche sich die Bewegung während der Dauer einer Schwingung fortgepflanzt hat, so muß die Wellenlänge des Lichtes für verschiedene Farben sich genau so verhalten, wie die Schwingungsdauer. Am größten ist die letztere für rote Strahlen, kleiner für gelbe, grüne, blaue, und am kleinsten für violettes Licht, welches also seine Schwingungen am raschesten ausführt. Die Wellenlänge des roten Lichtes beträgt im Weltraume etwa 0,000760 mm, die des violetten etwa 0,000400 mm; infolgedessen vollführt ein roter Lichtstrahl in einer Sekunde etwa 390 Billionen einzelne Schwingungen, ein violetter dagegen etwa 750 Billionen.

Wie erwähnt, nimmt der Äther, welcher die wägbaren Körper durchdringt, unter dem Einflusse dieser andere Eigenschaften an, vermöge deren er eine Lichtbewegung mit einer andern Geschwindigkeit (welche meist kleiner ist, als die im leeren Raume) fortpflanzt. Infolgedessen ist die Wellenlänge des Lichtes von der gleichen Farbe in verschiedenen Körpern verschieden, nur die Schwingungsdauer bleibt dieselbe; diese ist es also, welche den specifischen Charakter der Farbe bestimmt.

Außer der Farbe und der Helligkeit beobachten wir noch andere Unterschiede der Lichtstrahlen, welche von der Art der Schwingungsbewegung abhängen. Findet diese, wie in dem S. 9 angenommenen Beispiele, in einer bestimmten, zum Strahle senkrechten Richtung statt, in welchem Falle man sie eine »transversale« nennt, so kann der betreffende Lichtstrahl sich nicht rings um seine Fortpflanzungsrichtung nach allen Seiten gleichartig verhalten; er muß, da alle Schwingungen in einer bestimmten Ebene stattfinden, eine gewisse Seitlichkeit (Polarität) zeigen; man bezeichnet ihn daher als einen geradlinig polarisierten Lichtstrahl. Diese Seitlichkeit muß offenbar eine symmetrische sein sowohl zu der Ebene, in welcher die transversalen Schwingungen stattfinden, wie zu der dazu senkrechten Ebene, welche erstere in der Richtung des Strahles schneidet; wir wollen erstere die Transversal- oder Schwingungsebene, letztere die Polarisationsebene des Strahles nennen. Gleichartig nach allen Seiten kann sich ein solcher Strahl nur dann verhalten, wenn das Azimuth seiner Schwingungsebene sich sehr rasch um die Richtung des Strahles dreht, d. h. wenn die nacheinander folgenden Schwingungen stets in einer Ebene stattfinden, welche gegen die der unmittelbar vorhergehenden um einen kleinen Winkel gedreht ist, so daß dieser Winkel nach einer gewissen Zeit 180° beträgt; alsdann haben während des Ablaufs derselben die Schwingungen nach allen Seiten rings um den Strahl stattgefunden. Diese Zeit ist nun aber bei der außerordentlich großen Zahl von Lichtschwingungen während einer Secunde (s. oben) weit kürzer, als die zur Auffassung eines Lichteindruckes erforderliche. Während der letzteren wird sich also die Schwingungsebene viele

Male um die Fortpflanzungsrichtung herumgedreht haben, und der Lichtstrahl muß demnach den Eindruck gleichartigen Verhaltens rings um seine Richtung hervorbringen. Das sogenannte gewöhnliche (nicht polarisierte) Licht besteht aus Strahlen von der soeben beschriebenen Art der Schwingungsbewegungen.

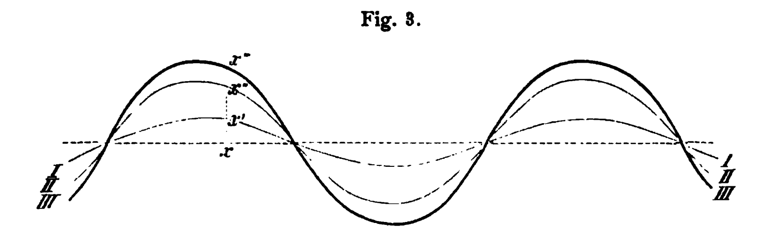
Außer den geradlinigen Schwingungen gibt es jedoch noch andere Arten von Lichtstrahlen, in welchen die Ätherteilchen sich auf Kreisen oder Ellipsen bewegen, die also aus circularen oder elliptischen Schwingungen bestehen.

Zusammensetzung (Interferenz) des geradlinig polarisierten Lichtes.

Wenn ein Ätherteilchen von zwei Lichtbewegungen, welche die gleiche Schwingungsdauer besitzen, zugleich ergriffen wird, so gelangt es nach einer bestimmten Zeit an denjenigen Punkt, wohin es die einzelnen Bewegungen gebracht haben würden, wenn sie nacheinander ebensolange gewirkt hätten. Die Zusammensetzung zweier solcher Partialbewegungen zu einer resultierenden nennt man Interferenz in dem einfachsten Falle, daß die sich zusammensetzenden (interferierenden) Wellenbewegungen sich in derselben Richtung fortpflanzen und ihre Transversalschwingungen in derselben Ebene stattfinden, sich also nur in bezug auf ihren Schwingungszustand und ihre Amplitude unterscheiden.

Gehen von einer Lichtquelle gleichzeitig geradlinig polarisierte Lichtstrahlen mit paralleler Schwingungsrichtung und gleichem Schwingungszustand aus und treffen zwei derselben in der gleichen Fortpflanzungsrichtung zusammen, nachdem sie einen verschieden langen Weg zurückgelegt haben, so ist der Schwingungszustand, mit welchem sie an einem Punkte ihrer nun gemeinschaftlichen Bahn zur Interferenz gelangen, im allgemeinen verschieden. Der Unterschied ihrer Schwingungszustände ergibt sich aus der Differenz der von ihnen zurückgelegten Wege, ausgedrückt in Wellenlängen. Diese Differenz wird ihr Gangunterschied genannt. Ist derselbe $= n\lambda$ (wo n eine ganze Zahl), so interferieren die beiden Wellenzüge an jedem Punkte der gemeinsamen Bahn mit gleichem Schwingungszustande. Bezeichnet in Fig. 3 *I* den Zustand, in welchem die Reihe von

Fig. 3.

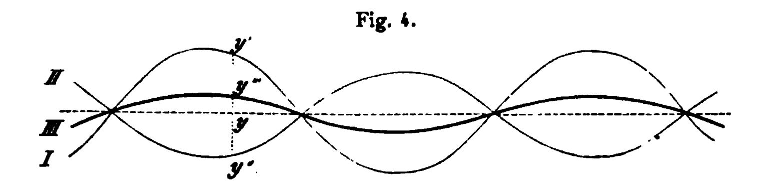


Ätherteilchen in einem bestimmten Augenblicke sich befinden würde, wenn die erste der interferierenden Wellenbewegungen allein vorhanden wäre, *II*

denjenigen, wenn die zweite allein wirkte, so ist *III* der Zustand der Ätherteilchen infolge der aus beiden resultierenden Wellenbewegung; denn irgendein Punkt x würde vermöge der ersten Teilbewegung sich bis x', vermöge der zweiten bis x'' bewegt haben, also muß er sich nunmehr in einem Abstande xx''' von der Ruhelage befinden, welcher gleich ist der Summe der durch die einzelnen Bewegungen hervorgebrachten Abstände xx' und xx''. Es resultiert aus der Interferenz also eine Wellenbewegung von demselben Schwingungszustande, deren Amplitude die Summe der Schwingungsweiten der sich zusammensetzenden Bewegungen ist.

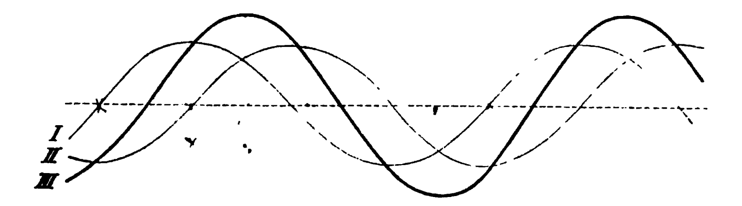
Kommen zwei interferierende Lichtstrahlen der angegebenen Art so zusammen, daß ihr Gangunterschied $\frac{1}{2}\lambda$ oder ein ungerades Vielfaches dieser Größe beträgt, so wirken sie auf jedes von ihnen gleichzeitig ergriffene Teilchen in entgegengesetztem Sinne; der Punkt y in Fig. 4 z. B. würde durch die Bewegung *I* allein nach oben bis y' getrieben worden sein,

Fig. 4.



dagegen bis y'' nach unten, wenn *II* allein gewirkt hätte, folglich muß nach Einwirkung der Partialbewegungen sein Abstand von der Ruhelage yy''' die Differenz beider Abstände sein. Es resultiert also aus der Interferenz zweier Wellenbewegungen von $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$ oder $\frac{5}{2}\lambda$ usw. (allgemein $(n+\frac{1}{2})\lambda$) Gangunterschied eine einzige Wellenbewegung (*III* in Fig. 4), deren Schwingungszustand gleich demjenigen der stärkeren der beiden sich zusammensetzenden Wellenbewegungen, und deren Amplitude gleich der Differenz der Schwingungsweiten derselben ist. In dem besonderen Falle, daß die beiden interferierenden Lichtstrahlen gleiche Amplituden, d. h. gleiche Helligkeit haben, ist diejenige des resultierenden $= 0$, d. h. die beiden Bewegungen vernichten sich gegenseitig vollständig.

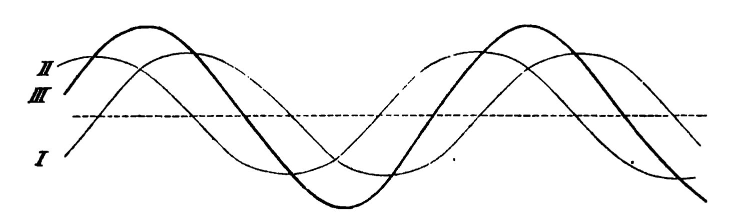
Fig. 5.



Hat der Gangunterschied einen andern Wert als in den beiden oben betrachteten Fällen, so resultiert durch Interferenz eine Wellenbewegung

von anderem Schwingungszustande und anderer Amplitude. Wenn z. B. der Gangunterschied $\frac{1}{4}\lambda$ oder $\frac{5}{4}\lambda$ (allgemein $(n + \frac{1}{4})\lambda$) beträgt, so ist die resultierende Bewegung gegen beide Wellenzüge (wenn sie gleiche Amplitude besitzen) um $\frac{1}{8}\lambda$ verschoben, wie aus Fig. 5 (S. 13) leicht ersichtlich. In der entgegengesetzten Richtung um ebensoviel verschoben ist die durch Interferenz entstehende Welle, wenn die beiden Wellenzüge einen Gangunterschied von $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{7}{4}\lambda$ . . ., allgemein $(n + \frac{3}{4})\lambda$ besitzen, s. Fig. 6.

Fig. 6.



Die Intensität der durch Interferenz zweier geradlinig polarisierter Lichtstrahlen mit paralleler Schwingungsrichtung erzeugten Schwingung kann also die verschiedensten, zwischen Null und der Summe der Intensitäten der einzelnen liegenden Werte haben, je nach dem Gangunterschiede derselben; die Schwingungsebene des resultierenden Lichtstrahls ist aber immer die gleiche, wie die der beiden interferierenden Strahlen.

Zu einem andern Resultate führt die Zusammensetzung zweier in derselben Richtung sich fortpflanzender, geradlinig polarisierter Strahlen, wenn ihre Schwingungsebene verschieden ist. Betrachten wir z. B. zwei Schwingungen von gleicher Amplitude, deren Schwingungsrichtungen jedoch einen rechten Winkel miteinander bilden, und sei ihr Gangunterschied $= \frac{1}{4}\lambda$ oder allgemein $(n + \frac{1}{4})\lambda$, so wird ein in dem Punkte α (Fig. 7) befindliches Ätherteilchen (hier soll die Normale zur Zeichnungsebene in α die gemeinschaftliche Richtung der Strahlen darstellen) vermöge der einen Bewegung in der Richtung $\alpha\alpha_1$, vermöge der andern nach α_3 hin bewegt werden. In dem Momente, in welchem von der ersteren $\frac{1}{4}$ ihrer Schwingungsdauer verlaufen ist, würde, wenn diese allein gewirkt hätte, das Ätherteilchen sich in α_1 befinden; vermöge der zweiten Bewegung, welche $\frac{1}{4}\lambda$ gegen die erste verzögert ist, würde es seine Ruhelage zu verlassen eben erst im Begriffe sein, d. h. seine Verschiebung in der Richtung $\alpha\alpha_3$ wäre Null; also ist α_1 der Ort des Teilchens in dem angegebenen Momente. In einem etwas späteren wäre es vermöge der ersten Schwingung um einen gewissen Weg $\alpha_1\alpha_y$ abwärts bewegt worden; gleichzeitig hat aber die zweite Schwingung gewirkt, und diese allein hätte es von α nach α_x bewegt; nach dem Gesetz des Parallelogramms der

Fig. 7.

Kräfte ist der Ort des Teilchens also nun α_2. Nach Verlauf einer halben Schwingungsdauer würde es infolge der ersten Bewegung in α, vermöge der zweiten in α_3 sein; die erste Elongation ist gleich Null, also gelangt es in diesem Moment nach α_3, usf. Die Bahn des Ätherteilchens wird im vorliegenden Falle genau diejenige sein, welche das Ende eines Pendels beschreibt, wenn man dasselbe durch einen Stoß aus seiner Ruhelage entfernt und ihm in dem Augenblicke, in welchem es seine größte Entfernung von derselben hat (in α_1 Fig. 7), einen Stoß von gleicher Stärke in der Richtung $\alpha\alpha_3$, also tangential, erteilt, — nämlich ein Kreis. Durch die Zusammensetzung zweier senkrecht zueinander geradlinig polarisierter Lichtstrahlen entsteht also circular schwingendes Licht, und zwar von der gleichen Schwingungsdauer, wie es die der einzelnen Strahlen war, da ein Viertel der kreisförmigen Bahn in einem Viertel der Schwingungsdauer durchlaufen worden ist. Derartiges Licht, sogenanntes circular polarisiertes, muß natürlich andere Eigenschaften besitzen als gewöhnliches Licht, mit dem es nur darin übereinstimmt, daß es keine Seitlichkeit nach einer durch die Richtung des Strahles gelegten Ebene zeigt.

Ist die Amplitude der beiden sich zusammensetzenden Lichtstrahlen im vorhergehenden Falle nicht die gleiche, oder ist ihr Gangunterschied verschieden von $\frac{1}{4}\lambda$, oder endlich der Winkel der beiden Schwingungsrichtungen nicht 90°, so resultiert im allgemeinen eine Bewegung der Ätherteilchen in einer Ellipse; der durch die Zusammensetzung entstehende Lichtstrahl wird als ein elliptisch polarisierter bezeichnet. Ein solcher muß sich in verschiedenen durch seine Fortpflanzungsrichtung gehenden Ebenen verschieden verhalten.

Optisch isotrope (einfach brechende) Körper.

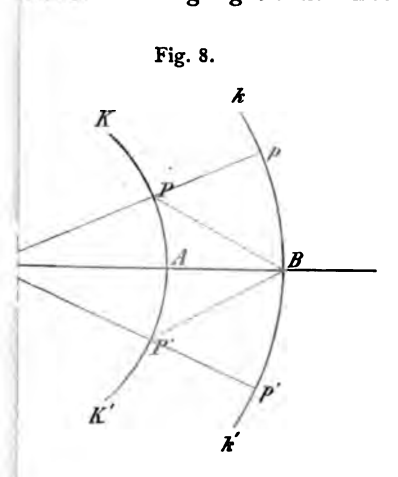
Ausbreitung des Lichtes. Bisher ist stets nur von einem Lichtstrahl als von einer geradlinigen Reihe in Schwingungen befindlicher Ätherteilchen die Rede gewesen. Da aber ein solches Teilchen nicht nur einer Reihe, sondern auch jeder andern angehört, welche wir erhalten, wenn wir uns von jenem nach in andern Richtungen benachbarten Ätherteilchen Gerade gezogen denken, so muß durch eine Verschiebung des ersten Teilchens in allen diesen Reihen das Gleichgewicht gestört und eine Kraft geweckt werden; d. h. die Lichtbewegung wird sich im Äther nach allen Seiten ausbreiten. Die Art dieser Ausbreitung wird davon abhängen, ob Schwingungsbewegungen einer beliebigen Art in verschiedenen Richtungen sich mit gleicher oder mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen, d. h. ob der Äther ein isotropes (s. S. 3) oder ein anisotropes (heterotropes) Medium darstellt, d. h. ein solches, in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung nach verschiedenen Richtungen eine verschiedene ist.

Isotrop ist der Äther im leeren Raume, in den isotropen (amorphen) Körpern (s. S. 3) und in den Krystallen einer bestimmten Gruppe. In einem solchen homogenen Körper pflanzt sich demnach das Licht einer gewissen

e nicht nur auf jeder Teilstrecke einer jeden Geraden (und zwar in n entgegengesetzten Richtungen derselben), sondern auch auf allen dwie gerichteten Geraden mit der gleichen Geschwindigkeit fort. Man t derartige Körper optisch isotrope. Der in ihnen enthaltene Licht- unterscheidet sich von dem Äther im Weltraume dadurch, daß er Licht einer andern Farbe mit anderer Geschwindigkeit, aber ebenfalls allen Richtungen mit gleicher, fortpflanzt. Die Lichtgeschwindigkeit tisch isotropen Körpern hängt also nicht nur von deren Natur, son- auch von der Periode der Lichtschwingungen ab.

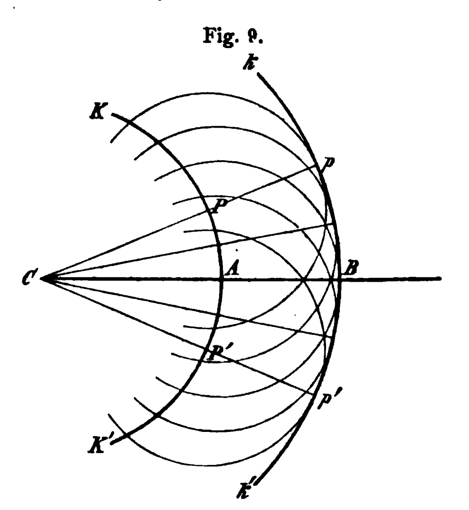
eginnt in einem derartigen Medium an irgendeinem Punkte eine Licht- gung von bestimmter Schwingungsdauer, so werden, da sich dieselbe allen Richtungen gleich schnell fortpflanzt, nach Ablauf einer ganzen ingungsdauer T alle Punkte, welche von jener Stelle um eine Wellen- λ abstehen, d. h. alle Punkte einer Kugeloberfläche vom Radius λ, izeitig ihre Bewegung beginnen. Nach der Zeit $2\,T$ werden dies alle iner Kugelfläche mit dem Radius 2λ tun, während die vorigen in elben Momente ihre zweite Schwingung beginnen, usf. Wie sich eine von Ätherteilchen durch die Schwingungsbewegung in eine Anzahl ier Wellenlängen teilt, so teilt sich der den Ausgangspunkt der Licht- gung umgebende Äther in eine Anzahl Kugelschalen, deren Abstand ist, in welchen alle gleichweit von der Grenze zweier Schalen nach lben Seite abstehenden Punkte gleichen Schwingungszustand haben. en wir vom Ausgangspunkte der Bewegung aus nach allen Seiten Längen elche der Wellenlänge proportional sind, so bilden deren Endpunkte eine fläche, welche man die Wellenfläche der von dem ersten Punkte ehenden Bewegung nennt. Dieselbe enthält alle Ätherteilchen, welche gleichzeitig ihre Bewegung beginnen. In einem optisch isotropen Körper, z. B. in Glas, wird also eine Lichtbewegung, welche von dem Punkte C (Fig. 8) ausgegangen ist, nach der bestimmten Zeit T auf der Oberfläche einer Kugel KK' angelangt sein. Jeder Punkt derselben, z. B. P, beginnt in diesem Augenblicke seine Bewegung, und da derselbe, ebenso wie der Punkt A, gleichzeitig auf allen möglichen von ihm ausgehenden Punktreihen, d. h. Reihen von Ätherteilchen, liegt, so muß er in allen diesen das Gleichgewicht stören, d. h. uß von ihm nach allen Seiten eine gleiche Wellenbewegung ausgehen. lso jeder bewegte Punkt eines solchen Systems selbst wieder Mittel- t einer neuen Wellenfläche ist, so wird nach dem Punkte B auf einer

Fig. 8.



Kugelfläche kk', deren Punkte später ihre Bewegung beginnen, nicht nur Bewegung von A aus gelangen, sondern auch von allen andern Punkten der ersten Kugelfläche KK'. Um die Wirkung, welche diese sämtlichen Bewegungen auf diejenige des Punktes B hervorbringen, zu beurteilen, muß man die Entfernung der Punkte, von denen sie ausgehen, von B in Rücksicht ziehen. Betrachtet man die Kugel KK' von B aus, und denkt sich auf derselben Kreise von verschiedenem Durchmesser um den Punkt A (wie die Breitengrade um den Nord- oder Südpol der Erde) gezogen, so stehen alle Punkte eines solchen Kreises offenbar gleichweit von B ab, die verschiedenen Kreise dagegen besitzen verschiedene Entfernung von B. Zu jedem Kreise denke man sich ferner denjenigen construiert, dessen Entfernung von B genau um $\frac{1}{2}\lambda$ größer ist; die beiden Bewegungen, welche, je von einem Punkte des einen und dem entsprechenden des andern ausgehend, in B zusammenkommen, werden einander durch Interferenz vollständig vernichten und in B gar keine Bewegung hervorbringen. Vergleicht man nun die Wirkung aller dieser kreisförmigen Zonen der Kugelfläche KK' auf den Punkt B, mit Berücksichtigung ihres Flächeninhaltes, so findet man als Gesamtresultat, daß die Wirkungen aller Teile derselben durch diejenigen anderer völlig vernichtet werden, mit Ausnahme der Bewegung, welche vom Punkte A ausgeht. Nach B gelangt also nur diejenige Schwingungsbewegung, welche von A ausging, diese allein setzt B in Bewegung. Da das gleiche für jeden Punkt gilt, so wird nicht nur von der Bewegung, welche, von A ausgehend, sich in einer bestimmten Zeit bis zur Kugeloberfläche kk' fortgepflanzt haben müßte, bloß die Bewegung in B eine Wirkung ausüben, sondern auch von P wird nur nach p, statt nach allen Seiten, von P' aus nur nach p' Bewegung mitgeteilt, usf.

Fig. 9.



Die Punkte, zu denen nach und nach die Bewegung von C aus gelangt, liegen also auf einer Geraden, d. h. die Ausbreitung des Lichtes als einer Wellenbewegung des Äthers muß eine geradlinige sein.

Aus der Oberfläche KK', bis zu welcher sich das Licht in einer bestimmten Zeit ausgebreitet hat, erhalten wir diejenige kk' für einen späteren Moment, wenn wir um die einzelnen Punkte der ersteren die Wellenflächen mit dem der Zwischenzeit entsprechenden Radius construieren und diejenige Oberfläche aufsuchen, welche alle diese Wellenoberflächen umhüllt (s. Fig. 9). Verbinden wir die Berührungspunkte jeder dieser Wellenflächen und der umhüllenden Fläche mit ihrem Centrum, z. B. den Berührungspunkt p mit P,

so erhalten wir den jeder einzelnen Wellenfläche entsprechenden Strahl. Diese Construction, nach ihrem Erfinder die Huyghenssche genannt, wird weiterhin noch mehrfach benutzt werden, um die Wellenflächen und damit die Lage der Strahlen, d. h. der Verbindungsgeraden der Centren der einzelnen Wellenflächen mit den Punkten, in welchen sie von der umhüllenden Fläche tangiert werden (AB, Pp, $P'p'$ Fig. 9), zu finden. Die Oberfläche, deren Radien die einzelnen Strahlen sind, nennt man daher auch die Strahlenfläche.

Betrachten wir nun einen Lichtstrahl als eine Reihe von Ätherteilchen, welche in transversalen Schwingungen begriffen sind, so finden diese für einen beliebigen Strahl Cp offenbar in der Ebene (der sogenannten »Wellenebene«) statt, welche die Strahlenfläche im Punkte p tangiert; denken wir uns ferner ein Bündel paralleler Strahlen in der Richtung Cp sich gleichzeitig fortpflanzend, so bildet in einem bestimmten Augenblicke die Tangentialebene der Strahlenfläche im Punkte p die »Front« derselben, daher sie auch als Strahlenfront bezeichnet wird. Der zu einer bestimmten Strahlenfront gehörige Strahl ist hiernach die Gerade zwischen dem Centrum der Strahlenfläche und demjenigen Punkte, in welchem die Strahlenfront die Strahlenfläche tangiert. In dem vorliegenden einfachsten Falle, in welchem die letztere die Gestalt einer Kugel besitzt, fällt offenbar der Strahl mit der Normalen der Strahlenfront (kürzer als »Frontnormale« bezeichnet) zusammen.

Ist ein Medium nicht homogen (heterogen), so wird der Äther in verschiedenen Teilen desselben verschieden beschaffen sein, ein sich darin fortpflanzender Lichtstrahl daher gleichsam durch verschiedene Medien hindurchgehen; wir können aber einen solchen Körper als aus verschiedenen homogenen zusammengesetzt betrachten und diesen Fall auf den der homogenen Körper zurückführen, wenn wir wissen, welche Änderung eine Wellenbewegung beim Übergang aus einem Medium in ein anderes erfährt.

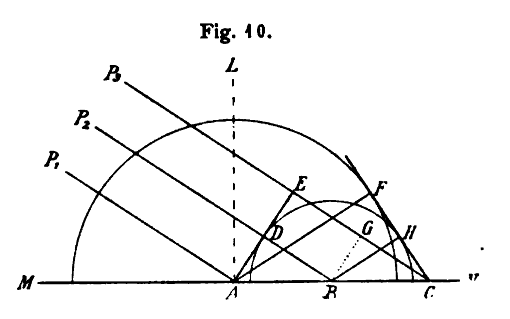
Denken wir uns ein Ätherteilchen an der Grenze zweier Medien, in welchen der Äther verschieden beschaffen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes also eine verschiedene ist, so gehört dieses Teilchen sowohl dem Äther des einen, wie dem des andern Körpers an; wenn also eine Lichtbewegung zu demselben gelangt und es in Schwingungen versetzt, so muß dadurch das Gleichgewicht sowohl in allen den Reihen von Ätherteilchen gestört werden, welche es mit den benachbarten des ersten Mediums verbinden, — als auch in allen den Reihen des zweiten Mediums, denen das betrachtete Ätherteilchen an der Grenze angehört. Es muß daher Lichtbewegung rückwärts in dem ersten Medium sich ausbreiten, gleichzeitig aber auch in das zweite eindringen[1]). Ein an der Grenze zweier

1) Letzteres scheint nur bei den durchsichtigen Körpern der Fall zu sein, jedoch zeigen die scheinbar undurchsichtigen ebenfalls eine Schwächung des zurückgeworfenen Lichtes, also muß auch bei ihnen ein Teil des auffallenden Lichtes eingedrungen sein. In der Tat besteht der Unterschied nur darin, daß in den durchsichtigen Körpern die Lichtstrahlen in größere Tiefe eindringen können, ohne merklich geschwächt (absorbiert) zu werden, bei den

Medien anlangender Lichtstrahl muß hiernach eine Teilung erfahren in einen zurückgeworfenen (reflectierten) und einen in das zweite Medium eindringenden, welcher, wie sich weiterhin ergibt, aus seiner Richtung abgelenkt (gebrochen) wird.

Reflexion des Lichtes. Das Gesetz, nach welchem sich ein an der Grenze zweier Medien reflectierter Lichtstrahl in dem ersten derselben rückwärts fortpflanzt, läßt sich leicht aus der im vorigen Abschnitt erklärten Huyghensschen Construction ableiten. Es soll dies im folgenden zunächst wiederum für den einfachsten Fall zweier optisch isotroper Medien geschehen. Fallen auf eine Grenzfläche derselben unter irgendeinem Winkel parallele Lichtstrahlen auf, d. h. Strahlen, welche von einer so entfernten Lichtquelle herkommen, daß eine Anzahl benachbarter als genau parallel und das ihnen entsprechende Stück der Strahlenfläche (einer Kugel mit unendlich großem Radius) als vollkommen eben betrachtet werden kann, so ist auch das von ihnen getroffene Stück der Trennungsfläche, da es verschwindend klein ist, als eine Ebene anzusehen. Sei MN (Fig. 10) der Durchschnitt dieser (zur Zeichnungsebene senkrechten) Ebene mit derjenigen der Zeichnung und $P_1 P_2 P_3$ drei gleichweit voneinander entfernte, in der Zeichnungsebene gelegene Strahlen, so ist die dazu senkrechte Ebene durch ADE ihre Strahlenfront in dem Augenblicke, in welchem der erste Strahl die Grenzfläche trifft.

Fig. 10.



Während der Zeit, welche verfließt, bis auch der letzte P_3 die Grenzfläche erreicht hat (in C), pflanzt sich der zurückgeworfene erste Strahl von A aus im oberen Medium ebensoweit fort, d. h. bis zu irgendeinem Punkte der oberen Hälfte derjenigen Kugel, welche wir um A mit dem Radius EC als seine Strahlenfläche zu construieren haben. Der Strahl P_2 trifft nach Verlauf des halben Zeitintervalls die Grenzfläche in B und pflanzt sich während der zweiten Hälfte dieser Zeit rückwärts im ersten Medium fort bis zu irgendeinem Punkte der Halbkugel um B mit dem Radius $GC = \frac{1}{2} EC$. Endlich langt der Strahl P_3 genau am Schlusse jenes Zeitintervalls in der Grenzfläche an; die Strahlenfläche der ihm angehörigen zurückgeworfenen Lichtbewegung ist also eine um C mit dem Radius Null construierte Kugel, d. h. der Punkt C selbst. Die gemeinsame Strahlenfront nach der Reflexion ist die Tangentialebene an die einzelnen Strahlenflächen, und da diese Ebene offenbar sämtliche Kugeln, deren Centren auf

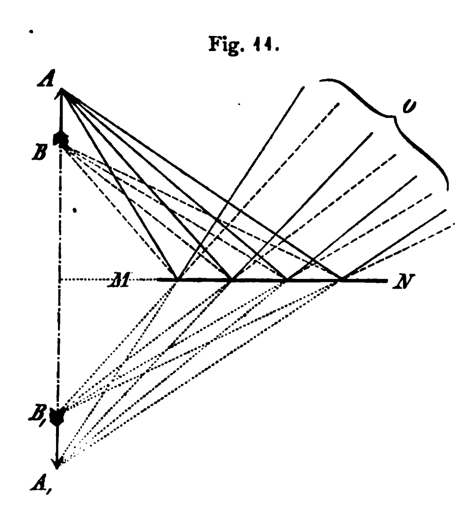
sogenannten »undurchsichtigen« nur in geringe. Diese Schwächung (Absorption) des Lichtes besteht darin, daß die Bewegung der Ätherteilchen in eine solche der kleinsten Teile des Körpers selbst umgesetzt wird und daher als Licht scheinbar verloren geht.

der Geraden MN liegen, in Punkten berühren muß, welche in die Zeichnungsebene fallen, so erhalten wir ihren Durchschnitt mit dieser, wenn wir von C aus die Tangente CHF ziehen. Die zugehörigen Strahlen sind somit AF (der zurückgeworfene Strahl P_1) und BH (der reflectierte Strahl P_2). Da nun nach Construction $AF = CE$, und da die beiden rechtwinkeligen Dreiecke ACF und ACE die Hypotenuse gemeinsam haben, so ist der Winkel CAF, welchen der reflectierte Strahl mit MN bildet, gleich dem Winkel ACE, d. h. demjenigen, welchen die auffallenden Lichtstrahlen mit derselben Geraden einschließen. Die gleiche Betrachtung gilt auch für den Strahl BH, d. h. die vorher parallelen Strahlen sind es auch nach der Reflexion, und ihre gemeinsame Strahlenfront CHF bildet denselben Winkel mit MN, wie die ursprüngliche ADE, liegt aber umgekehrt gegen die Normale AL der Trennungsfläche. Nennen wir letztere Richtung das Einfallslot und den Winkel i, welchen irgendein einfallender Lichtstrahl mit derselben einschließt, seinen Incidenz- oder Einfallswinkel, ferner die Ebene durch den einfallenden Strahl und das Einfallslot (d. i. die Zeichnungsebene in Fig. 10) die Einfallsebene, endlich den Winkel, welchen der reflectierte Strahl mit dem Einfallslot bildet, den Reflexionswinkel — so lautet das Gesetz der Reflexion des Lichtes:

»Der reflectierte Strahl liegt in der Einfallsebene, und der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel«.

Wird eine reflectierende Ebene MN (Fig. 11) nicht von parallelen, sondern von divergierenden Lichtstrahlen getroffen, welche von einem näher gelegenen, Licht aussendenden Punkte, z. B. A, ausgehen, so werden sie, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen, genau so divergieren, als ob sie von einem Punkte A' kämen, welcher auf der Normale zu MN oder dessen Verlängerung ebensoweit jenseits MN liegt, als A diesseits. Dasselbe gilt von jedem andern Punkte eines leuchtenden Körpers. Da unsere Sehtätigkeit so organisiert ist, daß wir das Bild eines Körpers dahin verlegen, woher die in unser Auge divergierend gelangenden Strahlen convergieren oder zu convergieren scheinen, so wird ein nach der reflectierenden (spiegelnden) Fläche in der Richtung O blickendes Auge A an der Stelle A_1, B an der Stelle B_1 und die zwischenliegenden Punkte des Gegenstandes AB zwischen A_1 und B_1, also ein Bild desselben in A_1B_1 erblicken. Die Ebene MN ist eine Spiegelungs- oder Symmetrieebene der in Fig. 11 dargestellten Construction, d. h. das Bild A_1B_1 liegt

Fig. 11.

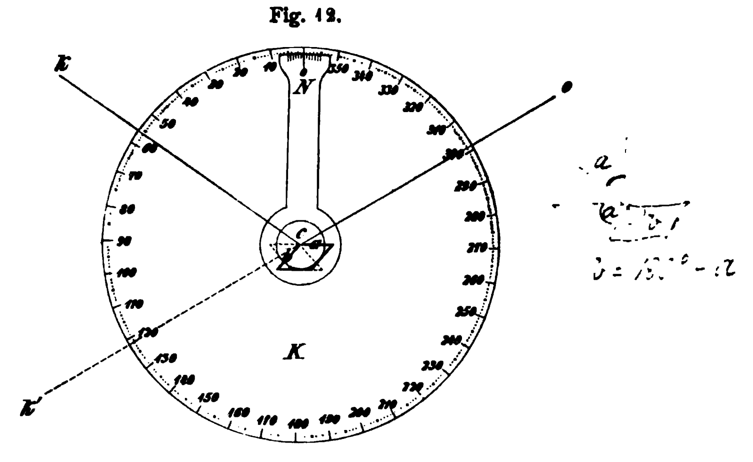


zu AB gleich und entgegengesetzt in bezug auf jene Ebene; man sagt daher, daß »AB und $A_1 B_1$ zu MN symmetrisch« seien.

Das Gesetz der Reflexion des Lichtes findet in der Krystallographie eine wichtige Anwendung, nämlich zur Bestimmung der Winkel, welche die ebenen Flächen der Krystalle miteinander bilden. Das zu diesem Zwecke dienende Instrument heißt Reflexionsgoniometer, und sein Prinzip ist folgendes:

Der geteilte Kreis K (Fig. 12) hat eine drehbare Axe, welche mit dem Zeiger oder Nonius N fest verbunden ist, so daß mittels desselben auf der Kreisteilung der Winkel abgelesen werden kann, um welchen die Axe gedreht worden ist. Diese letztere ragt vor dem Kreise hervor und trägt dort den Krystall derart befestigt, daß die Kante, in welcher sich die beiden Flächen schneiden, deren Neigungswinkel gemessen werden soll, centriert, d. h. in ihrer Verlängerung die Mitte des Kreises treffend, und justiert ist, d. h. normal zur Ebene des Kreises steht. Befinde sich von den beiden mit a und b bezeichneten Krystallflächen die erstere alsdann in derjenigen Stellung, daß dem in o befindlichen Auge das virtuelle Bild eines in der Richtung ck liegenden Gegenstandes in der Richtung ock' erscheint, und drehe man nunmehr die Axe und damit den Krystall, wobei natürlich die Kante a/b vollkommen stillsteht, bis b in eine Stellung gelangt ist, welche der früheren von a parallel ist, so befindet sich der Krystall in der Lage, welche durch den punktierten Umriß dargestellt ist, und man erblickt jetzt das Spiegelbild von k in derselben Richtung co von der zweiten Fläche reflectiert, wie es vorher von der ersten zurückgeworfen wurde. Man sieht nun aus Fig. 12, daß der Winkel, um welchen man drehen mußte, derjenige ist, unter welchem sich die beiden Ebenen a und b schneiden, daß der Flächenwinkel[1]) des Krystalls also bestimmt ist, wenn jener Drehungswinkel am Kreise abgelesen worden ist. Das Nähere über die Einrichtung und den Gebrauch des Reflexionsgoniometers wird an einer späteren Stelle gegeben werden (in der III. Abteilung).

Fig. 12.

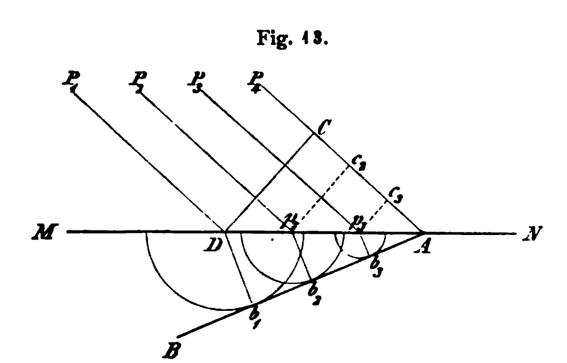


1) Man nennt diesen Winkel auch den »Normalenwinkel« (weil er gleich ist demjenigen, den die Normalen auf a und b miteinander bilden) oder schlechtweg den »Winkel« der Flächen ab. Sein Supplement ist der innere Winkel, d. i. derjenige, den die Flächen ab im Innern des Krystalls miteinander einschließen.

Brechung des Lichtes. Wie S. 18 erwähnt wurde, findet an der Grenze zweier Medien im allgemeinen eine Teilung einer an dieselbe gelangenden Wellenbewegung in eine zurückgeworfene und eine eindringende Bewegung statt. Die Richtung des in das zweite Medium eindringenden Wellenstrahles ist, wie nunmehr gezeigt werden soll, von derjenigen im ersten verschieden, sobald die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles in beiden eine verschiedene ist.

Es möge zuerst der Fall eines Lichtstrahles betrachtet werden, welcher sich in dem zweiten Medium mit geringerer Geschwindigkeit fortpflanzt, als im ersten. Seien P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 13) so nahe aneinander liegende und aus so entfernter Lichtquelle herstammende Strahlen, daß wir sie als genau parallel und das zwischen ihnen liegende Stück CD der Strahlenfront als Ebene betrachten können, so wird der Strahl P_1 in einem bestimmten Momente die Grenzebene MN in D treffen.

Fig. 13.

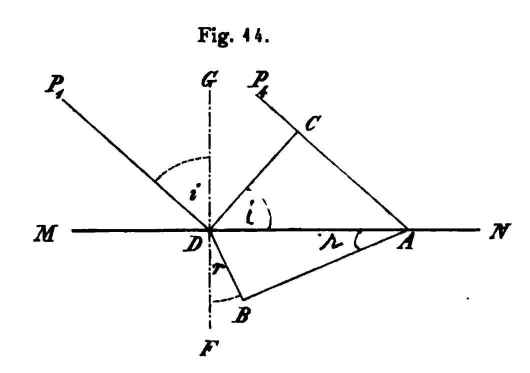


Von da ab pflanzt sich die eindringende Wellenbewegung im zweiten Medium, aber mit geringerer Geschwindigkeit, fort. Sei diese z. B. nur die Hälfte derjenigen im ersten Mittel, so wird nach Verlauf der Zeit t, welche der Strahl P_4 nötig hat, um die Strecke CA zu durchlaufen, P_1 nur so weit in den zweiten Körper eingedrungen sein, als die Hälfte der Strecke CA beträgt. P_1 wird alsdann an irgendeinem Punkte der um D mit dem Radius $Db_1 = \frac{1}{2} CA$ beschriebenen Halbkugel angelangt sein. Der zweite Strahl P_2 trifft die Grenzfläche MN etwas später, nämlich in dem Augenblicke, wo P_4 in Punkt c_2 angelangt ist; bis zum Ablauf der Zeit t bewegt sich P_4 im ersten Medium die Strecke c_2A vorwärts; der Strahl P_2, während derselben Zeit im zweiten Medium befindlich, kann nur eine halb so große Strecke zurücklegen; er wird also am Schlusse der Zeit t sich an einem Punkte der Halbkugel befinden, welche mit dem Radius $p_2b_2 = \frac{1}{2}c_2A$ um p_2 construiert ist. In gleicher Weise wird nach Verlauf von t die Strahlenfläche der von p_3 aus sich in das zweite Mittel fortpflanzenden Strahlen die Oberfläche einer Halbkugel um p_3 mit dem Radius $p_3b_3 = \frac{1}{2}c_3A$ sein. Endlich wird zu derselben Zeit diejenige des Strahles P_4 der Punkt A selbst sein. Die allgemeine Front aller zwischen P_1 und P_4 gelegenen Strahlen im zweiten Medium ist die Fläche, welche alle ihre Strahlenflächen in demselben tangiert, nämlich die durch AB senkrecht zur Zeichnungsebene von Fig. 13 gelegte Ebene. Wir würden dieselbe auch gefunden haben, wenn wir nur von einem Strahl, z. B. P_1, die Strahlenfläche construiert und von A aus die Tangente an dieselbe gezogen hätten. Die im ersten Mittel ebene

Strahlenfront CD ist also auch im zweiten noch eben, hat aber eine andere Richtung. Das letztere gilt natürlich auch von den Strahlen, den Geraden zwischen den Punkten D, p_2, p_3 usf. und den Tangierungspunkten b_1, b_2, b_3 usw.

Aus der Huyghensschen Construction ersehen wir demnach zunächst, daß die in das zweite Medium eindringende Wellenbewegung zwar in der Ebene, in welcher der einfallende Strahl und die Normale zur Grenzfläche (GF Fig. 14) liegen, d. i. in der Einfallsebene, bleibt, aus seiner Richtung aber abgelenkt, gebrochen wird. Wir können nun aus dieser Construction auch das Gesetz ableiten, nach welchem diese Brechung vor sich geht.

Fig. 14.



Die Längen CA und DB verhalten sich nach Construction wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im ersten zu der im zweiten Medium (in unserm Beispiel wie 2 : 1); nennen wir die erstere v, die zweite v', so ist:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{v}{v'}.$$

Nun ist aber der Einfallswinkel $i = P_1DG = ADC$, und der Winkel BDF, welchen der gebrochene Strahl mit dem Einfallslot bildet, der Brechungswinkel r genannt, $= \measuredangle BAD$. In den beiden rechtwinkeligen Dreiecken ACD und ABD ist:

$$\frac{AC}{AD} = \sin ADC = \sin i,$$

$$\frac{BD}{AD} = \sin BAD = \sin r.$$

Diese beiden Ausdrücke, ineinander dividiert, geben:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

und, da AC und BD sich verhalten, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}.$$

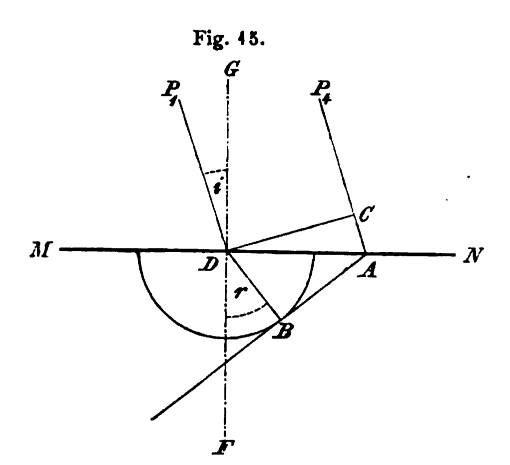
Danach kann der Einfallswinkel jeder beliebige sein, stets muß sich sein Sinus zu demjenigen des Brechungswinkels verhalten, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten zu der im zweiten

Medium. Dieses Verhältnis $\frac{v}{v'}$, der Brechungsindex[1]), Brechungsexponent oder Brechungsquotient genannt und im folgenden mit n bezeichnet, gestattet also, wenn es durch Bestimmung der Richtungen eines beliebig einfallenden und des zugehörigen gebrochenen Strahles einmal für zwei optisch isotrope Medien gefunden worden ist, zu jedem in anderer Richtung auf die Grenzfläche derselben beiden Körper auffallenden Lichtstrahle die Richtung des zugehörigen gebrochenen zu berechnen.

In dem bisher betrachteten Falle kam dem zweiten Medium die kleinere Lichtgeschwindigkeit zu, es war $v > v'$, demnach der Brechungsindex $\frac{v}{v'} > 1$. In diesem Falle ist für jeden Einfallswinkel der Brechungswinkel kleiner, als jener; der Strahl wird dem Einfallslot zu gebrochen.

Pflanzt sich dagegen der Lichtstrahl im zweiten Medium mit größerer Geschwindigkeit fort, ist $v' > v$, also $n < 1$, so wird, wie aus der ganz analogen Construction Fig. 15, welche daher einer besonderen Erläuterung nicht bedarf, hervorgeht, der abgelenkte Strahl vom Einfallslote ab gebrochen. Da demnach hier der Brechungswinkel größer als der Einfallswinkel, so muß es einen Wert von i geben, für den $r = 90^\circ$ ist. Dies ist der Fall, wenn $\sin i = n$, denn alsdann muß $\sin r = 1$ sein. Der Strahl, dessen Einfallswinkel so groß ist, daß sein Sinus genau gleich dem Brechungsexponenten, wird daher so gebrochen, daß er sich parallel der Grenzfläche fortpflanzt, also nicht in das zweite Medium eindringt. Ebensowenig kann dies gemäß dem Brechungsgesetz ein Strahl, dessen Einfallswinkel noch größer ist, denn dann wird $\frac{\sin i}{n} > 1$. Dies ist aber der Wert für den Sinus des Brechungswinkels, und da kein Winkel existiert, dessen $\sin > 1$, so gibt es in diesem Falle auch keinen Brechungswinkel.

Fig. 15.



1) Gewöhnlich bezeichnet man als Brechungsindex eines optisch isotropen festen Körpers denjenigen bei der Brechung aus Luft in denselben, also das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit in Luft zu der im Körper, welches, da in fast allen festen Körpern das Licht sich langsamer fortpflanzt als in der Luft, meist größer als 1 ist. Da der bestimmte Zahlenwert von n bei einem und demselben Stoffe für Lichtstrahlen von gleicher Farbe stets derselbe ist, so kann er unter Umständen, wo die Bestimmung anderer Eigenschaften unzulässig ist (z. B. bei geschliffenen Edelsteinen), zur Erkennung der Natur der Substanz benutzt werden.

Fig. 15 stellt die Brechung an der Grenze eines Mediums gegen ein zweites (das untere) dar, in welchem die Geschwindigkeit die doppelte von der im oberen Mittel, der Brechungsindex also $= \frac{1}{2}$ ist. Die Strahlenfront im zweiten findet man in vereinfachter Weise als Tangentialebene AB an die Wellenfläche des Strahles P_1 im unteren Medium, welche um D mit dem Radius $DB = 2AC$ beschrieben ist. DB ist demnach die Richtung des gebrochenen Strahles. In Fig. 16 ist i so groß, daß $\sin i$, d. i. $\sin CDA = \frac{AC}{AD} = n = \frac{1}{2}$, also $AD = 2AC$. Die Wellenfläche des Strahles P_1 muß also um D mit dem Radius DA beschrieben werden, sie geht also durch A; die Tangente auf den Kreis aus dem Punkte A, d. h. die Front des gebrochenen Strahles, hat die Richtung AB, der Strahl selbst, die Gerade vom Tangierungspunkt nach der Mitte, liegt also in MN; der Brechungswinkel ist, wie bereits S. 24 die Rechnung lehrte, $= 90°$. Fig. 17 endlich zeigt die Brechung bei noch größerem Einfallswinkel i unter sonst gleichen Verhältnissen. Die Wellenfläche des Strahles P_1 im zweiten Medium ist die Kugelfläche, um D mit dem Radius $DB = 2AC$ beschrieben; an diese kann von A aus keine Tangentialebene gelegt werden, weil A innerhalb derselben liegt, also gibt es auch keine Front und keinen gebrochenen Strahl im zweiten Medium.

Fig. 16.

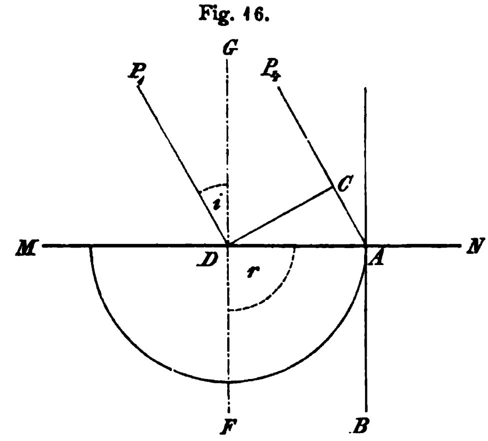
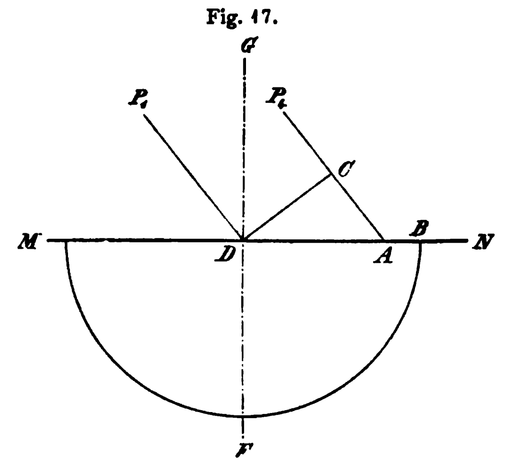


Fig. 17.



Das Brechungsgesetz lehrt folglich, daß eine Lichtbewegung an der Grenze zweier Medien stets aus ihrer Richtung abgelenkt wird; daß dieselbe, in jeder beliebigen Richtung auf die Grenze auffallend, stets in das zweite Medium eindringt, sobald ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demselben kleiner ist, als im ersten; daß dagegen im umgekehrten Fall ein Eindringen der Bewegung nur stattfinden kann, wenn der Einfallswinkel eine bestimmte Grenze nicht überschreitet; bei größerem Einfallswinkel gibt es vielmehr zu dem einfallenden Strahl keinen gebrochenen mehr, es

findet keine Teilung der Lichtbewegung mehr in eine reflectierte und eine gebrochene statt, die ganze Bewegung wird reflectiert. Daher nennt man diese Erscheinung die **totale Reflexion** des Lichtes, und den Einfallswinkel, von welchem ab dieselbe eintritt und dessen Wert nach dem Vorhergehenden unmittelbar aus dem Brechungsindex folgt, den **Grenzwinkel der totalen Reflexion.**

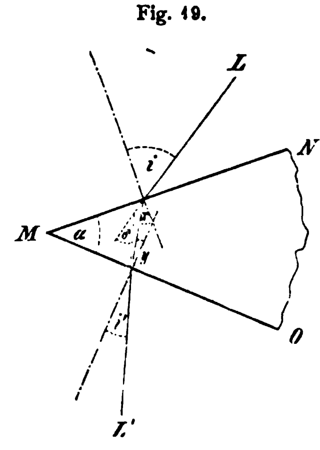
Fig. 18.

Fällt ein Lichtstrahl auf die ebene Oberfläche eines durchsichtigen, optisch isotropen Körpers, welcher eine zweite, der ersten parallele Fläche besitzt (Fig. 18), so wird er an der ersteren so gebrochen, daß $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}$, an der zweiten so, daß $\frac{\sin r}{\sin e} = \frac{v'}{v}$; denn dieses ist das Verhältnis seiner Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demjenigen Medium, aus welchem er an die zweite Grenze gelangt, zu der in demjenigen, in welches er austritt. Daraus folgt aber

$$\sin e = \sin i, \quad e = i,$$

d. h. der Lichtstrahl setzt jenseits der zweiten Grenzfläche seinen Weg in derselben Richtung fort, in welcher er auf die erste auffiel. Eine **planparallele** durchsichtige Platte, in den Weg paralleler Lichtstrahlen eingefügt, ändert deren Richtung nicht. Aus dem Vorhergehenden ersieht man zugleich, daß der Brechungsindex beim Übergang aus einem Medium in ein zweites der reciproke Wert desjenigen beim Übergang aus dem zweiten in das erste ist, daß, wenn z. B. der Brechungsindex eines Lichtstrahles, der aus Luft in Glas eintritt, $= n$, derselbe beim Austritt in Luft $= \frac{1}{n}$ ist.

Fig. 19.



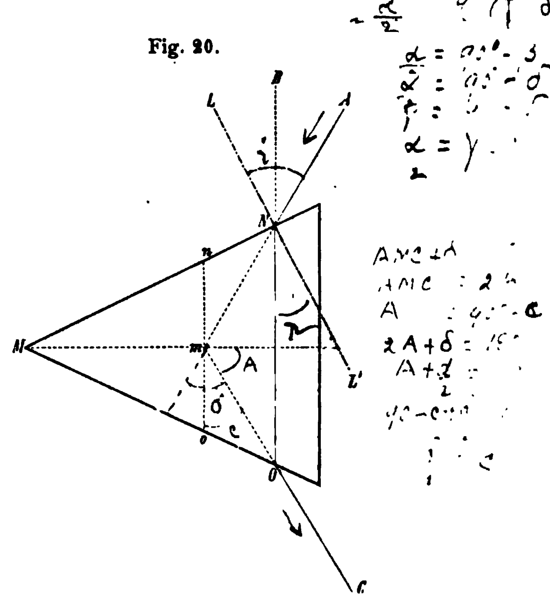
Betrachten wir nun den Fall, daß ein Lichtstrahl in einen durchsichtigen Körper ein- und wieder austritt, dessen Ein- und Austrittsflächen jedoch nicht parallel sind, so ist zunächst klar, daß dann auch der austretende Strahl dem einfallenden nicht parallel sein kann. Sei Fig. 19 der Querschnitt eines solchen von zwei geneigten Ebenen MN und MO begrenzten Körpers, ein **Prisma** genannt, so zeigt die Construction, daß ein durch denselben hindurchgehender Lichtstrahl LL' eine **Ablenkung** erfährt. Diese Ablenkung können wir berechnen, wenn wir α, den sog. **brechenden Winkel** des

Prismas, den Einfallswinkel i und den Brechungsindex n kennen. Umgekehrt kann aber ein solches Prisma, indem wir die durch dasselbe hervorgebrachte Ablenkung messen, dazu dienen, den Brechungsindex n des Lichtstrahles, bei seinem Eintritt aus Luft in die Substanz des Prismas, zu bestimmen.

Besonders einfach gestaltet sich die Lösung dieser Aufgabe, wenn der ein- und der austretende Strahl gleiche Winkel mit den beiden Flächen des Prismas einschließen, also $i = i'$, $x = y$, weil alsdann (wie sich auf verschiedenem Wege beweisen läßt) die durch das Prisma bewirkte Ablenkung δ ihren kleinsten Wert annimmt.

Dieser Fall ist dargestellt in Fig. 20, in welcher $ANOC$ den Weg des Lichtstrahles bezeichnet. Da hier $\sphericalangle MNO = \sphericalangle MON$, so ist die Richtung des Strahles im Prisma, NO, senkrecht zur Halbierenden des Prismenwinkels, also $\sphericalangle ONL' = \frac{\alpha}{2}$. Seien Nm und Om die Verlängerungen der Richtungen, welche der Strahl außerhalb des Prismas besitzt, und sei no parallel NO, so ist $\sphericalangle Omo = \sphericalangle Nmn = \frac{\delta}{2}$, wenn δ die gesamte durch das Prisma hervorgebrachte Ablenkung, d. i. das Supplement des Winkels AmC bedeutet. Verlängert man ON bis B, so ist der Einfallswinkels $i = ANL = ANB + BNL$. Nun ist aber $ANB = ONm = Nmn = \frac{\delta}{2}$,

Fig. 20.



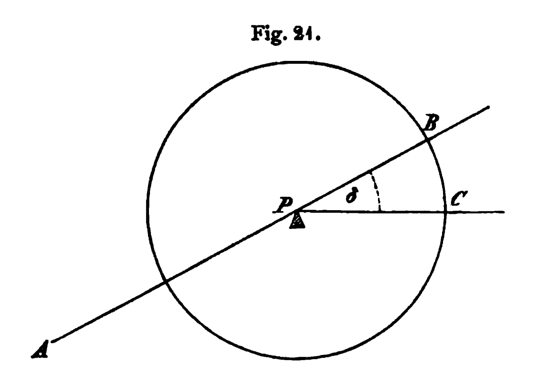
$BNL = ONL' = \frac{\alpha}{2}$, also der ganze Einfallswinkel $i = \frac{\alpha + \delta}{2}$, der Brechungswinkel r, bei der Brechung aus Luft in das Prisma, $ONL' = \frac{\alpha}{2}$, folglich der Brechungsindex:

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Diese letzte Gleichung ermöglicht nun die am meisten übliche Methode zur Bestimmung des Brechungsindex eines Lichtstrahles beim Eintritt aus Luft in einen festen durchsichtigen Körper. Man hat hierzu nur den brechenden Winkel α eines aus dem Körper bestehenden Prismas und die Minimalablenkung δ eines hindurchgehenden Lichtstrahles zu bestimmen. Das erstere geschieht mittels des Reflexionsgoniometers (s. S. 21), das letztere ebenfalls mittels eines geteilten Kreises, in dessen Centrum das Prisma justiert drehbar ist, an welchem man aber außerdem die Richtung

des aus dem Prisma austretenden Strahles, sowie diejenige des eintretenden ablesen kann. Das Schema Fig. 21 mag dies versinnlichen. Hier ist P das Centrum des Kreises, vor welchem sich die brechende Kante des Prismas befindet, $AP \parallel BP$ die Richtung des einfallenden Lichtes, PC die des gebrochenen Strahles; alsdann ist der am Kreise abzulesende Winkel BPC die Ablenkung δ. Man dreht nun das Prisma um seine brechende Kante, d. h. um die Axe des Kreises, so lange, bis δ seinen kleinsten Wert hat, also bei weiterer Drehung der Strahl PC sich wieder mehr von PB entfernen würde. Hat man diesen Wert von δ, sowie den brechenden Winkel α des Prismas gemessen, so folgt aus der Gleichung

Fig. 21.



$$\frac{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = n$$

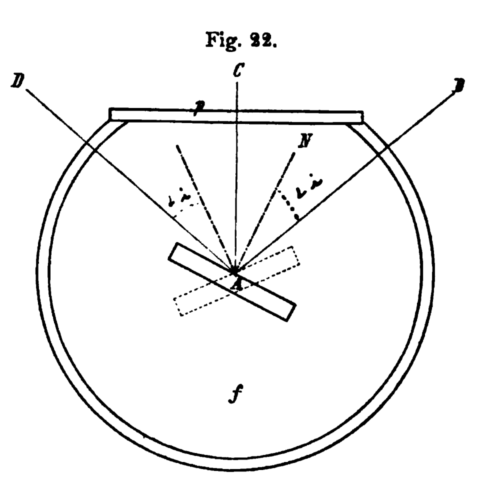
unmittelbar der gesuchte Brechungsindex. Das Nähere über die praktischen Manipulationen bei einer derartigen Messung muß einer späteren Stelle vorbehalten bleiben (s. III. Abt.).

Die vorstehend beschriebene Methode zur Bestimmung des Brechungsindex ist die genaueste, erfordert aber ein sorgfältig geschliffenes Prisma von einer gewissen Größe. Es ist jedoch auch möglich, mit Hilfe einer kleinen Platte eines durchsichtigen Körpers ebenfalls den Brechungsindex desselben zu bestimmen, und zwar nach zwei verschiedenen Methoden.

Die erste dieser Methoden beruht auf dem Gesetze der totalen Reflexion (S. 26) und besteht nach der Form, welche ihr von Kohlrausch gegeben wurde, in einer Messung des Grenzwinkels der totalen Reflexion auf folgendem Wege: Sei f (Fig. 22) eine in ein cylindrisches Glasgefäß eingeschlossene Flüssigkeit, deren Brechungsindex höher sein muß, als derjenige des zu untersuchenden Körpers (um möglichst viele Substanzen nach dieser Methode untersuchen zu können, wählt man eine Flüssigkeit von sehr hoher Brechbarkeit, z. B. Bromnaphtalin). Vorn ist das Gefäß durch eine planparallele Glasplatte p abgeschlossen, vor welcher sich, senkrecht darauf gerichtet, ein kleines, auf unendliche Entfernung, also auf parallele Strahlen eingestelltes Fernrohr befindet. An einem von oben her eintauchenden, drehbaren Halter ist die Platte des zu untersuchenden Körpers so befestigt, daß die Drehungsaxe in ihre ebene Vorderfläche fällt, welche von der Seite her durch diffuses Licht beleuchtet wird. Unter den Lichtstrahlen, welche unter verschiedenen Neigungen auf diese Fläche auffallen,

befinden sich auch solche der Richtung BA, und diese seien es, welche mit der Normale der Platte AN den Winkel i, d. i. den Grenzwinkel der totalen Reflexion, bilden. Dreht man die zu untersuchende Platte genau in die in Fig. 22 gezeichnete Stellung, bei welcher die parallel AC ($CAN = BAN = i$) reflectierten Strahlen in der Mitte des Gesichtsfeldes im Fernrohr vereinigt werden, so muß die eine Hälfte von dessen Gesichtsfeld solche Strahlen empfangen, welche unter kleinerem Winkel, als i, auf die Platte auffallen und daher nur zum Tei reflectiert werden, zum Teil in jene eindringen, die andere Hälfte dagegen solche Strahlen, welche die Platte unter größerem Einfallswinkel treffen und daher mit ihrer vollen Intensität reflectiert werden; die letztere Hälfte des Gesichtsfeldes muß also heller erscheinen und von der weniger hellen andern Hälfte durch eine senkrechte Grenzlinie getrennt sein, welche genau durch die Mitte geht; diese Position der Platte kann also durch Einstellung der Grenzlinie auf die Mitte des Gesichtsfeldes gefunden werden.

Fig. 22.



Läßt man nun das zerstreute Licht von der andern Seite des Glasgefäßes einfallen und dreht die Platte, bis wiederum jene Grenzlinie in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint, so befindet sich nunmehr die Platte in der punktiert angedeuteten Stellung, und die Richtung AB ist an die Stelle von AC getreten, während die dem Grenzwinkel der totalen Reflexion entsprechenden Strahlen in der Richtung DA einfallen. Der Winkel, um welchen man die Platte drehen mußte, ist offenbar $= 2i$, und man erhält somit, indem man die ausgeführte Drehung an einem Teilkreise abliest und halbiert, die Größe des Grenzwinkels der totalen Reflexion. Nach S. 24 ist nun aber der Sinus dieses Winkels gleich dem Brechungsindex, d. h. dem Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit in der Flüssigkeit, F, zur Lichtgeschwindigkeit in der Platte, v, also:

$$\sin i = \frac{F}{v}, \quad \text{folglich:} \quad v = \frac{F}{\sin i}.$$

Dividiert man beide Seiten der letzteren Gleichung in die Größe der Lichtgeschwindigkeit in Luft, welche $= V$ sei, so erhält man:

$$\frac{V}{v} = \frac{V}{F} \sin i.$$

$\frac{V}{F}$, das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in Luft und Flüssigkeit, ist aber der Brechungsindex der letzteren, welchen man mit Hilfe eines mit

der Flüssigkeit angefüllten Hohlprismas nach der zuerst angegebenen Methode der Minimalablenkung bestimmen kann. Sei derselbe für die betreffende Flüssigkeit ein für allemal bestimmt und $= \mu$, so ist

$$\mu \sin i = \frac{V}{v}.$$

Der Quotient $\frac{V}{v}$, das Verhältnis von Lichtgeschwindigkeit in der Luft und in der Platte, ist aber der gesuchte Brechungsindex der letzteren, den man also findet, indem man den Sinus des gemessenen Grenzwinkels der totalen Reflexion multipliciert mit dem Brechungsexponenten der angewandten Flüssigkeit.

Statt einer Flüssigkeit kann auch ein durchsichtiger, optisch isotroper, fester Körper von höherer Brechbarkeit, als der zu untersuchende, benutzt werden — und dies hat für die Genauigkeit der Bestimmung einen großen Vorteil. Der Brechungsindex aller Substanzen ändert sich nämlich mit der Temperatur, und diese Änderung ist sehr beträchtlich bei den Flüssigkeiten, daher bei der soeben beschriebenen Methode eine nicht zu vermeidende Temperaturerhöhung das Resultat merklich beeinflußt, während die Änderungen bei den festen Körpern sehr viel geringer sind. Zudem ist es möglich, homogene Gläser herzustellen, deren Brechungsindex 1,92 beträgt, also größer ist, als derjenige der meisten andern Substanzen. Diese und andere Vorteile machen das von Abbe und Czapski construierte Refractometer besonders geeignet zur Bestimmung der Brechungsindices der Krystalle; dem genannten Instrument liegt folgendes Princip zugrunde:

Die Platte P (Fig. 23) des zu untersuchenden Körpers wird mit ihrer ebenen Fläche auf die ebene Oberfläche einer aus dem stark brechenden Glase bestehenden Halbkugel gelegt und durch eine sehr dünne planparallele Schicht einer stark brechenden Flüssigkeit der vollkommene Contact der beiden Ebenen hervorgebracht. ON sei die Normale der Trennungsfläche, NOJ bzw. NOJ' der Grenzwinkel der totalen Reflexion. Fallen nun von unten rechts her Lichtstrahlen, wie sie durch die radialen Geraden in der Figur angedeutet sind, teils unter größerem, teils unter kleinerem Winkel ein, so werden die ersteren total reflectiert, die unter kleinerem Winkel auftreffenden nur teilweise, was in der Figur durch Punktierung der Linien angedeutet ist. Infolgedessen wird in einem auf Unendlich eingestellten Fernrohre, dessen Axe in die Richtung OJ gebracht wird, die linke Hälfte des Gesichtsfeldes hell, die rechte weniger hell erscheinen, d. h. eine senkrechte Grenze durch die Mitte des Gesichtsfeldes gehen. Da eine Ablenkung von Strahlen, welche parallel einem Radius sind, die Kugeloberfläche also senkrecht durchsetzen, nicht stattfindet, so gibt die Ablesung der Stellung des

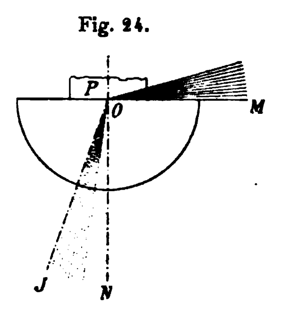
Fig. 23.

P J N J'

Fernrohres an einem Teilkreis, dessen Nullpunkt dem Radius ON entspricht, direct den Grenzwinkel der totalen Reflexion.

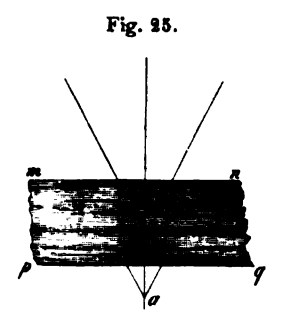
Noch schärfer ist die Einstellung der Grenze bei einem Verfahren, für welches es erforderlich ist, daß die auf die Halbkugel aufgelegte Platte seitlich den Eintritt von Licht gestattet, am besten, wenn sie kreisförmig und durch eine polierte Cylinderfläche abgeschlossen ist, so daß ihr Querschnitt die in Fig. 24 dargestellte Form hat (die Oberseite kann matt oder sonstwie beschaffen sein). Würde man nun Lichtstrahlen von links unten in JO benachbarten Richtungen auf die Halbkugel fallen lassen, so würden die genau parallel JO einfallenden sich in der Grenzebene, also parallel OM, fortpflanzen, die innerhalb des Winkels JON einfallenden, welche in der Figur punktiert angegeben sind, die Platte durch die Seitenfläche verlassen. Denken wir uns nun diese optische Construction umgekehrt (s. S. 10), d. h. die Strahlen durch die Cylinderfläche rechts von oben eintretend, so gehört zu dem streifend einfallenden Strahl MO der sich parallel OJ fortpflanzende Strahl, zu den darüber folgenden die punktiert dargestellten, daher die rechte Hälfte des Gesichtsfeldes in dem auf JO gerichteten Fernrohr so beleuchtet erscheint, wie im vorigen Falle (S. 30). Wird nun dafür gesorgt, daß von unterhalb der Ebene OM gar kein Licht einfallen kann, so erscheint die linke Hälfte des Gesichtsfeldes absolut dunkel und die Grenze daher viel schärfer, als vorher. Dieses Verfahren, welches man das der streifenden Incidenz nennt, kann man natürlich auch bei dem Kohlrauschschen Totalreflectometer anwenden.

Fig. 24.



Endlich kann man auch das Mikroskop zur Bestimmung von Brechungsindices verwenden. Eine solche Methode wurde bereits im 18. Jahrhundert von dem Herzog von Chaulnes angegeben und beruht darauf, daß die Brennweite eines Mikroskops sich verändert, wenn zwischen das Objectiv und den Brennpunkt eine durchsichtige planparallele Platte eingeschoben wird. Wie Fig. 25 zeigt, scheinen alsdann die Strahlen von einem Punkte a' herzukommen, während sie in Wirklichkeit von a ausgehen. Wenn man also irgendein Object im Mikroskop scharf eingestellt hatte und nunmehr die Platte über demselben einschiebt, so muß man die Entfernung des Mikroskops vom Object um eine gewisse Größe ändern, um das letztere wieder scharf zu sehen; durch eine Teilung an der Feinstellschraube des Mikroskops kann man diese Größe sehr genau messen. Zwischen d, der Änderung der Brennweite des Objectivs, der Dicke e

Fig. 25.



der eingefügten Platte und deren Brechungsexponenten n existiert folgende Beziehung:

$$n = \frac{e}{e - d},$$

aus welcher man somit nach Bestimmung von e und d den Brechungsindex berechnen kann.

Eine andere Methode, welche auf der Totalreflexion des Lichtes beruht, verdankt man Becke. Wenn im Gesichtsfelde des Mikroskops zwei durchsichtige Körper aneinander grenzen, von denen einer seiner Brechbarkeit nach bekannt ist, und wenn der Beleuchtungskegel des Mikroskops bis zum Grenzwinkel der totalen Reflexion des stärker brechenden Körpers eingeengt wird, so zeigt dieser einen hellen Rand, wenn man das Mikroskop auf die Oberseite der Grenze einstellt, während der helle Rand im schwächer brechenden Medium erscheint, wenn man das Mikroskop senkt. Man kann so noch sehr kleine Unterschiede der Brechbarkeit nachweisen und mit Hilfe einer Scala von Substanzen mit bekannten Brechungsindices diejenigen eines zu untersuchenden Körpers bestimmen.

Die nähere Beschreibung aller vorerwähnten Methoden und Apparate wird in der III. Abteilung gegeben werden.

Bestimmt man auf einem der angegebenen Wege den Brechungsindex eines optisch isotropen Körpers für einen Lichtstrahl einer gewissen Farbe, ferner für einen Strahl einer andern Farbe, so findet man beide verschieden. Damit übereinstimmend sieht man, daß ein Strahl weißen Lichtes durch ein Prisma zerlegt wird in Strahlen verschiedener Farbe, welche sämtlich eine ungleiche Ablenkung in demselben erfahren. Da diese Farben und ihre Reihenfolge, der Ablenkung nach, im allgemeinen bei verschiedenen Substanzen des Prismas die gleichen sind, so können sie nicht durch das letztere hervorgebracht worden sein, sondern müssen schon im einfallenden weißen Lichte präexistiert haben. Es ist demnach anzunehmen, daß das sogenannte weiße Licht aus den verschiedenen, durch die Brechung zu einem Spectrum zerstreuten (dispergierten) Farben bestehe. In der Tat vermögen wir durch ein umgekehrt gestelltes gleichartiges Prisma dieselben wieder sämtlich zu vereinigen, und alsdann machen sie auf unser Auge wieder den Eindruck des Weiß. Das Farbenspectrum, welches das weiße Licht durch ein Prisma liefert, hat eine größere Ausdehnung, wenn der brechende Winkel des Prismas größer ist, da die Ablenkung jeder Farbe mit dem Werte jenes Winkels wächst, also auch der Abstand der wenigst brechbaren Strahlen im Spectrum von den am stärksten brechbaren. Die Ausdehnung desselben hängt aber außerdem noch ab von dem Dispersionsvermögen, d. h. von der Zerstreuungskraft für die verschiedenen Farben, welche die Substanz des Prismas besitzt.

Die Erfahrung lehrt demnach, daß der Brechungsindex sich nicht nur mit der Substanz, sondern auch mit der Farbe, d. h. mit der Schwingungsdauer und folglich mit der Wellenlänge des Lichtes, ändert. Die genaue

theoretische Herleitung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer jeden Wellenbewegung liefert denn auch eine Abhängigkeit derselben von der Wellenlänge der Bewegung. Diese Abhängigkeit ist für den Brechungsindex sehr angenähert ausgedrückt durch die Formel (von Cauchy):

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

in welcher A und B für eine und dieselbe Substanz Constante sind, λ die Wellenlänge bedeutet. Wenn man demnach für zwei Farben, deren Wellenlängen λ_1 und λ_2 sind, die Brechungsindices bestimmt hat, so kann man mittels obiger Formel A und B (indem man jene Werte einsetzt und die beiden Gleichungen nach A und B auflöst) berechnen und kennt alsdann für jede beliebige Farbe mit anderem λ das zugehörige n. Aus dieser Dispersionsformel sieht man, daß der Brechungsindex, also auch die Ablenkung, um so kleiner wird, je größer die Wellenlänge des gebrochenen Lichtes ist. Da nach früherem das Rot unter den Farben des Spectrums die größte Wellenlänge hat, so ist dieses die am wenigstens abgelenkte Farbe; stärker abgelenkt sind Orange, Gelb, Grün, Blau, und die am weitesten abgelenkte Farbe des ganzen Spectrums ist Violett. Dieses letzte besteht also aus Schwingungen von der kleinsten Wellenlänge, welche noch als Licht wahrgenommen werden können. Betrachten wir ein solches Farbenspectrum, wie es z. B. durch ein Prisma von Glas erzeugt wird (s. Taf. I, Fig. 1), so sehen wir, daß jede der soeben genannten Farben noch einen bestimmten Raum in der Breite einnimmt, also noch Strahlen enthält, deren Ablenkung und somit deren Wellenlänge noch zwischen gewissen Grenzen verschieden ist. Hiernach kann eine genaue Bestimmung des Brechungsindex für eine Farbe, z. B. für Gelb, überhaupt nicht vorgenommen werden, sondern nur für die Strahlen von einer bestimmten Wellenlänge unter allen denen, welche zum Gelb gehören, welche also nur an einer bestimmten Stelle im Gelb des Spectrums erscheinen. Solches Licht, welches nur aus Schwingungen von einer und derselben Wellenlänge besteht, nennt man einfarbig, homogen oder monochromatisch. Man kann solches auf verschiedene Arten erhalten.

1. Einfarbig ist das Licht, welches gewisse Metalldämpfe in glühendem Zustande aussenden. Läßt man z. B. festes schwefelsaures Lithium, Natrium oder Thallium, an einen dünnen Platindraht angeschmolzen, in einer nicht leuchtenden Gasflamme (eines Bunsenschen Brenners) verdampfen, so sendet diese im ersten Falle monochromatisches rotes Licht mit der Wellenlänge (in Luft) 0,000 670 mm, im zweiten gelbes ($\lambda = 0,000\,589$ mm), im dritten grünes Licht ($\lambda = 0,000\,535$ mm) aus, und das Licht solcher gefärbter Flammen ist das bequemste Hilfsmittel zur Bestimmung des Brechungsindex eines Körpers für verschiedene Farben.

2. Läßt man die Entladung der Elektricität in einer mit Wasserstoff gefüllten sog. Geißlerschen Röhre stattfinden, so erhält man Licht, welches nur aus drei homogenen Farben ($\lambda = 0,000\,656$; $0,000\,486$; $0,000\,434$ mm)

gemischt ist und daher bei der Zerlegung durch ein Prisma kein continuierliches Farbenspectrum, sondern nur drei helle Linien, eine rote und zwei blaue, zeigt, welche zu genauen Einstellungen benutzt werden können. Das sog. Linienspectrum des Wasserstoffs kann daher mit Vorteil bei der Messung des Brechungsindex eines Prismas benutzt werden, wenn der elektrische Strom eines Inductionsapparates zur Verfügung steht.

3. Das Sonnenlicht enthält nicht alle zwischen dem äußersten Rot und äußersten Violett befindlichen Farben, wie sie z. B. das einer weißen Flamme, durch ein Prisma zerlegt, zeigt, sondern gewisse Lichtarten werden beim Durchgang durch die äußere Dampfhülle der Sonne vernichtet. An den diesen Lichtarten entsprechenden Stellen des hellen Spectrums erscheinen bei geeigneter Hervorbringung desselben demnach äußerst schmale dunkle Lücken (die sog. Fraunhoferschen Linien), wodurch also bestimmte Stellen im Spectrum scharf markiert sind, und für diese alsdann die Ablenkung und somit der Brechungsindex des Prismas sehr genau gemessen werden kann. Die wichtigsten dieser Linien sind mit der üblichen Buchstabenbezeichnung und Angabe ihrer Wellenlängen (in Millionstel Millimetern, $\mu\mu$) in Fig. 1 Taf. I eingetragen. Mehrere derselben liegen an Stellen, an denen sich helle Linien des Emissionsspectrums glühender Gase und Dämpfe befinden (Natrium $= D$, Wasserstoff $= C, F, G$).

4. Angenähert einfarbig ist auch das Licht, wenn es durch gewisse farbige Körper hindurchgegangen ist, z. B. durch rotes Glas, welches außer Rot alle übrigen Lichtarten vernichtet; doch haben die hindurchgehenden Strahlen noch merklich verschiedene Wellenlängen, daher sie im Spectrum nicht an einer einzigen Stelle, sondern innerhalb eines Streifens von einiger Breite auftreten und somit zu genauen Messungen der Ablenkung nicht geeignet sind.

Durch die Bestimmung der Brechungsindices fester durchsichtiger Körper an der Grenze gegen Luft findet man, wie schon erwähnt, daß die Lichtgeschwindigkeit in denselben im allgemeinen geringer ist, als in der Luft, daß also der Brechungsquotient aus Luft in einen solchen Körper größer als 1 ist; bei der großen Mehrzahl liegt er zwischen den Grenzen 1,4 und 1,7, doch gibt es auch Substanzen mit beträchtlich höherem Brechungsindex[1]).

---

1) Z. B. ist der Brechungsindex des Diamanten:

$$n = 2,4135 \text{ für Rot,}$$
$$= 2,4195 \text{ » Gelb,}$$
$$= 2,4278 \text{ » Grün.}$$

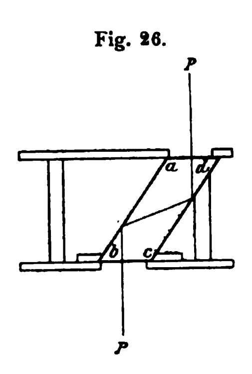
Für diesen Körper ist also der Brechungsindex beim Austritt aus demselben in Luft etwa $\frac{1}{2,4}$, d. i. ungefähr der Sinus von 25°, daher zu einem Lichtstrahl, welcher sich im Innern eines Diamanten fortpflanzt und eine Grenzfläche unter einem größeren Einfallswinkel, als 25°, trifft, kein gebrochener mehr existieren kann; ein solcher wird demnach **total reflectiert**, und wegen des hohen Brechungsindex ist hier der Grenzwinkel der totalen

Polarisation des Lichtes durch Reflexion und Brechung. Bei der Reflexion des Lichtes findet insofern eine Änderung seiner Beschaffenheit statt, als von einem Strahle gewöhnlichen Lichtes, welcher nach S. 12 Schwingungen in allen möglichen Azimuthen enthält, vorzugsweise die zur Einfallsebene senkrechten Schwingungen zurückgeworfen werden. Dies findet namentlich unter einem bestimmten Einfallswinkel statt, daher man durch Reflexion unter diesem Winkel, dem sog. »Polarisationswinkel«, vorherrschend geradlinig polarisiertes Licht erhält. Man kann letzteres noch vollständiger polarisieren, wenn man dasselbe von einer Anzahl aufeinander gelegter dünner Glasplatten reflectieren läßt, weil dann an jeder einzelnen Platte Reflexion des durch die oberen eingedrungenen Lichtes und Polarisation desselben eintritt. Ein solcher »Glasplattensatz« bietet daher ein sehr bequemes Mittel dar, aus gewöhnlichem Lichte durch Reflexion unter dem Polarisationswinkel geradlinig polarisiertes herzustellen, dessen Polarisationsebene (s. S. 11) der Einfallsebene parallel ist.

Bei der Brechung erleidet das gewöhnliche Licht ebenfalls in geringem Grade Polarisation, hier aber sind es nicht die senkrecht zur Einfallsebene, sondern die in der Einfallsebene schwingenden Strahlen, welche besonders bevorzugt werden.

In dem speciellen Falle der totalen Reflexion sind beide Erscheinungen vereinigt, und daher findet eine Polarisation des gewöhnlichen Lichtes nicht statt. Dagegen wird ein geradlinig polarisierter Lichtstrahl in zwei zueinander senkrechte Schwingungen zerlegt, deren eine in der Einfallsebene, deren andere in der dazu senkrechten Ebene liegt; gleichzeitig erhalten beide einen Gangunterschied, welcher von der Natur des Mediums und von dem Winkel abhängt, unter welchem die Strahlen auf die totalreflectierende Fläche auffallen; die Folge davon ist, daß der auffallende, geradlinig polarisierte Strahl nach der totalen Reflexion im allgemeinen elliptische Polarisation zeigt. Bildet die Schwingungsebene des Strahles vorher 45° mit der Einfallsebene, so besitzen die beiden bei der Zerlegung entstehenden Schwingungen gleiche Amplitude; ist alsdann der bei der Totalreflexion entstehende Gangunterschied derselben $= \frac{1}{4}\lambda$, so muß nach S. 14 durch ihre Zusammensetzung eine circulare Schwingung entstehen. Hierauf beruht die Verwendung eines sog. Fresnelschen Parallelepipeds *abcd* (Fig. 26) zur Erzeugung circular und elliptisch polarisierten Lichtes. Dasselbe besteht aus einer Glassorte, für welche der Gangunterschied bei der totalen Reflexion unter einem bestimmten Winkel $\frac{1}{8}\lambda$ entspricht. Läßt man daher einen Lichtstrahl *PP* so einfallen, wie es in der Figur dargestellt

Fig. 26.



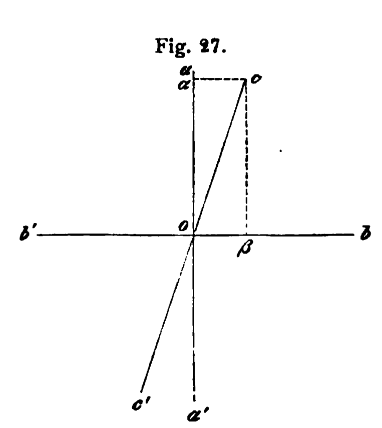
Reflexion so klein, daß ein Lichtstrahl in einem von vielen ebenen Facetten begrenzten Diamanten meist eine große Zahl totaler Reflexionen zu erleiden hat. Dies ist die Ursache der zahlreichen Lichtreflexe im Innern eines geschliffenen Diamanten.

ist, daß eine zweimalige Totalreflexion unter jenem Winkel stattfindet, so erhalten die beiden entstehenden Schwingungen $\frac{1}{4}\lambda$ Gangunterschied. Ist das eintretende Licht geradlinig polarisiert und bildet seine Schwingungsrichtung 45° mit der Einfallsebene, so tritt aus dem Fresnelschen Prisma ein circular polarisierter Strahl aus; hat die Schwingungsebene des eintretenden Strahles eine andere Richtung, so besitzen die beiden entstehenden Schwingungen ungleiche Amplitude und liefern einen elliptisch polarisierten Strahl.

Doppelbrechung des Lichtes.

Fällt auf die Oberfläche eines optisch isotropen Körpers, wie sie den Gegenstand der bisherigen Betrachtungen bildeten, ein Strahl gewöhnlichen oder geradlinig polarisierten Lichtes senkrecht auf, so erleidet er keine Brechung ($i = 0$, also auch $r = 0$) und ebensowenig, wenn er den Körper durch eine der ersten parallele Fläche verläßt. Untersuchen wir nun nach dem Austritt seine Beschaffenheit, so finden wir, daß der Strahl im ersteren Falle, wie vorher, aus gewöhnlichem Lichte besteht, im zweiten geradlinig polarisiert geblieben und auch an seiner Schwingungsrichtung nichts geändert ist. Es ist dies die natürliche Folge der Isotropie des Lichtäthers in einem solchen Körper, wie aus dem Folgenden leicht einzusehen. Es sei o (Fig. 27) der Punkt, in welchem ein Strahl gewöhnlichen Lichtes die Eintrittsfläche des optisch isotropen Körpers (diese ist in der Figur zugleich die Zeichnungsebene) senkrecht trifft. Wird ein dort befindliches Ätherteilchen in einem bestimmten Zeitmomente in Schwingungen nach aa' versetzt, so wird bei jeder folgenden Vibration die Richtung derselben um einen sehr kleinen Winkel gedreht sein, also z. B. in einem gewissen Augenblicke parallel cc' liegen. Ein Impuls, welcher das Ätherteilchen o nach c hin bewegt, wirkt ebenso, wie zwei gleichzeitig ausgeübte Impulse nach a und b, welche für sich dasselbe nach α bzw. β bewegt haben würden. Da aber in dem in Rede stehenden Medium die Schwingungen, sie mögen stattfinden in welcher Richtung sie wollen, sich gleich schnell fortpflanzen, so werden an jedem jenseits o in der Fortpflanzungsrichtung folgenden Teilchen, welches von der Bewegung ergriffen wird, die beiden Impulse nach a und b gleichzeitig anlangen und sich also zu einer einzigen Bewegung nach c zusammensetzen. Dieselbe Betrachtung gilt für jede Schwingungsrichtung; es muß demnach eine Bewegung, welche schnell nacheinander in allen Azimuthen stattfindet, nach ihrem Eindringen in ein Mittel, welches der oben angegebenen Bedingung genügt, den gleichen Wechsel ihrer Schwingungsrichtung beibehalten. So

Fig. 27.



erklärt es sich, daß ein Strahl gewöhnlichen Lichtes in einem solchen Körper sich als gewöhnlicher Lichtstrahl fortpflanzt. Daß ein geradlinig polarisierter Lichtstrahl von beliebiger Schwingungsrichtung sich in einem derartigen Medium mit unveränderter Schwingungsrichtung fortpflanzen muß, versteht sich hiernach von selbst.

Anders jedoch muß sich ein Lichtstrahl verhalten, wenn er in einen optisch anisotropen Körper, d. h. einen solchen eindringt, dessen Äther ein anisotropes Medium darstellt, in welchem sich daher verschieden gerichtete Schwingungen mit ungleicher Geschwindigkeit fortpflanzen. Die Erfahrung lehrt nun, daß in allen homogenen Medien, in denen der Äther sich nach verschiedenen Richtungen verschieden verhält, unter sämtlichen in einer Ebene stattfindenden Schwingungen diejenigen einer bestimmten Richtung sich am schnellsten, diejenigen, deren Schwingungsrichtung zu jener senkrecht steht, sich am langsamsten fortpflanzen. Ist o nun ein Ätherteilchen, welches von einer soeben in den Körper eintretenden Bewegung von der Natur des gewöhnlichen Lichtes getroffen wird, und ist in einem bestimmten Augenblicke die Schwingungsrichtung diejenige aa', welche der größten Fortpflanzungsgeschwindigkeit entspricht, in einem der folgenden cc', so wird letztere Schwingung nach obigem gleichbedeutend sein mit den Schwingungen, welche durch zwei gleichzeitige Impulse bewirkt werden, deren einer parallel aa', der andere parallel bb' (der Schwingungsrichtung der unter allen in der Ebene ab schwingenden sich am langsamsten fortpflanzenden Strahlen) stattfindet, und deren Amplituden im Verhältnis der Längen $o\alpha$ und $o\beta$ stehen. Diese beiden Schwingungen pflanzen sich aber mit verschiedener Geschwindigkeit fort, gelangen also zu verschiedenen Zeiten an eines der später in Bewegung gesetzten Ätherteilchen; sie können sich demnach dort nicht mehr zu einer Schwingung cc' zusammensetzen, sondern werden ihren Weg getrennt fortsetzen. In einem noch späteren Moment wird o nach einer Richtung bewegt werden, welche einen noch größeren Winkel mit aa' macht als die Richtung cc'; diese Bewegung wird also ebenfalls in zwei, parallel aa' und bb', zerlegt werden, in welchem Falle aber die Componente nach bb' einen größeren Wert besitzt als vorher. Die gesamte Bewegung eines gewöhnlichen Lichtststrahles, dessen Schwingungsazimuth sehr schnell wechselt, wird also in zwei Lichtstrahlen zerlegt werden, von denen der eine parallel aa' schwingt und dessen Intensität mit dem Azimuth des eintretenden Strahles wechselt, und zwar in dem Momente, wo dieses parallel aa' ist, gleich der vollen Intensität des eintretenden Lichtes ist, dann abnimmt, Null wird, sobald dieses Azimuth parallel bb' ist, dann wieder wächst, usf. Dieser Wechsel der Intensität tritt aber so schnell ein, daß der Lichtstrahl den Eindruck eines solchen von constanter mittlerer Intensität macht, also eines, dessen Intensität gleich der Hälfte von der des eintretenden Strahles ist. Der zweite Strahl, welcher durch die Zerlegung entsteht und dessen Schwingungen parallel bb' stattfinden, hat in denselben Augenblicken die Intensität Null, wenn die des ersten im

Maximum ist, nimmt zu, wenn jene abnimmt, erreicht das gleiche Maximum, wenn jene gleich Null wird, usf., d. h. dieser zweite Strahl macht ebenso den Eindruck eines Strahles von der constanten Helligkeit, gleich der Hälfte derjenigen des eintretenden Strahles.

Beim Eintritt eines gewöhnlichen Lichtstrahles in derartig anisotropen Äther entstehen also aus jenem zwei Lichtstrahlen von verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit, aber gleicher Helligkeit, deren Schwingungen in der senkrecht zum Strahl stehenden Ebene stattfinden, die des einen in der Richtung, welche der größten, die des andern in der, welche der kleinsten Lichtgeschwindigkeit der in jener Ebene schwingenden Strahlen entspricht. Wir erhalten also zwei geradlinig, und zwar senkrecht zueinander polarisierte Strahlen, deren einer eine gewisse Verzögerung gegen den andern erfährt, so daß beide beim Austritt, je nach der Verschiedenheit ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit und je nach der Länge des von ihnen in dem optisch anisotropen Körper durchlaufenen Weges, einen bestimmten Gangunterschied haben. Das gleiche ist auch der Fall, wenn das eintretende Licht geradlinig polarisiert war, nur ist dann die Helligkeit der beiden Strahlen im allgemeinen nicht gleich, sondern hängt von dem Winkel ab, welchen die Schwingungsebene des eintretenden Lichtes mit den beiden Richtungen bildet, denen parallel die Schwingungen der mit der größten und der mit der kleinsten Geschwindigkeit sich fortpflanzenden Strahlen stattfinden.

Ist die Fläche, durch welche das Licht wieder aus dem Körper austritt, der Eintrittsfläche nicht parallel, wird dasselbe also gebrochen, so wird, da die Brechung von der Lichtgeschwindigkeit in dem Körper abhängt, die Ablenkung der Strahlen eine verschiedene sein; der vorher einfache Lichtstrahl wird also in einem derartigen Medium doppelt gebrochen in zwei Strahlen von verschiedener Richtung. Man nennt daher die optisch anisotropen Substanzen auch »doppeltbrechende«, die optisch isotropen »einfachbrechende«.

Nach ihrem Verhalten gegen die Lichtstrahlen zerfallen die Krystalle in zwei Klassen, die einfachbrechenden und die doppeltbrechenden. Die ersteren haben, wie die amorphen Körper, den gleichen Brechungsindex für Strahlen einer bestimmten Farbe, in welcher Richtung dieselben auch den Krystall durchlaufen; sie verhalten sich also in optischer Beziehung ganz wie jene, und es gelten für sie alle bisherigen Betrachtungen, während die doppeltbrechenden Krystalle den Gegenstand der nun folgenden bilden sollen.

Zur Unterscheidung der einfach- und der doppeltbrechenden Krystalle kann die Beobachtung der verschiedenen Ablenkung der beiden in letzteren entstehenden Lichtstrahlen im allgemeinen nicht benutzt werden, weil die Verschiedenheit oft so gering ist, daß sie bei kleineren Krystallen der Wahrnehmung entgeht. Die Unterscheidung beider Arten von Krystallen ist jedoch auch bei den kleinsten Dimensionen und sehr schwacher Doppelbrechung möglich durch den Umstand, daß die beiden, in einem

Krystalle der zweiten Art entstehenden polarisierten Strahlen mit einem wenn auch sehr geringen Gangunterschiede austreten. Infolge dieser können dieselben zur Interferenz (s. S. 12) gebracht werden, sobald es möglich ist, dieselben nicht in zwei zueinander senkrechten Ebenen, sondern in der gleichen Ebene ihre Schwingungen ausführen zu lassen. Dies geschieht dadurch, daß man in den Gang der beiden aus dem Krystall ausgetretenen Lichtstrahlen ein Medium einführt, welches nur Strahlen einer bestimmten Schwingungsrichtung passieren läßt. Hierzu kann die Reflexion an einer Glasplatte oder noch besser an einem »Glasplattensatz« unter dem Polarisationswinkel (s. S. 35) dienen. Vollständiger wird aber dieser Zweck erreicht, wenn man das Licht durch einen doppeltbrechenden Krystall gehen läßt, in welchem der eine der beiden darin entstehenden Strahlen beseitigt wird, so daß nur linear polarisiertes Licht einer bestimmten Schwingungsrichtung hindurchgelassen wird. Dies ist z. B. der Fall bei gewissen Varietäten des Minerals Turmalin und in noch höherem Grade bei den Krystallen des schwefelsauren Jodchinins (des sog. Herapathits), welche den einen der beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen so stark absorbieren, daß sie für diesen schon bei geringer Dicke ganz undurchsichtig sind. Da aber hierbei auch der andere Strahl erheblich geschwächt und gefärbt wird, so ist zur Herstellung eines einheitlich polarisierten Strahles vorteilhafter die Anwendung eines farblosen Krystalls von starker Doppelbrechung, d. h. eines solchen, in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden senkrecht zueinander stattfindenden Schwingungen so verschieden ist, daß bei einer bestimmten Anordnung der eine derselben im Innern des Krystalls total reflectiert, der andere demnach allein durchgelassen wird. Eine derartige Vorrichtung, welche in einem späteren Abschnitte näher beschrieben werden soll, construierte zuerst Nicol aus einem Kalkspat, und nach ihm wird dieselbe »Nicolsches Prisma« oder kurz »Nicol« genannt. Mittels derselben kann man also einfallendes gewöhnliches Licht in geradlinig polarisiertes von bestimmter Schwingungsrichtung umwandeln, daher man eine solche Vorrichtung auch als »Polarisator« bezeichnet.

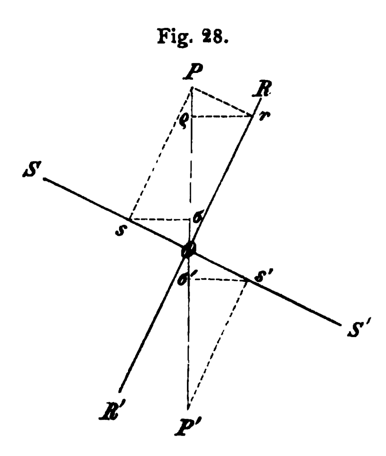
Bringen wir nun ein solches Nicolsches Prisma in den Weg der beiden aus einem doppeltbrechenden Krystall ausgetretenen Lichtstrahlen, so wird jeder derselben in dem Polarisator wieder in zwei zerlegt, von denen nur einer, und zwar nur der auf die bestimmte Schwingungsebene des Polarisators entfallende, hindurchgeht; die beiden vorher aufeinander senkrechten Schwingungen sind also gleichsam auf eine Schwingungsebene zurückgeführt.

Zur Erzeugung von Interferenzerscheinungen durch dieselben existiert aber noch eine zweite Bedingung, welche sich aus folgenden Betrachtungen ergibt:

Sei PP' (Fig. 28, S. 40) die Schwingungsrichtung eines linear polarisierten Strahles, welcher in der senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehenden Richtung in einen doppeltbrechenden Krystall eintritt und daselbst in zwei Strahlen mit den Schwingungsrichtungen RR' und SS' zerlegt wird. Ist der

Krystall genau von einer solchen Dicke, daß die beiden, sich ungleich schnell darin fortpflanzenden Strahlen bei ihrem Austritte aus demselben einen Gangunterschied von einer ganzen oder einem Vielfachen einer Wellenlänge des angewandten einfarbigen (homogenen) Lichtes besitzen, so wird ein Ätherteilchen auf der Bahn des Lichtes, sobald das letztere den Krystall verlassen hat, sich jedesmal vermöge der einen Vibrationsbewegung in demselben Augenblick von O nach r hin bewegen, in welchem die andere der beiden entstehenden Bewegungen es von O nach s hin treiben würde. Wenn nunmehr die beiden Strahlen durch einen Nicol, welcher nur Schwingungen $\parallel PP'$ hindurchläßt, auf eine Polarisationsebene zurückgeführt werden, so geht von jeder Bewegung nur die Componente $O\varrho$ und $O\sigma$, parallel PP', hindurch. Diese beiden Bewegungen müssen, da sie gleichzeitig nach derselben Seite stattfinden, sich einfach zur Summe ihrer Amplituden zusammensetzen, also mit gleichem Schwingungszustande interferieren, d. h. mit demselben Gangunterschiede, welchen sie im Krystalle erhalten hatten. Ist dagegen der Durchmesser des Krystalls so groß, daß die Verzögerung, welche der eine der beiden Strahlen gegen den andern erfährt, $\frac{1}{2}\lambda$ oder ein ungerades Vielfaches davon beträgt, so findet die Bewegung des Ätherteilchens O in dem Augenblicke, wo es vermöge der einen Schwingung nach r hin bewegt wird, vermöge der zweiten nach s' hin statt. Beide Bewegungen können dadurch zur Interferenz gebracht werden, daß sie durch einen Nicol auf gleiche Schwingungsebene reduciert werden. Steht dieser, wie vorher, so, daß er nur Schwingungen $\parallel PP'$ hindurchläßt, so finden die interferierenden Bewegungen gleichzeitig nach entgegengesetzten Seiten statt, nämlich nach $O\varrho$ und $O\sigma'$; sie interferieren also mit entgegengesetztem Schwingungszustande, d. h. ebenfalls mit demselben Gangunterschiede, mit welchem sie aus dem Krystalle austraten. Hieraus ergibt sich allgemein, daß zwei Strahlen, welche durch Doppelbrechung aus einem linear polarisierten entstehen, mit demselben Gangunterschiede, welchen sie durch den doppeltbrechenden Krystall erhalten, interferieren, sobald sie auf eine Schwingungsebene zurückgeführt werden, welche derjenigen des ersten Strahles parallel ist.

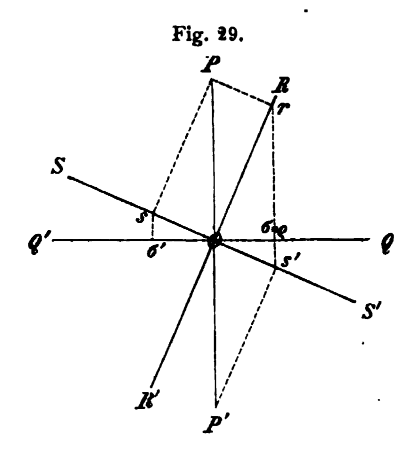
Fig. 28.



Betrachten wir jetzt den entgegengesetzten Fall, in welchem die Schwingungsebene des in den Krystall eintretenden Lichtstrahles senkrecht zu derjenigen ist, auf welche das Nicolsche Prisma die beiden Strahlen zurückführt. Ist wieder PP' (Fig. 29) parallel der Schwingungsebene des eintretenden Lichtes, und ist der Krystall so dick, daß die beiden darin entstehenden Strahlen beim Austritt λ, oder ein Vielfaches von

λ, Gangunterschied haben, so wird der eine derselben das Ätherteilchen O nach r, der andere gleichzeitig nach s hin bewegen. Ist nun aber das Nicolsche Prisma um 90° gegen seine frühere Stellung gedreht, ist seine Schwingungsebene (d. h. diejenige des von ihm durchgelassenen Lichtes) parallel QQ_1, so sind die beiden Componenten, welche zur Interferenz gelangen, $O\varrho$ und $O\sigma'$; diese liegen nach entgegengesetzten Seiten, also findet die Interferenz mit entgegengesetztem Schwingungszustande statt, während die beiden Strahlen mit gleichem Schwingungszustande aus dem Krystall ausgetreten waren. Ist dagegen der Durchmesser des Krystalls so groß, daß die beiden Strahlen beim Austritt entgegengesetzten Schwingungszustand besitzen, so sind ihre gleichzeitigen Bewegungsgrößen (s. Fig. 29) Or und Os'; werden diese auf die eine Schwingungsrichtung QQ_1 zurückgeführt, so sind ihre miteinander interferierenden gleich großen Componenten, $O\varrho$ und $O\sigma$, nach derselben Seite gelegen, also findet die Interferenz mit gleichem Schwingungszustande statt. Allgemein: Zwei Strahlen, welche durch Doppelbrechung aus einem linear polarisierten Strahle entstehen, interferieren mit entgegengesetztem Gangunterschiede, als derjenige ist, mit welchem sie aus dem doppeltbrechenden Krystalle austreten, wenn die Schwingungsebene, auf welche sie reduciert werden, senkrecht zur ursprünglichen Schwingungsebene steht.

Fig. 29.



Denken wir uns jetzt statt eines linear polarisierten Lichtstrahles einen gewöhnlichen in den Krystall eintretend, so findet in dem Momente, in welchem die Schwingungsebene desselben parallel derjenigen des zurückführenden Nicols ist, die Interferenz mit demselben Gangunterschiede statt, mit welchem die beiden Strahlen aus dem Krystalle austreten, — nach einem außerordentlich kleinen Zeitraum, während dessen sich die Schwingungsebene des gewöhnlichen Lichtes um 90° gedreht hat, mit dem entgegengesetzten, d. h. mit ihrem Gangunterschiede + oder — $\frac{1}{2}\lambda$. Infolgedessen müssen auf der Bahn des Lichtes die durch Interferenz entstehenden Maxima und Minima der Lichtintensität einander ebenso rasch folgen, als sich die Polarisationsebene des gewöhnlichen Lichtes jedesmal um einen rechten Winkel gedreht hat. Wir werden also von diesem Wechsel der Intensität ebensowenig etwas wahrnehmen, als wenn wir, wie es S. 37f. geschah, die Strahlen direct betrachtet, d. h. nicht nach dem Austritte noch durch ein Nicolsches Prisma hätten gehen lassen. Es können demnach auf diese Weise Interferenzerscheinungen nicht beobachtet werden, da an einer

bestimmten Stelle wohl momentan durch Interferenz Dunkelheit erzeugt wird, in unmeßbar kleiner Zeit darauf jedoch um so größere Helligkeit, so daß im ganzen der Eindruck eines Strahles von constanter mittlerer Helligkeit resultiert.

Hierdurch sind nunmehr die Bedingungen der Interferenz linear polarisierten Lichtes vollständig erkannt; sie lauten: Zwei linear polarisierte Strahlen interferieren nur dann, wenn sie aus einem einzigen linear polarisierten Lichtstrahle durch Doppelbrechung entstanden sind und durch ein Nicolsches Prisma auf die gleiche Polarisationsebene zurückgeführt werden.

Zur Untersuchung eines Krystalls auf seine Doppelbrechung mittels der durch die Geschwindigkeitsdifferenz der doppeltgebrochenen Strahlen verursachten Interferenz muß man demnach zwei Nicolsche Prismen anwenden, deren eines dazu dient, das gewöhnliche Licht vor dem Eintritte in den zu untersuchenden Krystall in geradlinig polarisiertes zu verwandeln, daher dieser erste Nicol im engeren Sinne des Wortes der »Polarisator« genannt wird, während der zweite das aus dem Krystalle austretende Licht zu analysieren gestattet und daher als »Analysator« bezeichnet wird.

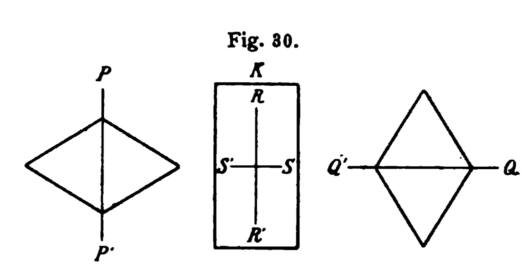
Blickt man durch zwei parallele, hintereinander befindliche Nicolsche Prismen hindurch, so werden die aus dem einen austretenden Lichtstrahlen mit derselben Schwingungsrichtung auch durch den zweiten hindurchgehen, die Helligkeit des Lichtes also keine Änderung erfahren. Dreht man aber den zweiten um die Richtung der Lichtstrahlen, so wird nur die seiner Schwingungsrichtung entsprechende Componente hindurchgelassen, und diese wird bei weiterer Drehung immer kleiner, endlich nach 90° Drehung gleich Null, weil alsdann das in den zweiten Nicol eintretende Licht genau diejenige Schwingungsrichtung besitzt, welche in demselben total reflectiert wird. Zwei derartig »gekreuzte« Nicols lassen also kein Licht durch.

Fügt man nun zwischen den beiden gekreuzten Nicols einen einfachbrechenden Krystall ein, so kann hierdurch keine Änderung hervorgebracht werden, da die Schwingungen des Lichtes in einem solchen, sie mögen stattfinden in welcher Richtung sie wollen, immer in gleicher Weise ohne Zerlegung fortgepflanzt werden. Ein einfachbrechender Krystall erscheint also zwischen gekreuzten Nicols in jeder Stellung dunkel. Diesem Versuche können auch Krystalle von mikroskopischen Dimensionen unterworfen werden, indem man unter dem Objectträger eines Mikroskops einen Polarisator anbringt und auf das Ocular einen Analysator aufsetzt. Dreht man den letzteren aus der mit dem ersten parallelen Stellung um 90°, so löscht er das von unten polarisiert in das Instrument eingetretene Licht vollständig aus, das Gesichtsfeld des Mikroskops wird dunkel und ebenso alle etwa darin befindlichen einfachbrechenden Krystalle, und in der Dunkelheit derselben kann auch keine Änderung stattfinden, wenn wir sie in ihrer Ebene drehen (wozu das zu untersuchende Präparat sich auf einem am Mikroskope angebrachten, drehbaren Objecttische befinden muß).

Ganz anders verhalten sich doppeltbrechende Krystalle.

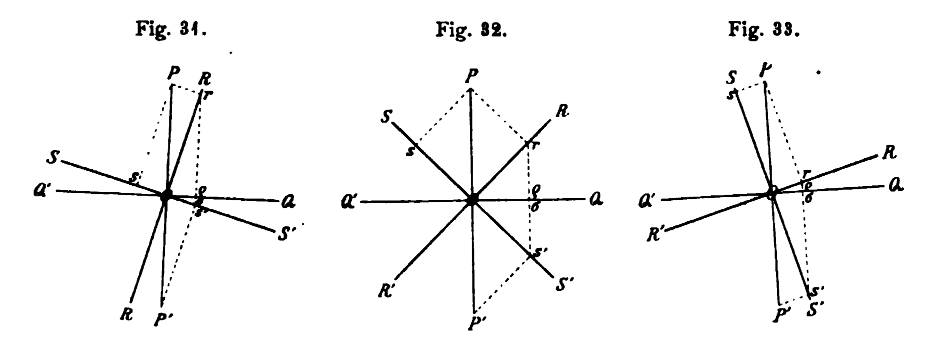
Sind die beiden gekreuzten, in Fig. 30 durch ihre Querschnitte dargestellten Nicolschen Prismen, deren eines die Schwingungen parallel PP', das andere die parallel QQ' stattfindenden hindurchläßt, hintereinander (in der Figur sind sie der Deutlichkeit halber nebeneinander gestellt) in den Weg der Lichtstrahlen eingeschaltet, und wird ein dünner doppeltbrechender Krystall K derart zwischen beide gebracht, daß die Schwingungen RR' und SS' der in demselben entstehenden Strahlen mit den von den beiden Nicols durchgelassenen parallel sind, — so findet allerdings, wie bei einem einfachbrechenden Krystall, vollständige Auslöschung des Lichtes statt; denn die parallel PP' stattfindende, in K eintretende Schwingung ist dann genau parallel RR', geht also, weil die auf die Richtung SS' entfallende Componente gleich Null ist, unverändert durch den Krystall und wird im zweiten Nicol total reflectiert. Dies ist jedoch nicht mehr der Fall, sobald wir den Krystall K durch Drehung in seiner Ebene aus obiger Stellung in eine andere bringen.

Fig. 30.



Angenommen, die Ein- und Austrittsfläche des Lichtes seien so wenig voneinander entfernt, d. h. der Krystall stelle eine so dünne planparallele Platte dar, daß die beiden senkrecht zueinander polarisierten Strahlen einer bestimmten Farbe beim Austritt aus derselben einen Gangunterschied von genau einer halben Wellenlänge erhalten haben, — so entstehen, wenn die Krystallplatte K um den Winkel POR (Fig. 31) gedreht worden ist, in

Fig. 31. Fig. 32. Fig. 33.



derselben zwei Schwingungen, welche beim Austritte gleichzeitig nach r und s' hin stattfinden, deren durch den zweiten Nicol hindurchgehende Componenten $O\varrho$ und $O\sigma$ sich also summieren. Die Platte K erscheint also jetzt erhellt, und die Helligkeit derselben hängt ab von der Größe der Componenten $O\varrho$ und $O\sigma$. Aus der Vergleichung der Figuren 31, 32, 33 geht hervor, daß diese beiden Componenten, welche stets gleich groß sind,

ihr Maximum erreichen, also auch ihre Summe am größten ist, wenn der Drehungswinkel $POR = 45^0$ (Fig. 32). Nach einer Drehung von 90^0 werden beide wieder Null; man hat alsdann den in Fig. 30 dargestellten Fall, nur sind die Richtungen RR' und SS' vertauscht. Die mit Lichtstrahlen von der betreffenden Farbe beleuchtete Krystallplatte wird also nur dann dunkel erscheinen, wenn die Schwingungsrichtungen derselben, RR' und SS', mit denjenigen der Nicols, PP' und QQ', zusammenfallen, und dies ist offenbar während einer ganzen Umdrehung viermal der Fall; in jeder andern Stellung dagegen wird sie hell, mit der Farbe des benutzten Lichtes, erscheinen — und zwar wird die Helligkeit jedesmal dann ein Maximum erreichen, wenn die Richtungen RR', SS' mit PP' und QQ' 45^0 bilden.

Wird der Krystall nicht in monochromatischem, sondern in weißem Lichte untersucht, so wird die gleiche Verzögerung des einen gegen den andern der doppeltgebrochenen Strahlen für die Schwingungen derjenigen Farben, welche eine größere Wellenlänge besitzen, noch nicht $\frac{1}{2}\lambda$ betragen, für die mit kleinerer Wellenlänge mehr als $\frac{1}{2}\lambda$; in beiden Fällen ist also das Resultat der Interferenz der beiden Componenten parallel PP' und QQ' nicht gleich ihrer Summe, sondern kleiner (vgl. S. 41). Infolge davon werden die verschiedenen Farben nach dem Durchgang durch den zweiten Nicol nicht mehr in demselben Verhältnisse der Intensität stehen, wie es vorher im weißen Lichte der Fall war; sie werden dann dem Auge nicht mehr den Eindruck von Weiß machen, sondern einen Farbeneindruck, in welchem die in bezug auf ihre Intensität bei der Interferenz begünstigte Farbe vorherrscht. Da diese Begünstigung ihr Maximum bei 45^0 erreicht, so erscheint die betreffende Farbe in dieser Stellung verhältnismäßig am reinsten.

Hat der Krystall eine andere Dicke, so wird das gleiche für eine andere Stelle im Spectrum gelten, jener wird demnach in einer andern Farbe aufgehellt erscheinen. Allgemein:

Ein dünner doppeltbrechender Krystall erscheint beim Drehen zwischen gekreuzten Nicols viermal dunkel, dazwischen hell mit einer bestimmten Farbe, welche am reinsten und hellsten ist in den vier diagonalen Stellungen.

Werden die beiden Nicolschen Prismen nicht gekreuzt, sondern parallel gestellt, so findet die Interferenz nach S. 40 nicht mit entgegengesetztem, sondern mit demselben Gangunterschiede statt, welcher im Krystalle entstand; die um $\frac{1}{2}\lambda$ oder um ungerade Vielfache davon gegeneinander verzögerten Strahlen summieren also nicht ihre Amplituden, sondern vernichten einander vollständig, — diejenigen, deren Gangunterschied eine oder mehrere ganze Wellenlängen beträgt, interferieren mit gleichem Schwingungszustande und verstärken einander. Bei der Beleuchtung mit weißem Lichte werden folglich zwischen parallelen Nicols diejenigen Farben vernichtet, welche bei gekreuzten Nicols am meisten vorherrschen, und diejenigen herrschen vor, welche im letzteren Falle die geringste Intensität besitzen. Die auf diese Art entstehende Mischfarbe nennt man die Complementärfarbe der vorigen.

Daß die Farben, welche dünne Platten doppeltbrechender Krystalle im polarisierten Lichte zeigen, wirklich Mischfarben sind, welche in der angegebenen Weise entstehen, kann man dadurch nachweisen, daß man dieselben durch ein Prisma spectral zerlegt. Man erblickt dann an Stelle derjenigen Farbe im Spectrum, welche durch die Interferenz vernichtet wird, einen dunkeln Streifen, der sich nach beiden Seiten verliert, weil auch von den benachbarten Farben nach der Interferenz nur noch eine geringe Intensität übrigbleibt. Dreht man das eine der Nicolschen Prismen um 90°, so erblickt man die größte Helligkeit da, wo vorher der dunkle Streifen auftrat, und Abnahme der Intensität des Lichtes nach beiden Seiten.

Das Auftreten einer Farbe beim Drehen eines Krystalls zwischen gekreuzten Nicols läßt aber nicht nur im allgemeinen diesen als doppeltbrechend erkennen, sondern die bestimmte, hierbei beobachtete Farbennuance gibt auch direct an, welchen Gangunterschied der eine der beiden Strahlen gegen den andern erhalten hat[1]). Man sagt nun von einer Krystallplatte, sie habe eine stärkere Doppelbrechung, als eine andere, wenn sie bei gleicher Dicke einen größeren Gangunterschied der beiden senkrecht zueinander schwingenden Strahlen hervorbringt. Hieraus ist ersichtlich, daß die beobachtete Farbennuance bei bekannter Dicke einen Schluß auf die Stärke der Doppelbrechung, oder umgekehrt bei bekannter Doppelbrechung einen Schluß auf die Dicke der Platte zu ziehen gestattet. Dieser praktischen Wichtigkeit für die Krystalloptik wegen sollen im folgenden Abschnitte die den verschiedenen Verzögerungen entsprechenden Farben, welche doppeltbrechende Krystalle im polarisierten Lichte zeigen, ausführlich betrachtet werden.

Polarisationsfarben doppeltbrechender Krystalle. Die durch Interferenz im polarisierten Lichte auftretenden Farbennuancen sind auf Tafel I in Fig. 2 dargestellt worden, und zwar entspricht jedem Farbentone der darunter in $\mu\mu$ (Millionstel Millimeter) angegebene Gangunterschied $\varDelta$ der beiden interferierenden Strahlen.

---

1) Die Abhängigkeit, in welcher die Größe dieses Gangunterschiedes von der Dicke des Krystalls und der Verschiedenheit der Brechungsindices beider Strahlen steht, ist sehr leicht einzusehen. Bezeichnet man die Dicke mit e, so ist die Zahl der Schwingungen, welche sich auf dieser Strecke e befinden, für den Strahl mit der Wellenlänge λ_1 gleich $\frac{e}{\lambda_1}$, für den Strahl mit der Wellenlänge λ_2 gleich $\frac{e}{\lambda_2}$, die Differenz beider Schwingungszahlen also $\frac{e}{\lambda_1} - \frac{e}{\lambda_2}$ und der Gangunterschied $\varDelta$ der beiden Strahlen, bezogen auf die Wellenlänge in der Luft λ_0:

$$\varDelta = \left(\frac{e}{\lambda_1} - \frac{e}{\lambda_2}\right)\lambda_0$$

oder, da die Brechungsindices der beiden Strahlen gegen Luft $n_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ bzw. $n_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda_2}$:

$$\varDelta = e(n_1 - n_2).$$

Die Wellenlängen der verschiedenen Farben des sichtbaren Spectrums (s. Fig. 1 auf derselben Tafel) liegen zwischen den Grenzen

etwa 0,000 380 und 0,000 775 mm,

da die noch innerhalb des am stärksten brechbaren Violett liegenden Linien H die Wellenlängen 0,000 393 und 0,000 397 besitzen, während für die noch innerhalb des am wenigsten brechbaren Rot fallende Linie A $\lambda = 0{,}000\,760$ ist.

Denken wir uns nun eine doppeltbrechende Krystallplatte so dünn, bzw. einer so schwach doppeltbrechenden Substanz angehörig, daß die in ihr entstehenden beiden Strahlen nur einen Gangunterschied im Betrage eines sehr kleinen Bruchteils der Wellenlänge des äußersten Rot erhalten, so ist dieser auch ein, wenn auch nicht so geringer, doch immer noch kleiner Bruchteil von der Wellenlänge des äußersten Violett; die Strahlen aller Farben treten also nahezu mit gleichem Schwingungszustande aus dem Krystalle und werden daher zwischen gekreuzten Nicols (vgl. S. 41) nahezu vollständig vernichtet. Eine derartige Krystallplatte wird daher nur eine sehr geringe Aufhellung zeigen, und zwar einen grauen Farbenton, welcher natürlich mit steigender Verzögerung heller wird. Erst wenn diese etwa 0,000 100 mm beträgt, beginnt eine schwach violette Nuance (Lavendelgrau), denn diese Größe ist etwa $\frac{1}{8}\lambda$ des äußersten Rot und etwa $\frac{1}{4}\lambda$ des äußersten Violett; für letztere Farbe nähert sich also der Gangunterschied bedeutend mehr dem Betrage einer halben Wellenlänge, bei welchem zwischen gekreuzten Nicols die Interferenz mit gleichem Schwingungszustande stattfindet, also größte Helligkeit entsteht. Das Violett muß also relativ etwas mehr Helligkeit besitzen, als die übrigen Farben des Weiß; da aber seine absolute Intensität im Spectrum eine sehr geringe ist, so unterscheidet sich der gesamte Farbeneindruck so wenig von dem eines Weiß von geringerer Helligkeit, d. h. von reinem Hellgrau, daß der Unterschied im Bilde kaum wiederzugeben ist. Mit zunehmendem Betrage der Verzögerung gilt die gleiche Betrachtung für Farben mit größerer Wellenlänge, daher weiterhin Blau, dann Grün, dann Gelb in der durch Mischung entstehenden Farbennuance etwas mehr vorherrschen, aber, da natürlich nun alle Farben größere Intensität erhalten und die weniger brechbaren im allgemeinen heller sind, anfangs nur in geringem Grade, so daß die fortgesetzt heller werdende Mischfarbe sich immer noch wenig von Weiß unterscheidet[1]), bis endlich bei einem Gangunterschiede von etwa 0,000 300 mm ein lebhaftes Gelb sichtbar wird. Diese Größe ist nämlich, wie aus dem Sonnenspectrum Fig. 1 zu ersehen, gleich $\frac{1}{2}\lambda$ eines sehr intensiven Gelb, dieses interferiert also zwischen gekreuzten Nicols mit gleichem Schwingungszustande; das äußerste Violett wird, da jene Größe fast eine ganze Wellenlänge desselben beträgt, nahezu vernichtet, während Grün und Rot eine ungefähr gleiche

1) Beim Übergang von Bläulichweiß zu Gelblichweiß erscheint sie infolge der Intensitätsverhältnisse der sie zusammensetzenden Farben sogar rein weiß.

Schwächung durch die Interferenz erfahren; die Mischung dieser letzteren, sog. complementären Farben gibt aber Weiß, so daß durch sie die gelbe Färbung des Gesamteindruckes nur insofern beeinflußt wird, als ein helleres Gelb resultiert. Mit steigender Dicke oder zunehmender Doppelbrechung der Krystallplatte geht das Gelb über in Orange und Rot, welches am lebhaftesten ist, wenn die Verzögerung des einen Strahles gegen den andern etwa 0,000 530 mm beträgt, denn diese Größe ist gleich der Wellenlänge für Grün in der Nähe der Linie E; die letztere Farbe wird daher zwischen gekreuzten Nicols vollständig vernichtet, während die roten Strahlen noch mit etwa $\frac{2}{3}\lambda$, die violetten dagegen mit fast $\frac{3}{2}\lambda$, also nahezu mit demjenigen Gangunterschiede interferieren, welcher die Summe der Helligkeiten der beiden sich zusammensetzenden Strahlen ergibt. Da nun in die Zusammensetzung des weißen Lichtes die roten Strahlen mit einer viel größeren Intensität eintreten, als die violetten, so ist der Gesamteindruck ein intensives Rot, dessen Zerlegung durch ein Prisma ein Spectrum mit einem dunkeln Streifen im Grün liefert[1]). Diese Farbe geht nun weiterhin in Violett über, welches am lebhaftesten ist, wenn die Verzögerung 0,000 575 mm beträgt, weil dies nahezu gleich $\frac{3}{2}\lambda$ des hellsten Violett im Spectrum ist und alsdann gerade das intensivste Gelb (in der Nähe der Linie D) vernichtet wird. Die dieser Verzögerung entsprechende Interferenzfarbe wird als »sensibles Violett« bezeichnet, weil eine kleine Änderung des Gangunterschiedes in dem einen oder andern Sinne eine verhältnismäßig große Änderung der Farbe nach Rot oder Blau hin hervorbringt. Da von nun an die Farben sich gewissermaßen wiederholen, so bezeichnet man die bisher betrachteten als Farben erster Ordnung; diese sind also: Grau, Lavendelgrau, Bläulichgrau, Grünlichweiß, Gelbweiß, Gelb I. Ordnung, Orange I. O., Rot I. O. und sensibles Violett I. O.

Wie man aus der Farbentafel ersieht, wechseln die Nuancen in der gesamten letzten Partie der Farben I. Ordnung weitaus am raschesten mit der Verzögerung; wenn man daher eine dünne Krystallplatte, die das Rot oder Violett I. O. liefert, in den Gang der Lichtstrahlen, welche ein mit zwei gekreuzten Nicols versehenes Mikroskop durchlaufen, einfügt, und es befinden sich im Gesichtsfelde desselben Krystalle von sehr schwacher Doppelbrechung, so werden diese deutlich in einer andern Farbe erscheinen, als das übrige Gesichtsfeld, weil die von ihnen bewirkte Hinzufügung oder Wegnahme eines kleinen Gangunterschiedes sogleich eine merkliche Änderung des Farbentones hervorbringt. Hierauf beruht die Verwendung derartiger dünner Krystallplatten (z. B. von Gips) zur Erkennung äußerst schwacher

1) Bei parallelen Nicols erscheint ein lebhaftes Grün als Complementärfarbe, deren spectrale Zerlegung natürlich ein Lichtmaximum im Grün ($\lambda = 580$) zeigt, während die Helligkeit nach beiden Seiten abnimmt. Ein dunkler Streifen ist aber bei dieser Stellung der Nicols nicht sichtbar, weil vollständige Vernichtung nur stattfinden würde für $\lambda = 265 = \frac{1}{2} \cdot 530$ und $\lambda = 795 = \frac{3}{2} \cdot 530$, und derartige Wellenlängen außerhalb des sichtbaren Spectrums fallen.

Doppelbrechung (Näheres darüber in dem späteren Abschnitte über die Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung).

Bei weiter steigender Dicke der betrachteten Krystallplatte geht das Violett allmählich in Blau über, welches am reinsten erscheint bei einem Gangunterschiede von 0,000 660 mm, denn diese Größe ist gleich $\frac{3}{2}\lambda$ des hellsten Blau im Spectrum, aber auch gleich λ des hellen Orange; also ist das erstere nach der Interferenz im Maximum, während Orange und Gelb, welche die Farbenmischung grün erscheinen lassen würden, im Minimum sind. Erst bei einer Verzögerung der beiden Strahlen um ungefähr 0,000 800 mm tritt lebhaftes Grün auf, denn dieser Wert entspricht $\frac{3}{2}\lambda$ des hellsten Grün (bei E), ferner nahezu einer ganzen Wellenlänge für das äußerste Rot, endlich der doppelten Wellenlänge des Violett, so daß die an beiden Enden des Spectrums gelegenen Farben durch die Interferenz vernichtet werden. Zwischen 850 und 900 $\mu\mu$ rückt das Maximum der Intensität nach Gelb und Orange hin, daher diese Farben vorwalten, und weiterhin geht das letztere immer mehr in Rot über, bis endlich bei einer Verzögerung von 0,001 060 mm (d. i. $2 \times 0,000\,530$ mm, derjenigen des Rot I. O.) das sog. Rot zweiter Ordnung am reinsten erscheint. Die angegebene Größe ist nämlich gleich 2λ für Grün in der Nähe der Linie E, so daß dieses vollständig vernichtet wird, ferner gleich $\frac{5}{2}\lambda$ für Indigo von der Wellenlänge 424 und gleich $\frac{3}{2}\lambda$ für Rot mit der Wellenlänge 700; da nun letzteres erheblich lichtstärker ist als Indigo, so erscheint ein verhältnismäßig reines Rot. Dieses liefert, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich, bei der spectralen Zerlegung, wie das Rot I. O., nur einen dunkeln Streifen im Grün; bei parallelen Nicols dagegen, wo die größte Helligkeit im Grün liegt, treten zwei dunkle Streifen, der eine im Indigo, der andere im Rot auf, so daß beide Enden des Spectrums verdunkelt erscheinen, was beim Rot I. O. nicht der Fall ist (s. Anmerk. [1]) auf vor. S.).

Wie leicht einzusehen, geht bei weiterer Zunahme der Verzögerung das Rot in Violett über und dieses von dem Gangunterschiede 0,001 130 mm an in Blau (die betreffende Übergangsfarbe wird als »sensibles Violett Nr. II« bezeichnet), so daß hier eine neue Folge der Farben Blau, Grün, Gelb, Rot und Violett beginnt, welche man als Farben dritter Ordnung bezeichnet. Das hierzu gehörige Rot III.O. entspricht einer Verzögerung von 0,001 590 mm, d. h. wieder einem ganzen Vielfachen der Wellenlänge des grünen Lichtes bei E, nämlich $3 \times 0,000\,530$; es wird also auch bei dieser Doppelbrechung die genannte Farbe durch die Interferenz vernichtet, aber auch ein Teil des Rot und des Violett, denn der Gangunterschied ist jetzt auch nahe gleich 2λ des äußersten Rot und gleich 4λ von Violett; im Maximum ihrer Intensität werden also bei der Interferenz die Farben mit $\frac{5}{2}\lambda$ und $\frac{7}{2}\lambda$ Gangunterschied sein, d. h. Orangerot ($\lambda = 636$) und Indigoblau ($\lambda = 454$); diese mischen sich zu einem viel weniger reinen Rot von geringerer Intensität, weil gleichzeitig sehr erhebliche Teile des Spectrums ausgelöscht sind (die spectrale Zerlegung zeigt einen dunkeln Streifen im Grün, einen

zweiten im Violett und eine Verkürzung des roten Endes; werden die Nicols parallel gestellt, so erscheinen natürlich zwei dunkle Streifen, im Orangerot und Indigoblau).

In noch viel höherem Grade nimmt die Reinheit und Lebhaftigkeit der Farben ab in den nun folgenden der vierten Ordnung, denn z. B. das hierher gehörige Rot entspricht einem Gangunterschiede von 0,002120 mm, d. h. 4×530; dies ist aber auch gleich 3×707 und gleich 5×424 $\mu\mu$, von denen ersteres die Wellenlänge eines sehr lebhaften Rot, letzteres diejenige des Indigo in der Nähe der Linie *G* ist. Die spectrale Zerlegung dieser Farbe liefert also außer dem dunkeln Streifen im Grün noch zwei weitere, einen im Rot, den andern im Indigo, so daß nur ein blasses und stärker mit Gelb versetztes Rot aus der Mischung hervorgeht. Ebenso ist auch die bei parallelen Nicols entstehende Complementärfarbe ein sehr unreines und blasses Grün, in welchem sich bei der Zerlegung durch ein Prisma Maxima an jenen drei Stellen des Prismas zeigen, während im Blau und Gelb je ein dunkler Streifen auftritt.

Die in Fig. 2 auf Tafel I dargestellten Farben I., II., III., IV. Ordnung kann man am besten studieren mittels eines aus einem doppeltbrechenden Krystalle, z. B. Quarz, geschliffenen, dünnen Keiles von der in Fig. 98, S. 141 abgebildeten Form, welchen man zwischen zwei gekreuzte Nicols so einschiebt, daß seine Längsrichtung 45° mit den Schwingungsrichtungen jener bildet[1]). Es muß aber hierzu bemerkt werden, daß die im vorhergehenden gegebene Erklärung der Polarisationsfarben dünner doppeltbrechender Lamellen auf der Voraussetzung beruht, der Gangunterschied, welchen eine solche hervorbringt, sei für alle im weißen Lichte enthaltenen Farben gleich groß. Wie weiterhin gezeigt werden wird, trifft diese Voraussetzung bei keinem doppeltbrechenden Körper genau zu, sondern die Verzögerung des einen Strahls gegen den andern ist ein wenig größer oder kleiner für die Strahlen von einer andern Schwingungsdauer. Dadurch werden Verschiedenheiten in der sich ergebenden Mischfarbe hervorgebracht, welche jedoch in den meisten Fällen so gering sind, daß sie in einer Reproduction, wie sie Fig. 2 auf Tafel I gibt, kaum mehr zur Darstellung gebracht werden können. Da die Stärke der Doppelbrechung, also auch der entstehende Gangunterschied bei einer bestimmten Dicke der Platte, bei gewissen Substanzen zunimmt mit steigender Wellenlänge des Lichtes, bei andern abnimmt, so stellt jene Figur gleichsam den Normalfall dar, welchem sich die an den Krystallen wirklich beobachteten Farben I., II., III., IV. Ordnung um so mehr nähern, je geringer die Differenz ihrer Doppelbrechung für verschiedene Farben ist.

1) Derartige Quarzkeile, welche die Farben der ersten vier Ordnungen zeigen, liefert die Firma Dr. Steeg und Reuter in Homburg (s. Anhang) in trefflicher Ausführung; jedoch beginnen in solchen Keilen die Farben erster Ordnung mit dem hellen Grau, welches einem Gangunterschied von etwa 100 $\mu\mu$ entspricht, weil es nicht möglich ist, den Quarz noch dünner zu schleifen.



Je größer die Dicke der im polarisierten Lichte betrachteten Krystallplatte bzw. deren Doppelbrechung wird, je größere Verzögerung also die beiden in derselben entstehenden Strahlen gegeneinander erfahren, desto weniger kann die bei der Interferenz beider entstehende Farbe V., VI. Ordnung usf. sich von Weiß unterscheiden, wie eine einfache Betrachtung lehrt. Sei z. B. der Gangunterschied = 0,011475 mm, so ist dies gleich 15×765 $\mu\mu$, d. h. 15λ des äußersten Rot jenseits der Linie *A*, ebenso aber auch gleich 16×717 $\mu\mu$, d. i. 16λ des Rot bei Linie *a*, ferner: 17×675 $\mu\mu = 17\lambda$ des Rot zwischen *B* und *C*, 18×637 $\mu\mu = 18\lambda$ von Orange, 19×604 $\mu\mu = 19\lambda$ des Gelb von der Linie *D* nach Orange hin, 20×574 $\mu\mu = 20\lambda$ des Gelb auf der entgegengesetzten Seite von *D*, 21×547 $\mu\mu = 21\lambda$ von Gelbgrün, 22×522 $\mu\mu = 22\lambda$ des Grün zwischen *b* und *E*, 23×499 $\mu\mu = 23\lambda$ von Blaugrün, 24×478 $\mu\mu = 24\lambda$ des Blau nahe bei *F*, 25×459 $\mu\mu = 25\lambda$ des lebhaftesten Blau, 26×441 $\mu\mu = 26\lambda$ des Blau nahe der Linie *G*, 27×425 $\mu\mu = 27\lambda$ von Indigo, 28×410 $\mu\mu = 28\lambda$ des Übergangs zu Violett, 29×395 $\mu\mu = 29\lambda$ des Violett bei den Linien *H*. Wenn eine Krystallplatte dieser Art mit weißem Lichte beleuchtet und nach der Interferenz die austretenden Strahlen durch ein Prisma zerlegt werden, so erscheinen demnach in dem Spectrum desselben fünfzehn dunkle Streifen, während diejenigen dazwischen liegenden Farbennuancen, für welche der Gangunterschied ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt, im Maximum der Helligkeit sind. Die entstehende Mischung enthält daher alle Farben des Spectrums und nahezu auch in demselben Verhältnisse ihrer Intensität, wie das weiße Licht vorher; dieselbe wird also auf unser Auge wieder den Eindruck von Weiß machen, oder richtiger von Hellgrau, denn die Gesamtintensität ist natürlich eine geringere, weil für Teile aller Farben durch die Interferenz Auslöschung eingetreten ist. Diese Interferenzfarbe nennt man das Weiß höherer Ordnung. Drehen wir die Nicols in die parallele Stellung, so erscheinen im Spectrum überall da dunkle Streifen, wo bei gekreuzten Nicols Lichtmaxima waren, und helle, wo vorher Minima sich befanden; die entstehende Interferenzfarbe, die complementäre der vorigen, kann aber natürlich ohne spectrale Zerlegung ebensowenig von Weiß unterschieden werden, als jene. Je dicker eine das Weiß höherer Ordnung zeigende Platte ist, für desto zahlreichere Stellen im Spectrum findet die Vernichtung durch Interferenz statt, um so genauer steht daher die Helligkeit der übrigbleibenden Farben in demselben Verhältnisse, wie im weißen Lichte, und um so genauer ist dieselbe gleich der Hälfte derjenigen, welche ohne die Interferenz vorhanden wäre.

Hieraus ergibt sich, daß von einer gewissen Dicke ab eine doppeltbrechende Krystallplatte beim Drehen zwischen gekreuzten Nicols keine Farbe mehr zeigt, sondern einfach hell und dunkel wird; die größte Aufhellung mit weißem Lichte findet natürlich bei diagonaler Stellung ihrer Schwingungsrichtungen zu denen der Nicols statt. Die Dicke, bei welcher

das Weiß der höheren Ordnung eintritt, hängt von der specifischen Stärke der Doppelbrechung der betreffenden krystallisierten Substanz ab, denn je größer diese ist, bei desto geringerer Dicke einer aus letzterer bestehenden Platte wird offenbar der hierzu erforderliche Gangunterschied erreicht.

Die an dünnen Krystallplatten beobachtete Farbe erfährt, wie aus dem vorigen ohne weiteres einzusehen, eine merkliche Änderung bei einer kleinen Änderung der Dicke; hat daher eine solche Platte an verschiedenen Stellen nicht genau den gleichen Durchmesser, so zeigt sie auch nicht überall die gleiche Interferenzfarbe. Das Erscheinen der gleichen Farbennuance in der ganzen Ausdehnung der Platte ist daher ein sehr empfindliches Mittel zur Controlle über die Gleichheit ihrer Dicke an allen Stellen.

Verschiedene Polarisationsfarben an verschiedenen Stellen zeigt aber auch eine überall gleich dicke Platte, wenn sie nicht aus einem homogenen Krystalle, sondern z. B. aus einem Aggregate in verschiedener Orientierung miteinander verwachsener Krystalle der gleichen Art herausgeschnitten ist, weil, wie im folgenden gezeigt werden wird, in allen doppeltbrechenden Krystallen die Stärke der Doppelbrechung mit der Richtung sich ändert. Viele sog. »dichte« Mineralien sind nun krystallinische Aggregate, d. h. sie bestehen aus sehr kleinen Krystallpartikeln in unregelmäßiger gegenseitiger Orientierung; sind diese Partikel nun doppeltbrechend, so zeigt eine aus dem Aggregat hergestellte sehr dünne Platte bei mikroskopischer Betrachtung zwischen zwei gekreuzten Nicolschen Prismen Aggregatpolarisation: die verschiedenen Partikel unterscheiden sich voneinander durch ihre verschiedene Färbung und durch ungleiche Lage ihrer Auslöschung beim Drehen. Hierdurch tritt die Textur eines solchen Aggregates deutlich hervor, während es ohne Anwendung des polarisierten Lichtes vielleicht ganz einheitlich erscheint. Wir haben es hier mit einem nicht homogenen Körper zu tun, und dies ist zuweilen auch der Fall bei frei ausgebildeten Krystallen. Durch Störungen des Wachstums eines solchen kommt es vor, daß einzelne Teile desselben aus ihrer normalen Orientierung gleichsam abgelenkt worden sind. Da die Schwingungsrichtungen des Lichtes in doppeltbrechenden krystallisierten Körpern in bestimmter Beziehung zur Anordnung ihrer kleinsten Teilchen stehen, so werden dieselben durch jene Ablenkungen ebenfalls verändert, und die betreffenden Teile des Krystalls löschen alsdann zwischen gekreuzten Nicols nicht in denselben Stellungen aus, wie der übrige Krystall. Auch wenn während des Wachstums eines Krystalls eine allmähliche Änderung in der chemischen Zusammensetzung stattgefunden hat, so daß die äußeren Schichten desselben sich in ihrer Natur am meisten von den inneren unterscheiden, und wenn diesem Unterschiede zugleich ein solcher in der Orientierung der Schwingungsrichtungen entspricht, so erscheint der Krystall nicht in seiner ganzen Ausdehnung gleichzeitig dunkel, sondern die Auslöschung wandert beim Drehen über denselben hin.

In solchen Fällen handelt es sich um Aggregate nicht paralleler oder um Conglomerate ungleichartiger Krystalle. Nicht selten bilden sich bei der Ausscheidung aus dem Schmelzflusse, beim langsamen Erstarren sowohl künstlicher Glasflüsse, als natürlicher eruptiver Gesteine, endlich auch zuweilen bei der Krystallisation aus Lösungen, kugelförmig gestaltete Aggregate von Krystallen, welche im Innern eine radialfaserige Textur besitzen, derart, daß die einzelnen, im Centrum der Kugel zusammenstoßenden Fasern je aus einem Krystalle bestehen. Schleift man nun aus einem solchen sogenannten Sphärolithen eine sehr dünne centrale Platte, und sind die Schwingungsrichtungen der radial gestellten, sie zusammensetzenden Fasern parallel und senkrecht zu deren Längsrichtung, so zeigt eine solche Platte im parallelen Lichte zwischen gekreuzten Nicols ein dunkles Kreuz, dessen Arme den Hauptschnitten der Nicols parallel sind. Die Erklärung dieser Erscheinung ist eine sehr einfache: diejenigen Fasern, deren Längsrichtung den Polarisationsebenen der Nicols parallel geht, müssen offenbar, da ihre Schwingungsrichtungen parallel und senkrecht zur Längsrichtung sind, dunkel erscheinen, nahezu auch die unmittelbar benachbarten, da deren Schwingungsrichtungen nur wenig mit denen der Nicols divergieren; je größer indes der Winkel einer Faser mit jenen ist, desto mehr hellt sie das polarisierte Licht auf, und am meisten ist dies der Fall mit den 45° mit jenen bildenden Fasern. Infolgedessen müssen von der Mitte des radialfaserigen Gebildes vier schwarze, nach außen breiter werdende Arme ausgehen, welche die Fläche in vier Quadranten teilen, deren Helligkeit auf dem mittleren Radius am größten ist und nach den dunkeln Armen hin abnimmt. Da derartige Sphärolithe oft so klein sind, daß selbst bei mikroskopischer Betrachtung der Querschnitte ihre Zusammensetzung aus Fasern nicht erkennbar ist, so kann die beschriebene, bei einem solchen Körper, wenn gekreuzte Nicols angewendet werden, stets eintretende Erscheinung dazu dienen, den radialfaserigen Charakter eines Sphärolithen zu erkennen. Diese Interferenzerscheinung läßt sich leicht nachahmen, wenn man einen parallel seiner Längsrichtung auslöschenden Krystall auf einen radialen Ausschnitt einer undurchsichtigen Scheibe aufkittet und diese zwischen zwei gekreuzten Nicols rasch rotieren läßt, wobei der Krystall schnell nacheinander die Lage der einzelnen Fasern einer radialfaserigen Platte einnimmt.

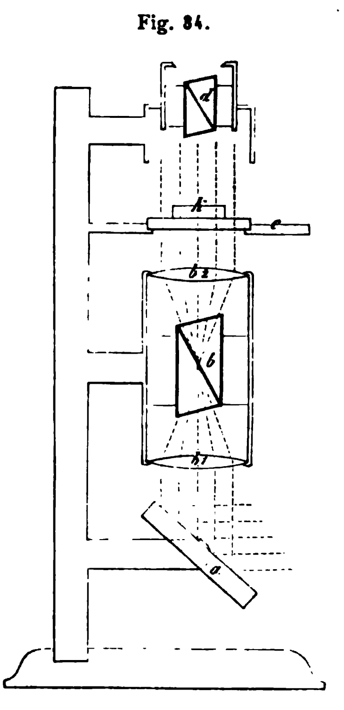
Bei der Erklärung des beschriebenen Phänomens ist vorausgesetzt worden, daß man es mit einer durch das Centrum des Sphärolithen gehenden Platte zu tun habe, welche so dünn ist, daß sie nur aus einer ihrer Ebene parallelen Schicht radial gestellter Fasern besteht; ist die Platte dicker, und geht daher nur eine oder keine von beiden Flächen derselben durch das Centrum des Sphärolithen, so besteht das Präparat in der Mitte aus senkrecht stehenden, rings um diese Mittelaxe aus geneigten Fasern, deren Neigung zunimmt mit ihrer Entfernung von der Mitte. Die Strahlen erfahren daher in diesen eine andere Doppelbrechung, und infolgedessen erscheinen von

der Mitte der Platte aus nach dem Rande aufeinander folgende verschiedene Interferenzfarben. Sind die Schwingungsrichtungen der den Sphärolithen zusammensetzenden Fasern schief gegen deren Längsrichtung, so entsteht auch ein gegen die Schwingungsrichtungen der Nicols schief gestelltes dunkles Kreuz.

Wie Bütschli neuerdings gezeigt hat, entsteht eine ähnliche Interferenzerscheinung (mit den Schwingungsrichtungen der Nicols parallelem Kreuze) auch in amorphen Körpern, z. B. Harzschichten, durch concentrische schräge Sprünge, und zwar infolge der durch die Totalreflexion an diesen bewirkten Polarisation (vgl. S. 35).

Polarisationsapparate. Zur Beobachtung der bisher betrachteten, durch die Doppelbrechung des Lichtes bewirkten Erscheinungen dient der in Fig. 34 in einem verticalen Durchschnitte dargestellte Polarisationsapparat. Derselbe besteht aus einem Spiegel *a*, der so geneigt wird, daß er das von einer hellen Stelle des Himmels herkommende Licht vertical nach oben reflectiert, einem polarisierenden Nicol *b*, welcher vorteilhaft in einem Rohre zwischen zwei Glaslinsen b_1 und b_2 so angebracht wird, daß der gemeinschaftliche Brennpunkt dieser in seine Mitte fällt, so daß die auf die erste Linse parallel auffallenden Strahlen, nachdem sie, in einen Doppelkegel zusammengeschnürt, sämtlich durch den Nicol gegangen sind, auch parallel aus der zweiten Linse austreten; ferner besteht das Instrument aus dem Krystallträger *c* mit horizontaler drehbarer Glasplatte, auf welche der zu untersuchende Krystall *k* gelegt wird, endlich aus dem analysierenden Nicol *d*, welcher die doppeltgebrochenen Schwingungen wieder auf eine Polarisationsebene zurückführt. Beide Nicols sind, wie der Krystallträger, um die verticale Axe des Apparates drehbar. Der Polarisator kann auch dadurch ersetzt werden, daß an Stelle des reflectierenden Spiegels ein sogenannter »Glasplattensatz« angebracht wird, welcher nach S. 35 dem reflectierten Lichte eine, wenn auch nicht ganz vollständige, Polarisation verleiht. Die Verwendung eines solchen Polarisators ist deshalb eine häufige, weil derselbe weit billiger herzustellen ist, als ein großes Nicolsches Prisma, wie ein solches für die Lichtstärke des Instrumentes wünschenswert ist. Die einfachste und freilich auch unvollkommenste Form eines Polarisationsapparates endlich ist die sogenannte Turmalinzange, bestehend aus zwei gegeneinander

Fig. 34.



drehbar gefaßten Turmalinplatten (vgl. S. 39), zwischen welche der zu untersuchende Krystall einfach eingeklemmt wird; zur Beobachtung wird das kleine Instrument gegen den hellen Himmel gerichtet.

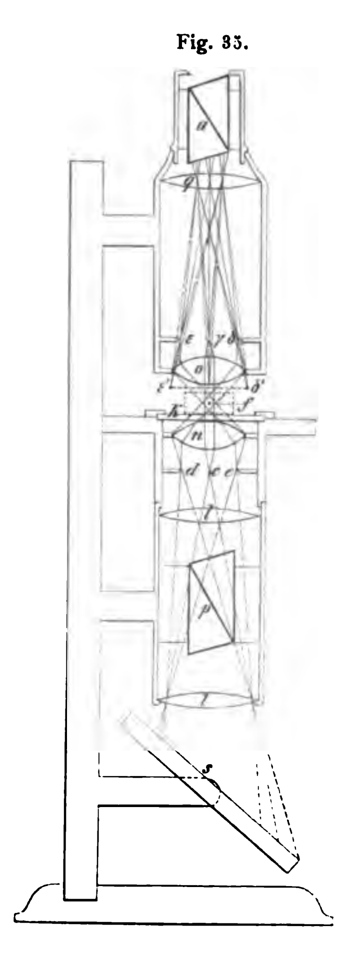
Der in Fig. 34 abgebildete Polarisationsapparat wird auch das Orthoskop genannt, weil nur die die Krystallplatte rechtwinkelig durchlaufenden Lichtstrahlen in bezug auf die Veränderung, welche sie im Krystalle erlitten haben, mit demselben untersucht werden. Ist der Krystall mit freiem Auge nicht mehr sichtbar, d. h. bedarf man zu seiner Beobachtung des Mikroskopes, so wandelt man das letztere in ein Orthoskop um, indem man unter dem Objecttische, welcher selbstverständlich für derartige Untersuchungen ein drehbarer sein muß, ein Nicolsches Prisma einfügt und ein zweites auf das Ocular aufsetzt oder zwischen Ocular und Objectiv im Mikroskope selbst anbringt. Blickt man nun in ein solches Instrument, nachdem man den oberen Nicol gegen den unteren gekreuzt hat, so erscheint das Gesichtsfeld dunkel und ebenso alle darin befindlichen einfachbrechenden Körper. Bringt man aber ein durchsichtiges Präparat, in welchem sich doppeltbrechende Krystalle befinden, z. B. eine äußerst dünn geschliffene Platte (Dünnschliff) eines Gesteins, auf den Objecttisch und dreht diesen in seiner Ebene, so müssen jene Krystalle den in den vorhergehenden Abschnitten erläuterten Wechsel zwischen dunkel und hell bzw. farbig durchmachen. Versieht man die Fassung der drehbaren Nicols mit Marken, durch welche man ihnen jederzeit eine bestimmte Orientierung geben kann, in der sie zugleich gekreuzt sind, und bringt man in der Bildebene des Mikroskopes ein Fadenkreuz so an, daß der eine der beiden alsdann im Gesichtsfelde erscheinenden Fäden genau die Schwingungsrichtung des aus dem unteren Nicol austretenden Lichtes, der andere die Richtung der vom Analysator hindurchgelassenen Schwingungen besitzt, so gestattet das Instrument nicht nur, das Vorhandensein und die Stärke der Doppelbrechung eines Krystalles, mittels der beim Drehen auftretenden Farbe nach S. 45 f., zu bestimmen, sondern auch die Schwingungsrichtungen der beiden im Krystall entstehenden Strahlen festzustellen; denn diese sind nach S. 44 durch die Dunkelstellungen des Krystalls gegeben, wenn die Schwingungsrichtungen der Nicols bekannt sind.

Zur Bestimmung der Schwingungsrichtungen eines Krystalls wird der Rand des drehbaren Objecttisches mit einer Kreisteilung versehen, so daß seine jedesmalige Stellung an einer festen Marke abgelesen werden kann. Man dreht nun den Tisch so weit, bis eine gerade Begrenzungslinie des zu untersuchenden und in die Mitte des Gesichtsfeldes gebrachten Krystalls (eine Krystallkante) in ihrer ganzen Länge den einen der beiden Fäden berührt, d. h. ihm parallel ist, und liest diese Stellung an der Kreisteilung ab. Im allgemeinen wird keine der Schwingungsrichtungen mit dieser Begrenzungslinie der Krystallplatte parallel sein, und wird daher die Platte nicht dunkel erscheinen; dreht man aber den Objecttisch und damit den Krystall aus dieser Stellung bis zu derjenigen, in welcher die

Auslöschung des Lichtes eintritt, in welcher also die Schwingungsrichtungen des Krystalls mit denjenigen der Nicols zusammenfallen, so gibt die am Teilkreise abgelesene Drehung die Auslöschungsschiefe, d. h. den Winkel an, welchen eine dieser Schwingungsrichtungen mit der vorher eingestellten Kante des Krystalls einschließt. Das Nähere über die Einrichtung und den Gebrauch derartiger Polarisationsmikroskope wird in der III. Abteilung dieses Buches gegeben werden.

Sowohl mit dem S. 53 beschriebenen Polarisationsinstrumente als mit dem Mikroskope, welches für Polarisation eingerichtet ist, kann man im allgemeinen nur diejenigen optischen Erscheinungen, welche der Krystall in einer Richtung zeigt, untersuchen. Man bezeichnet daher diese Art der Untersuchung als diejenige im parallelen polarisierten Lichte.

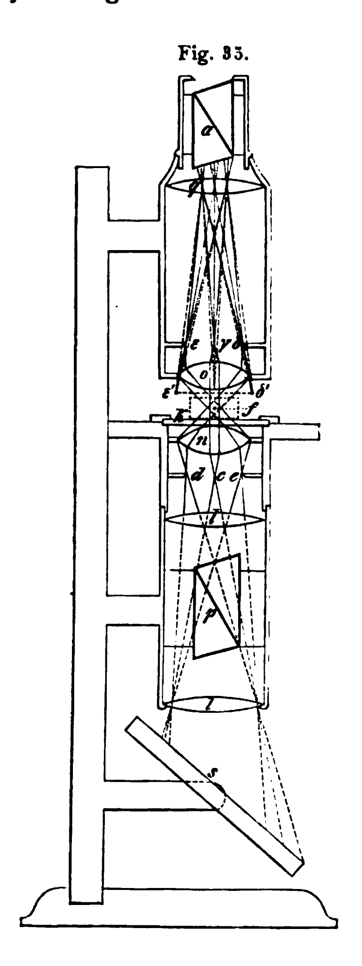
Fig. 35.



Sehr häufig beabsichtigt man aber, die Veränderungen, welche das polarisierte Licht bei seinem Durchgange durch einen Krystall in möglichst verschiedenen Richtungen erleidet, gleichzeitig zu beobachten. Dazu dient das Polarisationsinstrument zur Beobachtung im convergenten Lichte, auch Konoskop genannt. Dasselbe, in Fig. 35 in verticalem Durchschnitte durch die Mitte dargestellt, besteht aus einem Spiegel *s* und dem Polarisator *p*, welcher von zwei Linsen *l*, *l* eingeschlossen ist, genau so, wie bei dem Polarisationsinstrumente mit parallelem Lichte. Hinter der oberen Linse *l* befindet sich ein geschwärzter Metallschirm (Diaphragma) mit kreisrunder Öffnung vom Durchmesser *de*. Diese Öffnung wird vom hellen Himmel her, durch Vermittelung des Spiegels *s*, des Nicols *p* und der Linsen *l*, beleuchtet, und zwar jeder Punkt derselben durch einen Strahlenkegel, dessen Spitze der besagte Punkt selbst und dessen Basis die untere Linse *l* ist. In der Figur sind diese Strahlenkegel für die beiden Randpunkte *de* und für den Mittelpunkt *c* des Diaphragmas angegeben, aber unterhalb der obersten Linse *l* nur punktiert fortgeführt, weil der wahre Gang der Lichtstrahlen zwischen *l*, *l* und *s* wegen der Brechung in den Linsen ein anderer, und zwar derart ist, daß alle vom Spiegel auf die untere Linse parallel auffallenden Strahlen nach ihrem Austritte aus der oberen wieder einander parallel, natürlich aber

alsdann Bestandteile verschiedener auf *c*, *d*, *e* usf. auffallender Lichtkegel werden. Die von unten her durch linear polarisiertes Licht erleuchtete helle Öffnung *de* ist es nun, nach welcher wir durch das Instrument hinblicken. Wir können daher jeden Punkt derselben, z. B. *d*, als einen solchen, von welchem divergierende Lichtstrahlen ausgehen, betrachten; jedoch gehen dieselben nicht, wie von einem selbstleuchtenden Punkte, nach allen Seiten aus, sondern nur nach denjenigen, welche innerhalb der Divergenz des Kegels liegen, dessen Spitze *d* und dessen Basis die untere Linse *l* ist. Die von *d* ausgehenden Strahlen sind die geradlinigen Fortsetzungen derjenigen des betreffenden Kegels. Verfolgen wir deren Weg nach aufwärts, so sehen wir sie divergierend auf eine Linse *n* von starker Krümmung auftreffen; diese steht von dem Diaphragma *de* genau im Abstande der Brennweite, so daß also alle von einem Punkte der Brennebene *de* divergierende Strahlen durch *n* in parallele verwandelt werden. Oberhalb *n* befindet sich eine Linse *o* von derselben Größe und Krümmung, welche an der Unterseite eines in der Höhe verstellbaren Rohres befestigt ist, in welchem sich außerdem das Ocular *q* befindet; dieses Rohr wird so weit gesenkt, daß der Brennpunkt von *o* und der von *n*, welche gleiche Focallänge besitzen, in *f* zusammenfallen. Der von *d* ausgehende Strahlenkegel wird auf der linken Seite von *n* gebrochen und dabei in einen Strahlencylinder verwandelt; dieser geht durch die rechte Seite von *o* und wird, da die Strahlen parallel sind, in der Brennebene von *o*, und zwar an dem *d* entsprechenden Punkte δ derselben, wieder vereinigt. In der Figur ist die gleiche Construction ausgeführt für die Strahlen, welche von dem Mittelpunkte *c* der hellen Öffnung *de* ausgehen und sich in γ vereinigen müssen, endlich für diejenigen, welche, von *e* kommend, in ε convergieren. Da dasselbe für alle Punkte der erleuchteten Öffnung *de* gilt, so muß in der Ebene $\delta\varepsilon$ ein Bild von jener Öffnung entstehen. Dieses betrachten wir nun mit einer sehr schwach vergrößernden Lupe, nämlich mit dem Ocular *q*, durch welches wir ein sogenanntes virtuelles Bild, etwa in der Ebene $\delta'\varepsilon'$, erblicken. Die Strahlen, welche von diesem Bilde zu kommen scheinen, gehen, ehe sie ins Auge gelangen, durch den analysierenden Nicol *a*. Legen wir nun auf den Krystallträger *k* eine

Fig. 35.



planparallele Platte eines krystallisierten Mediums so auf, daß sich f innerhalb derselben befindet (in der Figur ist eine solche punktiert angedeutet), so gehen durch dieselbe Strahlensysteme von sehr verschiedener Richtung; alle Strahlen gleicher Richtung, welche in einem homogenen Krystalle ja die gleiche Veränderung erfahren müssen, vereinigen sich in einem einzigen Punkte des Bildes $\delta'\varepsilon'$; alle von abweichenden Richtungen an andern Punkten. In dem Bilde $\delta'\varepsilon'$ vermögen wir also mit einem Blicke alle Interferenzerscheinungen zu übersehen, welche Strahlen von sehr mannigfaltigen Richtungen — nämlich von allen, welche innerhalb des von f auf den Umfang der Linse n gefällten Kegels liegen — in dem zu untersuchenden Krystalle erleiden; wir sehen dann im Gesichtsfelde ein sog. »Interferenzbild«[1]) des Krystalles, dessen verschiedene Stellen, verschiedenen Richtungen der Strahlen im Krystalle entsprechend, verschiedene Farbe und Lichtintensität zeigen. Je kürzer die Brennweite von n und o ist, einen desto größeren Öffnungswinkel besitzt jener Kegel, desto größer ist das Gesichtsfeld des Instrumentes. Da es häufig der Vereinigung von Strahlen innerhalb des Gesichtsfeldes bedarf, welche unter sehr divergierenden Richtungen durch den Krystall gegangen sind, so hat zuerst Nörremberg jede der beiden Linsen n und o durch ein System mehrerer planconvexer, einander fast berührender Gläser ersetzt, welche zusammen wie eine Linse von sehr kurzer Brennweite wirken. In dieser jetzt allgemein gebräuchlichen Form construiert, heißt der Apparat deswegen häufig »das Nörrembergsche Polarisationsinstrument«.

Der vorstehend beschriebene Apparat dient zur Untersuchung größerer Krystallplatten im convergenten polarisierten Lichte, gerade so wie der in Fig. 34 abgebildete zur Untersuchung solcher im parallelen Lichte dient. Ebenso wie man aber ein Mikroskop mit drehbarem Objecttische durch Hinzufügung von zwei Nicolschen Prismen zur orthoskopischen optischen Untersuchung kleiner Krystalle verwendbar machen kann, so vermag man es auch in ein Konoskop zu verwandeln, mit welchem man dann auch einen mikroskopisch kleinen Krystall im convergenten polarisierten Lichte zu untersuchen imstande ist. Zu dem Zwecke ist es nur nötig, unmittelbar unter demselben in der Öffnung des Objecttisches eine Sammellinse einzufügen, welche stark convergierende Lichtstrahlen durch den in der Mitte des Gesichtsfeldes befindlichen Krystall hindurchsendet, und die optischen Teile des eigentlichen Mikroskopes nicht mehr auf diesen, sondern auf das in einer andern Ebene entstehende Interferenzbild einzustellen. Letzteres geschieht entweder durch Entfernung des Oculars, nach welcher man das sehr kleine Interferenzbild an einer bestimmten Stelle im Rohre erblickt,

[1]) Wie aus der Fig. 35 hervorgeht, vereinigen sich die nach rechts geneigten Strahlen auf der rechten Seite des Gesichtsfeldes, das Interferenzbild zeigt also die Erscheinungen auf der gleichen Seite, nach welcher die Strahlen im Krystalle geneigt sind, während das Bild des Krystalls selbst, welches man erblickt, wenn man den Tubus hebt, umgekehrt ist.

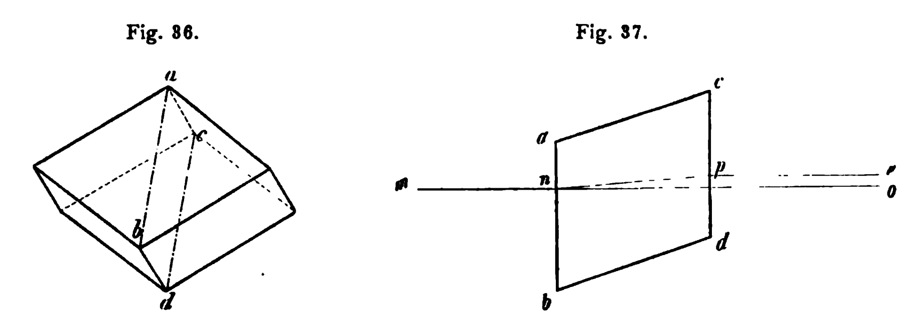


— oder durch Hinzufügung eines Hilfsoculars, welches die richtige Einstellung und zugleich eine Vergrößerung des Interferenzbildes bewirkt, so daß man dann im Gesichtsfelde nicht den Krystall, sondern das von ihm erzeugte Interferenzbild erblickt. Die eingehendere Beschreibung derartiger Konoskope und die Methoden ihrer Anwendung s. in der III. Abteilung.

Optisch einaxige Krystalle.

Doppelbrechung des Lichtes im Kalkspate. Die Beziehungen, in welchen in einem doppeltbrechenden Krystalle die Schwingungsrichtungen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen zu der Form desselben stehen, sind zuerst am Kalkspate (Calcit, krystallisiertes Calciumcarbonat) erkannt worden, und dieses Mineral ist dadurch zum Ausgangspunkte der Erforschung der Gesetze der Doppelbrechung geworden. Seine Krystalle sind nach drei Ebenen, welche einander unter Winkeln von 74°56′ schneiden, sehr vollkommen spaltbar, und da dasselbe sich in sehr großen wasserhellen Krystallen in der Natur (besonders auf Island) vorfindet, ist es leicht, große durchsichtige Spaltungsstücke von der Form eines sogenannten Rhomboeders (Fig. 36)

Fig. 36. Fig. 37.



herzustellen. Diese eignen sich namentlich deshalb in hohem Grade zu dem experimentellen Studium der Erscheinungen der Doppelbrechung, weil der Kalkspat die Eigenschaft besitzt, die beiden in demselben sich fortpflanzenden Strahlen sehr beträchtlich verschieden abzulenken. Stelle Fig. 37 einen sog. Hauptschnitt, d. h. einen Durchschnitt des Rhomboeders durch die vier Eckpunkte *abcd* (Fig. 36) dar, so daß *ab* und *cd* die kurzen Diagonalen der Rhomboederflächen sind. Die Ebene eines solchen Hauptschnittes teilt das Rhomboeder symmetrisch, d. h. in zwei gleiche und entgegengesetzte Hälften; man nennt sie daher eine Symmetrieebene des Rhomboeders. Läßt man nun senkrecht auf eine der Rhomboederflächen, z. B. *ab* in Fig. 37, parallel der im Hauptschnitte liegenden Richtung *mn*, ein Bündel gewöhnlicher Lichtstrahlen fallen, z. B. blickt man durch die beiden parallelen Rhomboederflächen nach einer kleinen kreisrunden und beleuchteten Öffnung in einem dunkeln Schirm, so sieht man zwei gleich helle Bilder dieser Öffnung, woraus hervorgeht, daß ein

in der Richtung mn in den Kalkspat eintretender Lichtstrahl in zwei zerlegt wird, von denen einer, no, wie ein gewöhnlicher Lichtstrahl bei senkrechter Incidenz, ungebrochen durch den Kalkspat hindurchgeht, während der zweite, in der Ebene des Hauptschnittes abgelenkt, im Krystalle sich von n nach p bewegt und dort die entgegengesetzte Brechung wie in n erfährt, also in der Richtung pe austritt. Da von diesen beiden Strahlen nur der erstere no dem Brechungsgesetze für gewöhnliches Licht folgt, so nennt man ihn den *ordentlichen* (ordinären) Strahl, den andern den *außerordentlichen* (extraordinären).

Macht man den Kalkspat in einer Fassung drehbar um eine Axe, parallel der Richtung des auffallenden Lichtes, so läßt sich leicht bestimmen, welches von den beiden nunmehr sichtbaren Bildern der hellen Öffnung in dem vorgesetzten dunkeln Schirme das ordentliche, welches das außerordentliche ist, da ersteres, als nicht abgelenkt, beim Drehen des Rhomboeders stehen bleibt, letzteres, welches im Hauptschnitte abgelenkt ist, mit dessen Drehung sich im Kreise um das ordentliche Bild herumbewegt. Bringt man jetzt vor diesen Kalkspat einen zweiten, gleich groß und ebenso gefaßt, in vollkommen paralleler Stellung, und blickt durch beide hindurch nach der hellen Öffnung, so sieht man, daß das ordentliche Bild o *ganz* als ordentliches Bild hindurchgeht, *ohne abermals doppelt gebrochen zu werden*, ebensowenig wie das zweite, welches dagegen als extraordinäres Bild durch Kalkspat II geht, da es eine weitere Ablenkung um den gleichen Betrag, wie die in I, erleidet; man sieht also, wie vorher, zwei gleich helle Bilder übereinander, aber in doppeltem Abstande. Dreht man nun den vorderen Kalkspat in seiner Fassung nach rechts oder links, so erscheinen *vier* Bilder der Öffnung, aber *von verschiedener Helligkeit*, und man sieht an der Ablenkung leicht, daß jedes der Bilder o und e in ein ordinäres und ein extraordinäres zerlegt worden ist. Fig. 38 zeigt die beobachtete Erscheinung für den Fall, daß man den Hauptschnitt des dem Auge zunächst befindlichen Kalkspats II um einen kleinen Winkel nach rechts gedreht hat; während bei paralleler Stellung mit dem ersten I nur ein ordinäres Bild o und ein ebenso helles extraordinäres an der Stelle e_2 sichtbar waren (e_1 bezeichnet die Stelle des extraordinären Bildes, wenn nur der erste Kalkspat vor der hellen Öffnung steht), erfährt jetzt das Bild e_1 eine Ablenkung im Hauptschnitte des zweiten Kalkspates, erscheint also in ε_e, besitzt aber eine etwas geringere Helligkeit, und in e_1, d. h. ohne Ablenkung, erscheint ein zweites lichtschwaches Bild; andererseits hat auch o an Helligkeit abgenommen,

Fig. 38.

und im Hauptschnitte des zweiten Kalkspates abgelenkt, also extraordinär gebrochen, erscheint ein Bild ε_o von derselben geringen Lichtstärke, wie das jetzt ordinäre e_1. Je weiter man dreht, desto mehr nimmt die Helligkeit des ordinären o, aus dem ersten ordentlichen entstandenen, und des extraordinären Bildes ε_e, welches aus dem außerordentlichen entstanden ist, ab, während die Helligkeit der beiden andern Bilder fortwährend zunimmt; bei 45° Drehung sind alle vier Bilder gleich hell und befinden sich in der durch Fig. 39 wiedergegebenen Stellung. Wenn die Hauptschnitte beider Kalkspäte senkrecht aufeinander stehen, so verschwinden das ordentliche Bild von o und das außerordentliche von e ganz, es erscheinen nur zwei Bilder ε_o und e_1, das abgelenkte, also außerordentliche, von o, und das nicht weiter gebrochene, also ordentliche Bild von e (s. Fig. 40). Nach einer Drehung von 180° erscheint nur ein einziges Bild, da e im zweiten Kalkspate um gleich viel nach der entgegengesetzten Richtung abgelenkt wird, als im ersten, also nach seinem Austritte mit dem Bilde o zur Deckung kommt. Bei einer ganzen Drehung eines der beiden Kalkspäte um 360° gibt es, wie die Beobachtung zeigt, nur vier Stellungen (wenn sich nämlich die Hauptschnitte beider unter 45° durchschneiden), in denen die aus dem ersten Rhomboeder austretenden Strahlen o und e sich wie gewöhnliche Lichtstrahlen verhalten, d. h. in zwei gleich helle zerlegt werden; in allen andern Stellungen entstehen zwei Strahlen von ungleicher Intensität aus denselben; bei parallelen oder senkrecht einander durchkreuzenden Hauptschnitten endlich werden sie gar nicht mehr doppelt gebrochen[1]).

Fig. 39.

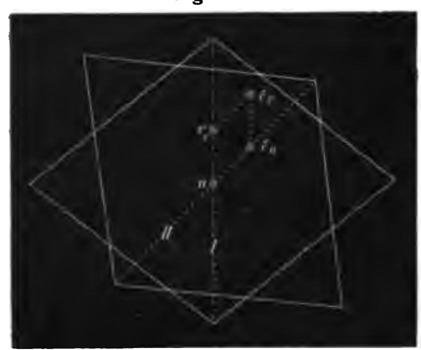


Fig. 40.



Man ersieht also aus diesem Verhalten, daß jeder der beiden Strahlen (eigentlich Bündel von Strahlen), welche aus dem ersten Kalkspate austraten, eine vollkommen symmetrische Seitlichkeit erkennen läßt in bezug auf die dem Hauptschnitte entsprechende Diagonale des Rhombus, welcher die

1) Diese Erscheinungen sind geeignet, geradlinig polarisiertes Licht von gewöhnlichem zu unterscheiden, zu welchem Zwecke unser Auge nicht befähigt ist.

Ein- und Austrittsfläche des Lichtes am Kalkspate darstellt. Wollen wir diese Erscheinungen also dadurch erklären, daß im Krystalle zwei senkrecht zueinander polarisierte Strahlen entstanden sind, so können wir dies auf keine andere Weise, als indem wir annehmen, daß die Schwingungsrichtung des einen derselben mit jener Diagonalen, die des andern mit der dazu Senkrechten (der längeren Diagonale des Rhombus) zusammenfällt.

Angenommen, der ordinäre Strahl *o*, welcher aus dem Kalkspate austritt, bestehe nur aus geradlinigen Schwingungen parallel der längeren Diagonale der Rhomboederfläche, der extraordinäre *e* aus solchen parallel der kurzen Diagonale. Mögen in Fig. 41 *I* und *II* die beiden Kalkspatrhomboeder, durch welche das Licht gehen soll, welche man sich also den einen vor dem andern zu denken hat, nebeneinander darstellen, so würden *oo* und *o'o'* in denselben die Schwingungsrichtungen des ordentlichen, *ee* und *e'e'* diejenigen des außerordentlichen Strahles sein, dessen Fortpflanzungsrichtung senkrecht zur Zeichnungsebene steht. Der ordentliche Strahl mit der Schwingungsrichtung *oo*, welcher aus *I* austritt, gelangt in *II*, wenn *I* und *II* parallel sind, wie es Fig. 41 darstellt, mit der Schwingungsrichtung *o'o'*, hier wird die Bewegung zerlegt in eine solche nach *o'o'* und eine nach *e'e'*; der auf letztere Richtung fallende Anteil derselben ist jedoch gleich Null, die Componente parallel *o'o'* entspricht der gesamten Intensität des in *II* eintretenden ordentlichen Strahles; dieser wird also im zweiten Kalkspate nicht doppelt gebrochen, sondern geht vollständig als ordentlicher Strahl durch denselben. Denken wir uns jetzt *II* um einen kleinen Winkel gedreht (s. Fig. 42), so tritt der ordentliche Strahl aus *I* mit der Schwingungsrichtung *ωω* in *II* ein und wird hier in zwei Strahlen zerlegt, welche nach *o'o'* und *e'e'* schwingen und deren Amplituden sich verhalten, wie die Längen *CO* und *CE*, d. h. er geht nicht mit seiner vollen Intensität als ordentlicher Strahl hindurch, der Rest als außerordentlicher, also im Hauptschnitt von *II* abgelenkt, wie es Fig. 38 zeigt. In diesem Falle wird der aus dem ersten Kalkspate austretende ordentliche Strahl im zweiten also doppelt gebrochen, liefert aber zwei Strahlen von verschiedener Intensität. Bei einer weiteren Drehung des Kalkspates *II* (Fig. 43), wenn derselbe nämlich 45° mit *I* bildet, wird der

Fig. 41.

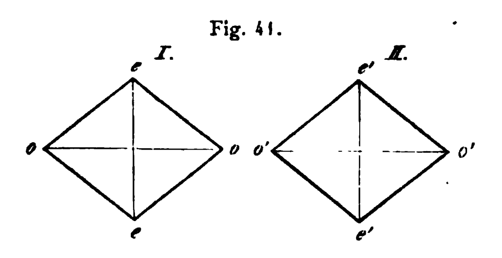
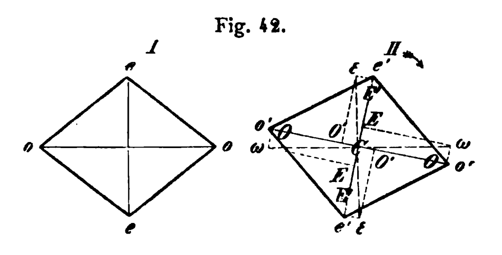


Fig. 42.



ordentliche Strahl durch *II* in gleich große Componenten zerlegt, er liefert also zwei gleich helle Strahlen, einen ordinären und einen extraordinären; demnach geht er nur zur Hälfte als ordentlicher Strahl durch den zweiten Kalkspat. Das ist genau die in Fig. 39 dargestellte Erscheinung. Je weiter man nun *II* dreht, ein um so kleinerer Anteil der aus *I* austretenden horizontalen Schwingungen des Äthers geht als ordentlicher Strahl durch *II*; bei der in Fig. 44 dargestellten Stellung, in welcher *I* und *II* rechtwinkelig gekreuzt erscheinen, tritt der aus *I* herauskommende ordinäre Strahl in *II* mit der Schwingungsrichtung $e'e'$ ein, wird also in zwei senkrechte Componenten zerlegt, deren erste, parallel $o'o'$, gleich Null, deren zweite, parallel $e'e'$, gleich der ganzen Amplitude des eintretenden Lichtes ist; der Strahl o kann also gar nicht mehr als ordinärer Strahl durch den zweiten Kalkspat hindurchgehen, er geht ganz als extraordinärer hindurch (vgl. Fig. 40). Teilweise als ordentlicher gelangt er wieder durch *II* bei weiterer Drehung des letzteren, vollständig, wenn die gesamte Drehung = 180° ist, — und es ist einleuchtend, daß völlig das gleiche eintreten muß, wenn die Drehung, von der Stellung in Fig. 41 ausgehend, nach links herum, statt nach rechts, stattgefunden hätte. Die zugrunde gelegte Annahme über die Natur des durch den Kalkspat hindurchgegangenen Lichtes lehrt demnach ebenso, wie die beobachteten und vorher beschriebenen Erscheinungen, daß der Hauptschnitt des Kalkspatrhomboeders insofern charakteristisch für den aus dem ersten Rhomboeder austretenden ordinären Strahl ist, als derselbe ganz als ordentlicher durch *II* hindurchgeht, wenn der Hauptschnitt von *II* parallel dem von *I*, um so weniger, je größer der Winkel ist, welchen die Hauptschnitte beider einschließen, endlich gar nicht, wenn dieselben senkrecht aufeinander stehen. Diese für den Strahl o so charakteristische Ebene ist also die zu der für ihn angenommenen Schwingungsrichtung senkrechte Ebene, d. h. diejenige, welche S. 11 als Polarisationsebene eines geradlinig polarisierten Lichtstrahls bezeichnet wurde. Man sagt daher, der ordentliche Strahl sei im Hauptschnitte des Krystalles polarisiert.

Fig. 43.

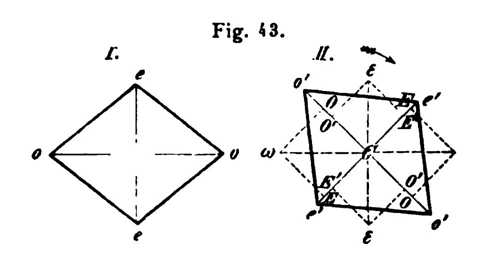
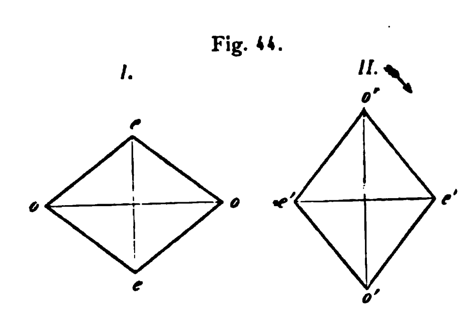


Fig. 44.



Betrachten wir nunmehr den zweiten, außerordentlichen Lichtstrahl, welcher aus Kalkspat *I* austritt, unter denselben Voraussetzungen, so zeigt

Fig. 44 oder 45, daß dieser, in *II* mit der Schwingungsrichtung $e'e'$ eintretend, in zwei Componenten nach $o'o'$ und $e'e'$ zerlegt wird, deren erste gleich Null ist; diese hat aber die Schwingungsrichtung des ordentlichen Strahles, also kann bei paralleler Stellung der Kalkspäte der Strahl *e* aus *I* gar nicht als ordentlicher Strahl durch *II* hindurchgehen, wie dies in der Tat die Beobachtung lehrt (vgl. S. 59). Drehen wir *II* um einen Winkel (s. Fig. 46), so tritt *e* mit der Schwingungsrichtung $\varepsilon\varepsilon$ ein und wird in die beiden Componenten CO' und CE' zerlegt; jetzt geht also der extraordinäre Strahl des ersten Kalkspats teilweise als ordentlicher durch den zweiten, und zwar ein um so größerer Anteil, je weiter wir drehen. Steht endlich, wie in Fig. 47, die zum Hauptschnitt des zweiten Kalkspats senkrechte Ebene, welche durch $o'o'$ und die Fortpflanzungsrichtung des Strahles bestimmt ist, parallel dem Hauptschnitte des ersten, so muß der aus diesem austretende extraordinäre Strahl vollständig als ordinärer Strahl durch *II* hindurchgehen (wie es nach Fig. 40 wirklich der Fall ist); bei noch weiterer Drehung wieder nur unvollständig, usf. Dem Hauptschnitte des ersten Kalkspates muß also parallel sein die senkrecht zum Hauptschnitte stehende Ebene des zweiten, damit der Strahl *e* als gewöhnlicher vollständig durch letzteren hindurchgelangen kann; einen je größeren Winkel jene beiden Ebenen miteinander einschließen, um so weniger kann von jenem als ordentlicher Strahl durch *II* hindurch. Die Ebene, welche senkrecht zum Hauptschnitt steht, d. i. die Transversalebene (s. S. 11) des ordentlichen Strahles, ist also ganz in gleicher Weise charakteristisch für den extraordinären Strahl, wie es der Hauptschnitt selbst für den ordinären ist; jene ist demnach die Polarisationsebene des außerordentlichen Lichtstrahles, dieser ist senkrecht zum Hauptschnitte polarisiert.

Fig. 45.

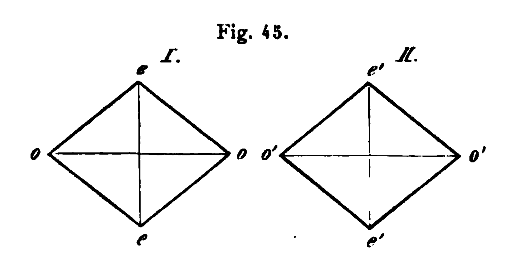


Fig. 46.

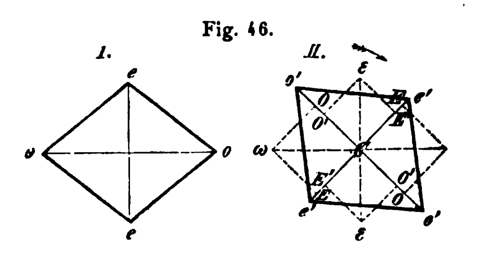
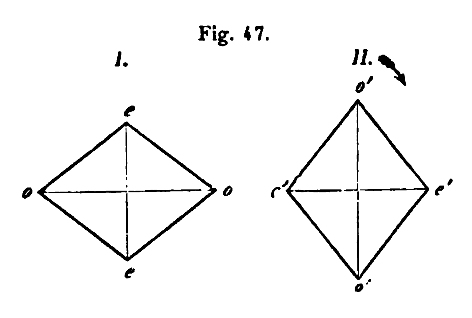


Fig. 47.



Man ersieht aus dem Vorhergehenden, daß die Annahme, der ordinäre Strahl schwinge parallel der großen, der extraordinäre parallel der kleinen

Diagonale der Rhomboederfläche, die beobachteten Erscheinungen vollkommen erklärt[1]).

Dieselben sind ferner in Übereinstimmung mit der S. 37 gegebenen Auseinandersetzung, wonach die Zerlegung stets in zwei senkrecht zueinander stattfindende Schwingungen erfolgt. Diese Auseinandersetzung beruhte aber ihrerseits auf der S. 12 gemachten Annahme, daß das in den Kalkspat eintretende gewöhnliche Licht ebenfalls linear polarisiertes, senkrecht zur Richtung des Strahles schwingendes Licht sei, dessen Schwingungsazimuth aber oder, was dasselbe bedeutet, dessen Polarisationsebene fortwährend sehr schnell wechselt. Daß diese Annahme in der Tat eine berechtigte ist, beweist das folgende von Dove angegebene Experiment: Läßt man einen Kalkspat, auf dessen eine Rhomboederfläche ein gewöhnlicher Lichtstrahl senkrecht auffällt, folglich der entstehende ordinäre Strahl in derselben Richtung an der entgegengesetzten Fläche austritt, um diese Richtung als Drehungsaxe sehr schnell rotieren, so zeigt der austretende ordinäre Strahl einem zweiten Kalkspat gegenüber nicht mehr das Verhalten eines polarisierten, sondern das eines gewöhnlichen Lichtstrahles. Hier hat man es aber bestimmt mit einem geradlinig polarisierten Strahle zu tun, nur daß seine Polarisationsebene (der Hauptschnitt des Kalkspates) durch dessen Rotation ihre Richtung fortwährend sehr schnell ändert.

Das S. 58f. beschriebene Verhalten zeigt ein Calcitrhomboeder, welches seiner drei Flächenpaare man auch als Ein- und Austrittsflächen der Lichtstrahlen benutzt. Das Rhomboeder besitzt also drei gleichwertige Hauptschnitte, welche einander in der in Fig. 48 senkrecht gestellten Richtung AA schneiden; mit dieser bilden die drei oberen und folglich auch die drei unteren Flächen des Rhomboeders gleiche Winkel. Nennen wir die Richtung AA[2]) die Axe des Rhomboeders, so können wir den optischen Hauptschnitt desselben für einen auf eine Rhomboëderfläche senkrecht auffallenden Strahl nunmehr definieren als diejenige Ebene, in welcher das

---

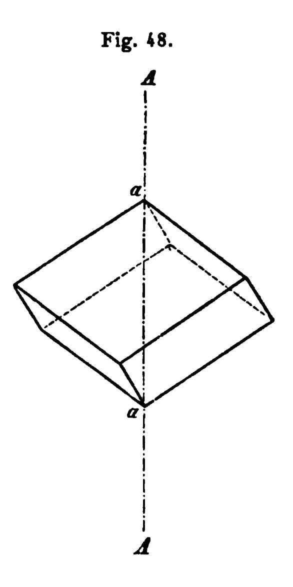
1) Dasselbe ist auch der Fall mit der Annahme, daß umgekehrt der extraordinäre Strahl parallel der längeren Diagonale, der ordinäre parallel der kürzeren seine geradlinigen Vibrationen ausführe. Vertauscht man nämlich in den Figuren 41 bis 47 durchweg die Buchstaben o und e, so resultieren genau die gleichen Folgerungen, z. B. folgt auch dann aus Fig. 41 oder 45, daß der aus dem ersten Kalkspate austretende ordinäre Strahl ganz als ordinärer durch den zweiten hindurchgeht, usf.

Diese beiden, einzig möglichen, Annahmen unterscheiden sich darin, daß bei der ersten vorausgesetzt wird, ein geradlinig polarisierter Lichtstrahl schwinge senkrecht zu seiner Polarisationsebene, bei der zweiten, er schwinge parallel derselben. Im folgenden soll, wie bisher, stets angenommen werden, daß die Schwingungsebene eines linear polarisierten Lichtstrahles senkrecht zu seiner Polarisationsebene stehe. Nach Maxwells elektromagnetischer Theorie des Lichtes gilt dies eigentlich nur für die elektrischen Schwingungen, während die magnetischen in der Polarisationsebene stattfinden, es ist aber durch Wiener nachgewiesen worden, daß für die optischen Erscheinungen die elektrischen Schwingungen die maßgebenden sind.

2) Denken wir sie uns durch zwei gegenüberliegende Ecken des Rhomboeders gelegt, so schneiden einander in ihren beiden Endpunkten a je drei gleichwinkelige Kanten.

Einfallslot (d. h. die Normale zur Rhomboederfläche) und die Axe des Rhomboeders gelegen sind. Läßt man nun Lichtstrahlen in einem solchen Hauptschnitte, aber nicht senkrecht zur Rhomboederfläche, sondern unter verschiedenen Winkeln geneigt, auffallen, und bestimmt den Brechungsindex der beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen für jeden derselben, so ergibt sich, daß derjenige des ordinären Strahles immer derselbe bleibt, unter welchem Winkel das Licht auch einfällt, nämlich für eine bestimmte mittlere Farbe den Wert $\omega = 1{,}6583$ besitzt. Es war dies auch schon deshalb zu erwarten, weil dieser Strahl für alle im Hauptschnitte liegenden Neigungen des einfallenden Lichtes stets dieselbe Schwingungsrichtung besitzt, nämlich nach unserer Annahme die Normale zum Hauptschnitte. Bestimmt man unter gleichen Verhältnissen den Brechungsindex des außerordentlichen Strahles, so ergibt sich dieser verschieden, je nach der Richtung, in welcher er sich im Kalkspate bewegt (wie auch zu erwarten stand, da seine in den Hauptschnitt fallende und zur Fortpflanzungsrichtung normale Schwingungsrichtung mit der Neigung des einfallenden Strahles zur Axe sich ändert), und zwar ist dieser Brechungsindex genau gleich dem des ordinären Strahles (1,6583), wenn der extraordinäre sich im Kalkspate parallel der Axe fortpflanzt; er ist um so kleiner, je größer der Winkel zwischen seiner Richtung und der Axe ist, und hat seinen kleinsten Wert $\varepsilon = 1{,}4864$ senkrecht zur Axe.

Fig. 48.



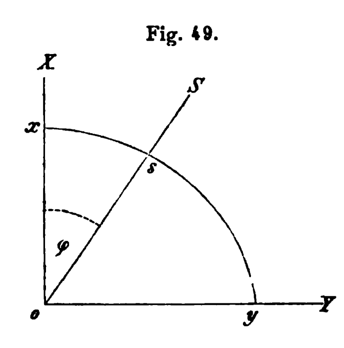
Wählen wir jetzt statt eines jener oben definierten drei Hauptschnitte irgendeine ebenfalls, wie jene drei, durch die Axe gehende Ebene, und schleifen wir senkrecht zu derselben eine ebene Fläche an den Kalkspat an, durch welche das Licht eintritt, — so beobachten wir, daß die Brechungsindices der unter verschiedenen Neigungen in jener Ebene auffallenden Strahlen genau dieselben Werte haben, wie sie im vorhergehenden Falle bei gleichem Neigungswinkel gegen die Axe gefunden wurden. Für diese beliebig gewählte Ebene sind die optischen Verhältnisse des Krystalls ganz dieselben, wie für die oben definierten drei Hauptschnitte, folglich können wir diese Ebene ebenfalls als einen solchen bezeichnen und nennen nun ganz allgemein den optischen Hauptschnitt eines einfallenden Strahles diejenige Ebene, welche durch den Strahl und die Axe des Rhomboeders geht. Der Kalkspat ist demnach ein Krystall mit unendlich vielen optischen Hauptschnitten, welche einander sämtlich in der Axe schneiden und alle gleichwertig sind, denn in jedem derselben nimmt der Brechungsindex des außerordentlichen Strahles mit

zunehmender Neigung gegen die Axe in derselben Weise ab, während der des ordentlichen nicht nur in allen Hauptschnitten, sondern auch in jeder Richtung innerhalb eines jeden denselben Wert beibehält.

Da ein kleinerer Brechungsindex einer größeren Lichtgeschwindigkeit im Krystall entspricht, so folgt aus diesen Beobachtungen: der ordentliche Strahl *o*, welcher im Kalkspate entsteht, pflanzt sich nach allen Richtungen gleich schnell fort, der außerordentliche *e* in der Richtung der Axe mit derselben Geschwindigkeit, in jeder andern mit größerer. Da die beiden Strahlen gleiche Geschwindigkeit haben, wenn sie sich parallel der Axe bewegen, so kann nach S. 36 parallel dieser Richtung keine Doppelbrechung stattfinden. Eine Richtung, in welcher ein sonst doppeltbrechender Krystall sich wie ein einfachbrechender verhält, d. i. in der seine Doppelbrechung Null wird, heißt eine optische Axe. Gewöhnliches Licht pflanzt sich demnach als solches durch den Kalkspat fort, wenn es parallel seiner optischen Axe, d. i. in der Richtung der Axe des Rhomboeders (*AA* Fig. 48) hindurchgelangt.

Ganz so, wie bei einem gewöhnlichen Lichtstrahle in einem einfachbrechenden Mittel, sind auch die Verhältnisse des ordinären Strahles überhaupt, seine Richtung ist also für jeden Fall durch die Huyghenssche Construction zu bestimmen; seine Strahlenfläche ist eine Kugel. Was den extraordinären Strahl betrifft, so hat schon Huyghens[1]) nachgewiesen, daß die verschiedenen Geschwindigkeiten, welche außerordentliche Strahlen innerhalb eines Haupschnittes, aber von verschiedener Neigung gegen die Axe, besitzen, sich zueinander verhalten, wie die entsprechend gerichteten radii vectores einer Ellipse, deren kleine Axe die Geschwindigkeit des außerordentlichen Strahles parallel zur optischen Axe, deren große Axe die Geschwindigkeit desselben senkrecht zur Axe ist.

Fig. 49.

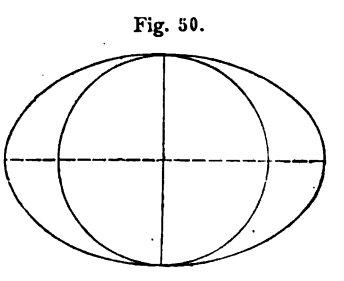


Wenn in Fig. 49 Y eine Richtung senkrecht zur optischen Axe, X parallel derselben, die Ebene XY also ein optischer Hauptschnitt des Kalkspats, wenn ferner $ox : oy$ das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten des Strahles *e* parallel und senkrecht zur Axe, so ist diejenige eines beliebigen extraordinären Strahles oS, welcher den Winkel φ mit der Axe bildet, gleich os, d. h. der Länge des Radius vector der Ellipse in derselben Richtung. Da erfahrungsgemäß die Lichtgeschwindigkeit des außerordentlichen Strahles für alle Richtungen dieselbe ist, welche gleiche Winkel mit der Axe bilden, so gilt obiges für alle unzählig vielen

1) Christian Huyghens, Abhandlung über das Licht. Worin die Ursachen der Vorgänge bei seiner Zurückwerfung und Brechung und besonders bei der eigentümlichen Brechung des isländischen Spates dargelegt sind. Leyden 1678. Deutsch herausgeg. von E. Lommel, Leipzig 1890 (Ostwalds Klassiker der exacten Wissenschaften Nr. 20).

Hauptschnitte, welche rings um die Axe zu denken sind. Die Länge *os* ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für alle Strahlen mit gleichem Winkel φ, welche man erhält, wenn man sich die Fig. 49 um *ox* als Rotationsaxe um 360° gedreht denkt. Die ganze Ellipse liefert hierbei ein Sphäroid oder Rotationsellipsoid, dessen Radius vector in jeder beliebigen Richtung ein Maß der Größe der Lichtgeschwindigkeit von *e* in derselben Richtung ist. Geht also von irgendeinem Punkte *o* im Innern des Kalkspats eine Lichtbewegung aus, so wird der extraordinäre Anteil derselben sich zwar auch nach allen Richtungen fortpflanzen, aber nicht mit derselben Geschwindigkeit; nach einer bestimmten Zeit wird er in der Richtung der Axe bis *x*, senkrecht zu derselben nach allen Seiten gleichweit nämlich bis *y*, in der beliebigen Richtung *oS* bis *s* usf., gelangt sein, d. h. bis an die Oberfläche jenes Ellipsoides, welches durch die Rotation der Ellipse *xsy* um *ox* entsteht. Die Radien dieses Ellipsoides sind proportional den Wellenlängen des Lichtes von einer bestimmten Schwingungsdauer, welches sich parallel diesen Radien fortpflanzt, da die Wellenlänge mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit proportional wächst. Die Wellen- oder Strahlenfläche des außerordentlichen Strahles ist demnach ein Rotationsellipsoid, dessen kleine Axe seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit parallel zur optischen Axe und zugleich Rotationsaxe, dessen große Axe die Geschwindigkeit von *e* senkrecht zur optischen Axe ist. Da in der Richtung der Axe *oX* die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des ordentlichen und des außerordentlichen Strahles gleich groß sind, so muß die Strahlenfläche des ersteren in der Richtung *oX* denselben Durchmesser *ox* besitzen, wie die des letzteren; die vollständige Strahlenfläche des Lichtes im Kalkspate erhalten wir demnach, wenn wir die beiden in Fig. 50 dargestellten Curven um die senkrechte Axe rotieren lassen. Beginnt also an irgendeinem Punkte im Innern des Kalkspats eine Lichtbewegung und kann sich dieselbe ungehindert nach allen Seiten fortpflanzen, so ist sie nach einer bestimmten Zeit auf einer doppelten Oberfläche angelangt, bestehend aus einem Rotationsellipsoide und einer von diesem umhüllten Kugel, welche das Ellipsoid in den Endpunkten der Rotationsaxe (der kleinen Axe der erzeugenden Ellipse) berührt.

Fig. 50.

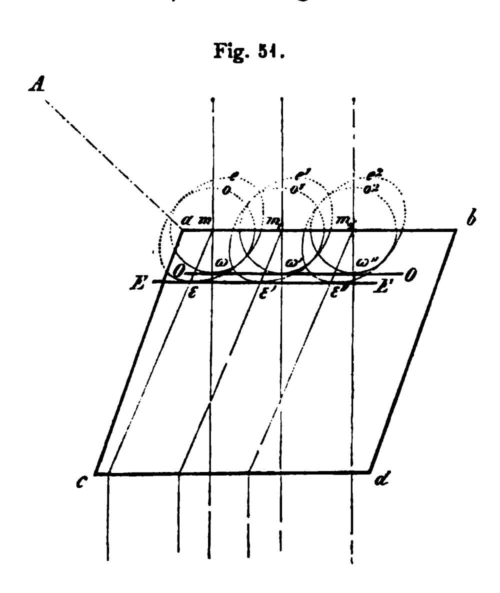


Durch die Kenntnis der vollständigen Wellenfläche ist uns nun in der Huyghensschen Construction ein Mittel gegeben, für einen in beliebiger Richtung in einen Kalkspat eintretenden Lichtstrahl die Richtung des extraordinären ebensogut, wie die des ordinären Strahles zu bestimmen.

Sei z. B. in Fig. 51 *abcd* ein Hauptschnitt eines Kalkspatrhomboeders (*ab* und *cd* kurze Diagonalen, *ac* und *bd* stumpfe Kanten), so ist *aA* die Richtung der optischen Axe; fallen nun in der Weise, wie wir (s. Fig. 37)

zum ersten Male die Erscheinungen der Doppelbrechung am Kalkspate beobachteten, auf ab gewöhnliche Lichtstrahlen mit senkrechter Incidenz auf, so ist ihre Strahlenfront parallel ab, also werden sie sämtlich zu gleicher Zeit von den Punkten $m, m_1, m_2, \ldots$ aus beginnen, sich im Kalkspate fortzupflanzen. Der entstehende ordinäre Strahl gelangt von diesen Punkten aus in einer bestimmten Zeit bis an die Oberfläche der Kugeln $o, o_1, o_2 \ldots$; nach früherem ist seine neue Strahlenfront die Tangentialebene an alle diese einzelnen Wellenflächen; also OO, und $m\omega$, $m_1\omega_1$ usf. die Richtung der entstehenden ordentlichen Strahlen. Der zweite, extraordinäre Strahl ist in derselben Zeit gelangt von $m, m_1, m_2, \ldots$ aus bis an die Oberfläche der Rotationsellipsoide $e, e_1, e_2, \ldots$, deren Rotationsaxe parallel aA ist; seine Strahlenfront im Kalkspate ist also die gemeinschaftliche Tangentialebene aller dieser Wellenflächen, EE in unserem Durchschnitte, und die Richtung $m\varepsilon$, $m_1\varepsilon_1$ usf. der extraordinären Strahlen ist gegeben durch die geradlinige Verbindung von $m, m_1 \ldots$ mit den Punkten der Rotationsellipsoide, in welchen sie von EE berührt werden. Der außerordentliche Strahl muß also eine Ablenkung im Hauptschnitte erfahren, ganz so, wie wir es früher beobachtet haben, und außerdem sieht man, daß bei demselben nicht, wie bei dem ordinären Lichtstrahle, die Strahlenfront und die Richtung des Strahles senkrecht aufeinander stehen.

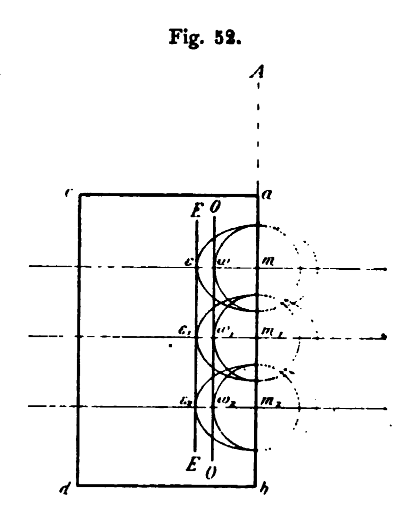
Fig. 51.



Es ist dies die Folge des Umstandes, daß die Tangente einer Ellipse (und ebenso die Tangentialebene eines Sphäroids) im allgemeinen nicht normal steht zu dem Radius vector, in dessen Endpunkte sie die Ellipse bzw. das Ellipsoid berührt. Die Schiefe beider Richtungen und somit auch die Ablenkung des außerordentlichen Strahles ist am größten für einen bestimmten Winkel zur Axe, welcher von der Gestalt der Ellipse, d. h. von dem Verhältnis ihrer großen und kleinen Axe, abhängt. Nur an den Endpunkten dieser beiden Axen steht die Tangente senkrecht zum Radius vector. Wäre daher die Eintrittsfläche ab senkrecht zur optischen Axe des Kalkspats, so würde die Richtung der senkrecht auffallenden Lichtstrahlen mit aA zusammenfallen, d. h. mit der gemeinsamen Axe beider Schalen der einzelnen Wellenflächen; die diese berührende Strahlenfront und ebenso die Richtung beider Strahlen wäre dann identisch, es gäbe dann nur eine Strahlenfront und einen Strahl, d. h. es fände keine Doppelbrechung statt.

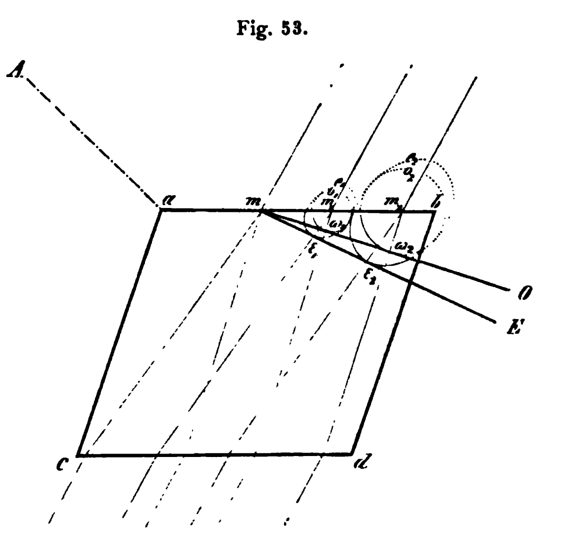
Ist dagegen die Eintrittsfläche parallel zur Axe (s. Fig. 52), so haben die beiden die einzelnen Wellenflächen berührenden Strahlenfronten OO und EE ihren größten Abstand voneinander, entsprechend der größten Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordinären und des extraordinären Strahles; da EE aber die Ellipse in dem Endpunkte einer Axe derselben berührt, so sind $m\varepsilon$, $m_1 \varepsilon_1$ usf. senkrecht zu EE; folglich haben auch in diesem Falle die beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen die gleiche Fortpflanzungsrichtung im Krystall. Denkt man sich daher planparallele Flächenpaare von verschiedener Neigung zur optischen Axe an einem Kalkspat angeschliffen und blickt durch je eines derselben nach einer kleinen hellen Öffnung hin, so würde diese Öffnung einfach erscheinen bei Benutzung des Flächenpaares senkrecht zur Axe (wenn also die Strahlen parallel der Axe durch den Kalkspat hindurchgehen); bei Anwendung der Flächen von geringerer Neigung zur Axe würden zwei Bilder erscheinen, deren Abstand mit abnehmender Schiefe zur Axe zunimmt, bei einer gewissen Richtung der Ein- und Austrittsfläche des Lichtes sein Maximum erreicht und dann wieder abnimmt, bis endlich, wenn man durch zwei der optischen Axe parallele Flächen hindurchblickt, beide Bilder einander überdecken.

Fig. 52.



Wenn Lichtstrahlen nicht senkrecht, sondern unter schiefer Incidenz auf eine ebene Fläche des Kalkspates auffallen, so ist der einfachste Fall der in Fig. 53 dargestellte, daß der Hauptschnitt zugleich die Einfallsebene ist, d. h. daß optische Axe, Normale der Eintrittsfläche und Strahlenrichtung in einer Ebene liegen. Es werden dann die Punkte m, m_1, m_2 der Eintrittsfläche zu verschiedenen Zeiten von den Wellenbewegungen erreicht; die Front des resultierenden ordentlichen Strahles ist alsdann die Tangentialebene durch mO senkrecht zum Hauptschnitte,

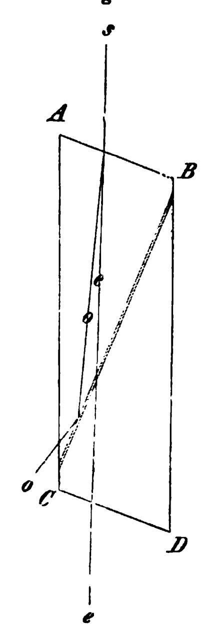
Fig. 53.



die des außerordentlichen die entsprechende Ebene durch mE; die ordinäre Wellenbewegung pflanzt sich also in der Richtung $m_1\omega_1$, $m_2\omega_2$, die extraordinäre parallel $m_1\varepsilon_1$, $m_2\varepsilon_2$ fort. Die Strahlenfront mE tangiert die einzelnen Ellipsoide e_1, e_2 in den Punkten ε_1, ε_2 und diese müssen in der Ebene des Hauptschnittes $abcd$ liegen, da in denselben auch die Rotationsaxe der Ellipsoide fällt, und dieser Hauptschnitt, der zugleich Einfallsebene des Lichtes ist, jedes der Sphäroide in zwei völlig symmetrische Hälften teilt.

Fällt dagegen die Einfallsebene des Lichtes nicht mit einem Hauptschnitte zusammen, so findet keine derartige symmetrische Halbierung der einzelnen Wellenflächen durch die Einfallsebene mehr statt, folglich berührt die Tangentialebene jene in Punkten, welche außerhalb der Einfallsebene des Lichtes liegen. Der außerordentliche Strahl, dessen Richtung die geradlinige Verbindung des Punktes auf dem Rotationsellipsoid, welcher von der Strahlenfront berührt wird, mit dem Mittelpunkte desselben ist, tritt somit aus der Einfallsebene des Lichtes in allen Fällen heraus, wo diese nicht mit einem Hauptschnitte zusammenfällt, während selbstverständlich der ordinäre stets in der Einfallsebene bleibt, da seine Wellenfläche, wie die des gewöhnlichen Lichtes, eine Kugel ist. In allen Fällen aber kann für jede beliebige Richtung des auffallenden Lichtes, wenn die Lage der von demselben getroffenen Fläche des Kalkspates bekannt ist, aus der Gestalt und Lage der Wellenfläche nicht nur die Richtung des entstehenden ordentlichen, sondern auch des außerordentlichen Strahles bestimmt werden.

Fig. 54.



Die nunmehr vollständige Kenntnis der Fortpflanzungsverhältnisse des Lichtes im Kalkspate gestattet jetzt die Erklärung der S. 39 erwähnten Vorrichtung zur Polarisation des Lichtes, des sogenannten Nicolschen Prismas[1]), welches folgendermaßen hergestellt wird: Man spaltet aus wasserhellem Kalkspate ein Rhomboeder, aus vier größeren und zwei kleineren Flächen bestehend, dessen Hauptschnitt die Form von $ABCD$ in Fig. 54 hat; dieses wird, nachdem die obere und untere Endfläche so abgeschliffen sind, daß sie 68° (statt 71°) mit den verticalen Kanten bilden, nach BC, senkrecht zum Hauptschnitte, durchsägt, die beiden Schnittflächen vollkommen eben gemacht und poliert, endlich beide Hälften in ihrer ursprünglichen Stellung mit Canadabalsam wieder aneinander gekittet. Trifft auf ein solches Prisma ein Lichtstrahl parallel seiner Längsrichtung (s in Fig. 54), so wird er in zwei verschieden gebrochene Strahlen zerlegt; der außerordentliche e bewegt sich in einer Richtung im Kalkspate,

1) Die neueren Verbesserungen des Nicolschen Prismas sollen in der III. Abteilung beschrieben werden.

in welcher sein Brechungsindex = 1,536 ist; ungefähr denselben Wert besitzt derjenige des Canadabalsams für jede Art von Schwingungen (da dieser ein optisch isotroper Körper ist), folglich wird der Strahl *e* fast ohne Ablenkung durch den Canadabalsam hindurchgehen. Dagegen wird der ordentliche Strahl *o* weit stärker abgelenkt, trifft also unter größerem Incidenzwinkel auf die Grenze von Kalkspat und Canadabalsam; da sein Brechungsindex im Kalkspat = 1,658, im Balsam = 1,536, so pflanzt er sich im ersten Medium mit geringerer Geschwindigkeit fort, als im zweiten, und nach S. 24 kann in einem solchen Falle das Licht nur dann aus dem ersten in das zweite eintreten, wenn der Einfallswinkel eine bestimmte Grenze nicht überschreitet. In dem beschriebenen Falle ist diese Grenze überschritten, folglich findet Totalreflexion des Strahles *o* statt, durch welche derselbe auf die Seitenflächen des Prismas geworfen und durch eine schwarze Fassung desselben absorbiert wird. Durch den Nicol hindurch gelangt also nur der im Hauptschnitte schwingende, senkrecht dazu polarisierte, extraordinäre Strahl.

S. 65 wurde angeführt, daß der Brechungsindex des ordentlichen Strahles im Kalkspate für das Licht einer bestimmten mittleren Farbe den constanten Wert $\omega = 1{,}6583$, derjenige des extraordinären, wenn die Fortpflanzungsrichtung senkrecht zur Axe sei, den am meisten von dem ersteren differierenden Wert $\varepsilon = 1{,}4864$ habe. Diese beiden Größen werden die Hauptbrechungsindices des Kalkspates für jene Farbe genannt. Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes der betreffenden Farbe in der Luft mit v, die des ordentlichen Strahles von derselben Schwingungsdauer mit v_o, endlich die Geschwindigkeit des extraordinären Lichtstrahles für die angegebene Richtung im Krystalle und die gleiche Farbe mit v_a, so ist nach der allgemeinen Definition des Brechungsindex (s. S. 24):

$$\omega = 1{,}6583 = \frac{v}{v_o}, \qquad \varepsilon = 1{,}4864 = \frac{v}{v_a}.$$

Daraus folgt das Verhältnis der beiden Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten

$$v_a : v_o = \omega : \varepsilon = \frac{1{,}6583}{1{,}4864} = 1{,}1157.$$

Dieses Verhältnis, welches nach S. 66 zugleich das Verhältnis der großen zur kleinen Axe der die Wellenfläche des außerordentlichen Strahles erzeugenden Ellipse ist, gilt für die Linie *D* im Spectrum, da die angeführten Zahlenwerte für ω und ε sich auf diese beziehen. Lichtstrahlen von anderer Schwingungsdauer liefern ein etwas abweichendes Axenverhältnis jener Ellipse. Bestimmen wir die Werte der beiden Hauptbrechungsindices im Kalkspate für Licht von geringerer Brechbarkeit, z. B. für die Linie *A* im Rot, so finden wir $\omega = 1{,}6499$, $\varepsilon = 1{,}4826$, das Verhältnis

$$v_a : v_o = \omega : \varepsilon = \frac{1{,}6499}{1{,}4826} = 1{,}1128,$$

also etwas kleiner. Umgekehrt ergibt sich für Licht größerer Brechbarkeit ein höherer Wert, z. B. ist für die Linie H im Violett $\omega = 1,6832$, $\varepsilon = 1,4977$, also das Verhältnis

$$v_a : v_o = \omega : \varepsilon = \frac{1,6832}{1,4977} = 1,1238.$$

Hieraus folgt, daß die Gestalt der Strahlenfläche sich mit der Farbe des Lichtes ändert, und zwar wird die Doppelbrechung größer mit abnehmender Wellenlänge.

Als Stärke der Doppelbrechung bezeichnet man gewöhnlich die Differenz der beiden Hauptbrechungsindices; diese beträgt für die genannten drei Farben:

Linie A: $\omega - \varepsilon = 0,1673$,
» D » 0,1719,
» H » 0,1855.

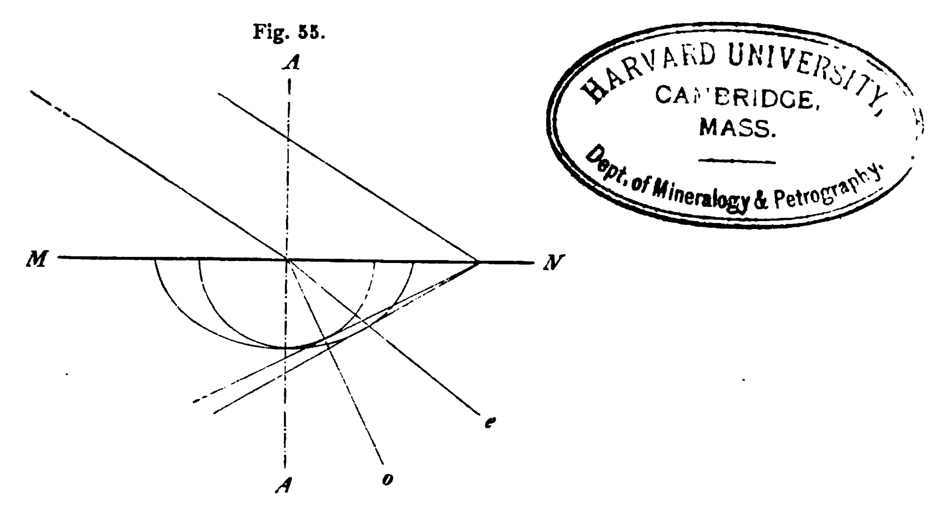
Doppelbrechung des Lichtes in andern einaxigen Krystallen. Die für den Kalkspat zuerst von Huyghens, wenn auch damals (i. J. 1678) nicht mit so genauen Zahlenwerten, wie es die oben angegebenen sind, festgestellte Tatsache, daß die Strahlenfläche des Lichtes in demselben aus einer Kugel und einem Rotationsellipsoide besteht, welches die erstere in den Endpunkten seiner Rotationsaxe berührt, ist später noch für zahlreiche andere Krystalle nachgewiesen worden. Alle diese haben mit dem Kalkspate gemeinsam, daß die Gestalt der Strahlenfläche von der Schwingungsdauer des Lichtes abhängt, aber die Art der Änderung derselben mit der Farbe ist für jede dieser Arten von Krystallen eine andere, ebenso wie auch die Werte der beiden Hauptbrechungsindices ω und ε für die gleiche Farbe bei verschiedenen hierher gehörigen krystallisierten Substanzen verschiedene sind. So gibt es unter ihnen solche mit höheren Werten von ω und ε, als die des Kalkspats, andere mit geringerer Brechbarkeit, ferner Krystalle mit starker (hierzu gehört der Kalkspat) und mit schwacher Doppelbrechung, in denen also ω und ε wenig verschieden sind (z. B. ist im Pennin $\omega - \varepsilon = 0,001$).

In jedem dieser Krystalle ist aber, wie im Kalkspate, die Richtung der Rotationsaxe des Sphäroids der Strahlenfläche, d. i. die Richtung ohne Doppelbrechung, für alle Farben die gleiche. Dieselben besitzen also nur eine optische Axe und werden deshalb optisch einaxige Krystalle genannt.

In einer Beziehung stimmt jedoch nur ein Teil der optisch einaxigen Krystalle mit dem Calcit überein, nämlich darin, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des extraordinären Strahles größer ist, als die des ordinären, während bei den übrigen das Umgekehrte der Fall ist. Die optisch einaxigen Krystalle zerfallen demnach in zwei Abteilungen: die erste, zu welcher der Kalkspat gehört, sind solche, deren Wellenfläche, nach dem Hauptschnitt halbiert, die Gestalt von Fig. 50 hat, nur daß bei der Mehrzahl derselben die Ellipse weit weniger vom Kreise abweicht, als es beim

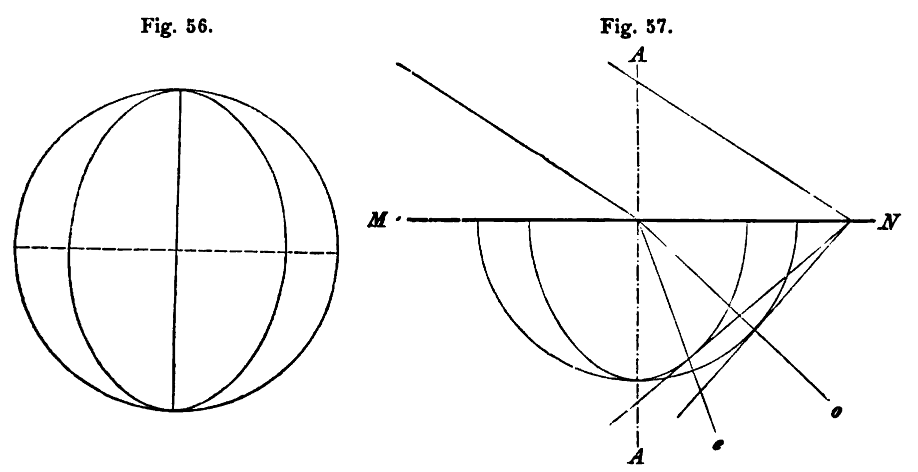
Calcit der Fall ist[1]). Wie aus Fig. 55 ersichtlich, wird in denselben der außerordentliche Strahl e stets, vom ordentlichen o aus gerechnet, von der optischen Axe AA weg gebrochen; man nennt dieselben deshalb repulsive oder negative Krystalle.

Fig. 55.



In einem Krystalle der zweiten Abteilung, wohin z. B. der Quarz gehört, hat die Wellenfläche im Hauptschnitte die Gestalt Fig. 56; die Geschwindigkeit, mit welcher sich der extraordinäre Strahl bewegt, ist nur in der Axe gleich der des ordentlichen, in jeder andern Richtung kleiner, sein

Fig. 56. Fig. 57.



Brechungsindex also größer. Aus Fig. 57 ist nun zu entnehmen, daß hier, umgekehrt wie bei den negativen Krystallen, der außerordentliche Strahl e, vom ordentlichen o aus gerechnet, nach der optischen Axe hin abgelenkt wird. Diese Krystalle nennt man deshalb optisch positive oder attractive.

[1]) Auch bei diesem ist die Differenz zwischen großer und kleiner Axe der Ellipse nicht so beträchtlich, wie sie der Deutlichkeit wegen in den Figuren angenommen worden ist.

Welcher der beiden Abteilungen ein optisch einaxiger Krystall auch angehöre, so läßt sich aus seiner Strahlenfläche die Fortpflanzungsrichtung eines beliebigen Strahles genau in derselben Weise durch die Huyghenssche Construction finden, wie es für den Kalkspat S. 67 f. gezeigt wurde. Auch in bezug auf die Schwingungsrichtungen der beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen gelten für alle einaxigen Krystalle die gleichen Gesetzmäßigkeiten, d. h. eine beliebig gerichtete Schwingung wird stets in eine ordinäre, in der Ebene des Hauptschnittes polarisierte und daher nach unserer früheren Annahme senkrecht zu dieser Ebene stattfindende, und eine extraordinäre zerlegt, deren Polarisationsebene die senkrecht zum Hauptschnitte durch den Strahl gelegte Ebene, und welche folglich nach der gleichen Annahme im Hauptschnitte und senkrecht zum Strahl gerichtet ist. Da der Hauptschnitt jedesmal durch die Richtungen des Strahles und der optischen Axe gegeben ist, beide aber aus der Gestalt der Strahlenfläche und aus ihrer Orientierung im Krystalle folgen, so liefert diese auch die Kenntnis der Schwingungsrichtung, bzw. die Polarisation, für jeden beliebigen Lichtstrahl.

Zur Bestimmung der Gestalt der Strahlenfläche ist die Messung der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des extraordinären Strahles erforderlich, wenn derselbe den Krystall einmal parallel, das andere Mal senkrecht zur Axe durchläuft; denn das Verhältnis dieser beiden Größen ist dasjenige der beiden Axen der die Strahlenfläche erzeugenden Ellipse, durch welches deren Gestalt vollständig bestimmt ist. Dieses Verhältnis ist aber, da die erstere Geschwindigkeit mit der des ordinären Strahles identisch ist, gleich $v_o : v_a$, d. h. das umgekehrte Verhältnis der beiden Hauptbrechungsindices ω und ε (vgl. S. 71). Man hat also nur nötig, den Brechungsindex des ordentlichen Strahles für eine beliebige Richtung und denjenigen des extraordinären, wenn er sich senkrecht zur optischen Axe fortpflanzt, zu messen, d. h. nach unserer Annahme: den Brechungsindex ω von Lichtschwingungen, welche senkrecht zur Axe stattfinden, und den Index ε der parallel zur Axe schwingenden Strahlen. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen:

1. Mittels eines Prismas, dessen brechende Kante parallel der optischen Axe ist. In einem solchen steht, wenn die S. 27 auseinandergesetzte Methode angewendet wird, die Einfallsebene des Lichtes senkrecht zur optischen Axe; es wird daher ein einfallender Strahl in zwei zerlegt, von denen der eine parallel der Axe, der andere senkrecht dazu schwingt; die Minimalablenkung des ersteren liefert nach der a. a. O. angegebenen Formel ε, diejenige des zweiten ω. Die beiden Strahlen können leicht durch ein vor das Auge gehaltenes Nicolsches Prisma unterschieden werden, denn wenn dessen Hauptschnitt der brechenden Kante des Prismas parallel ist, wird nur der außerordentliche Strahl hindurchgelassen, der ordinäre dagegen ausgelöscht.

2. Mittels eines Prismas, dessen brechende Kante senkrecht zur optischen Axe ist; hier muß aber die weitere Bedingung erfüllt sein, daß die

beiden Flächen des Prismas gleiche Winkel mit der Axe einschließen, damit die im Prisma sich fortpflanzenden Strahlen im Minimum der Ablenkung normal zur optischen Axe gerichtet sind (vgl. Fig. 20, S. 27, in welcher, auf diesen Fall angewendet, *Mm* die Richtung der optischen Axe sein würde). Alsdann ist nämlich wieder die Schwingungsrichtung des einen Strahles parallel, die des andern senkrecht zur Axe, und man kann auch mit einem derartigen Prisma ε und ω gleichzeitig bestimmen, indem man jeden der beiden Strahlen einzeln auf das Minimum seiner Ablenkung einstellt und aus der S. 27 gegebenen Formel den zugehörigen Brechungsindex berechnet.

3. Mittels des Totalreflectometers (s. S. 28f.) und einer beliebig gerichteten Platte des Krystalls. Hierbei erhält man zwei Grenzen der totalen Reflexion, weil der in der Grenzschicht sich fortpflanzende Strahl in zwei zerlegt wird, welche senkrecht zueinander schwingen und, entsprechend der Verschiedenheit ihrer Geschwindigkeit, auch verschiedene Winkel der totalen Reflexion besitzen. In der Ebene der Krystallplatte, dieselbe mag im Krystall orientiert sein, wie sie wolle, existiert immer eine Richtung, welche mit der optischen Axe 90° bildet; befestigt man nun die Platte so im Totalreflectometer, daß diese Richtung horizontal, d. h. parallel der Einfallsebene des Lichtes ist, so ist sie bei der totalen Reflexion die Richtung, in der sich das Licht fortpflanzt; ein senkrecht zur Axe im Krystalle sich fortpflanzender Strahl wird aber in zwei zerlegt, deren einer parallel, deren anderer senkrecht zur Axe schwingt. Die Einstellung der beiden Grenzen der totalen Reflexion liefert also ω und ε.

Wird die Bestimmung der beiden Hauptbrechungsindices nach einer dieser Methoden für zwei homogene Farben, z. B. für Lithiumrot und Natriumgelb, ausgeführt, so kann man aus den erhaltenen Zahlen die Brechungsindices für alle übrigen Farben berechnen nach der S. 33 angegebenen Dispersionsformel. Da aber die beiden senkrecht zueinander schwingenden Lichtstrahlen verschieden gebrochen und, wie die Erfahrung lehrt, auch stets ungleich dispergiert werden, so sind die Constanten A und B der Dispersionsformel natürlich für ω andere als für ε.

Außer der Bestimmung der Gestalt der Strahlenfläche für eine oder mehrere Farben bedarf es zur vollständigen optischen Kenntnis eines Krystalls noch der Feststellung der Orientierung seiner optischen Axe. Die Aufsuchung dieser Richtung geschieht mit Hilfe der Interferenzerscheinungen im convergenten polarisierten Lichte, daher diese im folgenden Abschnitte, und zwar im Anschluß an diejenigen im parallelen Lichte, behandelt werden sollen.

Verhalten einaxiger Krystalle im Polarisationsapparate. a) Im parallelen Lichte (Orthoskop). Bringen wir eine von zwei parallelen, zur optischen Axe senkrechten, natürlichen oder künstlichen ebenen Flächen begrenzte Krystallplatte horizontal auf den Krystallträger des Orthoskopes, so gehen durch dieselbe nur Lichtstrahlen in verticaler

Richtung, also parallel ihrer optischen Axe, hindurch. Dies ist aber die Richtung ohne Doppelbrechung, in welcher ein einaxiger Krystall sich verhält wie ein einfachbrechender Körper. Die Platte ändert demnach an der Polarisation der durchgehenden Strahlen nicht das geringste; sie erscheint ebenso dunkel, wie das übrige Gesichtsfeld, wenn die Hauptschnitte der beiden Nicols des Instrumentes unter einem rechten Winkel gekreuzt sind, ebenso hell bei paralleler Stellung der Nicols. Vollkommen dunkel erscheint aber natürlich im ersteren Falle die Platte nur dann, wenn keine andern Strahlen hindurchgehen, als solche, welche der optischen Axe genau parallel sind. Dies ist strenggenommen nur bei mikroskopischen Krystallen der Fall, weil durch größere Platten auch noch mehr oder weniger zur Axe geneigte Strahlen hindurchgelangen, welche eine Doppelbrechung und infolgedessen eine Aufhellung erfahren.

Sind die Ein- und Austrittsflächen am Krystall nicht senkrecht zur optischen Axe, so tritt auch für normal auf die Platte auffallende Strahlen, da diese nun einen von Null verschiedenen Winkel mit der optischen Axe bilden, Doppelbrechung ein. Jeder derselben wird in einen ordentlichen, senkrecht zum Hauptschnitte schwingenden und ohne Ablenkung hindurchgehenden Strahl einerseits und in einen extraordinären andererseits zerlegt, welcher, im Hauptschnitte schwingend und in derselben Ebene abgelenkt, beim Austritte aus der planparallelen Krystallplatte wieder so gebrochen wird, daß er seiner früheren Richtung, d. i. der Normale zur Ebene der Platte, von neuem parallel wird. Denken wir uns die ganze Krystallplatte von senkrecht einfallenden Strahlen beleuchtet, so werden von jeder Stelle der Austrittsfläche aus zwei Lichtstrahlen sich normal zu ihr fortpflanzen, ein ordinärer, senkrecht durch die Platte hindurchgegangener, und ein extraordinärer, welcher sich im Innern des Krystalls schief gegen die Ein- und Austrittsfläche bewegte, also von einem andern der einfallenden Strahlen herstammt, als der erstere. Diese beiden in der Luft sich in derselben Bahn fortpflanzenden Strahlen schwingen senkrecht zueinander und besitzen wegen der Verschiedenheit ihrer Geschwindigkeit im Krystall einen Gangunterschied, müssen also bei gekreuzten Nicols die S. 46—50 ausführlich behandelten Interferenzerscheinungen zeigen. Die Stärke der Doppelbrechung in der Krystallplatte hängt ab von der Neigung der Normale derselben zur optischen Axe; ist diese klein, so ist auch die Doppelbrechung gering, und es erscheinen die Farben niederer Ordnung; bei gleicher Dicke steigt mit zunehmender Größe jener Neigung die Farbenordnung und ist am höchsten bei einer der optischen Axe parallelen Platte, denn in dieser pflanzen sich die beiden Strahlen senkrecht zur Axe fort und erhalten daher den größten Gangunterschied[1]). Untersuchen wir Platten von verschiedener Dicke,

1) Wenn daher in einer aus einem Gesteine hergestellten, sehr dünnen planparallelen Platte, einem sogenannten »Gesteinsdünnschliffe«, Schnitte von einer Anzahl verschieden orientierter Krystalle eines optisch einaxigen Minerals liegen, so zeigen diese trotz ihrer gleichen Dicke nach obigem verschiedene Interferenzfarben, und zwar diejenigen Krystalle,

so steigt natürlich der Gangunterschied und mit diesem die Farbe, bei gleicher Neigung zur optischen Axe, proportional mit der Dicke, bis schließlich das Weiß der höheren Ordnung erscheint. Die Dicke der Platte, bei welcher dieses eintritt, ist aber offenbar um so größer, je kleiner der Winkel, welchen die Lichtstrahlen mit der optischen Axe einschließen, d. h. je geringer die Doppelbrechung ist; unter allen Platten, welche man sich in verschiedener Richtung aus einem Krystall herausgeschnitten denken kann, zeigen daher diejenigen parallel der Axe das Weiß der höheren Ordnung schon bei der verhältnismäßig geringsten Dicke.

Vergleichen wir Krystallplatten verschiedener Substanzen miteinander, so zeigen diese auch bei gleicher Dicke und gleicher Neigung zur optischen Axe eine verschiedene Interferenzfarbe; denn diese hängt natürlich noch ab von der specifischen Doppelbrechung einer jeden Substanz, d. h. von dem relativen Abstande der beiden Schalen ihrer Strahlenfläche. Ist diese gering, so gehört eine große Dicke der Krystallplatte oder eine erhebliche Neigung ihrer Normale zur optischen Axe dazu, um das Weiß der höheren Ordnung hervorzubringen; ein stark doppeltbrechender Krystall dagegen zeigt dasselbe schon bei geringer Dicke oder bei einem kleinen Winkel der Plattennormale zur Axe.

Endlich werden die Farbenerscheinungen, welche ein einaxiger Krystall im polarisierten Lichte darbietet, außer durch die aufgezählten Verhältnisse noch beeinflußt durch den Umstand, daß die Stärke der Doppelbrechung für die verschiedenen Farben nicht genau die gleiche ist (d. h. die ordinären und extraordinären Strahlen weißen Lichtes eine ungleiche Dispersion erfahren); daher zeigen dünne Platten einaxiger Krystalle kleinere oder größere Abweichungen von den normalen Interferenzfarben (vgl. S. 49) Am meisten macht sich dieser Umstand geltend bei sehr schwacher Doppelbrechung und kann hier sogar zu Erscheinungen führen, welche vollkommen verschieden von den sonst beobachteten sind. Werde z. B. die Doppelbrechung mit Zunahme der Brechbarkeit der Strahlen größer, sei aber so gering, daß sie für die am wenigsten brechbaren Farben, also für Rot, gleich Null ist, so wird eine sehr dünne Platte eines derartigen Krystalls nicht das ihrer eigentlichen, sehr geringen Doppelbrechung entsprechende Grau I. Ordnung zeigen, sondern eine sehr lebhafte Farbe, so daß es den Anschein hat, als ob es sich um eine sehr stark doppeltbrechende Substanz handelte. Da die Krystallplatte nämlich für Rot einfachbrechend ist, bleibt sie für diese Farbe zwischen gekreuzten Nicols in jeder Stellung dunkel, die roten Strahlen sind also vollständig vernichtet; nur eine geringe Aufhellung zeigt sie ferner für Orange und Gelb; etwas mehr Licht geht vom Grün hindurch, während für Blau und Violett der Gangunterschied bereits so groß ist, daß diese Farben auch nach der Interferenz noch eine gewisse Intensität besitzen; die letzteren müssen also in dem Farbeneindrucke stark

---

welche von dem Schliffe zufällig parallel der Axe durchschnitten sind, die höchsten in der Ordnung der S. 46 f. beschriebenen Polarisationsfarben.

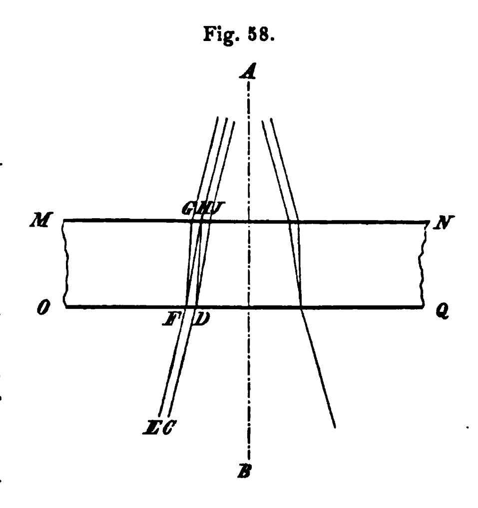


vorherrschen. Noch lebhafter muß die entstehende Interferenzfarbe sein, wenn die Doppelbrechung eine so schwache ist, daß sie bereits für eine mittlere Farbe, z. B. für Gelb, gleich Null wird; alsdann besitzt also der Krystall für die an entgegengesetzten Seiten des Spectrums liegenden Farben entgegengesetzten Charakter der Doppelbrechung, für die einen ist er positiv, für die andern negativ einaxig. Bringen wir nun eine dünne Platte eines solchen Krystalls so zwischen gekreuzte Nicols, daß ihre Schwingungsrichtungen 45° mit denen der letzteren bilden, so werden die gelben Strahlen, d. h. die hellsten im Spectrum, vollkommen ausgelöscht, weil der Krystall für diese einfachbrechend ist; für die benachbarten Farben Orange und Grün ist er nur sehr schwach doppeltbrechend, zeigt also für diese nur eine geringe Aufhellung, während die Doppelbrechung für die äußersten Teile des Spectrums, Rot einerseits, Blau und Violett andererseits, verhältnismäßig am stärksten ist, die Strahlen dieser Farben demnach einen merklichen Bruchteil einer halben Wellenlänge Gangunterschied erhalten. Die Folge davon ist, daß zwischen gekreuzten Nicols eine sehr lebhafte violette Interferenzfarbe erscheint (gewisse Varietäten des Minerals Gehlenit bieten ein ausgezeichnetes Beispiel für diese Erscheinung).

b) Im convergenten Lichte (Konoskop). Wie das Verhalten eines einaxigen Krystalls im parallelen polarisierten Lichte, so soll auch dasjenige im convergenten Lichte zuerst in bezug auf eine Platte, welche senkrecht zur optischen Axe geschnitten ist, betrachtet werden. Legen wir eine solche auf den Krystallträger des Konoskops (vgl. Fig. 35, S. 56) so auf, daß die optische Axe parallel der verticalen Axe des ganzen Apparates ist, und daß der Punkt f sich innerhalb des Krystalls befindet, so durchsetzen den letzteren unendlich viele Bündel, deren jedes aus untereinander parallelen Strahlen besteht, in allen möglichen Richtungen, welche innerhalb des Kegels, zwischen f und der sogenannten Sammellinse n, liegen. Einer dieser Strahlencylinder, nämlich derjenige, welcher vom Punkte c ausgeht und daher im Bilde genau in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint, geht parallel der optischen Axe des Krystalls durch denselben hindurch. Um die Veränderungen, welche alle diese verschieden gerichteten Strahlenbündel in der Platte erfahren, abzuleiten, betrachten wir zunächst diejenigen Strahlen, welche in einer verticalen, durch die optische Axe des Krystalles gehenden Ebene liegen. Eine solche nannten wir einen Hauptschnitt des einaxigen Krystalles, und dieser soll in Fig. 58 durch $MNOQ$ dargestellt sein. Setzen wir nun noch den Fall, daß die beiden Nicolschen Prismen des Instrumentes gekreuzt seien, daß ihre Polarisationsebenen mit dem Hauptschnitt $MNOQ$ Winkel von 45° bilden, und daß einfarbiges Licht durch den Apparat hindurchgehe. Die der optischen Axe des Krystalles, der Richtung AB, parallelen Lichtstrahlen werden nicht doppelt gebrochen, sondern gehen unverändert durch den Krystall; die Mitte des Bildes erscheint also dunkel, genau so, wie das ganze Gesichtsfeld bei gekreuzten

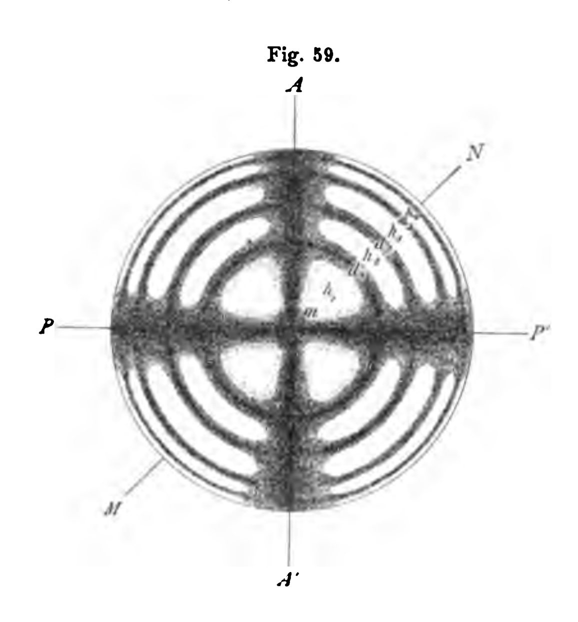
Nicols erscheinen würde, wenn keine Krystallplatte vorhanden wäre. Betrachten wir aber nun einen der Strahlencylinder, welche eine geringe Neigung gegen die Axe besitzen, so wird es unter diesen einen geben, z. B. denjenigen, zu welchem der Strahl *CD* gehört, für welchen das Folgende gilt: Derselbe wird im Krystall zerlegt in zwei Strahlen *DH* und *DJ* von verschiedener Geschwindigkeit, deren einer im Hauptschnitt *MNOQ*, der andere senkrecht dazu schwingt; ein anderer Strahl desselben Bündels, also parallel dem vorigen, *EF*, zerfällt ebenso in einen ordinären und einen extraordinären, *FG* und *FH*. Von *H* aus gehen also zwei Strahlen in derselben Bahn weiter, aus derselben Lichtquelle, welche linear polarisiertes Licht aussandte, nämlich aus dem betreffenden Punkte der hellen Öffnung *de* in Fig. 35 herstammend, aber senkrecht zueinander polarisiert; von diesen Schwingungen wird vom oberen Nicol nur je die auf dessen Schwingungsebene entfallende Componente hindurchgelassen, es tritt also der in Fig. 32, S. 43, dargestellte Fall ein, und wenn die Neigung der Strahlen zur optischen Axe des Krystalls derart ist, daß der Gangunterschied für die Lichtstrahlen *DH* und *FH* gerade gleich einer halben Wellenlänge derjenigen Farbe beträgt, mit welcher das Instrument beleuchtet ist, so werden sich diese Strahlen durch die Interferenz nach S. 43 zur Summe ihrer Componenten zusammensetzen. Da unter den parallelen Strahlen, welche den Krystall in derselben Richtung durchsetzen, zu jedem einzelnen ein zweiter zu finden ist, welcher zu ihm in dem Verhältnis steht, daß der ordinäre des einen mit dem extraordinären des andern in derselben Weise interferiert, so wird an dem Punkte des im Konoskope sichtbaren Bildes, in welchem sich alle diese Strahlen vereinigen, und der etwas von der Mitte des Bildes entfernt ist, die der Summe jener Componenten entsprechende Helligkeit erscheinen. Stelle Fig. 59 (S. 80) das im Polarisationsapparate gesehene Bild dar, seien *AA'* und *PP'* die Schwingungsrichtungen der beiden gekreuzten Nicols, *MN* die Richtung des Hauptschnittes *MNOQ* der vorigen Figur, so ist *m* die dunkle Mitte des Bildes, h_1 die helle Stelle, an welcher sich die zuletzt besprochenen Strahlen vereinigen. Die Stellen zwischen *m* und h_1 entsprechen den Vereinigungspunkten von Strahlencylindern, welche eine geringere Neigung gegen die optische Axe besitzen, so daß der im Krystall erhaltene Gangunterschied weniger als $\frac{1}{2}\lambda$ ist; solche Strahlen werden sich bei der Interferenz zusammensetzen zu einer Wellenbewegung von anderem Schwingungszustande,

Fig. 58.



deren Intensität kleiner sein muß, als die Summe der Intensitäten der einzelnen Strahlen (s. S. 14), ihr aber um so mehr sich nähert, je näher wir h_1 kommen, d. h. je weniger sich der Gangunterschied von $\frac{1}{2}\lambda$ unterscheidet. Die Helligkeit muß also von h_1 aus nach der Mitte zu, wo sie gleich Null ist, allmählich abnehmen. Strahlen in dem Hauptschnitte MN, welche einen größeren Winkel mit der optischen Axe des Krystalls, als die in h_1 sich vereinigenden, bilden, zerfallen durch die Doppelbrechung in je zwei Strahlen, deren Geschwindigkeitsdifferenz eine größere als bei jenen ist, da der außerordentliche Strahl eine um so mehr von derjenigen des ordentlichen abweichende Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt, je mehr er gegen die Axe geneigt ist. Es werden sich also in einem Punkte d_1, auf der Geraden MN weiter von der Mitte entfernt, alle Strahlen vereinigen, deren Richtung im Krystalle so lag, daß der aus jedem entstehende ordinäre und extraordinäre einen Gangunterschied $= \lambda$ erhielten. Diese beiden Schwingungen zweier verschiedener Strahlen, und ebenso aller andern paarweise, müssen aber nach S. 11 bei der Interferenz zwischen gekreuzten Nicols einander vollständig vernichten. Der Punkt d_1 wird daher ebenso dunkel erscheinen, wie die Mitte des Bildes, und die Helligkeit wird von h_1 nach d_1 hin allmählich abnehmen, jenseits desselben aber wieder zunehmen, da der Punkt h_2 der Vereinigung derjenigen Strahlen entspricht, welche so geneigt durch den Krystall hindurchgingen, daß der Gangunterschied der beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen $= \frac{3}{2}\lambda$ ist, also wieder Summierung der beiden Componenten bei der Interferenz stattfindet. Dasselbe ist der Fall bei h_3, wo der Gangunterschied $= \frac{5}{2}\lambda$ ist, usf. Wenn wir also, von der Mitte m des Bildes ausgehend, die Intensität des Lichtes auf der Geraden MN betrachten, so beobachten wir einen fortwährenden Wechsel von Hell und Dunkel, wobei die Entfernung der Lichtminima und -maxima mit der Entfernung von der Mitte immer kleiner wird, weil bei größerer Schiefe gegen die optische Axe nicht nur die Geschwindigkeitsdifferenz der beiden interferierenden Strahlen, sondern auch die Länge des Weges wächst, welchen sie im Krystall zurückzulegen haben, so daß derselben Differenz in der Neigung eine größere Verschiedenheit

Fig. 59.



in der Verzögerung des einen Strahles bei denjenigen entspricht, welche einen größeren Winkel, als bei solchen Strahlen, welche einen kleineren Winkel mit der optischen Axe bilden.

Da die optisch einaxigen Krystalle sich gegen alle Lichtstrahlen vollkommen gleich verhalten, welche denselben Winkel mit der optischen Axe einschließen, so müßten dieselben Maxima und Minima des Lichtes nach allen Seiten in demselben Abstande von der Mitte des Bildes aus vorhanden sein; denn was für den Hauptschnitt MN Fig. 59 gilt, muß ganz ebenso für jeden andern Hauptschnitt, welcher mit PP' einen beliebigen andern Winkel bildet, gelten. Es müßten demnach genau kreisförmige helle und dunkle Ringe die Mitte des Gesichtsfeldes umgeben. Die hellen Ringe können indes nicht an allen Stellen gleiche Intensität besitzen, weil die letztere der Summe zweier Amplituden entspricht, welche, wie aus den Fig. 31—33, S. 43 hervorgeht, ein Maximum für die zu AA' und PP' diagonalen Hauptschnitte besitzen, nach beiden Seiten abnehmen und für die beiden AA' und PP' parallelen Hauptschnitte gleich Null werden. Infolgedessen muß parallel AA' und PP' ein dunkles Kreuz erscheinen, wie auch unmittelbar aus der Erwägung hervorgeht, daß für eine beliebige Neigung innerhalb einer dieser beiden Ebenen stets nur ein Strahl zustande kommt (weil die dazu senkrechte Componente Null ist), dieser aber in einem der beiden Nicolschen Prismen total reflectiert wird. Alle auf einem um die Mitte gezogenen Kreise beobachteten Erscheinungen entsprechen gleichsam denjenigen, welche im parallelen polarisierten Lichte eine Platte von der gleichen Dicke und Schiefe zur optischen Axe nacheinander zeigt, wenn sie um 360° gedreht wird; die Stellen, in welchen der Kreis die Arme des dunkeln Kreuzes schneidet, entsprechen genau den vier Dunkelstellungen einer solchen Platte. Fig. 59 stellt demnach das bei gekreuzten Nicols entstehende Interferenzbild dar, welches wir beobachten, wenn wir das Instrument mit einfarbigem Lichte beleuchten.

Wählen wir jedoch zur Beleuchtung Licht von einer andern Farbe, z. B. mit größerer Wellenlänge, so wird offenbar, wenn die Stärke der Doppelbrechung für diese Farbe ungefähr ebenso groß ist wie für die vorige, eine größere Neigung der Strahlen gegen die optische Axe nötig sein, um denselben einen Gangunterschied von einer ganzen (nunmehr größeren) Wellenlänge zu verleihen, als vorher; der Abstand des ersten dunkeln Ringes von der Mitte, und ebenso der folgenden vom ersten, wird also größer sein, als bei der früheren Farbe. Je kleiner die Wellenlänge des zur Beleuchtung benutzten Lichtes ist, desto enger werden die Ringe sein, welche wir im Polarisationsinstrumente erblicken, je größer dagegen jene ist, desto weiter werden diese sein.

Benutzen wir nun statt des einfarbigen Lichtes weißes, indem wir durch den Spiegel des Konoskops das Licht einer hell erleuchteten Stelle des Himmels in das Innere desselben reflectieren lassen, so werden diejenigen Strahlen, welche den Krystall in einer bestimmten Neigung zu seiner Axe

durchsetzen, derartig interferieren, daß für eine bestimmte Farbe der Gangunterschied genau λ beträgt, diese also zwischen gekreuzten Nicols ausgelöscht wird, während die andern um so weniger geschwächt werden, je mehr ihre Wellenlänge von jener abweicht. Das an der betreffenden Stelle des Bildes erscheinende Licht wird also nach der Vernichtung einer gewissen Farbe nicht mehr Weiß, sondern eine Mischfarbe zeigen. Diese Farbe wird für alle Strahlen, welche gleiche Neigung gegen die optische Axe des Krystalls haben, gleich sein, demnach werden alle Punkte des Interferenzbildes gleiche Farbe zeigen, welche gleichweit vom Centrum entfernt sind; dagegen alle von verschiedener Entfernung verschiedene Farbe. Bei gekreuzten Nicols erscheinen also farbige Ringe von einem schwarzen Kreuz durchschnitten (s. Taf. II, Fig. 1).

Bei parallelen Nicols interferieren die Strahlen mit dem entgegengesetzten Gangunterschiede, d. h. mit demjenigen, mit welchem sie aus dem Krystalle austreten; infolgedessen erscheint statt des schwarzen Kreuzes ein weißes, und in jedem einzelnen Abstande von der Mitte ist gerade diejenige Farbe verlöscht, welche bei gekreuzten Nicols im Maximum ist; die farbigen Ringe des Interferenzbildes mit schwarzem Kreuze sind demnach bei gleichem Durchmesser genau complementär denen des Bildes mit weißem Kreuze gefärbt.

Die krummen Linien eines Interferenzbildes, welche in allen ihren Punkten die gleiche Farbe zeigen, nennt man »isochromatische Curven«; diejenigen einer optisch einaxigen Platte, senkrecht zur Axe, sind also genaue Kreise, deren gemeinschaftliches Centrum der Richtung der Axe entspricht. Dadurch, daß wir durch zwei parallele Flächen eines Krystalls hindurch die kreisförmigen isochromatischen Curven mit dem dunkeln Kreuze (bei $\perp$ Nicols) sehen, ist der Krystall, da nur optisch einaxige diese Erscheinung zeigen, nicht nur als ein solcher erkannt, sondern auch die Richtung seiner optischen Axe als normal zu jenem Flächenpaar bestimmt.

Da alle in der optischen Axe einander schneidenden Hauptschnitte in bezug auf das Verhalten des Krystalls gegenüber den Strahlen des Lichtes vollkommen gleichwertig sind, muß das von einer solchen Platte im Konoskope gelieferte Interferenzbild vollkommen unverändert bleiben, wenn die Platte in ihrer eignen Ebene gedreht wird. Nur die Drehung eines Nicols ändert dasselbe und führt es, wenn dieselbe 90° beträgt, in das complementäre Bild mit weißem Kreuz über.

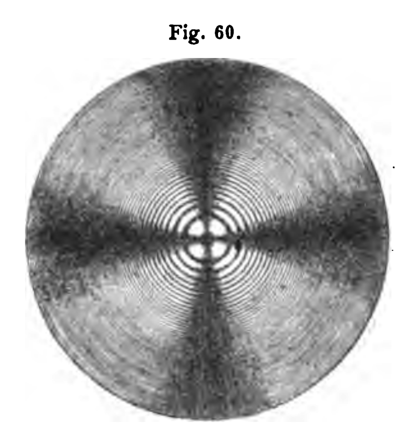
Die Farben, welche das in Fig. 1, Taf. II, dargestellte Interferenzbild zeigt, sind offenbar dieselben, welche S. 45f. ausführlich betrachtet worden sind[1]; denn wenn wir von der Mitte nach dem Rande des Bildes vorschreiten, so gelangen wir an die Vereinigungspunkte von Strahlen, welche

---

1) Mit denjenigen, meist kleinen Abweichungen, welche durch die Verschiedenheit der Stärke der Doppelbrechung für verschiedene Farben bewirkt wird (vgl. S. 49 und 77).

im Krystalle eine von Null anfangende (in der Mitte) und fortwährend steigende Doppelbrechung erfahren, d. h. wir beobachten nebeneinander die Interferenzerscheinungen, welche uns nacheinander eine Reihe von Platten des Krystalls zeigen würde, wenn wir mit einer senkrecht zur Axe geschnittenen beginnen und dann solche folgen lassen würden, welche eine zunehmende Neigung ihrer Normalen zur Axe, verbunden mit einer dieser Neigung entsprechenden Zunahme der Dicke, besitzen. Fallen innerhalb des Gesichtsfeldes des Konoskopes noch Strahlen, welche eine genügend große Anzahl von Wellenlängen gegeneinander im Krystall verzögert wurden, so tritt natürlich das Weiß der höheren Ordnung auf. Während also im monochromatischen Lichte eine Krystallplatte von starker Doppelbrechung das in Fig. 60 dargestellte Interferenzbild zeigt, d. h. immer enger werdende helle und dunkle Ringe bis an den Rand des Gesichtsfeldes oder bis zu solcher Feinheit, daß sie nicht mehr unterschieden werden können, liefert dieselbe Platte im weißen Lichte nur eine beschränkte Zahl von Ringen, da diejenigen mit den Farben fünfter und sechster Ordnung sich schon sehr wenig von Weiß unterscheiden, und jenseits derselben ein allmählicher Übergang in das gleichmäßig hellgrau erscheinende Gesichtsfeld stattfindet. Hier entspricht also ein um die Mitte gezogener Kreis gleichsam einer im polarisierten Lichte in ihrer Ebene gedrehten Platte von so starker Doppelbrechung, daß sie zwischen den vier Dunkelstellungen nur eine einfache Aufhellung ohne Farbe zeigt.

Fig. 60.



Bisher ist ein Umstand noch außer acht gelassen, nämlich die Dicke der Krystallplatte. Nehmen wir statt der bisher betrachteten Platte, welche wir immer gleich dick voraussetzten, eine andere von derselben optisch einaxigen Substanz, ebenfalls senkrecht zur Axe, aber nur von halber Dicke, so werden die beiden in dieser durch die Doppelbrechung aus einem entstehenden Strahlen bei derselben Neigung gegen die Axe nur einen halb so langen Weg im Krystalle zurücklegen, also auch der eine nur halb so viel gegen den andern verzögert werden, als vorher. Derselbe Gangunterschied, welcher die gleiche Interferenz bedingt, kann also erst für Strahlen eintreten, welche eine weit größere Neigung gegen die Axe besitzen; es kann also z. B. in einfarbigem Lichte der erste dunkle Ring des Interferenzbildes erst in viel größerem Abstande von der Mitte entstehen, ebenso bei weißem Lichte jeder Ring von gleicher Farbe. Die isochromatischen Curven, die ein einaxiger Krystall zeigt, sind demnach um so weiter voneinander abstehend, je dünner die untersuchte Platte ist — um so enger, je dicker dieselbe gewählt wird.

Vergleichen wir endlich noch die Farbenringe, welche gleich dicke Platten verschiedener Substanzen zeigen, so finden wir sie infolge der Ungleichheit der Stärke der Doppelbrechung, welche verschiedenen Körpern zukommt, verschieden in ihrer Weite. In einem Krystalle von schwächerer Doppelbrechung, in welchem die Differenz der Geschwindigkeit des ordentlichen und des außerordentlichen Strahls eine geringe ist, werden die Strahlen stärker gegen die optische Axe geneigt sein müssen, um je eine Wellenlänge Gangunterschied zu erhalten, also die Farbenringe des Interferenzbildes weiter sein müssen, als in einem Krystalle von stärkerer Doppelbrechung bei gleicher Dicke[1]). Als ein Beispiel einer Substanz, welche sehr starke Doppelbrechung besitzt, deren Platten demnach, wenn sie nicht sehr dünn sind, stets enge Farbenringe zeigen, dient der Kalkspat. Ist die Doppelbrechung einer optisch einaxigen Substanz sehr schwach und gleichzeitig die Verschiedenheit ihrer Stärke für die verschiedenen Farben merklich abweichend, wie es z. B. bei dem Minerale Apophyllit der Fall ist, so ergeben sich hieraus beträchtliche Abweichungen der Farben in den Ringen der Interferenzfigur von der normalen Scala der Farben 1., 2., 3., . . . Ordnung. Denn wenn in einem bestimmten Abstande von der Mitte des Gesichtsfeldes der erste dunkle Ring für Rot erscheint, und derjenige für Blau, welcher wegen der kleineren Wellenlänge bei gleicher Doppelbrechung näher der Mitte auftreten müßte, infolge geringerer Doppelbrechung für letztere Farbe und daraus sich ergebender Erweiterung der Ringe, an derselben Stelle — so müssen hier Rot und Blau vernichtet werden, also Gelb erscheinen; etwas weiter nach der Mitte zu, wo sonst Blau ausgelöscht wird und Rot auftritt, wird ersteres nun eine solche Intensität besitzen, daß es mit letzterem gemischt Violett gibt. So entstehen Farbenringe, in denen das Rot meist ganz fehlt, und in gewissen Krystallen des genannten Minerals decken sich die dunkeln Ringe für alle Farben so nahe, daß anscheinend nur weiße und schwarze Ringe zustande kommen (daher man diese Varietät Leukocyklit genannt hat). Einzelne Krystalle von Apophyllit gehören zu den bereits S. 78 erwähnten Substanzen von so geringer Doppelbrechung, daß sie für die Farben, welche das eine Ende des Spectrums bilden, positiv, für die des andern Endes negativ doppeltbrechend sind, in den ersteren sich der ordinäre, in den letzteren der extraordinäre Strahl schneller fortpflanzt, so daß es eine Farbe dazwischen gibt, für welche sie einfachbrechend sind (ohne deshalb zu den optisch isotropen Krystallen zu gehören, da diese alle Farben einfach brechen, jene aber für alle übrigen Farben wirklich einaxig sind).

Platten parallel oder schräg zur optischen Axe werden bei der Beobachtung im convergenten Lichte, wenn dasselbe weiß ist, nach dem

---

1) Hieraus ersieht man, daß die Weite der Ringe dazu dienen kann, den Brechungsindex des außerordentlichen Strahles zu bestimmen, wenn derjenige des ordinären bekannt ist (s. über diese Methode Zeitschr. f. Kryst. 7, 394).

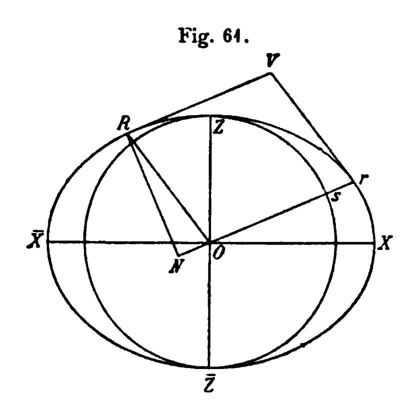
S. 50 Auseinandergesetzten nur bei sehr geringer Dicke Farbenerscheinungen liefern können. Eine solche Platte wird in der Mitte des Gesichtsfeldes die gleiche Farbe erzeugen, welche man im parallelen Lichte durch dieselbe beobachtet; die Strahlen, welche dagegen die Platte in geneigter Richtung durchsetzen, werden zwar sämtlich eine wachsende Weglänge im Krystalle zurücklegen, aber nicht einen in demselben Verhältnis wachsenden Gangunterschied erhalten, da nach gewissen Richtungen hin, wenn sie sich nämlich der optischen Axe nähern, der Unterschied der Geschwindigkeit der beiden Strahlen fortwährend abnimmt, also trotz zunehmender Weglänge auch der Gangunterschied sich vermindert. In senkrecht zu diesen geneigten Richtungen wird sich, wenn die Platte der Axe parallel ist, die Geschwindigkeitsdifferenz nicht ändern, also mit wachsender Neigung, wobei die Dicke der durchstrahlten Schicht zunimmt, auch der Gangunterschied wachsen. In dazwischen liegenden Richtungen werden beide Wirkungen sich aufheben und der Gangunterschied für alle Neigungen gegen die Normale der Platte derselbe bleiben. Es entstehen so im homogenen Lichte dunkle und helle Streifensysteme, welche im allgemeinen hyperbolische Form haben; im weißen Lichte sind dieselben farbig, aber nur bei sehr geringer Dicke der Platte sichtbar, da bei größerer Dicke nur noch das Weiß höherer Ordnung zustande kommt. Von besonderem praktischen Interesse für die Krystallographie ist nur die Erscheinung, welche eine nicht sehr schief, nicht über 35—40° gegen die normal zur optischen Axe stehende Ebene geneigte Platte zeigt; bei einer solchen werden nämlich im convergenten Lichte bei großem Gesichtsfelde des Polarisationsinstrumentes noch solche Strahlen innerhalb desselben vereinigt werden, welche in der Richtung der Axe durch den Krystall gehen. Man wird demnach nahe dem Rande des Gesichtsfeldes das Interferenzbild der Axe, das schwarze Kreuz mit den Farbenringen (wenn auch letztere nicht mehr genau kreisförmig) erblicken. Nach dieser Richtung hin, unter spitzem Winkel gegen die Normale zur Platte geneigt, befindet sich demnach diejenige der optischen Axe, zu deren Auffindung jene Erscheinung dienen kann.

Die Umwandlung des Mikroskopes in ein Konoskop (s. S. 57) ist dann besonders vorteilhaft zur Erkennung der optischen Einaxigkeit, wenn z. B. in einem Gesteinsschliffe (s. S. 76 Anm.) eine Anzahl verschieden orientierter Durchschnitte eines Minerales sichtbar sind, von denen die meisten doppeltbrechend erscheinen, während einige beim Drehen zwischen gekreuzten Nicols dunkel bleiben. Gehören dieselben einem optisch einaxigen Minerale an, so müssen die letzterwähnten Durchschnitte solche sein, deren optische Axe zufällig senkrecht zur Ebene des Schliffes gerichtet ist, und müssen daher bei Anwendung convergenten Lichtes das oben beschriebene Axenbild der farbigen Ringe mit schwarzem Kreuze zeigen.

Optisch zweiaxige Krystalle.

Ableitung der optischen Eigenschaften der Krystalle von einer Bezugsfläche (optische Indexfläche oder Indicatrix). S. 67 f. sind die optischen Eigenschaften der einaxigen Krystalle hergeleitet worden aus ihrer Strahlenfläche, d. h. derjenigen doppelten Oberfläche, deren Radien vectoren den Geschwindigkeiten der ihnen parallel sich fortpflanzenden Strahlen entsprechen. Außer in der optischen Axe durchschneidet jeder dieser Radien vectoren die Oberfläche zweimal, d. h. in derselben Bahn pflanzen sich zwei Strahlen mit verschiedener Geschwindigkeit fort, deren Strahlenfronten die Tangentialebenen der doppelten Oberfläche an den beiden Durchschnittspunkten sind. Wie bereits S. 68 erwähnt und aus den Figg. 51 f. zu ersehen ist, steht die Front des ordinären Strahls stets senkrecht zu diesem, diejenige des extraordinären jedoch im allgemeinen nicht, da die Tangente an eine Ellipse nur dann normal zum Radius vector ist, wenn letzterer mit einer der beiden Hauptaxen der Ellipse coincidiert. Während also für den ordinären Strahl die Frontnormale (auch »Wellennormale« genannt) mit dem Strahle zusammenfällt, ist dies beim extraordinären im allgemeinen nicht der Fall.

Fig. 61.



Es sei nun in Fig. 61 ein Hauptschnitt der Strahlenfläche eines einaxigen Krystalls dargestellt; sei Or ein beliebiger Radius vector der Wellenfläche des außerordentlichen Strahles, rV die Tangente an die Ellipse im Punkte r, endlich OR der dieser Tangente parallele Radius vector, so ist die Tangente der Ellipse in R, nämlich RV, parallel Or; Or und OR sind alsdann zwei sog. »conjugierte« Radien der Ellipse, für welche der Satz gilt, daß die Fläche des Parallelogramms $ORVr$ constant ist und zwar gleich der des Parallelogramms $OX \cdot OZ$, d. h. gleich dem Product aus den beiden Halbaxen der Ellipse. Zieht man RN senkrecht zu Or, so ist, wie leicht einzusehen, die Fläche von $ORVr$ auch gleich dem Rechtecke, welches man erhält, wenn man von O und r aus Senkrechte bis an die Tangente RV errichtet, d. h. gleich dem rechtwinkeligen Parallelogramm $Or \cdot RN$. Somit ist für jede Richtung des Strahles die Fläche $Or \cdot RN$ gleich dem constanten Producte $OX \cdot OZ$, welches der Einheit gleichgesetzt werden kann, folglich

$$Or = \frac{OX \cdot OZ}{RN} = \frac{1}{RN}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines beliebigen außerordentlichen Strahles, d. i. die Länge Or, ist also umgekehrt proportional der Länge der

Geraden, welche im Punkte R sowohl zur Ellipse (folglich auch zum Sphäroide), als auch zum Strahle senkrecht steht. Diese Gerade RN ist aber nach unserer früheren Annahme (S. 64 Anm.[1]) zugleich die Schwingungsrichtung des Strahles Or; denn dessen Polarisationsebene ist die dazu normale Ebene, senkrecht zum Hauptschnitte durch die Richtung des Strahles Or gelegt.

Durch den Punkt R auf dem Rotationsellipsoide sind somit Fortpflanzungsrichtung, Geschwindigkeit und Polarisation eines extraordinären Strahles Or vollkommen bestimmt. Man hat nur an dem betreffenden Punkte die Normale zur Oberfläche, d. i. die Normale zur Tangentialebene an dieser Stelle, zu ziehen und erhält nun die Richtung des zugehörigen Strahles, wenn man aus dem Mittelpunkte eine Senkrechte auf jene Normale fällt; durch diese beiden Geraden sind aber alle drei genannten, die Eigenschaften des Strahles charakterisierenden Elemente gegeben.

Zu irgendeinem Radius vector Or eines Rotationsellipsoides gibt es aber zwei Normalen der Fläche, welche zugleich senkrecht zu dem Radius vector stehen; die eine ist RN, die andere ist die in O errichtete Senkrechte zu dem in Fig. 61 dargestellten Hauptschnitte, welche stets in der Äquatorialebene des Ellipsoides liegt und daher die constante Länge OX besitzt, wie auch Or im Hauptschnitte geneigt sei. Diese zweite Normale steht nun offenbar in der gleichen Beziehung zum ordinären Strahle Os, wie RN zum extraordinären Or, denn sie ist nach unserer Annahme die Schwingungsrichtung des ersteren, und da ihre Länge $= OX$, das Product $OX \cdot OZ$ aber constant (oder $= 1$) ist, also OZ proportional $\frac{1}{OX}$, so ist die Geschwindigkeit des zugehörigen Strahles ($Os = OZ$) der Länge OX jener Normale umgekehrt proportional.

Die Verhältnisse des ordinären, wie des extraordinären Strahles von einer beliebigen Richtung können daher abgeleitet werden aus einer einzigen Oberfläche, einem Sphäroide, dessen Rotationsaxe sich zu dem Durchmesser ihres Äquators oder Kreisschnittes[1]) verhält, wie die reciproken Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von parallel und senkrecht zur Axe stattfindenden Lichtschwingungen, d. h. (nach S. 71) wie die beiden Hauptbrechungsindices ε und ω. Diese Fläche soll deshalb die **optische Indexfläche** oder **Indicatrix** genannt werden. Dieselbe hat für einen negativ einaxigen Krystall die Form eines Sphäroids, dessen Rotationsaxe dem kleinsten Durchmesser entspricht, dagegen für einen Krystall mit positiver Doppelbrechung, d. h. wenn $\varepsilon > \omega$, die Form derjenigen Oberfläche, welche durch Rotation einer Ellipse um ihre große Axe erzeugt wird.

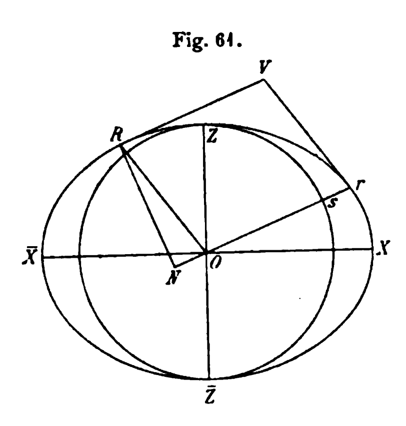
1) So soll der durch die Mitte gelegte Schnitt senkrecht zur Rotationsaxe genannt werden, welcher offenbar (wie jeder ihm parallele) die Form eines Kreises hat.

Aus dieser Fläche, welche also durch die beiden Hauptbrechungsindices des Krystalls gegeben ist und daher für eine andere Farbe auch ein anderes Axenverhältnis besitzt, leiten sich die optischen Eigenschaften desselben in einer beliebigen Richtung in folgender Weise her:

Dem der betreffenden Richtung parallelen Durchmesser derselben entsprechen im allgemeinen zwei Punkte auf der Oberfläche, in welchen die Normale zur Fläche zugleich senkrecht zu jenem Durchmesser steht; in der Richtung des letzteren pflanzen sich also zwei Strahlen fort, deren Schwingungsrichtungen jene beiden Normalen sind, und deren Geschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten, wie die Längen, welche der Strahl auf den beiden Normalen abschneidet. Nur ein Durchmesser, die Rotations- d. h. die optische Axe, verhält sich anders; ihm entsprechen unendlich viele Punkte auf der Indexfläche, denn an jedem Punkte ihrer Äquatorialebene steht die Normale der Oberfläche zu demselben senkrecht; der Axe parallel pflanzen sich also Strahlen fort, deren Schwingungen in allen möglichen, senkrecht zu ihr stehenden Richtungen stattfinden. Kurz: jedem Durchmesser (Strahl) entsprechen zwei Schwingungsrichtungen, nur der Axe entsprechen unendlich viele Schwingungsrichtungen.

Umgekehrt entspricht jedem Punkte der Indexfläche eines einaxigen Krystalls im allgemeinen ein Strahl; die Richtung desselben ist die desjenigen Durchmessers, welcher die an dem Punkte errichtete Normale der Fläche senkrecht durchschneidet; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles ist umgekehrt proportional dem Abschnitte auf der Normale zwischen der Fläche und dem Strahle; die Polarisationsebene des Strahles steht senkrecht zu derselben Normale, d. h. letztere ist seine Schwingungsrichtung. Liegt der gegebene Punkt weder in der Äquatorialebene der Indexfläche, noch an einem Ende der optischen Axe, so liegt die ihm entsprechende Schwingungsrichtung in der durch Axe und Strahl gelegten Ebene, d. h. im Hauptschnitte, der Strahl ist also ein extraordinärer. Wenn der Punkt an einem Ende der Axe liegt, z. B. in Fig. 61 R mit Z zusammenfällt, so wird die Richtung des zugehörigen Strahles unbestimmt, weil die Normale zur Oberfläche dann durch die Mitte geht, also auch die Punkte N und O zusammenfallen; dem Punkte Z entsprechen also alle in der Äquatorialebene sich fortpflanzenden extraordinären Strahlen, welche sämtlich die Schwingungsrichtung OZ und die Geschwindigkeit OX besitzen. Liegt dagegen der gegebene Punkt auf dem »Kreisschnitte« der Indexfläche, so geht die an ihm errichtete Normale der Fläche ebenfalls durch deren Mitte, und die Rich-

Fig. 61.



tung des Strahles wird auch hier unbestimmt, d. h. einem solchen Punkte entsprechen unendlich viele Strahlen, welche sich in dem dazu senkrechten Hauptschnitte fortpflanzen, sämtlich normal zu dieser Ebene schwingen und daher die constante Geschwindigkeit OZ besitzen, denn diese ist umgekehrt proportional der Länge OX der Normalen; diese Strahlen sind, da ihre Schwingungsrichtung senkrecht zum Hauptschnitte, sämtlich ordinäre. Während also den beiden Punkten am Ende der Axe unendlich viele, im Äquatorialschnitte sich fortpflanzende extraordinäre Strahlen entsprechen, gehören zu jedem Punkte des Äquatorialkreises unendlich viele in einem Hauptschnitte sich fortpflanzende ordinäre Strahlen, und da es unendlich viele Punkte der zweiten Art gibt, so besitzt die Indexfläche unendlich viele ihnen entsprechende gleichwertige Hauptschnitte, welche einander sämtlich in der Axe schneiden.

Die analoge optische Bezugsfläche für einfachbrechende Körper ist eine Kugel, denn für solche ist $\omega = \varepsilon$, d. h. der Brechungsindex nach allen Richtungen der gleiche. An jedem Punkte der Indexfläche geht alsdann die auf der Oberfläche errichtete Normale durch die Mitte, und die Richtung des Strahles wird unbestimmt, d. h. alle Strahlen der betreffenden Schwingungsrichtung, wie sie sich auch in der dazu senkrechten Ebene fortpflanzen, haben die gleiche Geschwindigkeit, sind also ordinäre. Da aber die Normalen an allen Punkten auf der Oberfläche die gleiche Länge besitzen, so gilt die Geschwindigkeit für alle Ebenen im Krystall, daher es in einem solchen nur ordentliche Strahlen geben kann.

Ebenso wie die Indexfläche der einfachbrechenden Krystalle denjenigen speciellen Fall der einaxigen darstellt[1]), in welchem der Durchmesser parallel zur Axe gleich ist dem senkrecht dazu, so könnte man die Indexfläche der einaxigen Krystalle wiederum als einen speciellen Fall eines noch allgemeineren auffassen, nämlich einer Indexfläche, deren Durchmesser nach allen drei Dimensionen des Raumes verschieden sei. Dies wäre dann ein sog. dreiaxiges Ellipsoid mit drei zueinander senkrechten ungleichen Hauptaxen; und zwar müßten die Längen der drei Hauptaxen proportional dem Brechungsindex der den Endpunkten einer jeden entsprechenden Strahlen sein. In einem solchen Ellipsoide, wie es in Fig. 62 S. 90 abgebildet ist, stehen die drei Hauptaxen an ihren Endpunkten senkrecht zur Oberfläche, also gehen die Normalen der Oberfläche an diesen sechs Punkten (und an keinen weiteren) durch die Mitte des Ellipsoides. Einem solchen Punkte entsprechen also, genau wie einem Punkte auf dem Äquatorialkreise

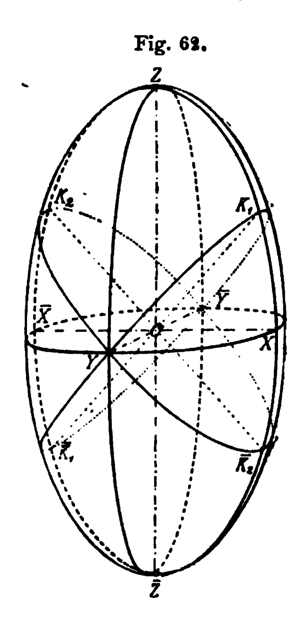
1) Wie S. 77 f. erwähnt, gibt es einaxige Krystalle, welche für eine gewisse Farbe einfachbrechend sind. Hier tritt also dieser specielle Fall ein, d. h. die Indexfläche ist für Licht von der betr. Schwingungsdauer eine Kugel, für die übrigen Farben ein Rotationsellipsoid, und zwar teils ein verlängertes (bei positiver Doppelbrechung), teils ein plattgedrücktes (bei negativer Doppelbrechung). Bei den meisten optisch einaxigen Krystallen sind dagegen die Indexflächen für die verschiedenen Farben von einer und derselben Art und unterscheiden sich nur durch ihr Axenverhältnis.



der einaxigen Indexfläche, unendlich viele, in dem dazu senkrechten Hauptschnitte gelegene, ordinäre Strahlen von gleicher Geschwindigkeit und Schwingungsrichtung; während aber dort unendlich viele derartige optische Hauptschnitte existieren, sind hier nur deren drei möglich, welche zu den drei Hauptaxen des Ellipsoides senkrecht stehen, und da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ordinären Strahlen innerhalb eines solchen Hauptschnittes umgekehrt proportional der dazu senkrechten Halbaxe, deren Länge aber jedesmal eine andere ist, so besitzen diese Strahlen in jedem der drei Hauptschnitte einen andern Brechungsindex. Diese drei Brechungsindices, durch welche also die Gestalt der Indexfläche bestimmt ist, nennt man die drei Hauptbrechungsindices, die Schwingungsrichtungen dieser drei Arten von ordinären Strahlen, welche also nichts anderes sind, als die Richtungen der drei Hauptaxen des Ellipsoides, die Hauptschwingungsrichtungen.

Bezeichnen wir die drei Hauptbrechungsindices mit α, β, γ, von denen α der kleinste, β der sog. mittlere (derselbe kann näher an α oder an γ liegen), γ der größte sein soll, und construieren das in Fig. 62 parallelperspectivisch dargestellte dreiaxige Ellipsoid mit den drei Halbaxen $OX = \alpha$, $OY = \beta$, $OZ = \gamma$, so wird dieses durch jeden der drei optischen Hauptschnitte $XZ\bar{X}\bar{Z}$, $XY\bar{X}\bar{Y}$, $YZ\bar{Y}\bar{Z}$ in einer andern Ellipse geschnitten, und jeder dieser drei Schnitte teilt die ganze Form in zwei gleiche und entgegengesetzte Hälften; es sind »Symmetrieebenen« (s. S. 20) derselben, was für keine weitere Ebene gilt. Ein beliebiger, durch die Mitte gelegter Schnitt hat ebenfalls im allgemeinen die Gestalt einer Ellipse, deren Axenverhältnis aber mit der Orientierung der schneidenden Ebene wechselt; nur zwei Ebenen sind außer den drei Hauptschnitten noch dadurch von besonderer Bedeutung, daß sie die Oberfläche nicht in einer Ellipse, sondern in einem Kreise schneiden. Dies ergibt sich aus folgender Betrachtung: Der Hauptschnitt $XY\bar{X}\bar{Y}$ des dreiaxigen Ellipsoides Fig. 62 ist eine Ellipse, deren große und kleine Axe sich verhalten wie der mittlere zum kleinsten Hauptbrechungsindex; ein Schnitt durch $Y\bar{Y}$, geneigt zu jener Ebene, ist offenbar (wegen der Symmetrie der Form) ebenfalls eine Ellipse, deren eine Axe $Y\bar{Y}$ und deren andere Axe ein Radius vector der Hauptschnittellipse $XZ\bar{X}\bar{Z}$ ist; diese Radien vectoren haben aber je nach der Neigung alle möglichen Werte zwischen OX (= dem kleinsten Hauptbrechungsindex α) und OZ (= dem größten γ); folglich muß es dazwischen einen Radius vector OK_1 geben, welcher gleich dem mittleren Hauptbrechungsindex β ist;

Fig. 62.



die dem letzteren entsprechende Schnittcurve $YK_1\overline{YK_1}$ besitzt zwei gleiche Axen, d. h. sie ist ein Kreis. Einem solchen nähern sich die Ellipsen für geringere Neigungen, indem ihre kleine Axe, je mehr sie sich der Richtung OK_1 nähert, immer ähnlicher der großen wird, während für größere Neigungen die in der Ebene $XZ\overline{XZ}$ liegende Axe die größere und $Y\overline{Y}$ nun die kleinere wird, bis endlich nach einer Drehung von 90°, d. h. für den Schnitt $YZ\overline{YZ}$, der größte Wert der variabeln Axe eintritt. Von da an nimmt derselbe nach der andern Seite wieder ab und erreicht in der Richtung OK_2, welche wegen der Symmetrie des dreiaxigen Ellipsoides nach den drei Hauptschnitten denselben Winkel mit OZ bildet wie OK_1, wieder den Wert OY. Demnach besitzt das dreiaxige Ellipsoid zwei Kreisschnitte, $YK_1\overline{YK_1}$ und $YK_2\overline{YK_2}$, welche einander in der mittleren Axe unter einem Winkel schneiden, der von den beiden durch dieselbe Axe gehenden Hauptschnitten halbiert wird. Die Schnitte durch $X\overline{X}$ sind sämtlich Ellipsen, deren kleine Axe α, deren große wechselt von β bis γ, während die Schnitte durch $Z\overline{Z}$ Ellipsen darstellen, deren große Axe γ ist und deren kleine von α bis β variiert; in beiden Fällen können also die Ellipsen niemals die Form eines Kreises annehmen.

Ein dreiaxiges Ellipsoid, dessen Eigenschaften im vorstehenden charakterisiert sind, würde nun den allgemeinsten Fall einer optischen Indexfläche darstellen, denn es würde in diejenige eines einaxigen Krystalls übergehen, d. h. in ein Rotationsellipsoid, wenn zwei seiner Hauptaxen gleich groß werden, in diejenige eines einfachbrechenden Krystalles, d. h. in eine Kugel, wenn alle drei Hauptaxen denselben Wert annehmen. In der Tat zeigt sich nun, daß, wenn man statt der beiden letzterwähnten speciellen Fälle ein derartiges Ellipsoid mit drei ungleichen Axen als Bezugsfläche zugrunde legt und daraus die Strahlenfläche in derselben Weise herleitet, wie es bei den einaxigen Krystallen geschah, sich für diese eine Form ergibt, welche den optischen Eigenschaften aller derjenigen Krystalle entspricht, die weder einfachbrechend noch optisch einaxig sind. Da deren Indexfläche zwei Kreisschnitte besitzt, so sind die beiden zu diesen normalen Richtungen in gewissem Sinne analog der optischen Axe der einaxigen Krystalle, der Normale auf den dort einzigen Kreisschnitt; man bezeichnet sie deshalb auch als »optische Axen« und nennt die Krystalle, deren Strahlenfläche sich aus einem dreiaxigen Ellipsoide als Indexfläche herleitet, optisch zweiaxige Krystalle.

Strahlenfläche der optisch zweiaxigen Krystalle. Die zu einem dreiaxigen Ellipsoide als Indexfläche [1]) zugehörige Strahlenfläche erhält

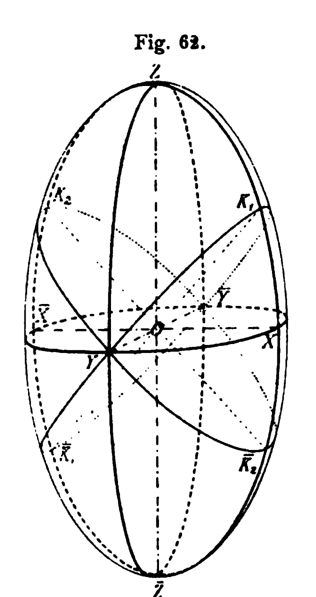
---

1) Diese Fläche wurde von Cauchy das »Polarisationsellipsoid«, von Billet, Verdet u. a. »ellipsoide inverse (des élasticités = des vitesses)«, von Mac Cullagh das »Indexellipsoid«, von Stefan »Ellipsoid der gleichen Arbeit«, von Kirchhoff »Elasticitätsellipsoid«, von Fletcher endlich, dem wir hier im wesentlichen folgen, »Indicatrix« genannt. Der Name »Indexfläche« wurde übrigens von einigen Autoren einer andern Bezugsfläche, deren wir hier nicht bedürfen, beigelegt.



man, wenn man zu jedem Punkte derselben den ihm entsprechenden Strahl, d. h. denjenigen Durchmesser aufsucht, welcher senkrecht zu der in dem Punkte errichteten Normale der Indexfläche steht; diesem Strahl entspricht dann im allgemeinen noch ein zweiter Punkt auf der Oberfläche, in welchem die Normale der letzteren ebenfalls senkrecht zu ihm steht, und auf diesen beiden Normalen schneidet der Strahl zwei Längen ab, deren reciproke Werte die Geschwindigkeiten der den beiden Normalen parallel schwingenden Lichtbewegungen sind, welche sich in der Richtung des betreffenden Durchmessers fortpflanzen. So erhalten wir parallel jedem Radius vector der Indexfläche zwei Längen und für alle Richtungen schließlich eine doppelte Oberfläche, von welcher zunächst die Form ihrer Durchschnitte mit den drei Hauptschnitten der Indexfläche betrachtet werden soll.

Fig. 62.



Es möge mit dem Hauptschnitte $XZ\bar{X}\bar{Z}$ Fig. 62 begonnen werden. In diesem pflanzen sich unendlich viele ordinäre Strahlen fort, welche dem Punkte Y der Indexfläche entsprechen, denn deren Normale in Y, als dem Endpunkte einer ihrer Hauptaxen, geht durch die Mitte, daher die Richtung der zugehörigen Strahlen unbestimmt wird; diese Strahlen haben die Schwingungsrichtung OY und pflanzen sich daher mit einer Geschwindigkeit proportional $1/\beta$ fort; wenn wir also um O einen Kreis mit einem dieser Größe proportionalen Radius OB beschreiben, so erhalten wir den Ort, bis zu welchem alle ordinären Strahlen von O aus in der gleichen Zeit gelangt sind, und dieser Kreis bildet die eine Durchschnittscurve der Strahlenfläche mit dem Hauptschnitte $XZ\bar{X}\bar{Z}$ (vgl. Fig. 64). Um die andere, den in derselben Ebene sich fortpflanzenden extraordinären Strahlen angehörige Durchschnittscurve zu erhalten, beginnen wir mit dem Punkte X der Indexfläche: diesem entsprechen, da er ebenfalls Endpunkt einer Hauptaxe ist, unendlich viele Strahlen in der dazu senkrechten Ebene $YZ\bar{Y}\bar{Z}$, welche sämtlich die Schwingungsrichtung OX und folglich die Geschwindigkeit $1/\alpha$ haben, welche als reciproker Wert des kleinsten Index die größte Lichtgeschwindigkeit in dem betreffenden Krystalle ist. In der Ebene $YZ\bar{Y}\bar{Z}$ hat die Strahlenfläche demnach einen Durchschnitt, welcher die Form eines Kreises mit dem Radius $OA = 1/\alpha$ hat (vgl. Fig. 65 S. 94). Zu diesen Strahlen gehört auch derjenige parallel OZ, also erhalten wir in dieser Richtung einen zweiten Punkt der Strahlenfläche, wenn wir in Fig. 64 eine Länge OA proportional der größten Lichtgeschwindigkeit auftragen. Die beiden Längen OA und OB verhalten sich also zueinander, wie der mittlere zum kleinsten Hauptbrechungsindex. Gehen wir nun auf der

Ellipse XZ der Indexfläche von X aus zu benachbarten Punkten über, so erhalten wir z. B. den zu R Fig. 63 zugehörigen Strahl Or in der bekannten Weise; derselbe hat die Schwingungsrichtung RN, und seine Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional der Länge RN. Diese, die Entfernung der Tangente an die Ellipse in R von dem ihr parallelen Radius vector Or, ist offenbar größer als $\alpha = OX$, denn die letztere Länge, die Entfernung der Tangente in X von dem ihr parallelen Radius vector OZ, ist die kleinste überhaupt existierende; folglich ist der reciproke Wert $\frac{1}{RN}$ kleiner als die Länge OA in Fig. 64, da diese proportional $1/\alpha$ gemacht wurde. Wir haben also in der zu Or parallelen Richtung eine Strecke OH (s. Fig. 64) aufzutragen, welche entsprechend kürzer als OA ist. In derselben Richtung pflanzt sich aber, wie wir a. vor. S. sahen, ein zweiter Strahl mit der Geschwindigkeit proportional $1/\beta$ fort, welcher dem Punkte Y auf der Indexfläche entspricht, demnach muß der Punkt H dem Punkte B auf OH näher sein, als A dem auf OA liegenden Punkte B. Je weiter nun R (Fig. 63) von X entfernt ist, desto kleiner wird der zugehörige Radius der Strahlenfläche (Fig. 64); und wenn R mit Z zusammenfällt, so coincidiert N mit O und Or mit $O\overline{X}$, d. h. die Geschwindigkeit des in der Richtung OX sich fortpflanzenden Strahles, dessen Schwingungsrichtung parallel OZ, ist proportional $1/\gamma$, d. i. die kleinste im Krystalle. Für die im Hauptschnitte $XZ\overline{X}\overline{Z}$ schwingenden extraordinären Strahlen wechselt daher die Geschwindigkeit, wenn die Fortpflanzungsrichtung von OZ bis OX wechselt, von OA bis OC (Fig. 64); diese beiden Längen verhalten sich wie $\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\gamma} = \gamma : \alpha$. Denken wir uns nun, der Symmetrie der Indexfläche entsprechend, in allen vier, zwischen den Axen $X\overline{X}$ und $Z\overline{Z}$ liegenden Quadranten die sich ergebenden Längen aufgetragen, so erhalten wir als Durchschnitt der Strahlenfläche mit dem Hauptschnitte $XZ\overline{X}\overline{Z}$ für den extraordinären Strahl eine Ellipse, deren Axen proportional dem größten und kleinsten Brechungsindex, für den ordinären Strahl aber einen Kreis mit dem Durchmesser proportional $1/\beta$. Infolge dieses Verhältnisses der Durchmesser der beiden Curven müssen

Fig. 63.

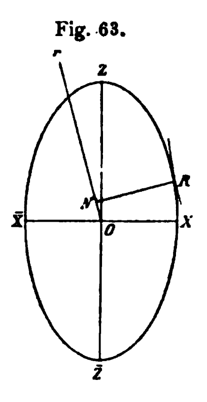
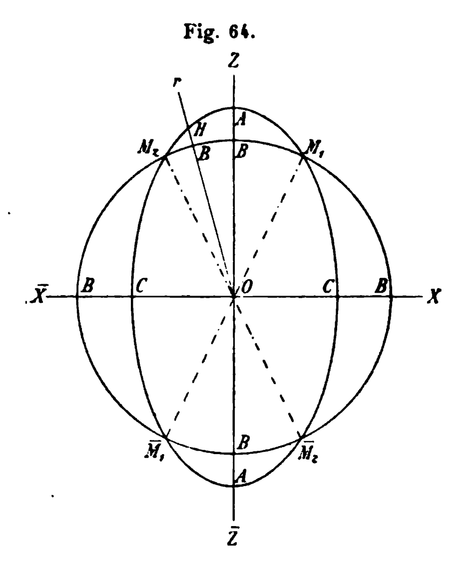


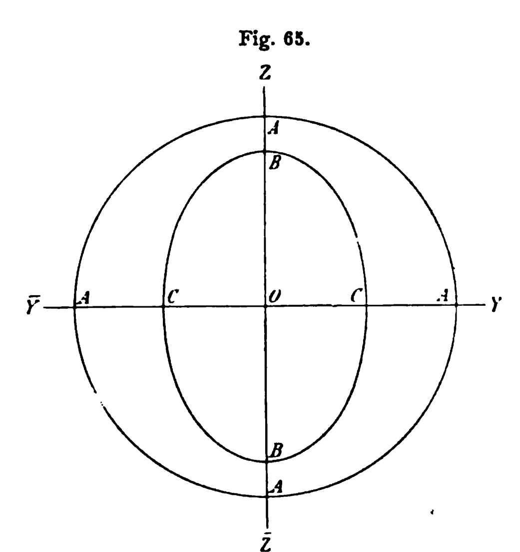
Fig. 64.



sich dieselben viermal schneiden, und daher zwei Richtungen $M_1\overline{M_1}$ und $M_2\overline{M_2}$ existieren, in welchen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden Strahlen gleich groß ist. Da in diesen Richtungen eine Länge zugleich Radius vector für beide Schalen der Strahlenfläche ist, so hat man dieselben Biradialen genannt; sie führen außerdem den Namen »Strahlenaxen« oder »secundäre optische Axen«, zum Unterschiede von den im vorigen Abschnitte genannten beiden Richtungen, den sog. »primären optischen Axen«, welche in derselben Ebene liegen und ebenfalls gewisse Analogien mit der »optischen Axe« der einaxigen Krystalle darbieten.

Was nun den Durchschnitt der Strahlenfläche mit dem zweiten Hauptschnitte $YZ\overline{Y}\overline{Z}$ betrifft, so wurde bereits gezeigt, daß eine Curve desselben ein Kreis mit dem Radius proportional der größten Lichtgeschwindigkeit sei. Die zweite Curve hat einen variabeln Radius vector. Denn wenn wir vom Punkte Y der Indexfläche ausgehen, so entspricht diesem in der Richtung OZ ein extraordinärer Strahl mit der Schwingungsrichtung OY und folglich mit der Geschwindigkeit proportional $\frac{1}{\beta}$ $= OB$ (Fig. 65); Punkten, auf demselben Hauptschnitte der Indexfläche zwischen Y und Z gelegen, entsprechen größere Längen der Normalen (da die Normale in Y unter allen dieses Hauptschnittes die kürzeste ist), also kleinere Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der zugehörigen Strahlen; in Z endlich ist die Normale der Indexfläche am längsten, die parallel OZ schwingenden und sich in der Richtung OY fortpflanzenden Strahlen haben also die kleinste Geschwindigkeit OC. Von den in dem Hauptschnitte $YZ\overline{Y}\overline{Z}$ sich ausbreitenden Lichtstrahlen gelangen also die extraordinären in einer bestimmten Zeit bis zu einer Ellipse, deren Axen sich verhalten, wie die mittlere zur kleinsten Lichtgeschwindigkeit, d. h. wie der größte Brechungsindex zum mittleren, während die ordinären sich bis zu einem Kreise mit dem Radius proportional der größten Lichtgeschwindigkeit, d. i. dem reciproken Werte des kleinsten Brechungsindex, ausgebreitet haben. Der Kreis umgibt also die Ellipse, ohne sie zu berühren.

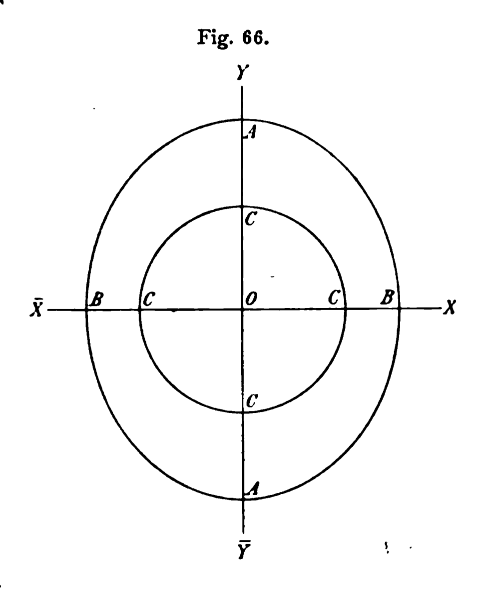
Fig. 65.



Dem dritten Hauptschnitte $XY\overline{X}\overline{Y}$ entsprechen die beiden in Fig. 66 dargestellten Curven. Die eine derselben ist ein Kreis mit dem Radius OC;

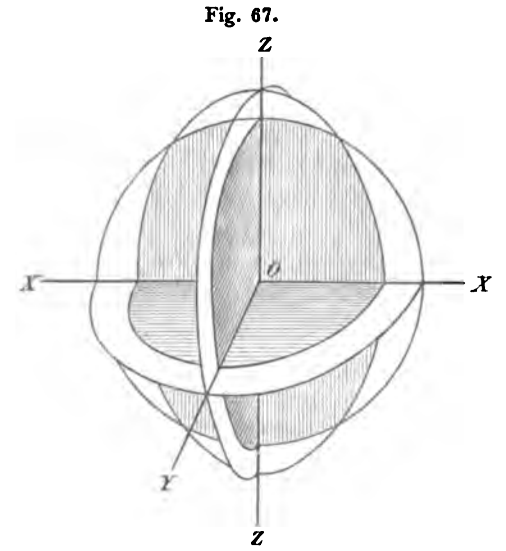
er enthält alle dem Punkte Z auf der Indexfläche entsprechenden Strahlen, welche sämtlich die Schwingungsrichtung OZ und folglich die constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit OC proportional $1/\gamma$ besitzen. Der in derselben Richtung, wie einer dieser ordinären Strahlen, sich fortpflanzende extraordinäre hat stets eine größere Geschwindigkeit, da er einem Punkte auf der Indexfläche entspricht, welcher im Hauptschnitte $XY\bar{X}\bar{Y}$ liegt, daher die daselbst errichtete Normale länger ist, als OZ (die kürzeste überhaupt existierende). Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der extraordinären Strahlen in diesem Hauptschnitte erreicht ihr Maximum OA für den parallel OX schwingenden Strahl, also in der Richtung OY, ihr Minimum OB für die Schwingung parallel OY, d. h. in der Richtung OX. Die den ordinären Strahlen entsprechende Durchschnittscurve der Strahlenfläche liegt also gänzlich innerhalb der Ellipse, deren Radien vectoren die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der außerordentlichen Strahlen darstellen.

Fig. 66.



Um einen mehr zusammenhängenden Eindruck (soweit dies ohne ein Modell möglich ist) von der aus der Indexfläche abgeleiteten Gestalt der ganzen Strahlenfläche zu geben, bis zu welcher sich also nach einer bestimmten Zeit eine in der Mitte beginnende Lichtbewegung von einer bestimmten Farbe fortgepflanzt hat, möge das perspectivische Bild Fig. 67 dienen, in welchem der innerhalb der innersten Schale liegende Raum schraffiert, der zwischen beiden Schalen liegende dagegen weiß gelassen ist.

Fig. 67.

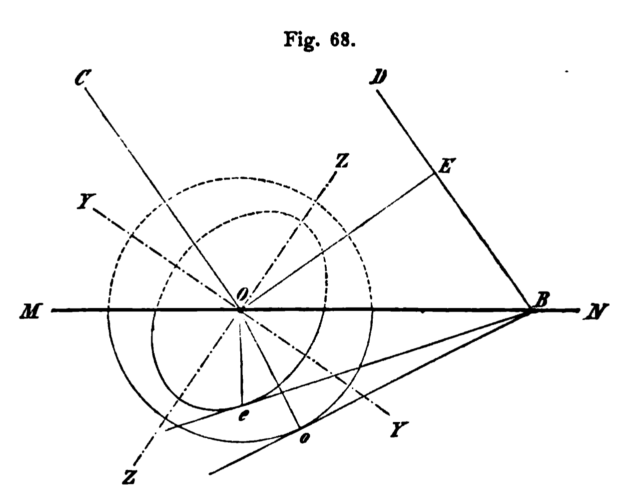


Diese doppelte Oberfläche wurde zuerst, wenn auch auf einem etwas andern Wege, von Fresnel abgeleitet, von ihm »Wellenfläche« genannt und gezeigt, daß die optischen Eigenschaften der zweiaxigen Krystalle durch

dieselbe vollständig zu erklären seien. Aus diesem Grunde wird sie auch vielfach als »Fresnelsche Fläche« bezeichnet[1]).

Wie aus dem Vorhergehenden sich ergibt, ist ihre Gestalt vollständig bestimmt, wenn man die größte, mittlere und kleinste Lichtgeschwindigkeit und deren Richtungen im Krystalle kennt. Deren Bestimmung vorausgesetzt (die Methoden derselben werden im nächsten Abschnitte besprochen), können wir die Richtung, in welcher jeder beliebig gerichtete, in den Krystall eintretende Strahl gebrochen wird, mittels der Huyghensschen Construction ebenso bestimmen, wie dies S. 67 f. für einaxige Krystalle geschehen ist. Führt man die Construction aus für einen Strahl, dessen Einfallsebene mit einem der drei Hauptschnitte zusammenfällt, z. B. für die parallelen Strahlen DB bis CO (deren Strahlenfront OE), Figur 68, und deren Einfallsebene || YOZ ist, so werden die Strahlenfronten der beiden durch Doppelbrechung entstehenden Lichtbewegungen im Momente, in welchem DB in den Krystall eindringt, die Tangentialebenen von B aus an die beiden Schalen der Strahlenfläche sein, und man sieht leicht, daß, wegen der symmetrischen Gestalt der letzteren in bezug auf den Hauptschnitt YOZ, die beiden Berührungspunkte o und e in demselben Hauptschnitte liegen, also auch die beiden Strahlen Oo und Oe zwar abgelenkt werden, aber den Hauptschnitt YOZ nicht verlassen. Ist jedoch die Einfallsebene keinem der drei Hauptschnitte parallel, so wird, bei analoger Construction wie vorher, der ihr parallele Durchschnitt der Strahlenfläche diese in ungleiche Hälften teilen, so daß die vor und hinter der Ebene der Zeichnung liegenden Hälften nicht symmetrisch zu dieser Ebene liegen. Die Punkte, in denen die Tangentialebenen, welche die gebrochenen Strahlenfronten darstellen, die beiden Schalen der Strahlenfläche berühren, liegen alsdann nicht mehr in der Zeichnungsebene, sondern vor oder hinter dieser. Die gebrochenen Strahlen sind demnach beide aus der

Fig. 68.

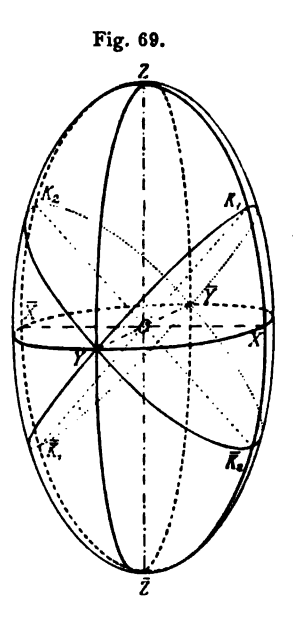


---

1) Modelle der »Fresnelschen Wellenfläche in Gyps sind zu beziehen von M. Schilling in Halle a. S., in Messingdraht nach Angaben des Verfassers von Böhm und Wiedemann in München (s. Anhang). Die zugehörigen Indexflächen, in polierten zerlegbaren Holzmodellen dargestellt, liefert G. J. Pabst in Nürnberg (s. ebenda).

Einfallsebene abgelenkt, d. h. keiner derselben folgt mehr dem Brechungsgesetze für gewöhnliches Licht, beide sind extraordinär. Einen ordinären Strahl (neben einem außerordentlichen) erhalten wir also nur dann, wenn die Einfallsebene einem der drei Hauptschnitte parallel ist. Da man mittels der auf dem Brechungsgesetze für gewöhnliches Licht beruhenden Methoden die Lichtgeschwindigkeit im allgemeinen nur von solchen Strahlen bestimmen kann, welche jenem Gesetze folgen, also von ordentlichen, so sind durch die soeben dargelegte Eigenschaft der zweiaxigen Krystalle zugleich die bequemsten Methoden angegeben, in einem solchen die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen (das Nähere darüber s. im nächsten Abschnitte).

Fig. 69.

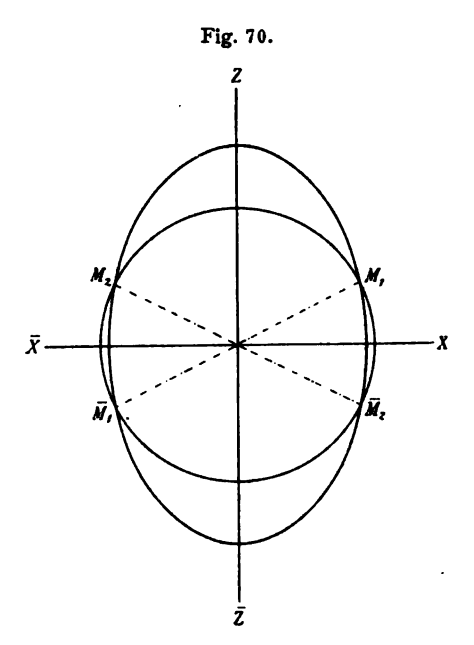


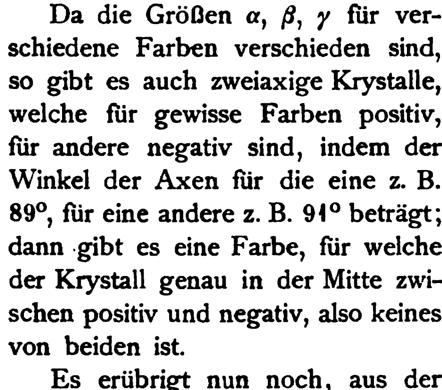
Den vorstehenden Betrachtungen und den Figuren 62—66 ist ein speciëlles Beispiel zugrunde gelegt, in welchem der Wert des mittleren Brechungsindex β näher an demjenigen des kleinsten α, als an dem des größten γ liegt. Die Gestalt der Indexfläche Fig. 69 nähert sich daher — und dies würde, wenn die Differenz zwischen β und α noch kleiner wäre, in noch höherem Grade der Fall sein — der Form eines Sphäroids mit OZ als Rotationsaxe, und sie geht in ein solches über, wenn $\alpha = \beta$, d. h. $OX = OY$. Da dieser Grenzfall einem positiven optisch einaxigen Krystalle entspricht, so bezeichnet man auch diejenigen zweiaxigen Krystalle als positive, bei denen β näher an α als an γ ist. Je weniger verschieden aber die Längen OX und OY sind, einen desto kleineren Winkel bildet der mit OY gleich lange Radius vector OK_1 mit OX, desto kleiner ist folglich auch der Winkel, welchen die beiden, zu den Kreisschnitten $K_1\overline{K_1}$ und $K_2\overline{K_2}$ senkrechten, optischen Axen mit OZ einschließen. Optisch positive zweiaxige Krystalle sind daher diejenigen, in welchen die Schwingungsrichtung der am langsamsten sich fortpflanzenden Strahlen (derjenigen mit dem größten Brechungsindex) erste Mittellinie der optischen Axen ist, d. h. den spitzen Winkel derselben halbiert.

Ist umgekehrt β näher an γ, d. h. OY wenig verschieden von OZ, so nähert sich die Gestalt der Indexfläche einem Sphäroid mit der Rotationsaxe OX, d. h. derjenigen eines negativen einaxigen Krystalls. Alsdann wird der Wert β für einen Radius vector der Indexfläche zwischen OX und OZ erst nahe dem letzteren erreicht; die beiden Kreisschnitte bilden also mit OZ einen spitzen Winkel, die zu ihnen normalen optischen Axen einen stumpfen. Derartige Krystalle heißen negative zweiaxige und sind dadurch charakterisiert, daß die Schwingungsrichtung der am langsamsten sich fortpflanzenden Strahlen die zweite Mittellinie der optischen Axen ist, d. h. den stumpfen Winkel derselben halbiert.

Dementsprechend liegen auch die Biradialen $M_1\overline{M}_1$ und $M_2\overline{M}_2$ in einem hierher gehörigen Krystalle so, wie es in Fig. 70 dargestellt ist.

Fig. 70.

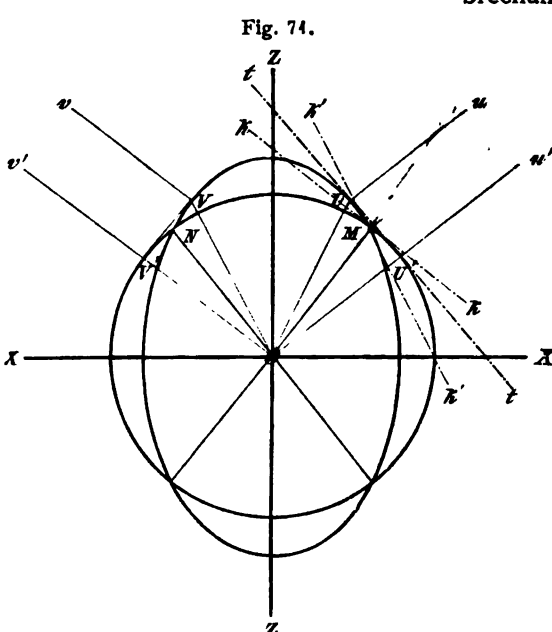




Da die Größen α, β, γ für verschiedene Farben verschieden sind, so gibt es auch zweiaxige Krystalle, welche für gewisse Farben positiv, für andere negativ sind, indem der Winkel der Axen für die eine z. B. 89°, für eine andere z. B. 91° beträgt; dann gibt es eine Farbe, für welche der Krystall genau in der Mitte zwischen positiv und negativ, also keines von beiden ist.

Es erübrigt nun noch, aus der Strahlenfläche die Verhältnisse herzuleiten, in welchen die Richtungen der beiden sogenannten primären optischen Axen zu denen der secundären oder Strahlenaxen stehen, und die Abhängigkeit dieser Richtungen von den Werten der drei Hauptbrechungsindices kennen zu lernen.

Fig. 71.



Zu diesem Zwecke mögen zuerst die Eigenschaften der parallel den beiden Arten von optischen Axen sich fortpflanzenden Strahlen etwas näher betrachtet werden.

Im allgemeinen entstehen, wie die Gestalt der Strahlenfläche lehrt, in einer beliebigen Richtung zwei sich ungleich schnell fortpflanzende Strahlen; nur in derjenigen einer sogenannten Biradialen oder Strahlenaxe, z. B. OM Figur 71, pflanzen sich diese beiden Strahlen mit der gleichen Geschwindigkeit fort. Ein wesentlicher Unterschied einer solchen Richtung von der optischen Axe eines einaxigen Krystalles besteht jedoch darin, daß die betreffenden beiden Strahlen

zwar gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit, aber verschieden gerichtete Strahlenfronten besitzen; denn diejenige des ordinären Strahls, die Ebene senkrecht zum Hauptschnitte XZ durch die Tangente kk an dem kreisförmigen Durchschnitte der Strahlenfläche in M, steht senkrecht zu OM, die Front des oxtraordinären Strahles derselben Fortpflanzungsrichtung dagegen, die Ebene senkrecht zum Hauptschnitte XZ durch $k'k'$, die Tangente des elliptischen Durchschnittes der Strahlenfläche in M, ist schief gegen OM geneigt. Die Entfernung dieser beiden Strahlenfronten von dem Ausgangspunkte der Lichtbewegung, d. i. die Länge der aus der Mitte O auf die beiden Ebenen gefällten Normalen, ist folglich eine verschiedene, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten dieser beiden Wellenbewegungen, gemessen in der Richtung ihrer Frontnormalen, sind ungleich. Die letzteren Geschwindigkeiten kommen aber allein in Betracht bei einem optisch isotropen Medium, in welchem Strahl und Frontnormale identisch sind, und daraus ergibt sich, daß die beiden den Krystall in der Richtung OM mit gleicher Geschwindigkeit durchlaufenden Strahlen beim Austritte in die Luft, der Verschiedenheit ihrer Strahlenfronten entsprechend, verschieden, d. h. doppelt gebrochen werden. Nun sind aber diese beiden Fronten nicht die einzigen Tangentialebenen an die Strahlenfläche im Punkte M, denn da an dieser Stelle eine trichterförmige Einsenkung in der äußeren Schale vorhanden ist, so lassen sich im Punkte M unendlich viele Berührungsebenen an diese Schale legen; deren Normalen, d. s. die zu den Frontebenen zugehörigen Strahlen in der Luft, bilden einen spitzen Kegel. Läßt man also auf eine senkrecht zu einer Strahlenaxe OM geschnittene, planparallele zweiaxige Krystallplatte einen derartigen Kegel convergenter Strahlen auffallen, so pflanzen sich diese sämtlich im Krystall in der Richtung OM und mit gleicher Geschwindigkeit fort und treten in einem gleichen Kegel gebrochen wieder aus (äußere konische Refraction).

Während bei den einaxigen Krystallen in den beiden Eckpunkten der Axe eine gemeinschaftliche Tangentialebene beider Schalen existiert, ist dies an den vier Nabelpunkten der zweiaxigen Strahlenfläche, in welchen die beiden Schalen derselben einander durchdringen, z. B. in M, nicht der Fall. Dagegen gibt es eine gemeinschaftliche Tangentialebene der beiden Schalen über jeder dieser vier Einsenkungen der äußeren Schale; es ist dies z. B. über M die durch die Gerade tt, welche die Ellipse in U, den Kreis in U' tangiert, senkrecht zum Hauptschnitt XZ gelegte Ebene. Diese berührt die Strahlenfläche rings um den Punkt M in einer geschlossenen Curve, zu welcher die beiden Punkte U und U' gehören, und es folgt aus den geometrischen Eigenschaften der Strahlenfläche, daß diese Curve ein Kreis ist. Denken wir uns nun an alle Punkte dieses Kreises Radien vectoren gezogen, von denen in Fig. 71 die beiden in der Zeichnungsebene derselben gelegenen OU und OU' sichtbar sind, so erhalten wir einen Kegel von Strahlen, welche sämtlich eine gemeinsame Strahlenfront besitzen, nämlich die senkrecht zum Hauptschnitt XZ durch tt gelegte Ebene.

Infolgedessen ist auch die Normale dieser Ebene, die Frontnormale jener Strahlen, für alle gemeinsam, z. B. die Frontnormale Uu des Strahles OU parallel der Frontnormale $U'u'$ des Strahles OU'; ebenso sind die Frontnormalen Vv und $V'v'$ der Strahlen OV und OV' einander parallel. Diese beiden Richtungen Uu und Vv bzw. OU' und OV' sind nun (wie aus der Gleichung der Indexfläche hervorgeht) keine andern, als die der sogenannten »primären optischen Axen«, d. h. der Normalen zu den Kreisschnitten der Indexfläche, von welcher die Strahlenfläche abgeleitet ist. Infolgedessen verhalten sich Strahlen, welche sich parallel einer solchen primären optischen Axe fortpflanzen, deren Strahlenfront also die Ebene des Kreisschnittes ist, den Strahlen, welche sich parallel der optischen Axe eines einaxigen Krystalles fortpflanzen, insofern analog, als ihr Schwingungsazimuth in dieser Ebene ein beliebiges sein kann. Die beiden primären optischen Axen zeigen also eine noch größere Analogie mit der optischen Axe der einaxigen Krystalle, als die Strahlenaxen, und sollen deshalb im folgenden schlechtweg als »optische Axen« bezeichnet werden[1]). Denken wir uns parallel einem Kreisschnitte der Indexfläche, d. h. senkrecht zu einer optischen Axe, eine ebene Fläche am Krystall angeschliffen und lassen senkrecht auf diese parallele Lichtstrahlen auffallen, so werden alle diejenigen, welche einem Kreiscylinder angehören, nach dem Eintritt in den Krystall einen Kegel mit dem Öffnungswinkel UOU' bilden (innere konische Refraction). Umgekehrt werden alle im Innern eines zweiaxigen Krystalls sich auf dem Mantel dieses Kegels fortpflanzenden divergierenden Strahlen beim Austritt durch jene Fläche parallel werden und sich als ein Strahlencylinder in der Luft fortpflanzen.

In Wirklichkeit ist nun die Öffnung dieses Kegels der inneren konischen Refraction sehr viel kleiner, als es in Fig. 71 dargestellt ist (selten über 2°); weil die Differenzen der Hauptbrechungsindices und daher die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der in verschiedener Richtung schwingenden Strahlen niemals so groß ist, wie es der Deutlichkeit wegen in den Figuren 62—71 angenommen wurde, und das gleiche gilt auch für den Kegel der äußeren konischen Refraction.

Der Winkel der beiden optischen Axen, d. i. in Fig. 71 der Winkel $U'OV'$, werde durch $2V$ bezeichnet, V (= $U'OZ$ Fig. 71) sei also der Winkel, welchen eine optische Axe mit der Schwingungsrichtung der im Krystall am langsamsten sich fortpflanzenden Strahlen bildet. Aus der Gleichung der Indexfläche folgt für diesen Winkel:

$$\operatorname{tg} V = \sqrt{\frac{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}}}.$$

1) Da OU' (Fig. 71) senkrecht zu tt', so ist es die Richtung einer solchen optischen Axe, und dieselbe Linie OU' ist die Normale sowohl für die Strahlenfront im Punkte U',

Ist β so zwischen α und γ gelegen, daß $\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}$, so ist $\operatorname{tg} V = 1$, also $V = 45^\circ$. Ist β näher an α, folglich der Zähler des unter dem Wurzelzeichen stehenden Bruches kleiner als der Nenner, so ist V kleiner als 45°, d. h. wir haben es mit einem positiven zweiaxigen Krystall zu tun, in welchem die Schwingungsrichtung der kleinsten Lichtgeschwindigkeit den kleineren (spitzen) Winkel der optischen Axen halbiert. Im umgekehrten Falle, wenn β näher an γ, also der Zähler des Bruches größer als der Nenner, ist V größer als 45° und wir haben einen negativen Krystall vor uns, in welchem die Schwingungsrichtung der kleinsten Lichtgeschwindigkeit den größeren (d. h. den stumpfen) Winkel der optischen Axen halbiert.

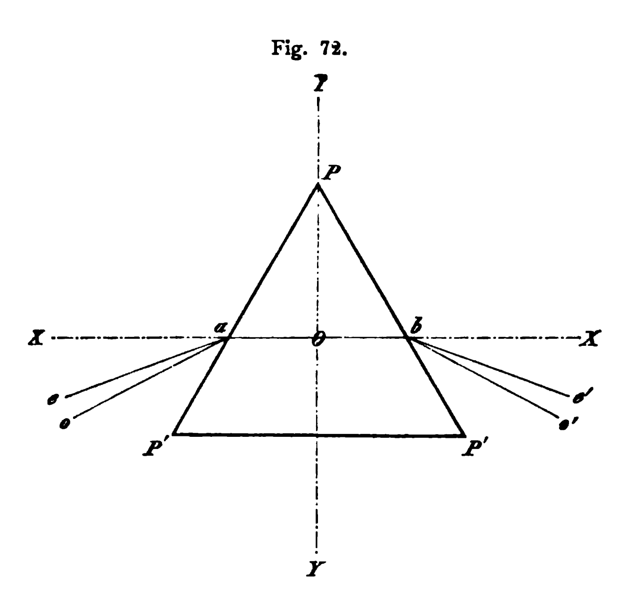
Bestimmung der Hauptbrechungsindices zweiaxiger Krystalle. Schleift man aus einem zweiaxigen Krystalle ein Prisma, dessen brechende Kante parallel der Hauptschwingungsrichtung OX ist, und läßt, wie es bei der Bestimmung von Brechungsindices üblich, Strahlen auf die eine Fläche desselben fallen, deren Einfallsebene senkrecht zur brechenden Kante steht, so ist diese Ebene parallel dem Hauptschnitt YOZ; es tritt demnach hier der Fall ein, daß die beiden im Prisma sich fortpflanzenden Strahlen im Hauptschnitte bleiben, und zwar der eine von ihnen als ordentlicher hindurchgeht; dieser schwingt nach S. 92f. senkrecht zum Hauptschnitte YOZ, d. i. parallel OX, er bewegt sich also im Krystalle mit der größten Lichtgeschwindigkeit. Stellen wir das Prisma so, daß dieser Strahl das Minimum der Ablenkung erfährt, so gibt uns letztere nebst dem brechenden Winkel des Prismas den kleinsten der drei Hauptbrechungsindices α, d. h. das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Luft zu der größten Lichtgeschwindigkeit im Krystalle. Schleifen wir dagegen ein Prisma, dessen brechende Kante parallel der Axe OY der Indexfläche ist, so wird dieses in gleicher Weise einen ordinären Strahl liefern, der parallel der brechenden Kante schwingt, sich also mit mittlerer Geschwindigkeit durch das Prisma fortpflanzt; die Minimalablenkung dieses Strahles gibt also nach der gewöhnlichen Formel den Hauptbrechungsindex β. Endlich liefert uns ein drittes Prisma, dessen Kante parallel der Axe OZ der Indexfläche ist, den Brechungsindex γ des ordentlichen Strahls mit der Schwingungsrichtung OZ, d. h. den größten der Brechungsexponenten des Krystalles.

Die Bestimmung der drei Hauptbrechungsindices ist indes auch möglich mit Hilfe nur zweier Prismen, deren Kanten ebenfalls je einer Hauptschwingungsrichtung parallel, welche aber außerdem noch so geschliffen sein müssen, daß der brechende Winkel von einem optischen Hauptschnitte des Krystalles genau halbiert wird. Sei z. B. $PP'P'$ (Fig. 72) ein solches

als für die Strahlenfront im Punkte U. Fletcher hat deshalb für die beiden optischen Axen den Namen »Binormalen« vorgeschlagen, weil es sich hier um Richtungen handelt, in welchen eine Linie in doppeltem Sinne die Normale einer Strahlenfront ist.

Prisma, dessen brechende Kante, senkrecht zur Zeichnungsebene, parallel der Axe OZ ist, und dessen Seiten gleiche Winkel mit dem Hauptschnitte YOZ bilden. Ist die Einfallsebene des Lichtes die Ebene der Zeichnung, also der Hauptschnitt XOY, so pflanzen sich beide Strahlen in derselben Ebene fort; der ordinäre mit der senkrecht dazu stehenden Schwingungsrichtung OZ erfährt das Minimum der Ablenkung, wenn er im Prisma von a nach b läuft; er tritt in der Richtung oa ein und in derjenigen bo' aus dem Prisma aus. Drehen wir das letztere so, oder ändern wir den Ort der Lichtquelle derart, daß der extraordinäre Strahl seinerseits das Minimum der Ablenkung (welche in diesem Falle kleiner ist als beim ordinären) erleidet, so tritt er in der Richtung ea in das Prisma und parallel be' aus demselben, also durchläuft er es in derselben Richtung ab, wie vorher der ordentliche Strahl, d. h. in der Richtung XX. Alsdann ist aber seine Schwingungsrichtung offenbar $\parallel OY$, also seine Geschwindigkeit die mittlere; wenn wir also für diese Stellung die Ablenkung messen und den zugehörigen Brechungsindex berechnen, so ist dieser genau $= \beta$. Da der ordentliche Strahl uns γ gibt (weil er die Schwingungsrichtung OZ hat), so erhalten wir mit Hilfe dieses einen Prismas zwei der Hauptbrechungsindices. Fügen wir hierzu die Untersuchung eines zweiten Prismas, dessen Flächen parallel OX und gleichgeneigt gegen XOZ, so liefert dies in gleicher Weise α und γ; ein drittes, symmetrisch nach XOY, dessen Kante $\parallel OY$, α und β. Es sind demnach nur zwei derartiger Prismen nötig, um alle Hauptbrechungsindices zu bestimmen.

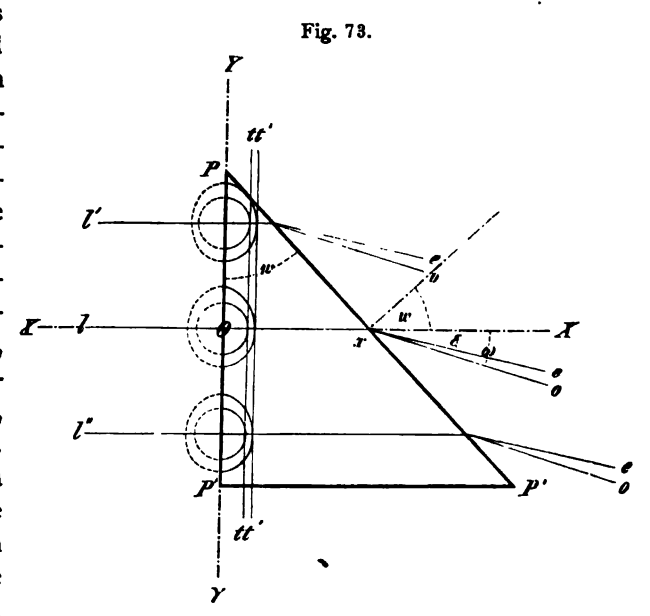
Fig. 72.



Dasselbe ist übrigens auch der Fall, wenn die Prismen noch in einer andern Richtung geschliffen sind, wenn nämlich eine der Seitenflächen zusammenfällt mit einem optischen Hauptschnitte des Krystalles. Sei $PP'P'$ (Fig. 73) ein solches Prisma mit dem brechenden Winkel w, dessen Kante parallel OZ und dessen linke Fläche $\parallel$ dem Hauptschnitte YOZ. Läßt man nun parallele Lichtstrahlen l, l', l'' usf. genau senkrecht auf diese Fläche, also parallel XX, auffallen, so sind die im Prisma sich fortpflanzenden beiden Strahlenfronten die Tangentialebenen tt und $t't'$ an die Strahlenflächen,

die von jedem Eintrittspunkte aus alle von gleichen Dimensionen zu construieren sind, weil die auffallende ebene Front die Eintrittsstellen sämtlich gleichzeitig trifft. Aus der Construction und der symmetrischen Gestalt der Wellenflächen zu den Hauptschnitten folgt unmittelbar, daß die beiden Tangentialebenen genau senkrecht zur Zeichnungsebene und einander, sowie der Eintrittsfläche des Lichtes, genau parallel sind. Die beiden Strahlen erfahren also gar keine Ablenkung, sondern pflanzen sich beide ', OX fort, wie in dem Prisma Fig. 72, folglich der eine mit der kleinsten Geschwindigkeit, der andere mit der mittleren, und werden bei ihrem Austritte in x demnach verschieden gebrochen, der eine nach o, der andere nach e. Bestimmt man die Ablenkungen beider aus ihrer ursprünglichen Richtung und bezeichnet diese mit ω und ε, so ist die erstere gleich dem Winkel Xxo, die zweite gleich Xxe; wie aus Fig. 73 unmittelbar ersichtlich, sind die Brechungsindices der beiden Strahlen

Fig. 73.



$$\gamma = \frac{\sin(\omega + w)}{\sin w},$$

$$\beta = \frac{\sin(\varepsilon + w)}{\sin w}.$$

Es sind also durch ein solches Prisma zwei Hauptbrechungsindices zu bestimmen; durch zwei verschiedene, deren eine Seite je einem andern Hauptschnitte parallel, somit alle drei.

Anmerk. Wenn der Winkel der optischen Axen bekannt ist, so kann auch mit einem Prisma von anderer Orientierung die Messung bzw. Berechnung der drei Hauptbrechungsindices ausgeführt werden (s. z. B. Hutchinson, Zeitschr. f. Kryst. 1901, **34**, 347).

Vorteilhafter ist die Bestimmung der drei Hauptbrechungsindices mit Hilfe des Totalreflectometers, weil bei dieser Methode nur eine einzige Krystallplatte erforderlich ist, für welche nur eine Bedingung erfüllt sein muß, die nämlich, daß sie einer der drei Hauptschwingungsrichtungen parallel ist. Bringt man eine derartige Platte so in das Instrument (Fig. 22, S. 29), daß jene in ihr liegende Richtung mit der Einfallsebene des Lichtes zusammenfällt,

so pflanzt sich, wenn die Platte bis zum Winkel der totalen Reflexion gedreht worden ist, das Licht parallel der betreffenden Hauptschwingungsrichtung fort, wird also in zwei Strahlen zerlegt, die parallel den beiden andern schwingen; die Einstellung der doppelten Grenzen der totalen Reflexion liefert also zwei Hauptbrechungsindices. Dreht man nun die Platte in ihrer eigenen Ebene um 90° und befestigt sie in dieser Stellung an der Drehungsaxe des Instrumentes (letztere ist alsdann der in die Platte fallenden Hauptschwingungsrichtung parallel), so wird die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes bei der totalen Reflexion zwar im allgemeinen keiner Hauptschwingungsrichtung parallel sein, da sie aber zu einer solchen senkrecht steht, liegt sie in einem Hauptschnitte; folglich schwingt einer von den beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen, der ordinäre, parallel der Hauptschwingungsrichtung, welche im ersten Falle Fortpflanzungsrichtung war, und die Einstellung der zu diesem Strahle gehörigen Grenze der totalen Reflexion gibt also den dritten Hauptbrechungsindex. Um die beiden Grenzen voneinander zu unterscheiden, bringt man vor das Fernrohr des Totalreflectometers ein Nicolsches Prisma, dessen Hauptschnitt senkrecht steht. Dieses läßt nur den vertical schwingenden Strahl hindurch, also erscheint nur diejenige Grenze der totalen Reflexion, welche den gesuchten dritten Hauptbrechungsindex liefert[1]). Es ist leicht zu übersehen, daß man bei Anwendung einer Platte, welche einem optischen Hauptschnitte parallel ist, jedesmal zwei Hauptbrechungsindices erhält, wenn man die Platte so orientiert, daß einmal die eine, das andere Mal die andere von den beiden in der Ebene der Platte liegenden Hauptschwingungsrichtungen bei der totalen Reflexion Fortpflanzungsrichtung des Lichtes wird; mit einer solchen Platte kann man also nicht nur alle drei Hauptbrechungsindices, sondern den einen sogar doppelt bestimmen. Von besonderem Interesse sind die Erscheinungen, welche eine parallel der Ebene der optischen Axen geschnittene Krystallplatte im Totalreflectometer zeigt, wenn man dieselbe in ihrer eigenen Ebene drehbar macht. Geht man alsdann von einer Hauptschwingungsrichtung aus, so erblickt man zwei Grenzen der totalen Reflexion; dreht man nun die Platte in ihrer Ebene, so nähern sich diese beiden Grenzen einander, weil die beiden in der Grenzschicht der Platte sich fortpflanzenden Strahlen immer weniger verschiedene Geschwindigkeit besitzen; ist die Platte so weit gedreht, daß eine optische Axe Fortpflanzungsrichtung wird, so fallen die beiden Grenzen der totalen Reflexion zusammen, und man erblickt im Gesichtsfelde, außer der dem ordentlichen Strahle entsprechenden senkrechten Grenze, die, letztere in der Mitte unter spitzem Winkel durchkreuzende, zweite Grenze der totalen Reflexion. Wenn der Durchkreuzungswinkel nicht allzu spitz, d. h. wenn die Fortpflanzungs-

1) Es braucht nach den früheren Auseinandersetzungen kaum bemerkt zu werden, daß bei jeder Bestimmung der Brechungsindices eines doppeltbrechenden Körpers die Schwingungsrichtungen der einzelnen Strahlen durch ein Nicolsches Prisma bestimmt werden.

geschwindigkeit des außerordentlichen Strahls sich mit der Richtung rasch ändert (der Krystall eine starke Doppelbrechung besitzt), so bringt demnach eine Drehung der Platte in ihrer eigenen Ebene um 360° nach und nach den ganzen Durchschnitt der Strahlenfläche mit dem Hauptschnitte XZ (s. Fig. 64, worin natürlich das Verhältnis der größten zur kleinsten Lichtgeschwindigkeit stark übertrieben dargestellt ist) zur Anschauung. Auf Grund dieser Methode hat W. Kohlrausch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in zahlreichen Richtungen innerhalb der drei optischen Hauptschnitte der Weinsäure (s. diese) gemessen und vollständig übereinstimmend mit der Fresnelschen Fläche gefunden.

Endlich können die drei Hauptbrechungsindices auch durch Totalreflexion an einer zweiaxigen Krystallplatte von beliebiger Orientierung bestimmt werden durch Messung der Maxima und Minima der beiden Curven, welche eine solche Platte zeigt. Das Nähere über derartige Messungen wird in der III. Abteilung angegeben werden.

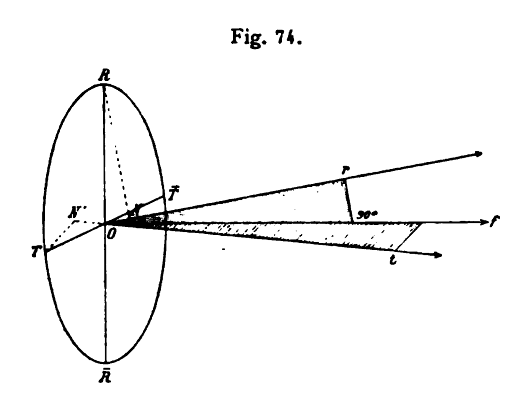
Wenn α, β und γ nach einer der vorstehend erörterten Methoden bestimmt worden sind, so kann man daraus den Winkel der optischen Axen $2V$ nach der S. 100 angegebenen Formel berechnen. Hat man dagegen V selbst auf eine weiterhin zu erörternde Weise gemessen und außerdem nur zwei von den drei Hauptbrechungsindices (wenn z. B. die Ausbildung der Krystalle die Anfertigung von Prismen nur nach einer Richtung gestattet), so kann man mittels derselben Gleichung den dritten Brechungsindex berechnen.

Wir nennen diejenigen Zahlen, durch welche die optischen Eigenschaften eines Krystalls vollständig gegeben sind, die optischen Constanten desselben; bei einem zweiaxigen Krystalle sind dies: die Orientieruug der drei Hauptschwingungsrichtungen im Krystalle und die Größe der drei Hauptbrechungsindices. Diese Größen beziehen sich im allgemeinen nur auf eine bestimmte Farbe, und deshalb gelten alle bisherigen Betrachtungen über Index- und Strahlenfläche nur für Licht einer bestimmten Schwingungsdauer. Verwenden wir zur Bestimmung der drei Hauptbrechungsindices solches von einer andern Farbe, so finden wir andere Werte derselben, und zwar ist die Änderung mit der Schwingungsdauer für jeden der drei Hauptbrechungsindices eine andere, d. h. die Constanten der Cauchyschen Dispersionsformel (S. 33) besitzen für α, β und γ verschiedene Größen: infolgedessen stehen die Werte der größten, mittleren und kleinsten Lichtgeschwindigkeit für eine andere Farbe auch in einem andern Verhältnisse, d. h. die Strahlenfläche (wie die Indexfläche) hat für die letztere eine andere Gestalt, und die optischen Axen bilden einen andern Winkel miteinander, welcher bei einer Substanz mit der Wellenlänge des Lichtes wächst, bei einer andern abnimmt. Es sind die Brechungsindices α, β und γ daher stets für mehrere Farben zu messen, wenn die optischen Eigenschaften eines Krystalls bestimmt werden sollen. Was die Lage der Hauptschwingungsrichtungen im Krystalle betrifft, so kann dieselbe für

verschiedene Farben die gleiche oder eine verschiedene sein. Bestimmt wird sie durch Interferenzerscheinungen, welche zweiaxige Krystallplatten in gewissen Richtungen zeigen, daher diese jetzt zunächst zu besprechen sind, und zwar soll auch hier stets die Betrachtung mit dem einfacheren Falle des monochromatischen Lichtes begonnen werden.

Interferenzerscheinungen zweiaxiger Krystalle im parallelen polarisierten Lichte. Fallen Lichtstrahlen von einer bestimmten Farbe normal auf eine in beliebiger Richtung aus einem zweiaxigen Krystalle geschnittene planparallele Platte, so wird im allgemeinen jeder derselben in zwei (nach S. 97 extraordinäre) Strahlen zerlegt, welche nach dem Austritte aus der Krystallplatte senkrecht zueinander schwingen und einen Gangunterschied besitzen, vermöge dessen genau so wie bei den einaxigen Krystallen (s. S. 76 f.) zwischen gekreuzten Nicols Interferenz stattfindet. Die auffallenden Strahlen haben in diesem Falle eine gemeinschaftliche Strahlenfront, welche der Ebene der Krystallplatte parallel ist. Im Innern des Krystalls gehören nun zu dieser, wie zu jeder Strahlenfront, zwei Lichtstrahlen von verschiedener Fortpflanzungsrichtung; denn wenn zwei parallele Tangentialebenen an die beiden Schalen der Strahlenfläche eines zweiaxigen Krystalls gelegt werden, so berühren sie die beiden Schalen in Punkten, welche nicht auf demselben Radius vector liegen. Die Fortpflanzungs- und Schwingungsrichtungen der beiden Strahlen, denen gleichgerichtete Strahlenfronten, bzw. gleiche Frontnormale, zukommt, erhält man in einfacherer Weise aus der Indexfläche auf folgende Art: Man lege durch die Mitte derselben eine Ebene parallel der Front der auffallenden Strahlen, also parallel der Krystallplatte; diese schneidet das Ellipsoid im allgemeinen in einer Ellipse (Fig. 74). Die Endpunkte R und T der großen und kleinen Axe dieser Ellipse sind offenbar diejenigen Punkte, in welchen die Normalen zum Ellipsoide, RN und TN', den größten bzw. kleinsten Abstand von den zugehörigen Strahlen besitzen, deren Fortpflanzungsrichtungen man erhält, wenn man aus O die Normalen zu RN und TN' (ON bzw. ON') fällt. Also sind RN und TN' die Schwingungsrichtungen der am langsamsten (umgekehrt proportional der Länge RN) bzw. am schnellsten (prop. $1/TN'$) sich fortpflanzenden Schwingungen unter allen der ursprünglichen Wellenebene ORT d. i. der Ebene der Krystallplatte entsprechenden Schwingungen.

Fig. 74.



Eine beliebig in dieser Ebene stattfindende Schwingung zerfällt also beim Eintritte in die Krystallplatte stets in zwei Schwingungen RN und TN', welche sich in den Richtungen Or und Ot fortpflanzen. Die Schwingungsebenen

der beiden Strahlen Or und Ot sind in Fig. 74 ihren Schwingungsrichtungen parallel schraffiert. Diese beiden Schwingungsrichtungen RN und TN' stehen nicht senkrecht zueinander, wohl aber schneiden sich die beiden Schwingungsebenen in Of unter rechtem Winkel. Da nun die ebene Fläche der Krystallplatte, durch welche das Licht austritt, senkrecht zu Of ist, und die beiden Strahlen beim Austritte so gebrochen werden, daß sie wieder, wie vor dem Eintritte, die Richtung parallel Of annehmen (weil in der Luft Frontnormale und Strahl identisch sind), so sind nach dem Austritte RO und TO die beiden Schwingungsrichtungen, d. h. es pflanzen sich dann in der Luft zwei zueinander senkrechte Schwingungen fort, und diese bezeichnet man als die »Schwingungsrichtungen der betr. Krystallplatte«. Sie sind durch die Gestalt der Indexfläche für jede Ebene eines zweiaxigen Krystalls gegeben, und ihre Orientierung kann daher bei einem optisch bekannten Krystalle auch umgekehrt benutzt werden, um die Orientierung der Krystallplatte zu bestimmen. Sie können auch durch folgende Construction gefunden werden:

Man lege durch die Normale der Krystallplatte (d. i. die Frontnormale der auffallenden Strahlen) und eine der beiden optischen Axen eine Ebene, sowie eine zweite durch dieselbe Normale und die andere optische Axe. Diese beiden Ebenen schneiden diejenige der Krystallplatte in zwei Geraden, welche offenbar normal zu den Schnittlinien derselben mit den beiden Kreisschnitten sind. Die ihnen parallelen beiden Durchmesser der Ellipse sind also gleich lang; folglich sind die Halbierungslinien der beiden von jenen Geraden gebildeten Winkel die Axen der Ellipse, d. h. die gesuchten Schwingungsrichtungen der aus der Krystallplatte austretenden Strahlen[1]).

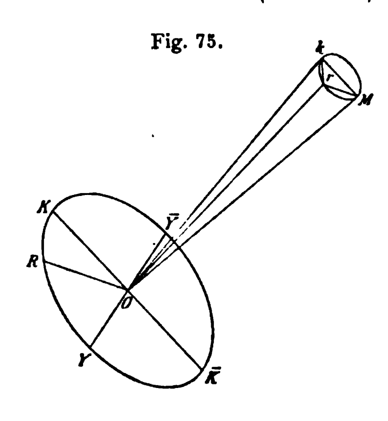
Ist die Frontnormale Of (Fig. 74) einer optischen Axe parallel, so ist nach Früherem (S. 91) die Durchschnittscurve $RT\bar{R}\bar{T}$ der Indexfläche ein Kreis. In diesem Falle sind also die Axen $R\bar{R}$ und $T\bar{T}$ unbestimmt, d. h.

1) Zur graphischen Auffindung dieser Richtungen dient am geeignetsten ein Modell, wie es von Böhm und Wiedemann in München (s. Anhang) geliefert wird. Dasselbe besteht aus einer horizontalen Schiefertafel, welche die Ebene der Krystallplatte darstellt und in deren Mitte die Normale durch einen Metallstab repräsentiert ist. Um den Fußpunkt derselben nach allen Seiten drehbar sind zwei gegeneinander beliebig verstellbare Metallstäbe angebracht, welche die beiden optischen Axen darstellen. Will man nun für eine Platte, welche aus einem zweiaxigen Krystalle von bekanntem Axenwinkel $2V$ in einer durch ihre Neigung gegen die beiden optischen Axen gegebenen Richtung geschnitten ist, die Schwingungsrichtungen bestimmen, so stellt man mit Hilfe eines beigegebenen Transporteurs die beiden Axen unter dem richtigen Winkel $2V$ zueinander und beide in die der Orientierung der Platte entsprechenden Richtungen gegen die horizontale Ebene, legt an die Normale und die eine Axe den Transporteur so an, dass derselbe mit seiner Kante auf der Schiefertafel aufliegt, und zieht die entsprechende Gerade auf der letzteren. In derselben Weise findet man die Trace der durch die Normale und die zweite Axe gelegten Ebene auf der Tafel und hat alsdann nur noch nötig, die Winkel, welche diese beiden Tracen miteinander bilden, zu halbieren. Hat man auf der Tafel die Umrißlinien des in der betr. Ebene durchschnittenen Krystalles eingezeichnet, so kann man ohne weiteres mit dem Transporteur die Winkel ablesen, welche die Schwingungsrichtungen mit den Randflächen der Platte bilden.



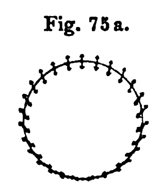
zu jedem Punkte der Indexfläche auf dem Umfange eines der beiden Kreisschnitte gehört ein Strahl; die zu allen Punkten eines solchen Kreises gehörenden Strahlen, welche den »Kegel der Binormalen« oder »inneren konischen Refraction (s. S. 100) bilden, haben sämtlich die gleiche Richtung und Lage ihrer dem Kreisschnitte parallelen Strahlenfront; ihre Schwingungsrichtungen, die Normalen zu der Indexfläche an allen Punkten des Kreisschnittes, können also jedes beliebige Azimuth haben. Wie aus Fig. 75 (s. S. 98) zu ersehen ist, fällt einer dieser Strahlen mit der Richtung der optischen Axe selbst zusammen, und dieser, OM in Fig. 75, entspricht den Punkten Y und $\bar{Y}$ auf der Indexfläche, den einzigen Punkten des Kreisschnittes $KY\bar{K}\bar{Y}$, in welchen die Normale dieser Oberfläche durch die Mitte geht (weil $Y\bar{Y}$ eine Axe derselben ist, und eine andere Axe der Indexfläche, wie aus Fig. 62 hervorgeht, nicht in den Kreisschnitt fällt). Die Schwingungsrichtung des Strahles OM ist also OY, und seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit proportional $\frac{1}{OY} = \frac{1}{\beta}$; d. h. ein in der Richtung einer optischen Axe sich fortpflanzender Lichtstrahl hat den mittleren Brechungsindex β.

Fig. 75.



Den im Hauptschnitte XZ liegenden Punkten $K\bar{K}$ entspricht der Strahl Ok, welcher auf der Normalen der Indexfläche in K und $\bar{K}$ senkrecht steht; dessen Schwingungsrichtung im Innern des Krystalles liegt also in jenem Hauptschnitte und wird nach dem Austritte des Strahles durch die dem Kreisschnitte parallele Begrenzungsebene des Krystalles, wobei der Kegel der Binormalen in einen Cylinder verwandelt wird, parallel Mk, also senkrecht zu der Schwingungsrichtung des Strahles OM. Jedem zwischen Y und K liegenden Punkte des Kreisschnittes, z. B. R, entspricht ein Strahl Or auf dem Binormalenkegel, welcher senkrecht zu der in R errichteten Normale der Indexfläche ist und dessen Schwingungen folglich in der durch die Frontnormale gehenden Ebene ROM stattfinden. Da die der Strahlenfront parallele Austrittsfläche des Lichtes den Kegel der Binormalen in einem durch Mrk gehenden Kreise schneidet, und von hier ab alle Strahlen dieses Kegels sich in der Luft parallel OM als ein Strahlencylinder fortpflanzen, so ist die Schwingungsrichtung des Strahles Or in der Luft parallel Mr (seine Polarisationsebene ist Ork). Für irgendeinen beliebigen Strahl Or des Cylinders erhalten wir also die Schwingungsrichtung, wenn wir r mit M geradlinig verbinden; folglich haben die Strahlen auf dem Umfange des Cylinders, wie oben schon erwähnt wurde, in der Tat alle möglichen Schwingungs-

Fig. 75a.



azimuthe zwischen *Mk*, demjenigen des Strahles *Ok*, und dem dazu senkrechten des Strahles *OM*. (Diese Schwingungsrichtungen für die Strahlen, welche verschiedenen Punkten auf dem Kreise *Mkr* entsprechen, sind durch ⟷ in Fig. 75a eingezeichnet.)

Die letzterwähnte Tatsache hat zur Folge, daß eine senkrecht zu einer der beiden optischen Axen geschnittene Platte eines zweiaxigen Krystalls sich zwischen gekreuzten Nicols wesentlich anders verhält, als eine senkrecht zur Axe aus einem einaxigen geschnittene. Denn wenn auf jene ein dünnes Bündel paralleler Strahlen senkrecht auffällt, so wird dieses im Innern des Krystalls in einen Kegel divergierender Strahlen, und dieser Kegel beim Austritt in einen Kreiscylinder verwandelt; statt eines kleinen einfachen Bildes muß also ein kreisförmiger Lichtring[1]) erscheinen, und auf dem Umfange dieses Ringes müssen alle möglichen Schwingungsazimuthe vorhanden sein; folglich kann man durch den analysierenden Nicol nur diejenigen Strahlen des Lichtringes auslöschen, welche senkrecht zu dem Hauptschnitte des Nicols schwingen, von allen übrigen nur die entsprechende Componente. Zwischen gekreuzten Nicols liefert jedes unendlich dünne Strahlenbündel, welches parallel einer optischen Axe durch einen zweiaxigen Krystall gegangen ist, einen Lichtring, welcher (wenn die Schwingungsrichtungen der Nicols parallel und senkrecht zu *Mk*) an den Punkten *M* und *k* unterbrochen ist, weil hier vollständige Auslöschung stattfindet. Beleuchtet man eine solche zu einer optischen Axe senkrechte Krystallplatte in ihrer ganzen Ausdehnung mit normal auffallenden Strahlen, so überdecken sich alle diese unvollständigen Lichtringe, und die ganze Platte erscheint hell, welche Orientierung sie auch gegen die Schwingungsrichtungen der Nicols besitze. Während also eine von Lichtstrahlen parallel der optischen Axe durchsetzte einaxige Krystallplatte beim Drehen in ihrer Ebene zwischen gekreuzten Nicols in allen Stellungen dunkel ist, bleibt umgekehrt eine zweiaxige Krystallplatte unter den gleichen Umständen hell.

Jede Platte dagegen von beliebiger anderer Orientierung besitzt zwei zueinander senkrechte, durch die S. 107 angegebene Construction aufzufindende Schwingungsrichtungen und erscheint daher zwischen gekreuzten Nicols jedesmal dunkel, wenn diese Richtungen den Hauptschnitten der beiden Nicols parallel sind. In dem speciellen Falle, daß die Ebene der zweiaxigen Krystallplatte mit derjenigen eines ihrer drei optischen Hauptschnitte zusammenfällt, ergibt die erwähnte Construction in sehr einfacher Weise das schon aus der Betrachtung der Indexfläche ohne weiteres abzuleitende Resultat, daß ihre Schwingungsrichtungen die beiden ihr parallelen Axen der Indexfläche, d. h. die beiden in der Ebene der Platte liegenden

---

1) Wie man unter dem Mikroskope diesen aus dem Bilde einer kleinen Öffnung entstehenden Lichtring sichtbar machen kann, darüber s. Kalkowsky, Ztschr. f. Krystallographie u. Mineralogie 1884, **9**, 486, und Liebisch, Nachr. Gesellsch. d. Wiss., Göttingen 1888. Die von letzterem angegebene Vorrichtung wird von der optischen Werkstätte von Fuess geliefert.



Hauptschwingungsrichtungen sind. Ist die Platte nur einer Axe der Indexfläche parallel, gegen die beiden andern aber geneigt, so ist die Richtung der normal auf sie auffallenden Strahlen in einem optischen Hauptschnitte des Krystalls gelegen, und auch hier ergeben schon frühere Überlegungen (S. 92f), wie die S. 107 angegebene Construction, daß eine ihrer Schwingungsrichtungen die ihr parallele Axe der Indexfläche (also eine Hauptschwingungsrichtung), die zweite die in der Ebene der Platte dazu normal gezogene Gerade ist.

Bringen wir daher irgendeine Platte eines zweiaxigen Krystalls, welche nicht senkrecht zu einer der optischen Axen geschnitten ist, in das Orthoskop und drehen sie zwischen gekreuzten Nicols in ihrer Ebene, so wird sie viermal dunkel, in den Zwischenstellungen hell und zeigt folglich die S. 43 betrachteten Interferenzerscheinungen des monochromatischen Lichtes. Diejenigen, welche wir im weißen Lichte beobachten, hängen zunächst davon ab, ob die Schwingungsrichtungen der aus der Platte austretenden Strahlen verschiedener Farbe die gleichen oder verschiedene sind. Ist die Orientierung der Axen der Indexflächen im Krystalle für alle Farben die gleiche, so ergibt sich ohne weiteres, daß auch die Schwingungsrichtungen einer Platte, welche parallel einer oder zweien der Axen der Indexfläche ist, für alle Farben zusammenfallen. Eine schief gegen die drei Axen der Indexfläche orientierte Platte zeigt dagegen eine Dispersion der Schwingungsrichtungen, denn in diesem Falle ergibt die S. 107 erwähnte Construction, wegen der verschiedenen Größe des Winkels der optischen Axen für verschiedene Farben, für Licht anderer Wellenlänge auch abweichende Schwingungsrichtungen; da jedoch die Differenzen der Axenwinkel selten einige Grade übersteigen, so sind die Winkel, welche die Schwingungsrichtungen einer solchen Krystallplatte für verschiedenfarbiges Licht miteinander bilden, meist sehr kleine.

Ist dagegen die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen selbst im Krystalle für verschiedene Farben eine verschiedene, so divergieren die Schwingungsrichtungen auch von solchen Platten, welche einer oder zweien von den Axen der Indexfläche für eine gewisse Farbe parallel sind. Wollen wir also hier die Schwingungsrichtungen mittels der Dunkelstellungen der Platte im Orthoskope auf die S. 54 erwähnte Art bestimmen, so muß dies im monochromatischen Lichte und für jede Farbe besonders geschehen (eine genauere Bestimmungsmethode, mittels des sog. »Stauroskops«, wird in der III. Abteilung beschrieben werden).

Treten aus einer zweiaxigen Krystallplatte die Lichtstrahlen aller Farben mit gleichen oder wenigstens sehr nahe gleichen Schwingungsrichtungen aus, so wird dieselbe offenbar auch bei Anwendung weißen Lichtes während einer ganzen Umdrehung im Orthoskope viermal vollständig dunkel erscheinen, in den Zwischenstellungen dagegen farbig, wenn sie dünn ist; denn es gelten ersichtlicherweise die S. 76 über die Erscheinungen bei einer schräg gegen die optische Axe geschnittenen einaxigen Platte an-

gestellten Betrachtungen für jeden doppeltbrechenden Körper. Die entstehende Farbe muß sich mit der Dicke der Platte ändern und bei einer gewissen Größe derselben in das Weiß der höheren Ordnung übergehen. Platten verschiedener Orientierung zeigen auch bei gleicher Dicke im allgemeinen verschiedene Interferenzfarben, und somit tritt auch bei ihnen die Erscheinung des Weiß der höheren Ordnung mit verschiedener Dicke ein, mit der geringsten bei einer Platte parallel der Ebene der optischen Axen; denn in einer solchen wird das Licht in zwei Strahlen zerlegt, von denen der eine die größte, der andere die kleinste Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt, ihre Doppelbrechung (entsprechend der Differenz der Hauptbrechungsindices $\gamma - \alpha$) ist also die stärkste im Krystalle überhaupt. Eine geringere, aber untereinander verschiedene Doppelbrechung, je nach der Größe der Differenzen $\gamma - \beta$ und $\beta - \alpha$, besitzen Platten nach den beiden andern Hauptschnitten. Während bei den einaxigen Krystallen alle Platten, welche gleichen Winkel mit der optischen Axe einschließen, gleiche Doppelbrechung besitzen, also bei gleicher Dicke gleiche Farbe zeigen, ist eine solche Gleichheit rings um eine optische Axe eines zweiaxigen Krystalles nicht vorhanden; denn wenn wir, von einem Kreisschnitte der Indexfläche als Ebene der Platte ausgehend, uns dem einen oder dem andern Hauptschnitte nähern, finden wir stets verschiedene Ellipsen als Schnittcurven der Indexfläche, also auch verschiedene Stärke der Doppelbrechung.

Divergieren die Schwingungsrichtungen einer zweiaxigen Krystallplatte für verschiedene Farben bedeutend, so erscheint dieselbe im weißen Lichte bei keiner Stellung vollkommen dunkel; denn wenn dieselbe in ihrer Ebene bis zur Dunkelstellung für eine bestimmte Farbe gedreht worden ist, gehen die übrigen noch mit einer um so größeren Intensität, je größer die Dispersion der Schwingungsrichtungen ist, hindurch und lassen daher die Platte aufgehellt, und zwar mit einer Mischfarbe, erscheinen. Bei ausnahmsweiser Größe der Winkel zwischen den Schwingungsrichtungen verschiedener Farben tritt beim Drehen der Platte im Orthoskope ein fortwährender Wechsel sehr lebhafter Farben auf.

Eine gewisse Ähnlichkeit mit den Erscheinungen, welche die Dispersion der Schwingungsrichtungen hervorruft, besitzen diejenigen, welche eine senkrecht zu einer optischen Axe geschnittene zweiaxige Krystallplatte im weißen Lichte zeigt. Hier sind für diejenige Farbe, für welche die Platte genau senkrecht zur optischen Axe steht, infolge der inneren konischen Refraction, wie wir S. 108 sahen, alle möglichen Schwingungsazimuthe vorhanden, also Helligkeit in jeder Stellung beim Drehen. Für jede der übrigen Farben steht die optische Axe mehr oder weniger schief zur Platte, für sie findet also Zerlegung in zwei zueinander senkrechte Schwingungen statt; diese sind aber verschieden orientiert. Die Platte kann daher auch im weißen Lichte bei keiner Stellung Dunkelheit zeigen.

Das letzterwähnte Verhalten der zweiaxigen Krystalle gestattet bei der mikroskopischen Untersuchung von Gesteinen oft, ein in einem Dünnschliffe

in zahlreichen, mannigfach orientierten Durchschnitten vorliegendes Mineral als ein zweiaxiges zu erkennen. Zeigen diese Durchschnitte verschiedene Stärken der Doppelbrechung (diejenigen mit der stärksten sind nach vor. S. ungefähr parallel der Ebene der optischen Axen), und finden sich darunter einzelne, welche beim Drehen zwischen gekreuzten Nicols immer hell bleiben und höchstens wechselnde Farben zeigen, so müssen diese senkrecht zu einer optischen Axe vom Schnitte getroffen sein. Vollkommene Sicherheit darüber, daß man es mit diesem Falle und nicht mit dem vorhergehend betrachteten einer sehr großen Dispersion der Schwingungsrichtungen zu tun habe, erhält man, wenn man einen solchen Durchschnitt in die Mitte des Gesichtsfeldes bringt und diejenigen Änderungen am Mikroskope vornimmt, durch welche convergentes Licht erzeugt wird. Man erblickt dann durch den Krystallschnitt hindurch die im nächsten Abschnitte zu besprechenden Erscheinungen einer senkrecht zu einer optischen Axe geschnittenen Platte.

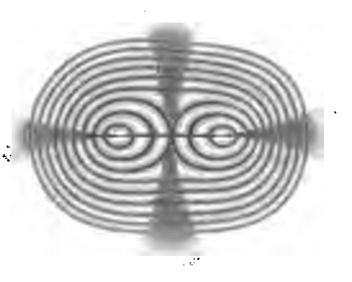
Interferenzerscheinungen zweiaxiger Krystalle im convergenten polarisierten Lichte. Dünne Platten zweiaxiger Krystalle zeigen, wie schräg gegen die Axe geschliffene einaxige, im einfarbigen Lichte dunkle und helle Curven; die Punkte einer solchen Curve entsprechen den Strahlen, welche im Krystalle den gleichen Gangunterschied erhalten haben. Wenn die Platte parallel der Ebene der optischen Axen ist, so besitzen diese Curven der Gestalt von Hyperbeln, wie bei einer der optischen Axe parallelen einaxigen Platte (s. S. 85). Im weißen Lichte erscheinen analoge Curven gleicher Farbe (isochromatische Curven), bei Überschreitung einer gewissen Dicke ist jedoch nur noch das Weiß der höheren Ordnung sichtbar, falls nicht Strahlen in das Gesichtsfeld des Konoskopes fallen, welche parallel einer optischen Axe durch den Krystall gegangen sind.

Die Erscheinungen, welche in dem zuletzt erwähnten Falle eintreten, mögen zuerst an dem Verhalten einer Krystallplatte (in monochromatischem Lichte) erläutert werden, welche senkrecht zu einer optischen Axe (für die betreffende Farbe) geschnitten ist, daher die parallel der letzteren hindurchgegangenen Strahlen sich in der Mitte des Gesichtsfeldes vereinigen. Dreht man die Platte so in ihrer Ebene, daß die Ebene ihrer optischen Axen parallel der Schwingungsrichtung eines der beiden gekreuzten Nicols ist, so muß parallel diesem Hauptschnitte der Platte im Gesichtsfelde ein schwarzer Balken erscheinen, da hier nur Schwingungen in dem Hauptschnitte stattfinden, welche der zweite Nicol vollständig vernichtet. Punkte zu beiden Seiten der Mittellinie dieses dunkeln Balkens entsprechen Strahlen mit mehr und mehr schief gegen den Hauptschnitt geneigten Schwingungsrichtungen, also findet von der Mittellinie aus allmähliche Aufhellung statt, und diese Aufhellung schreitet am raschesten vor nahe am Mittelpunkte des Gesichtsfeldes, welcher der optischen Axe entspricht, weil hier die Schwingungsrichtung am raschesten wechselt und in unmittelbarer Nähe des Axenpunktes auch noch die Strahlen der konischen Refraction mit

ihren in allen Azimuthen stattfindenden Schwingungen hinzukommen; aus diesem Grunde ist der das Gesichtsfeld durchziehende Balken in der Mitte am schmalsten. In derjenigen Entfernung vom Mittelpunkte des Gesichtsfeldes, in welcher sich Strahlen vereinigen, die im Krystalle eine Wellenlänge der betr. Farbe Gangunterschied erhalten haben, muß Vernichtung des Lichtes eintreten, also muß die Mitte von einer geschlossenen dunkeln Curve umgeben sein, welche jedoch nicht, wie die dunkeln Ringe der einaxigen Krystalle (S. 80 f.), die Gestalt eines Kreises haben kann. Von dem Mittelpunkte, wo der Gangunterschied 0 ist, steigt derselbe nämlich in der dem dunkeln Balken parallelen Richtung nach beiden Seiten ungleich; in dem einen Falle nähert sich die Doppelbrechung dem Werte $\gamma - \beta$, im andern dem Werte $\beta - \alpha$; zu beiden Seiten des schwarzen Balkens ist die Anordnung zwar zu diesem symmetrisch, aber verschieden in jedem Azimuthe; die Form des dunkeln Ringes ist daher eine ellipsenähnliche, und derselbe wird von dem dunkeln Balken symmetrisch halbiert. Die gleiche Betrachtung gilt für den zweiten den Mittelpunkt umgebenden Ring, welcher dem Gangunterschiede 2λ entspricht, usw. Ist die Platte schief zu einer optischen Axe, so erscheint der Mittelpunkt der hellen und dunkeln Ringe nicht in der Mitte des Gesichtsfeldes, und deren Form erleidet durch die Brechung eine Veränderung.

Unter Umständen können auch die Ringsysteme beider optischen Axen in das Gesichtsfeld des Konoskops fallen, und hier sind besonders von praktischer Wichtigkeit diejenigen Interferenzerscheinungen, welche eine Platte zeigt, deren Ebene senkrecht zur ersten Mittellinie (der Halbierenden des spitzen Winkels der optischen Axen) steht. Betrachten wir dieselbe in homogenem Lichte bei gekreuzten Nicols in einer Stellung, bei welcher die Ebene ihrer optischen Axen parallel der Polarisationsebene eines der beiden Nicols ist, so erblicken wir folgende Erscheinung (Fig. 76): Durch die Mitte des Gesichtsfeldes geht ein schwarzes Kreuz, dessen zwei gegenüberliegende Arme, welche der Axenebene parallel sind, ungleich schmäler und schärfer begrenzt erscheinen, als die senkrecht dazu stehenden, mehr verwaschenen. Die beiden, beiderseits gleichweit von der Mitte des Gesichtsfeldes abstehenden Punkte, wo die in der Richtung je einer optischen Axe durch den Krystall gehenden Strahlen sich vereinigen, sind umgeben von ovalen, dunkeln und hellen Ringen, von denen zwei von einem gewissen Abstande die Form einer ∞ besitzen, und welche in noch größerem Abstande die Gestalt der äußersten in Fig. 76 dargestellten Curven haben. Diese krummen Linien, in vorliegendem Falle solche gleicher Helligkeit, werden Lemniscaten genannt. Läßt man die gekreuzte Stellung der Nicols ungeändert, dreht

Fig. 76.



aber die Krystallplatte in ihrer eigenen Ebene, so ändern sich die Ringe gar nicht, sie drehen sich nur einfach mit der Platte, dagegen verwandeln sich die vorher geradlinigen Kreuzesarme in zwei Hyperbeln, welche

Fig. 77.

Fig. 78.

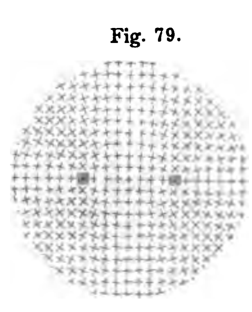


bei geringer Drehung wie Fig. 77, bei 45° Drehung wie Fig. 78 erscheinen, dabei aber immer durch die beiden Mittelpunkte der Ringsysteme gehen. Die letzteren, die sogenannten »Axenpunkte«, sind um so näher der Mitte des Gesichtsfeldes, je kleiner der Winkel der optischen Axen, um so näher dem Rande, je größer derselbe ist. Ihr Abstand voneinander ist ein Maß jenes Winkels. Da der Winkel der optischen Axen (für eine bestimmte Farbe) bei allen Krystallen einer Substanz derselbe ist, so bleibt auch der Abstand der Mittelpunkte der beiden Ringsysteme derselbe, mag die Platte dick oder dünn sein, wenn sie nur aus demselben Materiale besteht.

Die vorstehend beschriebenen Erscheinungen erklären sich in folgender Weise:

In Fig. 79[1]) sind für zahlreiche Punkte im Gesichtsfelde durch Kreuze die beiden Schwingungsrichtungen eingetragen, welche man für die diesen Punkten entsprechenden Fortpflanzungsrichtungen mittels der S. 107 angegebenen Construction erhält. Zwischen gekreuzten Nicols müssen alle Stellen dunkel erscheinen, an welchen die Schwingungsrichtungen mit denen der Nicols zusammenfallen. Sind die letzteren horizontal und vertical, so muß ein schwarzes Kreuz entstehen, dessen verticale Arme sehr breit sind, besonders nach dem Rande des Gesichtsfeldes hin, weil die Schwingungsrichtungen zu beiden Seiten der verticalen Mittellinie eine nur sehr allmählich wachsende Schiefe besitzen; dasselbe ist auch der Fall für die äußersten Teile der horizontalen Arme, während über und unter den Axenpunkten die Schiefe der Schwingungsrichtungen sehr rasch zunimmt. Der

Fig. 79.



1) Copie nach E. G. A. ten Siethoff, Centralbl. f. Min., 1890, 268.

horizontale dunkle Balken muß also in der Nähe der Axenpunkte am dünnsten sein und nach beiden Seiten an Breite zunehmen. Denkt man sich nun Fig. 79 um einen kleinen Winkel nach rechts (im Uhrzeigersinne) gedreht[1]) und verbindet die Punkte, an denen nun die Schwingungsrichtungen horizontal und vertical stehen, also mit denen der Nicols zusammenfallen, so erhält man die in Fig. 77 dargestellten dunkeln Curven und nach einer Drehung um 45° die beiden Hyperbeln, wie in Fig. 78, welche notwendig an den Axenpunkten die geringste Breite besitzen müssen.

Gehen wir von einem dieser Axenpunkte aus, an welchen keine Doppelbrechung, also auch kein Gangunterschied vorhanden ist, nach einer Richtung, welche nicht der Ebene der optischen Axen parallel ist, so werden in einem bestimmten Abstande diejenigen Strahlen sich vereinigen, welche mit $\frac{1}{2}\lambda$ Gangunterschied interferieren, in größerem Abstande die mit λ Gangunterschied interferierenden usf.; in dieser Richtung fortschreitend, muß man in dem Interferenzbilde abwechselnd Minima und Maxima der Helligkeit treffen. Ändert man aber jetzt die Richtung, in der man von dem Axenpunkte ausgeht, so ändert sich damit nicht nur die Differenz der Geschwindigkeit der beiden entstehenden Strahlen bei demselben Abstande, sondern auch die Weglänge im Krystalle; man erhält somit denselben Gangunterschied, d. h. dasselbe Minimum oder Maximum, bei einem andern Abstande von der Mitte. Während also bei einem einaxigen Krystalle die Punkte gleicher Helligkeit auf Kreisen liegen — weil die Änderung der Doppelbrechung mit der Neigung nach allen Richtungen rings um die Axe gleichartig stattfindet —, müssen hier ovale Curven gleicher Helligkeit entstehen; da aber der die Doppelbrechung bestimmende Abstand der beiden Schalen der Strahlenfläche sich symmetrisch ändert zu beiden Seiten eines jeden der drei Hauptschnitte des Krystalls, so müssen auch diese Ovale symmetrisch halbiert werden von der Ebene der optischen Axen und dem senkrecht dazu stehenden Hauptschnitte, d. h. von den Richtungen der beiden schwarzen Balken. In der Tat ergibt die Theorie in Übereinstimmung mit der Beobachtung, daß die dunkeln und hellen Curven die Form von sogenannten Lemniscaten, welche jene Bedingung erfüllen, besitzen. Drehen wir nun die Platte in ihrer Ebene, so müssen sich die Lemniscatensysteme ebenfalls drehen, da das Zustandekommen derselben ja an bestimmte Richtungen im Krystalle geknüpft ist und die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte immer parallel der Ebene der optischen Axen desselben bleiben muß. Die Punkte des Interferenzbildes jedoch, in denen sich die Strahlen vereinigen, deren Schwingungsrichtungen parallel der Polarisationsebene eines Nicols sind und welche daher vollkommen vernichtet werden, liegen nun nicht mehr auf zwei einander rechtwinkelig kreuzenden Geraden, sondern auf zwei Hyperbeln, welche natürlich je durch einen Axenpunkt gehen müssen.

1) Statt der Drehung der Krystallplatte kann man natürlich auch mit demselben Effecte die beiden gekreuzten Nicols zusammen drehen, während die Platte ihre Orientierung behält.

Wenden wir, bei unveränderter Farbe des benutzten Lichtes, eine dickere Platte derselben Substanz an, so müssen das schwarze Kreuz oder die Hyperbeln, sowie der Abstand der beiden Axenpunkte, nach dem Bisherigen ganz unverändert bleiben. In einem bestimmten Abstande von einem Axenpunkte wird zwar die Geschwindigkeitsdifferenz der beiden Strahlen dieselbe, wie vorher, aber wegen des längeren Weges im Krystall ihr Gangunterschied größer sein; an der Stelle, wo bei Anwendung der dünneren Platte also der erste dunkle Ring erschien, tritt bei der dickeren bereits der zweite oder dritte auf. Es wird also die Weite der Ringe um so kleiner sein, je dicker die Platte, um so größer, je dünner letztere ist. Es wird demnach bei einer bestimmten geringen Dicke einer Platte mit kleinem Winkel der optischen Axen der Fall eintreten, daß auch die innerste Lemniscate nicht mehr aus zwei getrennten Ovalen besteht, sondern in einer ellipsenähnlichen Form beide Centren umgibt, wie eine der äußersten Lemniscaten bei dicker Platte. Fig. 80 *b* stellt das Interferenzbild einer so dünnen Platte dar, verglichen mit dem einer dickeren von derselben Substanz, Fig. 80 *a*, beide unter Parallelismus der Axenebene mit dem Hauptschnitte eines Nicols, während in Fig. 81 *a* und *b* das Interferenzbild derselben Platten nach einer Drehung um 45° wiedergegeben ist.

Fig. 80.

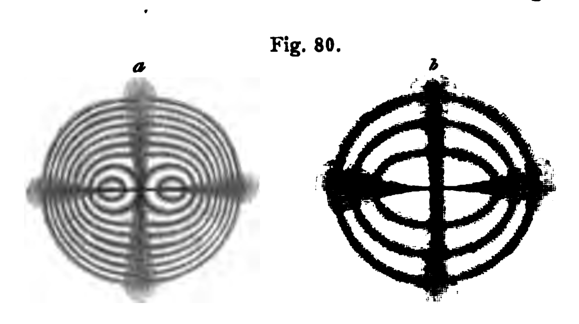
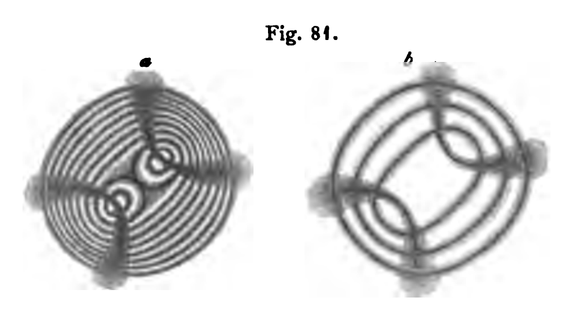


Fig. 81.



Da die Weite der Ringe von der Differenz der Geschwindigkeit, mit welcher sich die beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen im Krystalle fortpflanzen, abhängt, so ist dieselbe, ebenso wie bei den optisch einaxigen, auch bei derselben Dicke verschieden bei verschiedenen Substanzen, d. h. abhängig von der Stärke der Doppelbrechung (der Differenz der drei Hauptbrechungsindices α, β, γ). Die Ringe sind weiter bei einer Platte, welche aus einer Substanz von geringer Doppelbrechung besteht, als diejenigen, welche eine gleich dicke Platte eines mit stärkerer Doppelbrechung begabten Körpers zeigt.

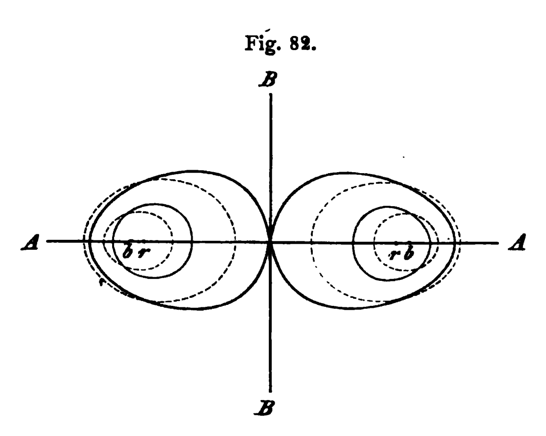
Endlich hängt die Weite der Ringe, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht, noch ab von der Wellenlänge des angewandten Lichtes; ist diese größer, so sind sie weiter voneinander abstehend, und umgekehrt. Aus diesem Grunde fallen die dunkeln Ringe für die verschiedenen Farben an

verschiedene Stellen; wird die Platte also im weißen Lichte untersucht, so werden farbige Ringe entstehen, deren Erklärung ganz dieselbe ist, wie bei den einaxigen Krystallen. Während aber bei letzteren die dunkeln Ringe für die verschiedenen Farben sich einfach als concentrische Kreise übereinander schieben, demnach die isochromatischen Curven wieder Kreise mit demselben Mittelpunkte (dem Orte der optischen Axe) sind, fallen bei den zweiaxigen die Axenpunkte für die verschiedenen Farben nicht zusammen, weil die denselben entsprechenden Winkel der optischen Axen nicht gleich sind. Dadurch sind die Farbenerscheinungen compliciertere, dies aber wieder in verschiedenem Grade, je nachdem die Richtungen der größten, kleinsten und mittleren Lichtgeschwindigkeit im Krystalle für die verschiedenen Farben zusammenfallen oder nicht. Bei denjenigen zweiaxigen Krystallen, bei welchen diese drei Richtungen verschiedene sind für verschiedene Farben, sind es also auch die Axenebenen; bei einem solchen Krystalle kann eine Platte demnach nur senkrecht zur ersten Mittellinie für eine Farbe stehen; wenn man diese allein benutzt, wird also das Lemniscatensystem genau die Mitte des Gesichtsfeldes zum Mittelpunkte haben; beleuchtet man aber mit einer andern Farbe, so werden nicht nur die Ringe andere Weite und die Axenpunkte einen andern Abstand haben, sondern das ganze Bild wird auch im Gesichtsfelde verschoben sein. Im weißen Lichte werden also Farbencurven entstehen, welche zwar den Lemniscaten ähnlich sind, wenn die Abweichung der optischen Mittellinien für verschiedene Farben höchstens einige Grade beträgt, wie das gewöhnlich der Fall ist, in welchen aber die Farbenfolge im einzelnen eine unsymmetrische ist, so daß weder die rechte Seite des Interferenzbildes symmetrisch ist zur linken, noch die obere zur unteren.

Bleiben wir zunächst bei dem einfachsten Falle stehen, daß die drei Hauptschwingungsrichtungen, folglich auch die Ebene der optischen Axen, für alle Farben gleiche Orientierung im Krystalle besitzen, so ist für jede einzelne Farbe das Interferenzbild symmetrisch zu halbieren durch die Gerade, welche die beiden Axenpunkte verbindet, sowie durch die Gerade, welche jene im Mittelpunkte des Gesichtsfeldes senkrecht schneidet, d. h. durch die beiden schwarzen Balken, welche erscheinen, wenn die Axenebene dem Hauptschnitte eines Nicols parallel ist. Da diese Symmetrielinien für alle Farben zusammenfallen, so erscheint im weißen Lichte ein Interferenzbild, welches ebenfalls durch dieselben Geraden symmetrisch halbiert wird, d. h. dessen obere Hälfte genau gleich der unteren (in umgekehrter Lage), dessen rechte Seite ebenso gleich der linken ist, s. Fig. 3 der Tafel II. Vergleichen wir in diesem Bilde die verschiedenen Stellen einer Lemniscate, z. B. des ersten, die eine optische Axe umgebenden Farbenringes, so sehen wir, daß sie nicht gleich gefärbt sind, daß die nach der Mitte des Gesichtsfeldes zugekehrte Seite (auch der folgenden Ringe) eine andere Farbenfolge besitzt, als die nach außen gekehrte, während die obere Hälfte genau gleich und entgegengesetzt der unteren ist. Dies

erklärt sich einfach durch den Umstand, daß die Mitten der Ringsysteme für die verschiedenen Farben nicht zusammenfallen. Sei z. B. AA (Fig. 82) die Richtung der Axenebene (für alle Farben), BB die des senkrecht dazu stehenden Hauptschnittes und rr die beiden Axenpunkte für Rot, bb für Blau, wobei natürlich der Abstand rb zu beiden Seiten gleich groß sein muß, weil die Mittellinien der Axen für beide Farben im Mittelpunkte des Bildes zusammenfallen, so mögen die ausgezogenen Curven die dunkeln Lemniscaten für Rot, die punktierten diejenigen für Blau sein. Geht man nun von der Mitte der beiden Ringsysteme aus, so zeigt die Figur, wenn man nach der Mitte hin sich bewegt, daß zuerst Blau vernichtet wird, erst in größerem Abstande Rot; daß dagegen, wenn man nach außen geht, die Auslöschung in umgekehrter Reihenfolge stattfindet. Im weißen Lichte muß also bei einem derartigen Krystalle die Farbenfolge des innersten Ringes nach diesen beiden Seiten hin gerade entgegengesetzt sein; ist die Entfernung (Dispersion) der Axen, rb, nicht so groß, so muß jene Farbenfolge wenigstens eine verschiedene sein. Die Fig. 82 zeigt ferner, daß die obere Hälfte der Farbenringe genau gleich und entgegengesetzt der unteren sein muß, weil die Verschiebung genau in der Geraden AA stattfindet, und daß das rechte Ringsystem ebenso gleich und entgegengesetzt dem linken sein muß, weil die gegenseitige Verschiebung der Ringe zu beiden Seiten der Geraden BB stets gleichartig vor sich gehen muß, so daß diese letztere die Systeme für alle Farben genau halbiert. Die Erscheinungen müssen sich demnach so zeigen, wie es die Fig. 3 Taf. II darstellt, in welcher die einander zugewandten Seiten der beiden innersten Farbenringe gleich, die nach außen gewandten ebenfalls gleich, aber in anderer Weise, gefärbt sind. Sind die Punkte r und b (Fig. 82) so weit voneinander entfernt, daß der erste dunkle Ring für Blau größtenteils oder ganz außerhalb desjenigen für Rot fällt, so kommen lemiscatenähnliche Farbencurven überhaupt nicht mehr zustande, sondern ein Interferenzbild, welches sich dem auf Seite 120 zu erwähnenden des Brookit u. a. nähert.

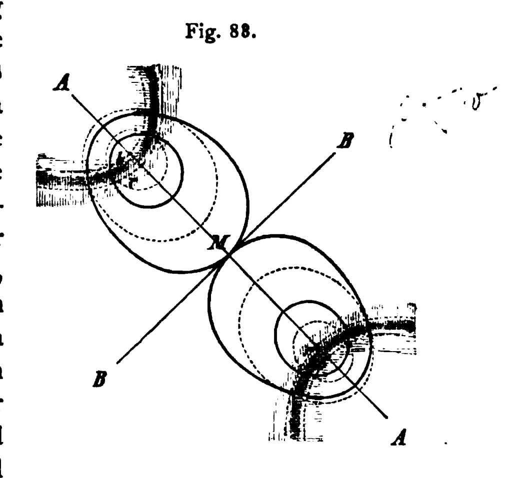
Fig. 82.



Dreht man die Krystallplatte so in ihrer Ebene, daß die Axenebene 45° mit den Nicols bildet, so erscheinen bekanntlich die schwarzen hyperbolichen Büschel, welche durch die Axenpunkte gehen. Sei, wie in Fig. 82, so auch in der dieser Stellung entsprechenden Fig. 83 AA die Axenebene, rr und bb die Axenpunkte für Rot und Blau, die ausgezogenen und die

punktierten Curven die dunkeln Lemniscaten für dieselben Farben, so sieht man, daß die im Weiß entstehenden Farbenringe ganz dieselben sein müssen, wie die in der vorigen Stellung der Platte. Betrachten wir dagegen die dunkeln Hyperbeln, so sehen wir, daß diese nicht zusammenfallen können, da sie für jede Farbe durch die Axenpunkte gehen müssen. In der Figur sind die beiden im einfachen roten Lichte erscheinenden Hyperbeln vertical, die für Blau horizontal schraffiert angegeben, und daraus ersichtlich, daß dieselben sich für die verschiedenen Farben (da die für die übrigen Farben zwischen jenen liegen) teilweise decken, und zwar um so mehr, je kleiner der Abstand *rb* ist, d. h. je weniger die Winkel der optischen Axen für die verschiedenen Farben voneinander abweichen.

Fig. 83.



Da, wo die Hyperbeln für alle Farben aufeinander fallen, also in der Mitte der hyperbolischen Streifen, wird vollständige Dunkelheit entstehen, nicht so jedoch an beiden Rändern, wo die Auslöschung nur für einen Teil der Farben stattfindet. Die Ränder müssen daher farbig gesäumt erscheinen, wie aus Fig. 4 der Tafel II zu ersehen, während die schwarzen Balken bei der ersten Stellung Fig. 3 ebenda nichts dergleichen zeigen können. Die Farbensäume der dunkeln Hyperbeln sind um so breiter und um so lebhafter gefärbt, je weniger Farben es sind, für welche an einer Stelle die Hyperbeln noch übereinander fallen, d. h. je größer die Dispersion der Axen, die Verschiedenheit der Axenwinkel für die verschiedenen Farben, ist. Erreicht diese eine solche Größe, daß auch in der Mitte der hyperbolischen Streifen diese sich nicht mehr für alle Farben decken, so erscheint auch dort kein Schwarz, die Hyperbeln bestehen nur aus Farbenstreifen in bestimmter Reihenfolge von innen nach außen. Diese Folge muß zugleich den Sinn der Dispersion der Axen erkennen lassen, d. h. ob deren Winkel für die Strahlen des roten Endes im Spectrum kleiner ist, als für die des violetten Teiles (abgekürzt bezeichnet $\varrho < v$), oder umgekehrt ($\varrho > v$). In Fig. 83 und Fig. 4 Tafel II ist das Interferenzbild eines Krystalls der ersteren Art dargestellt; in diesem erscheint das rote Licht vollständig ausgelöscht auf den beiden durch die Punkte *rr* gehenden Hyperbeln, ebenso die dem Rot benachbarten Teile des Spectrums (oder wenigstens sehr an Intensität geschwächt), nicht aber die Farben vom andern Ende des Spectrums, nämlich Blau und Violett, welche erst an den mit *bb* bezeichneten Stellen ausgelöscht werden; diese Farben werden also auf den der Geraden *BB* zugewandten Seiten der beiden Hyperbeln als Saum derselben auftreten, an den nach außen gewendeten concaven

dagegen wird ein roter Saum erscheinen, weil hier die blauen Strahlen vollkommen vernichtet werden. Diese Farbensäume treten stets am deutlichsten hervor an dem innerhalb des innersten Farbenringes liegenden Teile der Hyperbeln, wo dieselben am schärfsten begrenzt erscheinen. Beobachtet man daselbst, daß die Innenseite (d. h. die nach der Mitte des Gesichtsfeldes gewendete Seite) der Hyperbeln blau, die Außenseite rot gefärbt erscheint (s. Fig. 4 Taf. II), so hat man es mit einem Krystalle zu tun, dessen Winkel der optischen Axen für Rot kleiner ist, als für Blau (Sinn der Dispersion $\varrho < v$); ist dagegen die Innenseite rot, die Außenseite blau, so ist der Sinn der Dispersion $\varrho > v$, der Axenwinkel für Rot größer, als für Blau. Je lebhafter und je breiter die Farbensäume sind, desto größer ist die Stärke der Dispersion. Da der Winkel der optischen Axen für dieselbe Farbe bei allen Krystallen einer und derselben Substanz der gleiche ist, so gilt dies auch sowohl für den Sinn, als für die Stärke der Dispersion.

Es ist unschwer einzusehen, daß eine Platte, deren Flächen senkrecht zur Halbierenden des stumpfen Axenwinkels stehen, ganz analoge Interferenzerscheinungen, d. h. Lemniscatensysteme zeigen muß, daß aber die den beiden Axen entsprechenden Centren derselben meist so weit voneinander abstehen werden, daß sie nicht mehr in das Gesichtsfeld des Instrumentes fallen. Ist dies jedoch der Fall, so müssen die Farbensäume der dunkeln Hyperbeln natürlich den entgegengesetzten Sinn der Dispersion anzeigen, als bei der zur ersten Mittellinie senkrechten Platte.

In einzelnen Substanzen (Brookit = TiO^2, mellithsaures Ammonium u. a.) ändern sich die drei Hauptbrechungsindices mit der Farbe so ungleich, daß für eine bestimmte Farbe z. B. der vorher kleinste gleich dem mittleren wird und für noch mehr abweichende Schwingungsdauer diese beiden ihre Rollen tauschen. In Krystallen mit so starker Dispersion muß die Axenebene für einen Teil des Spectrums ein Hauptschnitt, für den andern Teil einer der beiden andern Hauptschnitte sein, also senkrecht dazu stehen, für eine bestimmte dazwischenliegende Farbe muß der Krystall einaxig[1]) sein. Fällt die erste Mittellinie für alle Farben in eine Richtung zusammen, und bringt man eine zu dieser senkrechte Platte in convergentes polarisiertes Licht, so sieht man im roten Lichte ein gewöhnliches Interferenzbild, im blauen Lichte ebenfalls, aber mit senkrecht dazu orientierter Axenebene, dagegen im weißen Lichte ein vollkommen abweichendes Farbenbild, welches in Fig. 5 der Tafel II dargestellt ist.

In den bisher betrachteten Krystallen fallen die drei Hauptschnitte der Index- bzw. Strahlenfläche für alle Farben zusammen, die optischen Erscheinungen ändern sich daher zwar für jede Farbe in anderer Weise,

1) Für diese Farbe ist infolge des Gleichwerdens zweier Hauptbrechungsindices die Indexfläche ein Rotationsellipsoid. Es tritt also hier der S. 89 erwähnte specielle Fall ein, aber nur für das Licht einer bestimmten Schwingungsdauer, während bei den eigentlichen optisch einaxigen Krystallen die Indexfläche für alle Farben ein Sphäroid ist.

immer aber symmetrisch in bezug auf diese drei Ebenen, welche wir deshalb als »optische Symmetrieebenen« der Krystalle bezeichnen wollen. Die bisher betrachteten zweiaxigen Krystalle besitzen also drei optische Symmetrieebenen. Man ersieht aus Fig. 83 unmittelbar, daß im Falle eines solchen Krystalls die Lebhaftigkeit und die Reihenfolge der Farben von innen nach außen genau die gleichen sein müssen bei beiden Hyperbeln, weil die Halbierenden des Winkels der optischen Axen für alle Farben absolut zusammenfallen in dem Mittelpunkte M. Ist dieses jedoch nicht der Fall, besitzt der Krystall auch noch eine Dispersion der Hauptschwingungsrichtungen, so können die Farbensäume der Hyperbeln nicht mehr gleich sein, und diese Ungleichheit derselben bietet gerade das empfindlichste Mittel dar, eine solche Dispersion, d. h. das Vorhandensein einer geringeren optischen Symmetrie, zu erkennen.

Die Verschiedenheit der Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen für verschiedene Farben kann eine teilweise oder eine vollständige sein, d. h. es kann eine derselben für alle Farben gleiche Richtung besitzen, während die beiden andern in der dazu senkrechten Ebene, welche dann ein gemeinsamer optischer Hauptschnitt für alle Farben ist, dispergiert sind (der Krystall besitzt nur eine optische Symmetrieebene), — oder endlich alle drei Hauptschwingungsrichtungen ändern ihre Orientierung im Krystalle mit der Schwingungsdauer des Lichtes (der Krystall besitzt keine optische Symmetrieebene)[1]). In dem ersteren dieser beiden Fälle gestalten sich, wie aus dem Folgenden zu ersehen, die Interferenzerscheinungen verschieden, je nachdem die für alle Farben gemeinsame Hauptschwingungsrichtung diejenige der mittleren Lichtgeschwindigkeit oder eine der beiden andern ist[2]).

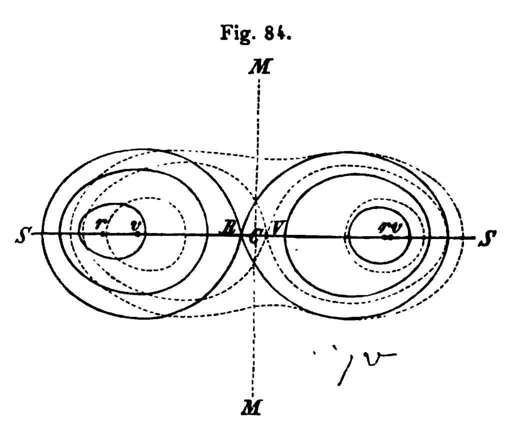
Besitzt die Schwingungsrichtung der Lichtstrahlen mit dem mittleren Brechungsindex β für alle Farben die gleiche Orientierung im Krystalle, so gilt dies auch für die dazu senkrechte Ebene, d. h. den Hauptschnitt XZ der Strahlenfläche (Fig. 64). Es liegen alsdann die optischen Axen für alle Farben in einer und derselben Ebene, ihre Mittellinien sind aber dispergiert. Wenn nun aus einem derartigen Krystalle eine Platte hergestellt wird, welche im convergenten Lichte das Interferenzbild beider Axen zeigt, so kann eine solche zwar senkrecht zur Axenebene für alle Farben, aber normal zur ersten Mittellinie nur für eine einzige Farbe geschliffen werden, z. B. für

1) Das Zusammenfallen von zwei Hauptschwingungsrichtungen für alle Farben führt natürlich auch zur Coincidenz der dritten, zu beiden senkrechten, daher außer dem im vorhergehenden behandelten Falle nur die beiden oben erwähnten möglich sind.

2) Zur Veranschaulichung der hieraus sich ergebenden optischen Verhältnisse können mit Vorteil benutzt werden entweder die von Böhm und Wiedemann in München gelieferten Dispersionsmodelle, welche die Strahlenfläche für je drei verschiedene Farben in ähnlicher Weise, wie es S. 96 erwähnt wurde, darstellen (s. Anhang), oder auch die kleinen Glasmodelle mit eingezogenen Fäden, welche C. Mohn, Diener am mineralogischen Institut der Universität Rostock in Mecklenburg, für einen geringen Preis (à 5—6 Mark) anfertigt.

eine im hellsten Teile des Spectrums liegende mittlere Farbe. Alsdann steht die Halbierende des spitzen Winkels der optischen Axen für die Farben geringerer Brechbarkeit nach der einen Seite, für die größerer Brechbarkeit nach der andern geneigt zur Plattenebene, und da die den einzelnen Mittellinien parallelen Strahlen beim Austritte noch eine Brechung erleiden, wird ihre Divergenz scheinbar noch vergrößert. Bei den meisten krystallisierten Substanzen beträgt diese Divergenz übrigens nur 1—2°, manchmal noch weniger, selten bedeutend mehr. Sei der Punkt im Gesichtsfelde des Konoskops, wo die normal die Platte durchsetzenden Strahlen sich vereinigen, also der Mittelpunkt desselben, C (Fig. 84), und mag deren Richtung der ersten Mittellinie für eine mittlere Farbe entsprechen, so ist die 1. Mittellinie für Rot nach der einen Seite, die für Violett nach der andern geneigt, alle aber liegen in der Ebene, welche durch die Gerade SS angedeutet ist. Sei nun R der Punkt im Gesichtsfelde, wo sich alle Strahlen vereinigen, welche parallel der ersten Mittellinie für Rot durch die Krystallplatte gingen, und rr die beiden Axenpunkte für dieselbe Farbe, so stellen die ausgezogenen Lemniscaten diejenigen vor, welche auftreten, wenn das Instrument mit Licht von dieser Farbe erleuchtet wird. Ist V der Vereinigungspunkt der Strahlen, welche parallel der ersten Mittellinie für Violett durch den Krystall gingen, sind vv die Axenpunkte derselben Farbe, deren Axenwinkel natürlich ein anderer (in der Figur ist $\varrho > v$ angenommen), so sind die punktierten Lemniscaten diejenigen, welche im homogenen violetten Lichte erscheinen. Beobachtet man nun das Interferenzbild im weißen Lichte, so geht aus Fig. 84 unmittelbar hervor, daß dasselbe zwar symmetrisch nach der Graden SS, also oben und unten gleich sein muß, in keinem Falle aber nach der Geraden MM. Während das Axenbild einer Krystallplatte mit parallelen Hauptschwingungsrichtungen für alle Farben (vgl. Fig. 82, S. 118) auch rechts und links symmetrisch ist, hört durch die Dispersion der Mittellinien hier die letztere Gleichheit auf, die Curven sind rechts und links in verschiedener Weise übereinander geschoben, es kann also die Farbenverteilung in den Ringen rechts und links nicht gleich sein; infolgedessen werden die Ringe beider Systeme verschieden groß und verschieden lebhaft gefärbt erscheinen, und die Reihenfolge der Farben in beiden eine andere sein; alles dies um so mehr abweichend, je größer die Dispersion der Mittellinien ist. Ist der Krystall so orientiert, daß die Ebene der optischen Axen der Schwingungsrichtung eines der beiden

Fig. 84.



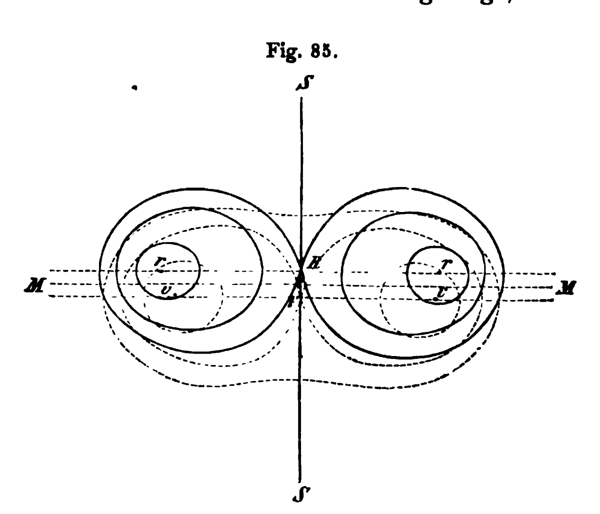
Nicolschen Prismen parallel ist, so erscheint der schwarze Balken parallel *SS*, wie bei einem Krystalle der ersten Art, ohne Farbensäume, da die Ebenen der optischen Axen für alle Farben zusammenfallen. Die Interferenzerscheinung, welche eine Platte von Gyps bei dieser Stellung darbietet, ist in Fig. 6 der Tafel II abgebildet, und ist hier der namentlich für die innersten Farbenringe hervortretende Unterschied der beiden Systeme deutlich zu erkennen. Dreht man die Platte um 45°, so daß die dunkeln Hyperbeln erscheinen, so tritt die Verschiedenheit noch mehr hervor; denn da wegen der Dispersion der Mittellinien die Punkte r und v (Fig. 84) rechts und links verschiedenen Abstand besitzen, so müssen die Farbensäume, welche die dunkeln Hyperbeln zu beiden Seiten zeigen, und die bekanntlich innerhalb des ersten Ringes am deutlichsten sind, bei beiden Hyperbeln von verschiedener Breite und verschiedener Lebhaftigkeit sein. Ist die Dispersion der Mittellinien groß und ebenso auch diejenige der Axen, d. h. ist der Axenwinkel sehr verschieden für Rot und Violett, welcher Fall in Fig. 84 realisiert ist, so liegt auf der einen Seite der Axenpunkt r für Rot innen, der für Violett v außen, auf der andern Seite r außen, v innen; da ferner die Abstände beider rechts und links sehr verschieden sind, so würde die linke Hyperbel innen rot, außen blau, und zwar sehr breit, gesäumt erscheinen, während die rechte nur schmale Farbensäume, und zwar innen blau und außen rot, zeigen würde. Wäre die Dispersion der Mittellinien etwas geringer, so würden die Axenpunkte für die verschiedenen Farben auf einer Seite fast ganz zusammenfallen; alsdann würde man in dem Interferenzbilde statt zweier entgegengesetzt gefärbter Hyperbeln eine mit deutlichen Farbensäumen und die andere ohne solche erblicken. Bei einer kleineren Dispersion jedoch, wie sie häufiger vorkommt, ist zwar der Abstand von r und v rechts und links verschieden, diese liegen aber nicht umgekehrt, sondern entweder beide v außen, oder beide nach innen. Alsdann erscheinen beide Hyperbeln nach außen rot, nach innen blau gesäumt, oder umgekehrt, — aber mit verschiedener Farbennuance und verschiedener Lebhaftigkeit der Färbung. Diesen letzteren Fall stellt Fig. 7 der Tafel II dar, welche sich auf dieselbe Gypsplatte wie Fig. 6 bezieht, nach einer Drehung von 45°. Man achte hierbei, außer auf die Verschiedenheit der beiden Hyperbelsäume, namentlich auf diejenige der inneren Seite des ersten Ringes rechts und links. Diese Art der Dispersion der Farben des Axenbildes wird, weil sie durch eine ungleiche Neigung der Hauptschwingungsrichtungen innerhalb derselben Ebene erzeugt wird, die geneigte Dispersion (»dispersion inclinée« Des Cloizeaux's) genannt.

Ist dagegen die für alle Farben gemeinsame Hauptschwingungsrichtung die der größten oder kleinsten Lichtgeschwindigkeit, d. h. eine der beiden Mittellinien der optischen Axen, so ist klar, daß dann die Ebene der letzteren für verschiedene Farben eine abweichende Orientierung besitzen muß. Denn wenn die Halbierenden des stumpfen Axenwinkels für alle Farben

zusammenfallen, so sind die des spitzen Winkels und folglich auch die Axenebenen verschiedener Farben gleichsam um jene Richtung gedreht; ist aber die 1. Mittellinie für alle Farben identisch, so divergieren die Halbierenden des stumpfen Axenwinkels und also auch die Axenebenen um die erstgenannte Richtung.

Schleift man aus einem Krystalle, welcher dem ersten der beiden soeben erwähnten Fälle entspricht, eine Platte senkrecht zur 1. Mittellinie für eine mittlere Farbe, so sind die Ebenen der optischen Axen für minder brechbare Lichtstrahlen nach einer Seite, für stärker brechbare nach der anderen Seite schief zur Platte geneigt; die Mittellinien für alle Farben liegen aber in einer zur Platte senkrechten Ebene, nämlich in demjenigen Hauptschnitte, welcher zu der gemeinsamen Hauptschwingungsrichtung (der 2. Mittellinie) senkrecht steht. Sei diese Ebene (die optische Symmetrieebene) in Fig. 85 durch die Gerade SS angedeutet, sei C wieder, wie in der vorigen Figur, Mittelpunkt des Gesichtsfeldes im Konoskope, d. h. der Vereinigungspunkt aller Strahlen, welche senkrecht durch die Krystallplatte hindurchgehen, so ist deren Richtung gleich der Mittellinie nur für eine mittlere Wellenlänge; diejenigen für andere Farben liegen, teils nach oben, teils nach unten geneigt, in der Ebene SS. Sei nun R der Punkt, in welchem sich alle Strahlen vereinigen, die im Krystalle parallel der Mittellinie für Rot laufen, und rr die Axenpunkte für dieselbe Farbe, so muß die Verbindungslinie rr normal zu SS und von dieser halbiert sein, da MM die Richtung der zweiten Mittellinie vorstellt. Für Violett muß der Punkt, in welchem sich die der Mittellinie parallelen Strahlen kreuzen, jenseits C, also etwa in V liegen, und die Axenpunkte vv ebenfalls rechts und links symmetrisch zu SS, aber in anderem Abstande, da der Axenwinkel für diese Farbe ein anderer als für Rot. Es ist nun leicht aus Fig. 85 zu ersehen, wie die Interferenzfigur im weißen Lichte aussehen muß; dieselbe wird vollkommen symmetrisch sein in bezug auf die Gerade SS, indem die rechte und linke Seite ganz gleiche und entgegengesetzte Farbenverteilung besitzen werden. Nicht so die obere und untere Hälfte, da die Ringe für die verschiedenen Farben nicht gleichmäßig zu beiden Seiten von MM liegen; die Farbenringe werden somit an ihrer oberen und unteren Seite verschiedene Farben

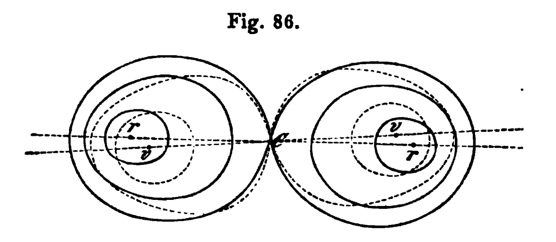
Fig. 85.



zeigen. Sind die Ebenen der optischen Axen des Krystalles parallel einem der beiden gekreuzten Nicols des Apparates, so wird sich ihre verschiedene Stellung für die verschiedenen Farben am deutlichsten documentieren an dem dunkeln Mittelbalken, welcher die Lage der Axenebene angibt und, wegen der Verschiedenheit derselben für verschiedene Farben, oben und unten einen farbigen Saum zeigt, entweder, wie in dem in Fig. 85 dargestellten Falle, oben blau (weil daselbst der schwarze Balken für rotes Licht gelegen ist) und unten rot, oder umgekehrt. Diese Dispersion hat man, weil bei derselben die Farbenverteilung auf den verschiedenen Horizontallinien eine abweichende ist, die horizontale (»dispersion horizontale« Des Cloizeaux's) genannt. Fig. 8 der Tafel II stellt das Interferenzbild eines Feldspat-(Sanidin-)Krystalles in der Stellung dar, in welcher seine Axenebenen einem Nicolhauptschnitte parallel sind, in welcher also die farbigen Säume zu sehen sind, Fig. 9 das Interferenzbild derselben Platte, wenn ihre Axenebene 45° mit den Nicols bildet. In letzterer Figur ist die Verschiedenheit der Farbencurven zu beiden Seiten der Verbindungslinie der Axenpunkte noch besser zu sehen, als in Fig. 8.

Der zweite der beiden S. 124 erwähnten Fälle ist derjenige, in welchem die Halbierende des spitzen Axenwinkels für alle Farben identisch ist. Eine zu dieser Richtung senkrecht geschliffene Platte steht zugleich normal zu den Ebenen der optischen Axen für alle Farben, aber da diese um die gemeinsame Hauptschwingungsrichtung (d. i. die Normale der Platte) gedreht sind, so schneiden sie die Ebene der Platte in verschiedenen Richtungen. Sei C (Fig. 86) wieder der Mittelpunkt des Gesichtsfeldes, entsprechend der ersten Mittellinie für alle Farben; seien rr ferner die Axenpunkte für Rot, die ausgezogenen Curven die Lemniscaten für diese Farbe, so bezeichnet die Gerade rr die Lage der Axenebene für Rot. Für eine andere Farbe, z. B. Violett, ist zwar die erste Mittellinie dieselbe, aber die zweite nimmt in dem dazu senkrechten Hauptschnitte eine andere Lage ein, also ist die Ebene der optischen Axen für diese eine andere, um einen gewissen Winkel um C gedrehte; ihre Lage sei durch die Gerade vv repräsentiert, die beiden Punkte vv seien die Axenpunkte und die punktierten Curven die Lemniscaten für Violett. Die Axenebenen für die mittleren Farben liegen natürlich zwischen rr und vv. Hieraus geht hervor, daß das Axenbild nur in monochromatischem Lichte Symmetrie nach zwei zueinander senkrechten Geraden zeigen kann, in weißem Lichte dagegen nach keiner; vielmehr ist rechts und links die Farbenverteilung verschieden, ebenso oben und unten; sie muß aber gleich sein rechts unten mit links oben, sowie rechts oben mit links unten, d. h. das Interferenzbild muß mit

Fig. 86.



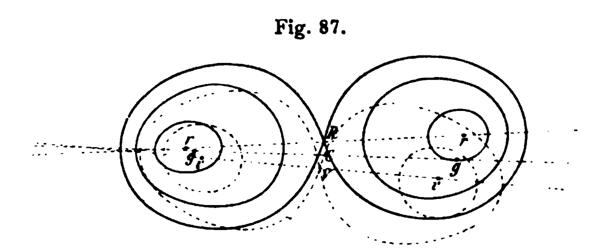
sich selbst zur Deckung gelangen, wenn es um die Normale der Platte in *C* um 180° gedreht wird; es zeigt also Symmetrie nur in bezug auf den Mittelpunkt, welchen man daher als das »Symmetriecentrum« des Bildes bezeichnen kann. Es entspricht der einzigen für alle Farben gemeinsamen Hauptschwingungsrichtung. Da die Axenebenen für die verschiedenen Farben sämtlich um *C* gedreht sind, so muß der schwarze Mittelbalken bei paralleler Stellung mit einem Nicol auch hier farbig gesäumt erscheinen, aber rechts und links verschieden, also entweder rechts oben und links unten rot und links oben und rechts unten blau, oder umgekehrt. Diese kreuzweise übereinstimmende Färbung des Mittelbalkens, sowie der inneren Ringe, läßt diese Dispersion, welche man die gekreuzte (»dispersion croisée ou tournante« Des Cloizeaux's) nennt, am leichtesten erkennen. Die in dieser Stellung von einer Boraxplatte hervorgebrachte Interferenzerscheinung zeigt Fig. 10 der Tafel II, während Fig. 11 diejenige nach einer Drehung der Platte um 45° darstellt.

Wenn der Winkel der optischen Axen eines Krystalles so wenig von 90° verschieden und seine Brechungsindices so klein wären, daß man die Axenbilder sowohl durch eine Platte senkrecht zur ersten, als durch eine senkrecht zur zweiten Mittellinie noch sehen könnte, so ist es klar, daß die eine dieser Platten die Erscheinung der horizontalen, die andere die der gekreuzten Dispersion zeigen würde, wenn die Axenebenen derselben senkrecht zu dem für alle Farben gemeinsamen Hauptschnitte stehen. Eigentlich sind also die beiden letzterwähnten Arten der Dispersion an solchen Krystallen stets vereinigt, nur daß man meist wegen des zu großen stumpfen Axenwinkels nur die eine derselben beobachten kann.

Die S. 121—126 betrachteten Krystalle können demnach als solche bezeichnet werden, deren optische Erscheinungen Symmetrie zeigen nach einer Ebene und einer dazu senkrechten »zweizähligen Axe«, d. h. einer Richtung um welche gedreht der Krystall in zwei, durch eine Drehung um 180° voneinander verschiedenen Stellungen identisches Verhalten zeigt.

Endlich bleibt nur noch der Fall zu betrachten übrig, in welchem sämtliche drei Hauptschwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben des Spectrums eine ungleiche Orientierung im Krystalle besitzen. Hier wechselt also, wenn wir von einer Farbe zur andern übergehen, nicht nur die Gestalt der Indexfläche, welche durch das Verhältnis der drei Hauptbrechungsindices gegeben ist, sondern auch die Richtung ihrer drei aufeinander senkrechten Axen. Wenn aus einem derartigen Krystalle eine Platte senkrecht zur ersten Mittellinie für eine mittlere Farbe, z. B. Gelb,

Fig. 87.



geschliffen wird, so ist deren Ebene für jede andere Farbe schief geneigt sowohl zur Mittellinie, als auch zur Ebene der optischen Axen. Wenn daher in Fig. 87 C wieder den Mittelpunkt des Gesichtsfeldes und gg die Stellen bedeuten, in welchen die den beiden optischen Axen für Gelb entsprechenden Strahlen im Gesichtsfelde sich vereinigen, wenn also die Ebene der optischen Axen für Gelb diejenige der Platte in der Geraden gg schneidet, so sind die den Mittellinien und Axenebenen für die übrigen Farben entsprechenden Punkte und Geraden sämtlich andere. Z. B. sei R der Punkt im Gesichtsfelde, in welchem sich die parallel der ersten Mittellinie für Rot durch den Krystall hindurchgegangenen Strahlen vereinigen, rr die beiden Axenpunkte für dieselbe Farbe, während V, v und v die analogen Punkte für Violett darstellen. Die für diese beiden Farben in derselben Weise, wie in den vorhergehenden Figuren, eingezeichneten Lemniscaten lassen sofort erkennen, daß das entstehende Interferenzbild eine Farbenverteilung besitzen muß, welche vollständig unsymmetrisch ist, indem weder rechts und links, noch oben und unten Gleichheit existieren kann, ebensowenig aber das Bild nach einer halben Umdrehung um die Mitte mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann. Das dieser gegenseitigen Lage der Hauptschwingungsrichtungen entsprechende Interferenzbild des Kupfervitriols, eines blau gefärbten Salzes, zeigen die Figuren 12 und 13 auf Tafel II.

Sind die Winkel zwischen den Ebenen der optischen Axen für verschiedene Farben noch größer, als bei diesem Salze, so kommen Farbencurven von lemniscatenähnlicher Gestalt im weißen Lichte überhaupt nicht mehr zustande, sondern es entsteht ein Interferenzbild, welches dem in Fig. 5 Tafel II dargestellten ähnlich ist, sich aber durch Ungleichheit der Farbenverteilung nach allen Seiten davon unterscheidet.

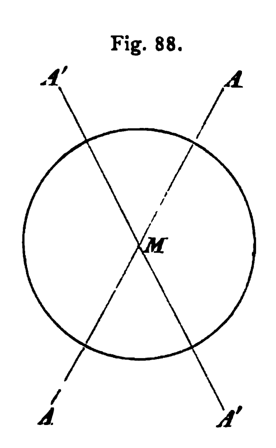
Die im vorhergehenden geschilderten Dispersionserscheinungen, welche ein so empfindliches Mittel darbieten, eine ungleiche Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen in einem Krystalle zu erkennen, sind deshalb von besonderer praktischer Wichtigkeit, weil das Zusammenfallen, bzw. die Divergenz dieser Richtungen für verschiedene Farben in gesetzmäßigem Zusammenhange steht mit der Symmetrie der Form der betr. Krystalle, so daß aus der in einem speciellen Falle beobachteten Interferenzfigur bzw. aus der Art der Farbenverteilung in derselben ein Schluß auf die Symmetrieverhältnisse des untersuchten Krystalls gezogen werden kann.

Bestimmung der Richtungen der optischen Axen in zweiaxigen Krystallen und Messung ihres Winkels. Die im Konoskope zu beobachtenden Interferenzbilder der zweiaxigen Krystalle, welche den Gegenstand der vorhergehenden Betrachtungen bildeten, bieten nun das Mittel dar zur Aufsuchung der Lage der beiden optischen Axen und damit zur Feststellung der Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen im Krystalle, welche nach S. 105 zur Bestimmung der optischen Constanten desselben erforderlich ist. Läßt nämlich eine ebene Fläche des Krystalles die einer optischen Axe parallelen Strahlen austreten, d. h. erblicken wir im Gesichtsfelde des

Konoskopes das von einem dunkeln Balken durchschnittene Ringsystem, welches den Axenpunkt umgibt, so vermögen wir nach weiterhin zu besprechenden Methoden den Winkel zu messen, welchen die betreffende optische Axe mit der Normalen der Fläche bildet. Treten dieselben Strahlen auch durch eine andere Ebene des Krystalls aus, deren Winkel mit der ersteren bekannt ist, und bestimmen wir auch hier ihre Neigung zur Normalen der Fläche, so kann aus diesen Daten die Orientierung der optischen Axe im Krystalle berechnet werden. Ist das gleiche Verfahren auch für die zweite optische Axe durchführbar, so ist damit die Orientierung der drei Hauptschwingungsrichtungen, nämlich der ersten und zweiten Mittellinie und der Normalen der Ebene der optischen Axen, gegeben. Wegen der Dispersion derselben sind jene Messungen natürlich für jede Farbe besonders auszuführen. Am einfachsten gestaltet sich die Aufgabe, wenn, wie es bei manchen zweiaxigen Krystallen von bestimmten Symmetrieverhältnissen vorkommt, eine natürliche Ebene des Krystalls die beiden Axenbilder symmetrisch im Gesichtsfelde des Konoskopes zeigt. Alsdann ist nämlich die Normale der Platte die erste Mittellinie, die der Platte parallele Verbindungslinie der beiden Axenpunkte die zweite Mittellinie und die Normale beider die Schwingungsrichtung mittlerer Lichtgeschwindigkeit.

Ist auf diese Art die Orientierung der drei Hauptschwingungsrichtungen im Krystalle gefunden worden, so können nunmehr die drei Hauptbrechungsindices nach einer der S. 101—105 angegebenen Methoden bestimmt werden. Aus diesen kann man nach der S. 100 angeführten Formel den Winkel der optischen Axen berechnen; man kann denselben jedoch auch direct bestimmen durch Methoden, welche verhindern, daß die den optischen Axen entsprechenden Strahlen beim Austritte aus dem Krystalle eine Ablenkung erfahren. Dies wäre natürlich auch dann der Fall, wenn die Ebene, an welcher die der ersten Axe entsprechenden Strahlen austreten, genau senkrecht zur ersten Axe, die Austrittsfläche der parallel der zweiten Axe hindurchgegangenen Strahlen senkrecht zur zweiten Axe wäre. Solche Ebenen sind aber nicht herzustellen, ohne den Winkel der Axen zu kennen, dessen Bestimmung erst der Zweck der Methode ist. Dagegen treten die in Rede stehenden Strahlen völlig unabgelenkt aus dem Krystalle aus, wenn man denselben zu einer Kugel oder zu einem Cylinder abschleift, dessen Axe senkrecht zur Ebene der optischen Axen ist. Diejenigen Strahlen AA und $A'A'$ (Fig. 88), welche genau durch die Mitte der Kugel oder des Cylinders gehen, und zwar parallel den beiden Axen, treffen deren Oberfläche stets in einem Punkte, in welchem dieselbe senkrecht zu jenen steht, werden also nicht gebrochen. Wenn die Kugel also um eine Axe, senkrecht

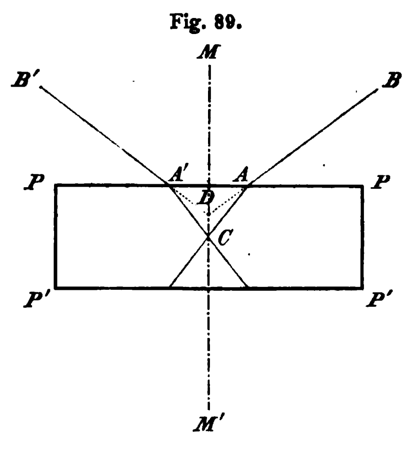
Fig. 88.



gegen die Zeichnungsebene von Fig. 88 und durch die Mitte gehend, drehbar wäre, so könnte man, mittels Einstellens des Axenbildes A und desjenigen von A' in einem festen Polarisationsapparate, durch die hierzu erforderliche Drehung den Winkel AMA' messen. Wegen der Schwierigkeit der Herstellung einer so vollkommenen Kugel oder eines solchen Cylinders ist es vorzuziehen, den Winkel der optischen Axen auf andere Weise zu bestimmen, z. B. durch Eintauchen des Krystalls in eine Flüssigkeit, deren Brechungsindex ungefähr $= \beta$ des Krystalls ist. Alsdann findet nämlich an der Grenze von Krystall und Flüssigkeit keine Ablenkung der Lichtstrahlen statt, daher die Gestalt des Krystalls eine ganz beliebige sein kann. Dieses Princip liegt dem von C. Klein construierten, in der III. Abt. beschriebenen und abgebildeten kleinen Drehapparate zugrunde, mittels dessen man, auch wenn die Brechbarkeit einer krystallisierten Substanz nur ungefähr bekannt ist, mit einem beliebig gestalteten Krystalle oder einem Fragmente eines solchen eine angenäherte Bestimmung der Orientierung der beiden optischen Axen auszuführen imstande ist.

Zur genauen Messung des Winkels der optischen Axen dient eine ebene planparallele Platte, welche senkrecht zur Halbierenden des spitzen Axenwinkels geschliffen ist. Handelt es sich um einen Krystall ohne Dispersion der Hauptschwingungsrichtungen, so ist die erwähnte Platte senkrecht zur Halbierenden des Axenwinkels für alle Farben, andernfalls nur für eine bestimmte. Da indes die Dispersion der Mittellinien meist nur eine geringe ist, so steht eine Platte, welche normal zur ersten Mittellinie für Gelb geschliffen ist, gewöhnlich auch sehr nahe senkrecht zur Halbierenden des Winkels der optischen Axen für die übrigen Farben, kann also, wenn nicht die höchste Genauigkeit gefordert wird, auch zur Bestimmung des Axenwinkels für Rot, Blau usw. dienen.

Fig. 89.



Sei $PPP'P'$ (Fig. 89) der Durchschnitt einer solchen Platte mit der Ebene der optischen Axen und die Normale zur Platte MM' die erste Mittellinie derselben, so werden die den beiden Axen parallelen Strahlensysteme die Oberfläche unter gleichen, aber entgegengesetzt liegenden Winkeln treffen, also eine gleiche Brechung nach entgegengesetzten Seiten erleiden. Während sie im Krystalle den Winkel ACA', den wahren Winkel der optischen Axen, bilden, schließen sie nach ihrem Austritte einen größeren, den sogenannten scheinbaren Axenwinkel BDB' ein, welcher ebenso, wie ACA', von MM' halbiert wird. Den scheinbaren Axenwinkel kann man nun auf folgende Art messen:

Man bringe die Platte ($PPP'P'$ Fig. 90 sei ihr Durchschnitt, wie in Fig. 89) zwischen Sammellinse und Objektiv des Konoskopes so an, daß sie drehbar ist um eine Axe, welche genau senkrecht zur Ebene der optischen Axen und ungefähr durch die Mitte der Platte geht. In Fig. 90 sind nur die benachbarten Teile des Instrumentes im Durchschnitte angegeben, und die Platte in der Stellung, in welcher sie das Interferenzbild symmetrisch zeigt, da die erste Mittellinie mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt. Jene Drehung erzielt man nun dadurch, daß man oberhalb der Zeichnungsebene einen geteilten Kreis fest mit dem Instrumente verbindet, durch dessen Mitte eine drehbare Axe hindurchgeht, welche normal zur Zeichnungsebene steht und, in eine Pincette endigend, die Platte trägt. Die perspectivische Ansicht Fig. 91 wird die Anordnung dieses Apparates und die Möglichkeit,

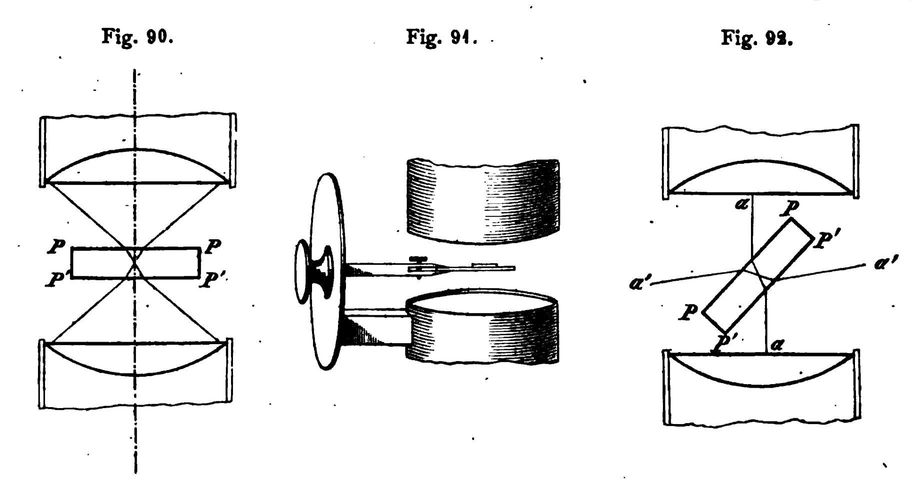
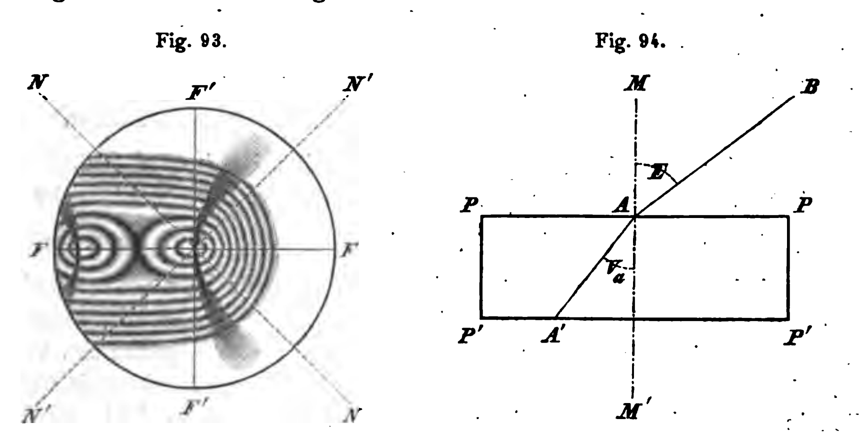


Fig. 90. Fig. 91. Fig. 92.

mittels desselben eine Drehung der Platte zu messen, unmittelbar erkennen lassen. Wird nun jene Axe und somit die Krystallplatte so weit gedreht, daß die Strahlen aa Fig. 92, welche sie in der Richtung einer optischen Axe durchsetzen, genau parallel der Axe des Instrumentes in das Objectiv eintreten, so werden diese in der Mitte des Gesichtsfeldes vereinigt werden, der Mittelpunkt des einen Ringsystems wird also genau in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheinen. Diesen Punkt kann man mittels eines Fadenkreuzes in der Bildebene des Konoskopes markieren, und die Einstellung des Axenbildes auf den Kreuzpunkt der Fäden gelingt dann besonders genau, wenn man das Interferenzbild mit den Hyperbeln benutzt, also die gekreuzten Nicols des Instrumentes 45° mit der Axenebene der Platte bilden läßt. Da die Einstellung einer optischen Axe stets nur für eine bestimmte Farbe geschehen kann, so muß natürlich der Apparat durch homogenes Licht, z. B. eine Natriumflamme, erleuchtet werden. Das Interferenzbild stellt sich alsdann so dar, wie es in Fig. 93 abgebildet ist, worin FF und $F'F'$ das Fadenkreuz des Fernrohrs, NN und $N'N'$ die Schwingungsrichtungen der beiden Nicols bezeichnen. Hat man die Platte so weit ge-

dreht, daß die Mitte der schwarzen Hyperbel und der Verticalfaden absolut zusammenfallen, wie es die Figur zeigt, so hat jene genau die in Fig. 92 bezeichnete Stellung. Dreht man nun zurück bis zur anfänglichen Lage, und ebensoweit nach der andern Seite, bis das zweite Axenbild genau in derselben Weise in der Mitte des Gesichtsfeldes ist, d. h. $a'a'$ Fig. 92 mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt, so hat man zwischen diesen beiden Einstellungen der einen und der andern optischen Axe auf die Mitte offenbar genau um so viel drehen müssen, als der Winkel der Axen nach dem Austritte in die Luft beträgt. Die am Kreise abzulesende Drehung gibt also unmittelbar den scheinbaren Axenwinkel für die benutzte Farbe. Beleuchtet man nun das Instrument mit Licht von anderer Farbe, so erhält man wegen der Dispersion der Axen andere Ablesungen für beide Einstellungen und somit einen größeren oder kleineren Axenwinkel.

Fig. 93. Fig. 94.



Es ist nunmehr das Verhältnis zu bestimmen, in welchem der scheinbare Axenwinkel zum wirklichen steht. Sei $PPP'P'$ (Fig. 94) wieder der Durchschnitt der Krystallplatte mit der Axenebene, MM' die erste Mittellinie und zugleich Normale zur Platte, AA' die Richtung einer optischen Axe, so ist offenbar $V_a = A'AM'$ der halbe wahre Axenwinkel, $E = BAM$ der halbe scheinbare, so daß der wahre (innere) und der scheinbare (äußere) Winkel der Axen $2V_a$ bzw. $2E$ sind. Nach S. 108 hat nun ein Strahl, wenn er sich in der Richtung AA' fortpflanzt, die mittlere Lichtgeschwindigkeit, er wird also im Punkte A so gebrochen werden, daß sein Brechungsindex aus Luft in den Krystall gleich dem mittleren Hauptbrechungsquotienten β ist. Wenn der Strahl $A'A$ gebrochen in die Luft austritt, so ist sein Einfallswinkel V_a, sein Brechungswinkel E, also ist offenbar

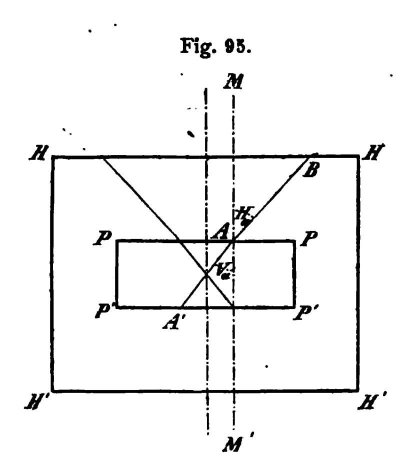
$$\frac{\sin E}{\sin V_a} = \beta, \text{ folglich } \sin E = \beta \cdot \sin V_a .$$

Durch diese Gleichung ist das Verhältnis zwischen dem wahren und dem scheinbaren Axenwinkel in Luft bestimmt. Hat man also sämtliche drei Hauptbrechungsindices für eine bestimmte Farbe gemessen und daraus

den wahren Axenwinkel für dieselbe Farbe abgeleitet, so ergibt sich aus obiger Gleichung der scheinbare; bestimmt man nun diesen direct auf die beschriebene Art, so liefert die Vergleichung desselben mit dem nur aus den Brechungsindices berechneten Werte einen Maßstab zur Beurteilung der Genauigkeit, mit welcher letztere bestimmt worden sind, um so mehr, als die Genauigkeit der Messung der Axenwinkel in den meisten Fällen, wenn man nämlich nur kleine Krystalle zur Anfertigung von Prismen und Platten zur Verfügung hat, größer ist, als diejenige der Messung der Brechungsindices. Noch wichtiger ist aber die Bestimmung des scheinbaren Axenwinkels in denjenigen Fällen, in welchen die Ausbildung der Krystalle die Anfertigung von genügend großen Prismen zur genauen Bestimmung der Brechungsindices nur nach einer Richtung gestattet, also höchstens zwei der Hauptbrechungsquotienten bestimmt werden können. Sind diese beiden nicht α und γ, sondern α und β, oder β und γ, so vermag man mittels β aus dem scheinbaren Axenwinkel den wahren, und aus diesem und den beiden gemessenen Brechungsindices den dritten zu berechnen, indem man die S. 100 gegebene Gleichung nach letzterem auflöst.

Wenn der Winkel der optischen Axen eine bestimmte Größe überschreitet, können die ihnen parallelen Strahlen in Luft nicht mehr austreten. Denn wenn $\sin V_a = \frac{1}{\beta}$, so ist $\sin E = 1$, also der scheinbare Axenwinkel 180°; von dem entsprechenden Werte für V_a ab, dessen Größe also von dem mittleren Brechungsindex des Lichtes beim Übergange aus dem Krystalle in Luft abhängt, tritt totale Reflexion jener Strahlen ein. Würde man den Krystall, statt mit Luft, mit einer Flüssigkeit umgeben, in welcher die Lichtgeschwindigkeit weniger von der im Krystalle abweicht, so würden die den optischen Axen entsprechenden Strahlen an der Grenze beider weniger abgelenkt werden, und wäre in diesem Mittel die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes noch kleiner, als im Krystalle, so würden sie dem Lote zu gebrochen, d. h. die scheinbaren optischen Axen in diesem Mittel bildeten einen kleineren Winkel, als die wahren. Sei (Fig. 95) $PPP'P'$ die Krystallplatte, HH die derselben parallele Grenzfläche des umgebenden Mediums gegen die Luft, so wird ein einer optischen Axe paralleler Strahl $A'A$ in A, wenn MM' das Einfallslot, gebrochen werden; und

Fig. 95.



zwar wird, wenn man $A'AM' = V_a$ (wie bisher der halbe Axenwinkel), $MAB = H_a$ (da MM' die Mittellinie, so ist dies der halbe scheinbare Axenwinkel in dem umgebenden Medium), endlich die Geschwindigkeit des

Lichtes im Krystalle $= v_b$, in dem umgebenden Mittel $= v_h$, in der Luft $= v$ setzt:

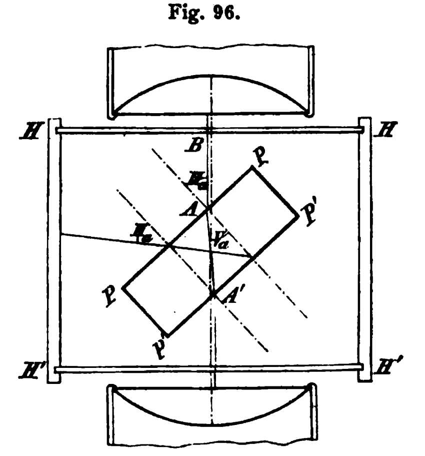
$$\frac{\sin V_a}{\sin H_a} = \frac{v_b}{v_h} = \frac{v_b}{v} \cdot \frac{v}{v_h},$$

und, da $\frac{v}{v_b}$ gleich dem mittleren Brechungsexponenten β, $\frac{v}{v_h}$ gleich dem Brechungsindex aus Luft in das umhüllende Medium, welchen wir n nennen wollen, ist, so folgt

$$(1) \qquad \frac{\sin V_a}{\sin H_a} = \frac{1}{\beta} \cdot n \text{ oder } \sin V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_a \text{ [1]}.$$

Hiernach können wir den wahren Axenwinkel auch in einem solchen Falle berechnen, daß die Axenstrahlen nicht mehr in Luft austreten, wenn wir den Krystall, dessen mittleren Brechungsindex wir kennen, mit einem stark brechenden Medium, dessen Brechungsindex n für die benutzte Farbe ebenfalls bekannt ist, umgeben und den Winkel $2H_a$, welchen die Axen in diesem bilden, bestimmen. Dies letztere geschieht auf folgende Weise:

Fig. 96.



Man umgibt die Krystallplatte mit einem Gefäße $HH'H'H$ (Fig. 96), dessen Vorder- und Hinterwand, HH und $H'H'$, aus planparallelen Glasplatten besteht, und füllt dasselbe mit Bromnaphtalin, dessen Brechungsindex bekannt ist, an, so daß die Platte sich ganz in demselben befindet, während sie mit dem Apparate zum Messen der Axenwinkel ganz ebenso verbunden ist, als wenn der scheinbare Winkel in Luft bestimmt werden sollte. Dreht man nun die Platte so weit, bis diejenigen Strahlen AB (die Bezeichnungen sind ganz dieselben wie in der vorigen Figur), welche im Krystalle sich einer optischen Axe parallel bewegen, der Axe des Polarisationsinstrumentes parallel sind, so erleiden sie weder an der Grenze der Flüssigkeit gegen die umschließende Glasplatte HH, noch durch letztere eine Ablenkung, da dieselbe senkrecht zur Axe des Instrumentes steht; es ist diese Stellung also ganz ebenso zu finden, wie bei der Messung des scheinbaren Axenwinkels in Luft, nämlich durch Einstellung der dunkeln Hyperbel auf die Mitte des Fadenkreuzes im Gesichtsfelde des Polarisationsinstrumentes. Dreht man nun zurück und nach der entgegengesetzten

---

[1] Da $\sin E = \beta \cdot \sin V_a$, so ist, wenn man in obige Gleichung für $\sin V_a$ seinen Wert $\frac{\sin E}{\beta}$ einsetzt: $n = \frac{\sin E}{\sin H_a}$. Hiernach kann man den Brechungsindex n des umgebenden Mediums bestimmen durch Messung des scheinbaren Axenwinkels in Luft und in jener Flüssigkeit mittels einer und derselben Krystallplatte.

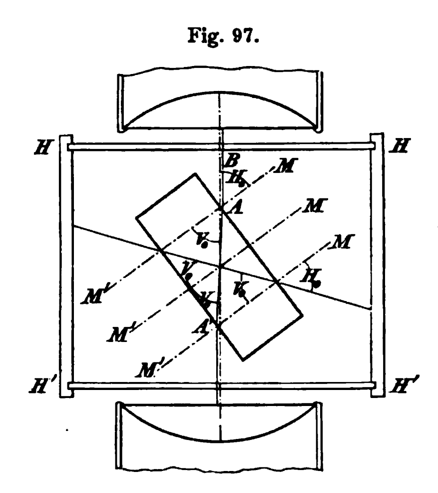
Seite, bis das zweite Axenbild in gleicher Weise im Gesichtsfelde centriert erscheint, so ist die ganze hierzu nötige Drehung offenbar $2H_a$, d. h. der scheinbare Axenwinkel im Bromnaphtalin. Wenn also β und n bekannt sind, so ergibt sich aus dem so gemessenen H_a nach der a. vor. S. abgeleiteten Gleichung

$$\sin V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_a$$

der wahre Axenwinkel.

Denselben kann man endlich sogar finden, ohne β und n zu kennen, nämlich mittels einer zweiten Krystallplatte, deren Flächen senkrecht zur Halbierenden des stumpfen Winkels, der sog. zweiten Mittellinie der optischen Axen, geschliffen sind. Aus einer solchen werden die Axenstrahlen im allgemeinen nicht mehr in die Luft austreten, wohl aber in Bromnaphtalin, selbst wenn der stumpfe Axenwinkel sehr groß ist, sobald nur der Brechungsindex der Flüssigkeit mindestens ebenso groß ist als der des Krystalls. Sei in Fig. 97 eine solche Platte im Flüssigkeitsgefäße dargestellt, ebenfalls drehbar um die Normale zur Ebene der optischen Axen, sei $A'A$ ein Strahl, welcher im Krystalle einer optischen Axe parallel und im Bromnaphtalin in der Richtung AB sich fortpflanzt, so ist, wenn MM' die Normale zur Platte, d. h. die zweite Mittellinie der Axen, $A'AM' = V_o$ die Hälfte des wahren stumpfen Axenwinkels, $MAB = H_o$ die Hälfte des scheinbaren stumpfen Axenwinkels in Bromnaphtalin.

Fig. 97.



Die Messung dieses letzteren geschieht nun ganz so, wie bei der vorigen Platte, durch Drehung und aufeinander folgendes Einstellen der beiden Axenbilder. Wenn man dieselben Bezeichnungen für die Lichtgeschwindigkeit und die Brechungsindices beibehält, wie oben beim spitzen Axenwinkel, so folgt hier ganz ebenso wie dort:

$$\frac{\sin V_o}{\sin H_o} = \frac{v_b}{v_h} = \frac{1}{\beta} \cdot n$$

$$\sin V_o = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_o . \tag{2}$$

Mittels dieser Gleichung kann man also, wenn man den scheinbaren stumpfen Axenwinkel in Bromnaphtalin bestimmt hat, den wahren berechnen, ebenso wie durch die vorher entwickelte Gleichung aus dem scheinbaren spitzen. Beide Berechnungen setzen aber die Kenntnis des mittleren Brechungsindex des Krystalls und desjenigen der Flüssigkeit voraus. Da die Summe des spitzen und stumpfen Axenwinkels jedoch für dieselbe Farbe stets 180° sein

muß, so ist $V_a + V_o = 90^0$, also $\sin V_o = \cos V_a$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (2) ein und dividiert die für den spitzen Axenwinkel entwickelte Gleichung (1) durch jene:

$$(1) \qquad \sin V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_a$$

$$(2) \qquad \cos V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_o,$$

so folgt

$$\operatorname{tang} V_a = \frac{\sin H_a}{\sin H_o},$$

d. h. man kann den wahren Winkel der optischen Axen eines Krystalls bestimmen, ohne irgendeinen Brechungsindex zu kennen. Man schleift nämlich aus demselben zwei Platten, eine senkrecht zur ersten, eine senkrecht zur zweiten Mittellinie, und bestimmt auf die beschriebene Art bei beiden den scheinbaren Axenwinkel in Bromnaphtalin; der Quotient der Sinus dieser Winkel ist die Tangente des halben gesuchten inneren Axenwinkels. Diese Art der Bestimmung desselben ist deshalb besonders wichtig, weil zur Anfertigung der Prismen, mit denen die Brechungsindices sehr genau gemessen werden können, durchsichtige Krystalle von einer Größe gehören, wie man sie bei weitem nicht von allen Substanzen besitzt, während die planparallelen Platten für diese Methode fast beliebig klein sein[1]) und auch leichter in genügender Genauigkeit angefertigt werden können, als richtig orientierte Prismen. Hat man also nur sehr kleine Krystalle zur Verfügung, so begnügt man sich mit der Bestimmung des wahren Axenwinkels nach der beschriebenen Methode und erhält übrigens auch noch den mittleren Hauptbrechungsindex β, wenn man mittels der zur ersten Mittellinie senkrechten Platte den scheinbaren Axenwinkel $2E$ in der Luft bestimmt, nach der Gleichung (s. S. 131)

$$\sin E = \beta \cdot \sin V_a \quad \text{oder:} \quad \beta = \frac{\sin E}{\sin V_a}.$$

Ist aber β bekannt, so kann man auch durch Messung der Stärke der Doppelbrechung (mittels der Polarisationsfarbe) von zwei, beliebig kleinen Platten parallel XY bzw. YZ die Differenzen $\gamma - \beta$ bzw. $\beta - \alpha$ und dadurch γ und α bestimmen[2]).

---

1) Auch zur Bestimmung der Brechungsindices mit dem Totalreflectometer dürfen die Krystalle nicht allzu klein sein, weil sonst das von der Platte reflectierte Licht so schwach ist, daß die Grenzen der totalen Reflexion nicht mehr zu erkennen sind.

2) Mit Hilfe der Größen V und β kann man ferner die vollständigen optischen Constanten eines Krystalls bestimmen durch Messung des Abstandes der Lemniscaten, welche eine zur ersten Mittellinie senkrechte Platte von bekannter Dicke zeigt. Dieser Abstand gestattet nämlich (s. A. Müttrich, Poggendorffs Annalen der Physik, 1864, **121**, 206 f.), die Größe $\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}$ zu berechnen, so daß, wenn man diese in die für den Winkel der optischen Axen, ebenso wie die S. 100 angeführte, gültige Gleichung:

Statt einer stark brechenden Flüssigkeit kann man zur Messung des spitzen und stumpfen scheinbaren Axenwinkels auch einen stark brechenden festen Körper anwenden. Dieses Princip liegt dem Axenwinkelapparate von Adams zugrunde, dessen Beschreibung und Abbildung in der III. Abteilung gegeben ist. Die planparallele Krystallplatte liegt hierbei zwischen den einander zugekehrten Planflächen zweier Linsen von starkbrechendem Glase, deren beide andere Flächen nach dem Zusammenlegen eine Kugel bilden, und diese ist für sich drehbar. Strahlen, welche durch die in der Mitte der Kugel befindliche Krystallplatte gegangen sind, erfahren beim Austritte aus der Glaskugel keine weitere Ablenkung, und infolgedessen wird durch Einstellung der beiden Axenbilder der spitze bzw. stumpfe scheinbare Winkel der Axen in der betr. Glassorte (statt in Bromnaphtalin) gemessen.

Bestimmt man die Winkel der optischen Axen eines zweiaxigen Krystalls, sei es durch vollständige Messung der optischen Constanten (der drei Hauptbrechungsindices), sei es durch directe Bestimmung derselben, für verschiedene Farben, so findet man dieselben verschieden, und zwar steigt oder fällt die Größe des Winkels der Axen stetig mit der Wellenlänge des Lichtes, auf welches sie sich beziehen. Da jeder der drei Hauptbrechungsindices sich mit der Farbe annähernd nach demselben Gesetze ändert, welches S. 33 als Cauchysche Dispersionsformel für einfachbrechende Medien aufgestellt wurde, nur daß selbstverständlich die Constanten dieser Formel bei jedem derselben andere Werte besitzen, so liegt die Vermutung nahe, daß auch die Axenwinkel nach einem ähnlichen Gesetze sich mit der Farbe ändern. In der Tat entsprechen die Axenwinkel derjenigen Krystalle, bei welchen sie mit der Wellenlänge zunehmen (Sinn der Dispersion $\varrho > v$), außerordentlich nahe der Formel:

$$V_a = A - \frac{B}{\lambda^2},$$

derjenigen, deren Axenwinkel mit größerer Wellenlänge des Lichtes abnimmt ($\varrho < v$):

$$V_a = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

Hat man also den wahren Axenwinkel $2V_a$ einer Substanz für zwei Farben bestimmt, deren Wellenlänge bekannt ist, so kann man, die gefundenen Werte in die betreffende dieser beiden Gleichungen einsetzend, die Constanten A und B für den Körper und daraus den Axenwinkel für jede andere Wellenlänge ableiten. Es muß indes bemerkt werden, daß einige

---

$$\cos V = \sqrt{\frac{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}}{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}}}$$

einsetzt, nur noch eine Unbekannte, γ, übrigbleibt, nach deren Berechnung sich α aus derselben Formel ohne weiteres ergibt.

wenige Substanzen (z. B. Gyps) Ausnahmen von diesem Gesetze darbieten und eine anormale Dispersion der optischen Axen in der Weise besitzen, daß der Winkel derselben für eine bestimmte mittlere Farbe ein Maximum oder Minimum zeigt.

Zusammenfassung: Einteilung der Krystalle nach ihren optischen Eigenschaften.

Wie aus dem Bisherigen hervorgeht, kann die Abhängigkeit der Fortpflanzung des Lichtes einer bestimmten Farbe von der Richtung in einem Krystalle im allgemeinen dargestellt werden durch ein dreiaxiges Ellipsoid, daher die optischen Eigenschaften der Krystalle zu den »Ellipsoideigenschaften« (s. S. 5) gehören. Der allgemeinste Fall ist der S. 126 f. behandelte, in welchem die Indexfläche für die verschiedenen Farben nicht nur eine verschiedene Gestalt, sondern auch eine verschiedene Orientierung ihrer drei Hauptaxen im Krystalle besitzt. Einen speciellen Fall stellen diejenigen Krystalle dar (s. S. 121 f.), deren Indexflächen für die verschiedenen Farben eine Hauptaxe gemein haben, — einen weiteren diejenigen, in welchen allen drei Hauptaxen sämtlicher den verschiedenen Farben entsprechender Ellipsoide die gleiche Orientierung im Krystalle zukommt. Noch specieller ist derjenige Fall, in welchem zwei Hauptaxen der Indexflächen gleich groß werden und diese in Rotationsellipsoide übergehen, — und der letzte, speciellste Fall liegt endlich vor, wenn alle drei Hauptaxen jener Flächen gleich groß werden, d. i. derjenige, in welchem die Indexflächen für alle Farben die gleiche (Kugel-)Gestalt annehmen.

Es ergibt sich somit für die Gesamtheit der Krystalle nach ihren optischen Eigenschaften eine Einteilung in die folgenden fünf Gruppen:

1. Zweiaxige Krystalle ohne optische Symmetrieebene, in denen nicht zwei Gerade von verschiedener Orientierung optisch gleichwertig sind, zwei verschiedene Richtungen nur dann, wenn sie entgegengesetzt sind, also in der gleichen Geraden liegen (weil die optischen Eigenschaften zu den bivectoriellen gehören, s. S. 10).

2. Zweiaxige Krystalle mit einer optischen Symmetrieebene. In diesen existiert zu jeder Richtung eine mit ihr in optischer Beziehung gleichwertige, welche zu ihr symmetrisch liegt in bezug auf jene Ebene; mit den beiden hierzu entgegengesetzten gibt es also hier immer vier optisch gleichwertige Richtungen, welche in zwei Geraden liegen, deren Winkel von der Symmetrieebene halbiert wird.

3. Zweiaxige Krystalle mit drei aufeinander senkrechten optischen Symmetrieebenen. Zu einer Richtung von beliebiger Orientierung im Krystalle gehören hier noch sieben gleichwertige, gelegen in vier Geraden, welche immer paarweise gleich und entgegengesetzt geneigt sind gegen die drei Symmetrieebenen.

4. Einaxige Krystalle mit unendlich vielen optischen Symmetrieebenen, welche einander in der optischen Axe schneiden. Das gleiche

optische Verhalten zeigt ein derartiger Krystall in allen (unendlich vielen) Richtungen, welche den gleichen Winkel mit der Axe einschließen.

5. Einfachbrechende Krystalle. Hier sind alle Richtungen (also in noch höherem Sinne unendlich viele, als im vorigen Falle) optisch gleichwertig.

Jede der vier ersten Gruppen umfaßt Krystalle mit positiver und solche mit negativer Doppelbrechung, doch ist dieser Unterschied weder theoretisch, noch systematisch ein wesentlicher, da derselbe Krystall für verschiedene Farben entgegengesetzten Charakter der Doppelbrechung besitzen kann. Praktisch ist die Unterscheidung positiv und negativ doppeltbrechender Krystalle jedoch von Bedeutung für die Bestimmung von krystallisierten Körpern durch ihre optischen Eigenschaften. Die hierzu geeigneten Methoden finden ihre Erläuterung in dem folgenden Abschnitte.

Combinationen doppeltbrechender Krystalle.

Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung ein- und zweiaxiger Krystalle durch Combination mit anderen doppeltbrechenden Krystallen. Wie S. 45f. gezeigt wurde, ist es möglich, die Stärke der Doppelbrechung einer dünnen Krystallplatte, d. h. den Gangunterschied der beiden in einer solchen sich fortpflanzenden Strahlen, mittels der entstehenden Interferenzfarbe zu bestimmen, allerdings nur annähernd, weil die letztere noch beeinflußt wird von der Verschiedenheit der Doppelbrechung für verschiedene Farben. Es wird so gleichsam nur ein mittlerer Wert für die im Krystalle stattgefundene Verzögerung gefunden. Aus diesem und der Dicke ergibt sich die Differenz der Brechungsindices nach der S. 45 Anm. angegebenen Formel. Hierbei bleibt aber unbestimmt, welchem der beiden Strahlen die größere, welchem die kleinere Fortpflanzungsgeschwindigkeit zukommt, d. h. welches der Charakter der Doppelbrechung des Krystalls ist. Um diesen zu bestimmen, bedarf es der Combination mit einer zweiten Krystallplatte von bekannter, positiver oder negativer, Doppelbrechung. Handelt es sich um sehr dünne Krystalldurchschnitte, wie sie bei mikroskopischen Untersuchungen gewöhnlich vorliegen, welche also nur Farben der ersten Ordnungen zeigen, so ist für die Bestimmung des Zeichens der Doppelbrechung am besten geeignet eine dünne Gypsplatte, welche zwischen gekreuzten Nicols das Rot erster Ordnung zeigt (s. S. 47), in Fällen sehr schwacher Doppelbrechung auch eine sogenannte »Viertel-Undulations-Glimmerplatte«, d. h. eine so dünne Spaltungslamelle von Glimmer, daß von den, aus einem senkrecht eintretenden Strahle entstehenden, beiden Vibrationen die eine gegen die andere nur um $\frac{1}{4}\lambda$[1]) verzögert

[1]) Genau genommen gilt dies natürlich nur für eine bestimmte Farbe; für die im folgenden behandelten Methoden genügt es aber, wenn die Verzögerung $\frac{1}{4}\lambda$ für eine mittlere Farbe beträgt, da sie dann für die übrigen Farben genügend wenig von $\frac{1}{4}\lambda$ verschieden ist. »Achromatische« Verzögerungsplatten, welche für alle Farben genau $\frac{1}{4}\lambda$ Gangunterschied liefern, kann man durch Combination verschiedener Platten erhalten (s. Zeitschr. f. Kryst. 1903, 37, 292).

wird. Der Glimmer ist negativ zweiaxig, d. h. die Schwingungsrichtung seiner größten Lichtgeschwindigkeit halbiert den spitzen Winkel der Axen, und fast genau senkrecht zu jener Richtung ist seine so äußerst vollkommene Spaltbarkeit. Schneidet man das Glimmerblatt in eine rectanguläre Form, so daß die Längsrichtung der Ebene der optischen Axen entspricht, so sind die längeren Kanten desselben parallel der Schwingungsrichtung der kleinsten, die kürzeren der der mittleren Lichtgeschwindigkeit, und dies sind zugleich die beiden Schwingungsrichtungen der senkrecht zur Platte (parallel der ersten Mittellinie) austretenden Strahlen.

Wird eine derartige Glimmerplatte so in den Gang der Lichtstrahlen, bevor sie in den Analysator eintreten, eingeschoben, daß ihre Längsrichtung den Winkel der Schwingungsrichtungen der beiden gekreuzten Nicols halbiert, zu welchem Zwecke am Mikroskope ein eigener Schlitz angebracht sein muß, so wird das Gesichtsfeld mit blaugrauer Farbe aufgehellt, entsprechend dem $\frac{1}{4}\lambda$ für mittlere Farben, also etwa 140 $\mu\mu$ betragenden Gangunterschiede (vgl. S. 46). Befindet sich nun im Gesichtsfelde ein sehr dünner, äußerst schwach doppeltbrechender Krystall in derjenigen Stellung, in welcher seine Schwingungsrichtungen mit denen der Nicols zusammenfallen, so kann derselbe keine Änderung hervorbringen, erscheint also ebenso aufgehellt, wie das übrige Gesichtsfeld. Dreht man ihn aber in seiner Ebene um 45°, so findet in demselben Zerlegung des Lichtes in zwei Schwingungen von sehr kleinem Gangunterschiede statt; war der Sinn der Drehung so, daß die Richtung derjenigen Schwingung, welche sich in ihm mit größerer Geschwindigkeit fortpflanzt, zusammenfällt mit der Schwingungsrichtung desjenigen Strahls, welcher auch in der Glimmerplatte die größere Geschwindigkeit besitzt (in welchem Falle also auch die Schwingungsrichtungen der langsamer sich fortpflanzenden Strahlen in beiden Krystallen parallel werden), so wird zu dem im Krystalle entstehenden Gangunterschiede noch der im Glimmer entstehende ($\frac{1}{4}\lambda$) hinzukommen; das Blaugrau geht also in helleres Grünlichgrau oder, wenn der Krystall etwas stärker doppeltbrechend ist, bis in Gelblichweiß über. Selbst wenn die Doppelbrechung des Krystalls eine äußerst geringe ist, kann man sie nach dieser Methode durch die größere Aufhellung desselben beim Drehen wahrnehmen. Dreht man jedoch den Krystall im entgegengesetzten Sinne um 45°, so fällt die Schwingungsrichtung des in ihm sich schneller fortpflanzenden Strahls mit der Richtung der im Glimmer langsamer vorschreitenden Schwingung zusammen und umgekehrt. Infolgedessen wird der resultierende Gangunterschied um ebensoviel kleiner, als er vorher größer wurde, die Ordnung der Interferenzfarbe nimmt also ab, d. h. der Krystall wird dunkler und lavendelgrau. Durch Beobachtung des zu untersuchenden Krystalls in beiden Stellungen ist aber die vorliegende Aufgabe gelöst, denn in demselben ist stets diejenige Schwingung die langsamer sich fortpflanzende, welche der Ebene der optischen Axen des Glimmers parallel ist, wenn der Krystall heller erscheint, als das Gesichtsfeld.

Mittels dieses Verfahrens ist man also imstande, nicht nur die Doppelbrechung eines Krystalls zu erkennen, wenn sie auch so gering ist, daß die Aufhellung desselben beim Drehen zwischen gekreuzten Nicols ohne Hinzufügung der Glimmerplatte der Beobachtung entgehen würde, sondern auch den Charakter der Doppelbrechung zu bestimmen.

Das gleiche ist der Fall, wenn man den Krystall mit einer Gypsplatte combiniert, welche bei gekreuzten Nicols das Rot erster Ordnung zeigt. Fügt man diese ganz in derselben Weise, wie die Glimmerplatte vorher, in das Orthoskop ein, so erscheint das ganze Gesichtsfeld in der genannten Farbe; ebenso auch darin befindliche doppeltbrechende Krystalle, sobald ihre Schwingungsrichtungen mit denen der Nicols zusammenfallen. Drehen wir aber den Objecttisch des Instrumentes so weit, daß die Schwingungsrichtungen eines zu untersuchenden Krystalls 45° mit denen der Nicols einschließen, so entsteht in demselben ein Gangunterschied, welcher sich zu dem in der Gypsplatte bewirkten addiert oder von ihm subtrahiert, je nachdem die Schwingungsrichtungen der größeren von den beiden Lichtgeschwindigkeiten im Krystalle und in der Gypsplatte parallel oder gekreuzt sind. Infolgedessen zeigt der Krystall, verglichen mit dem übrigen Gesichtsfelde, eine Farbe von höherer oder niederer Ordnung, je nachdem man ihn in einem oder in entgegengesetztem Sinne um 45° dreht. Hat man nun für die rectangulär geschnittene Gypsplatte durch Vergleichung mit einem Krystalle von bekannter Doppelbrechung festgestellt, ob die ihrer Längsrichtung parallele Schwingung die schneller oder die langsamer sich fortpflanzende ist, so leuchtet ein, daß man durch diese Farbenänderung den unbekannten Charakter der Doppelbrechung jedes im Gesichtsfelde des Orthoskopes befindlichen Krystalls bestimmen kann, falls der von ihm erzeugte Gangunterschied nicht so bedeutend ist, daß Zweifel über die Ordnung der resultierenden Farbennuance entstehen. Ist dies der Fall, d. h. zeigt der Krystall in diagonaler Stellung für sich allein schon eine Farbe dritter oder vierter Ordnung, so wird diese durch Einschiebung der Gypsplatte parallel der einen Diagonale in eine um den Gangunterschied λ, d. h. um eine ganze Ordnung, höhere verwandelt, während durch Einschiebung der Gypsplatte in der andern Diagonale oder durch Drehung des Krystalls um 90° die Ordnung der Farbe um ebensoviel erniedrigt wird. Da die um zwei ganze Ordnungen verschiedenen Interferenzfarben sich immer dadurch deutlich unterscheiden lassen, daß die höhere weniger lebhaft ist und sich mehr dem Weiß nähert, so kann auch in solchen Fällen der Charakter der Doppelbrechung mittels der empfindlichen Gypsplatte unzweifelhaft festgestellt werden.

Zeigt endlich eine Krystallplatte infolge größerer Dicke oder sehr starker Doppelbrechung das Weiß der höheren Ordnung, so muß der Gangunterschied um mehr als eine Wellenlänge verringert werden, um eine Farbe hervorzurufen, welche sich noch merklich von jenem Weiß unterscheidet. Man benutzt zu diesem Zwecke am geeignetsten einen keilförmig

geschliffenen doppeltbrechenden Krystall, z. B. einen Quarzkeil, dessen eine Fläche der optischen Axe AA parallel ist (s. Fig. 98*a* Vorderansicht, *b* Längsschnitt). Derselbe ist gewöhnlich, um den dünnsten Teil weniger zerbrechlich zu machen, auf eine rectanguläre Glasplatte *g* aufgekittet. Da die Doppelbrechung des Quarzes positiv ist, zerfällt jeder in einen solchen Keil an irgendeiner Stelle senkrecht einfallende Strahl in zwei, von denen der ordentliche, parallel BB schwingend, sich schneller, der außerordentliche, parallel der Axe AA schwingend, sich langsamer fortpflanzt. Der Gangunterschied, mit welchem die beiden Strahlen aus dem Quarze austreten, wächst nun offenbar mit der Dicke des letzteren, man kann also durch Verschieben des Keils von rechts nach links denselben vergrößern, da alsdann eine dickere Stelle des Keils zur Wirksamkeit gelangt. Bringt man nun eine doppeltbrechende Platte $aba'b'$ (Fig. 99) so in das Orthoskop, daß ihre Schwingungsrichtungen 45° mit denen der beiden gekreuzten Nicols (NN und $N'N'$) bilden, und sei aa' die Schwingungsrichtung der größten Lichtgeschwindigkeit unter allen in der Ebene $aba'b'$ liegenden, bb' die der kleinsten, so werden die Vibrationen parallel aa' sich rascher im Krystalle fortpflanzen als die parallel bb', demnach beim Austritte ein Gangunterschied beider vorhanden sein, und zwar soll derselbe, $n\lambda$, so groß sein, daß das Weiß der höheren Ordnung entsteht. Schiebt man nun den Quarzkeil $KKK'K'$ so ein, daß seine optische Axe AA der Schwingungsrichtung aa' der Krystallplatte parallel ist, so wird jeder der beiden aus dem Krystalle austretenden Strahlen mit unveränderter Schwingungsrichtung sich im Quarze fortpflanzen, der parallel aa' schwingende ist aber hier der langsamere, der parallel bb' der schneller vorschreitende; der Gangunterschied, welcher beiden im Quarze zuteil wird, er möge $n'\lambda$ sein, besitzt also den entgegengesetzten Sinn gegenüber dem im Krystalle entstandenen; der Gangunterschied der beiden Strahlen, nachdem sie

Fig. 98.

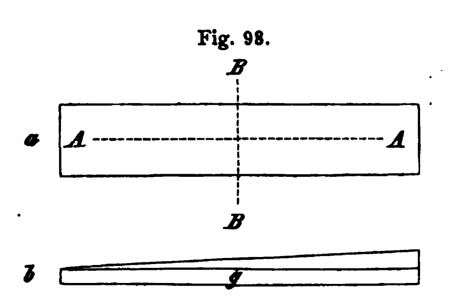
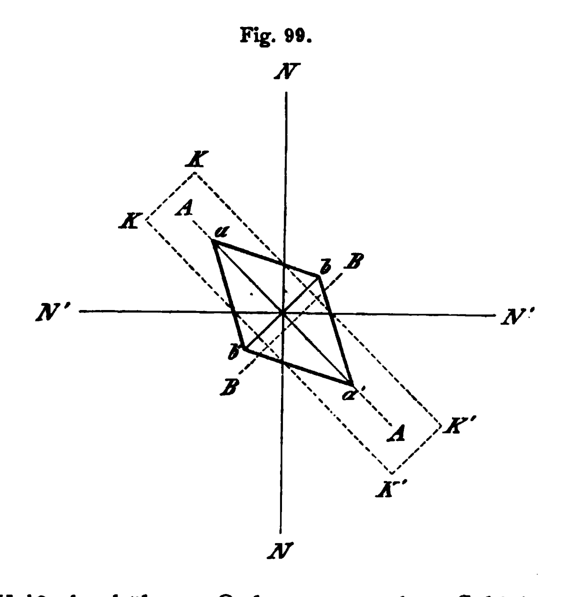


Fig. 99.



Krystall und Quarz durchlaufen haben, ist also $= (n - n')\,\lambda$. Die Größe $n - n'$ kann nun beliebig klein gemacht werden, sobald die Krystallplatte einigermaßen dünn und der Quarzkeil dick genug ist, also durch Verschieben des letzteren parallel AA, so daß eine dickere Stelle in die Mitte kommt. Mit diesem verkleinerten Gangunterschiede treten nun die beiden Strahlen in den Analysator ein, und ihm entsprechend interferieren sie nach der Zurückführung auf eine Schwingungsebene. Ist $n - n'$ sehr klein, so tritt ganz dasselbe ein, als ob die Krystallplatte selbst äußerst dünn und kein Quarzkeil vorhanden wäre, d. h. es erscheinen lebhafte Interferenzfarben.

Würde man hingegen den Quarzkeil so in das Polarisationsinstrument eingeschoben haben, daß AA parallel der Schwingungsrichtung bb' wäre, so würden dieselben Vibrationen, welche im Krystalle gegen die senkrecht dazu stehenden um $n\lambda$ verzögert wurden, auch im Quarze um $n'\lambda$ gegen letztere verzögert werden, also schließlich einen Gangunterschied von $(n + n')\,\lambda$ besitzen und dementsprechend interferieren. In diesem Falle wirkt demnach der Quarzkeil so, als ob die Krystallplatte dicker geworden wäre, es tritt also ein noch vollkommeneres Weiß der höheren Ordnung auf.

Wäre nicht aa', wie wir angenommen haben, die Schwingungsrichtung der größten Lichtgeschwindigkeit in der Krystallplatte, sondern bb', und aa' die der kleinsten, so wäre alles umgekehrt, d. h. wir müßten den Quarzkeil, um die Interferenzfarben zu erhalten, so einschieben, daß AA parallel bb' wird.

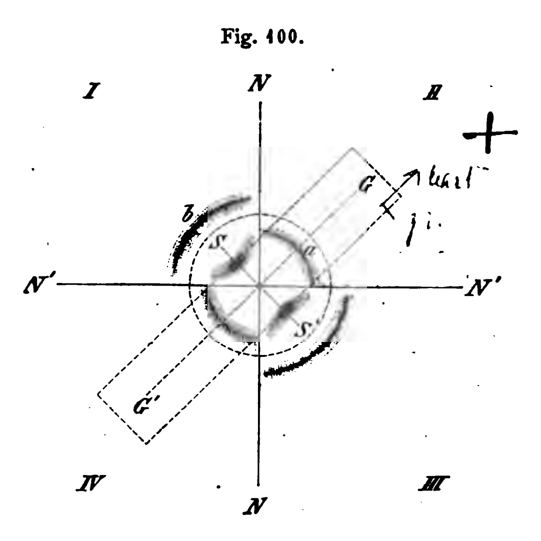
Dieses Verfahren zur Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung kann auch bei der Untersuchung eines Krystalls im convergenten Lichte benutzt werden. Hier zeigt ein solcher bei einiger Dicke, falls nicht zufällig das Interferenzbild einer optischen Axe im Gesichtsfelde erscheint, keine hellen und dunkeln Curven, wie im monochromatischen Lichte, sondern das Weiß der höheren Ordnung. Dreht man denselben so mittels des Tisches am Konoskope, daß er das Maximum der Helligkeit zeigt (alsdann bilden seine Schwingungsrichtungen 45° mit denen der gekreuzten Nicols), schiebt dann zwischen den Krystall und den Analysator den Quarzkeil ein, einmal mit seiner Längsrichtung parallel der einen, das andere Mal parallel der zweiten Schwingungsrichtung der Krystallplatte, so ist diejenige von beiden, der seine Längsrichtung parallel ist, wenn in der Mitte des Gesichtsfeldes hyperbolische Farbencurven auftreten, die Schwingungsrichtung der größten Lichtgeschwindigkeit unter allen der Platte parallelen, die senkrecht dazu stehende die der kleinsten.

Hat man eine optisch einaxige Krystallplatte, deren Flächen senkrecht zur optischen Axe stehen, zur Bestimmung ihres optischen Charakters zur Verfügung, so kann man diesen dadurch finden, daß man sie auf den Krystallträger des Konoskops und auf dieselbe eine zweite senkrecht zur Axe geschliffene Platte eines andern einaxigen Krystalls legt, von welchem

man das Zeichen der Doppelbrechung kennt. Hat die zu untersuchende Platte denselben optischen Charakter wie die letztere, so wird der gleiche Strahl (von den beiden senkrecht zueinander schwingenden), welcher in der unteren verzögert wurde, es auch in der oberen; diese wirkt also gerade so, als ob die untere Platte dicker geworden wäre, d. h. die kreisförmigen Farbenringe werden enger sein, als sie erschienen, ehe die Platte von bekanntem optischen Charakter aufgelegt wurde. Ist dagegen die zu untersuchende Krystallplatte von entgegengesetztem optischen Charakter als die bekannte, so wird letztere so wirken, als ob erstere dünner geworden wäre, d. h. die Farbenringe werden weiter werden. Diese Erweiterung oder Verengerung der Farbenringe kann man dadurch sehr leicht erkennbar machen, daß man in der Bildebene des Polarisationsinstrumentes eine Glasplatte mit feinen eingerissenen Linien anbringt, welche man alsdann auf der Interferenzfigur erblickt, und so ein Maß zur Bestimmung des Durchmessers der Farbenringe besitzt.

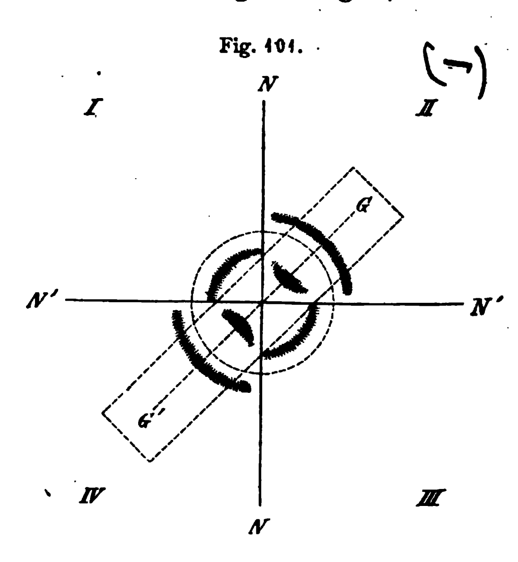
Eine weitere sehr bequeme, und zwar die am häufigsten angewendete Methode zur Bestimmung des optischen Charakters einer senkrecht zur Axe geschliffenen einaxigen Platte besteht in der Anwendung der S. 138 beschriebenen Viertelundulations-Glimmerplatte. Fügt man dieselbe in den Gang der Lichtstrahlen ein, und zwar zwischen der Platte und dem Analysator, so erhält man im homogenen Lichte statt der kreisförmigen dunkeln Ringe mit schwarzem Kreuze die in Fig. 100 dargestellte Interferenzfigur, wenn der Krystall positiv ist, dagegen die in Fig. 101 dargestellte, wenn er negativ ist, und wenn in beiden Fällen das Glimmerblatt die punktiert angedeutete diagonale Lage hat, d. h. seine Längsaxe in den beiden mit *II* und *IV* bezeichneten Quadranten 45° mit den Nicols bildet. Das erstere Interferenzbild unterscheidet sich dadurch von dem gewöhnlichen, daß die dunkeln Ringe in den Quadranten *II* und *IV* um etwa ein Viertel des Abstandes zweier benachbarter verengert, diejenigen in den Quadranten *I* und *III* um ebensoviel erweitert sind, so daß an der Grenze zweier Quadranten stets ein heller an einen dunkeln Ring stößt. Statt des schwarzen Kreuzes erscheinen zwei schwarze Flecken, deren Verbindungslinie senkrecht zur Längsrichtung des Glimmers steht. Würde das Glimmerblatt senkrecht zu der in der Figur angedeuteten Lage eingeschoben werden,

Fig. 100.



so daß seine Längsrichtung mitten in die Quadranten *I* und *III* fiele, so würden deren Ringe verengert, die von *II* und *IV* erweitert und in letzteren auch die schwarzen Flecken erscheinen. Bei der das Interferenzbild eines negativen Krystalles darstellenden Fig. 101 liegen die gleichen Erweiterungen der Ringe und die dunkeln Flecken in denjenigen Quadranten, welche die Längsaxe des Glimmers halbiert, in *II* und *IV*, die Verengerung der Ringe geschieht dagegen in *I* und *III*. Würde das Glimmerblatt so eingeschoben worden sein, daß es die Quadranten *I* und *III* halbierte, so würden in diesen die Erweiterung der Ringe und die dunkeln Flecken, in *II* und *IV* die Verengerung eintreten. Was für die dunkeln und hellen Ringe im homogenen Lichte statthat, gilt auch für die im weißen Lichte erscheinenden Farbenringe, so daß also in letzterem Falle die Ringe gleicher Farbe in derselben Weise erweitert oder verengert werden; die schwarzen Flecken erscheinen ganz ebenso, wie im homogenen Lichte. Es genügt daher, die Erscheinung für monochromatisches Licht zu erklären.

Fig. 101.



Seien *NN*, *N'N'* (Fig. 100) wie vorher die Schwingungsrichtungen der Nicols, *GG'* die Längsrichtung des Glimmerblattes, so möge der punktierte Kreis den Ort des ersten dunkeln Interferenzringes im Gesichtsfelde darstellen, welcher erscheinen würde, wenn keine Viertelundulationsplatte da wäre. Wenn die zu untersuchende Krystallplatte positiv einaxig ist, so entsteht nach dem Früheren dieser Ring dadurch, daß in der entsprechenden Richtung zwei Strahlen miteinander interferieren, von denen der eine der außerordentliche, im Hauptschnitte, der andere, der ordentliche, senkrecht dazu schwingt, sich aber um so viel schneller fortpflanzt, daß beide beim Austritte genau eine ganze Wellenlänge Gangunterschied besitzen. Alsdann tritt nämlich, weil die Interferenz bei gekreuzten Nicols mit entgegengesetztem Schwingungszustande stattfindet, vollständige Auslöschung ein. An einer Stelle *a*, wo, der Mitte des Gesichtsfeldes etwas näher, der schwarze Kreisquadrant angegeben ist, wird der eine Strahl nur um $\frac{3}{4}\lambda$ gegen den andern verzögert sein; treten nun beide in das Glimmerblatt ein, so kommt zu dieser Verzögerung noch $\frac{1}{4}\lambda$ hinzu, denn der außerordentliche, im Hauptschnitte und folglich parallel der Axenebene *GG'* des Glimmers schwingende Strahl pflanzt sich in diesem ebenfalls langsamer fort, als der senkrecht dazu vibrierende, da die Richtung *GG'* die

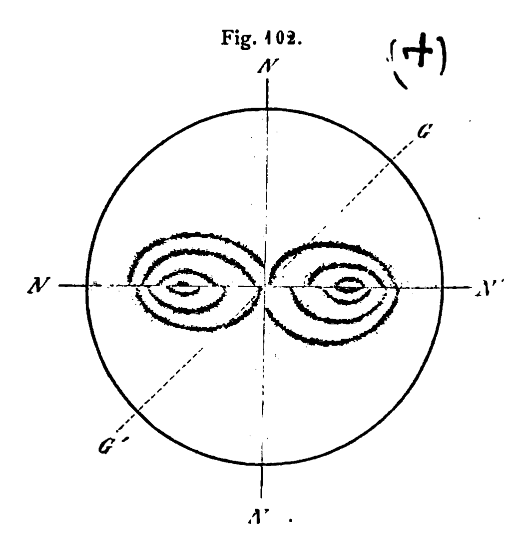
Schwingungsrichtung der kleinsten Lichtgeschwindigkeit, *SS'* die der mittleren im Glimmer ist. Die beiden interferierenden Strahlen haben also nach Hinzufügung der Viertelundulationsplatte schon in geringerem Abstande von der Mitte des Gesichtsfeldes eine ganze Wellenlänge Gangunterschied; der erste dunkle Ring, welcher dieser Verzögerung entspricht, ist also um ebensoviel enger geworden. Betrachten wir nun denjenigen Punkt *b*, in welchem sich Strahlen vereinigen, deren Gangunterschied ohne Glimmerblatt $\frac{5}{4}\lambda$ sein würde. Hier schwingt der außerordentliche, sich langsamer fortpflanzende Strahl || *SS'* (im Hauptschnitte), der ordentliche, sich schneller fortpflanzende || *GG'*. Im Glimmer ist aber die Geschwindigkeit des letzteren die kleinere, die des ersteren größer. Der in der Krystallplatte entstandene Gangunterschied $\frac{5}{4}\lambda$ wird also um $\frac{1}{4}\lambda$ verkleinert, folglich entsteht im Quadranten *I* der erste dunkle Ring erst in dem Abstande des Punktes *b* von der Mitte, er ist weiter geworden, als vorher. In ganz gleicher Weise kommt für jeden folgenden Ring in den Quadranten *II* und *IV* zum Gangunterschiede der Krystallplatte noch $\frac{1}{4}\lambda$ von seiten des Glimmers hinzu, sie werden sämtlich enger, während bei allen Ringen in den Quadranten *I* und *III* der entstandene Gangunterschied durch den Glimmer um $\frac{1}{4}\lambda$ verringert wird, die letzteren also erweitert werden. Bei den negativen Krystallen ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der parallel der Axe schwingenden Strahlen am größten, der außerordentliche Strahl also der schnellere; bei derselben Stellung des Glimmers muß also in den Quadranten *II* und *IV* genau das gleiche vor sich gehen, als bei positiven in den Quadranten *I* und *III*, und vice versa.

In denjenigen Quadranten, in welchen der im Krystalle entstandene Gangunterschied durch den Glimmer um $\frac{1}{4}\lambda$ verkleinert wird (in denen also die Ringe erweitert werden), muß die dem Gangunterschiede 0 entsprechende Dunkelheit in dem Abstande von der Mitte zustande kommen, in welchem der Gangunterschied ohne Einfügung des Glimmers $\frac{1}{4}\lambda$ sein würde, es müssen also in diesen Quadranten dort dunkle Flecken erscheinen. Die Mitte des Bildes und ebenso die Stellen, an denen sich ohne Einfügung des Glimmers die Arme des schwarzen Kreuzes befinden würden, müssen hell sein, weil hier nur eine Schwingung den Krystall durchsetzt, diese im Glimmer in zwei gleich große Componenten mit $\frac{1}{4}\lambda$ Gangunterschied zerlegt wird und letztere sich dann zu einer circularen Schwingung zusammensetzen (s. S. 14), welche durch den Analysator nicht ausgelöscht werden kann.

Das praktische Verfahren, um den Charakter der Doppelbrechnng einer senkrecht zur Axe geschliffenen einaxigen Krystallplatte zu bestimmen, besteht demnach darin, daß man zwischen sie und den Analysator eine Viertelundulations-Glimmerplatte von angegebener Form so einschiebt, daß ihre Längsrichtung 45° mit den beiden Armen des schwarzen Kreuzes bildet. Es erscheinen alsdann statt desselben zwei schwarze Flecke; bildet deren Verbindungslinie mit der Längsrichtung des Glimmers ein Kreuz (+), d. h. steht sie senkrecht dazu, so ist der Krystall positiv (+), ist jene

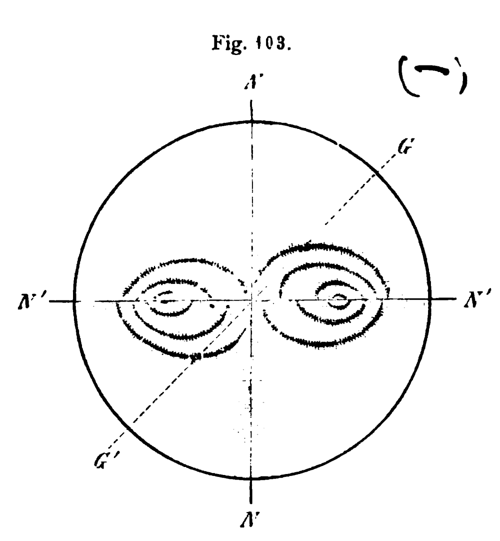
Verbindungslinie identisch mit der Längsrichtung (—), so ist der einaxige Krystall negativ (—). Im ersteren Falle sind die Ringe erweitert in den Quadranten, durch welche die Längsrichtung des Glimmers nicht geht, im letzteren Falle in denjenigen, welche durch die Längsrichtung desselben halbiert werden.

Fig. 102.



Dieselbe Glimmerplatte kann auch dazu dienen, das Zeichen der Doppelbrechung zu bestimmen bei einer zweiaxigen Krystallplatte, welche senkrecht zur ersten Mittellinie geschliffen ist und daher im convergenten Lichte die beiden Axenbilder zeigt. Man stellt zu diesem Zwecke die Krystallplatte so im Instrumente ein, daß ihre Axenebene der Polarisationsebene des einen Nicols parallel ist, daß also die Lemniscaten durchschnitten von einem schwarzen Kreuze erscheinen. Alsdann fügt man zwischen dieselbe und den Analysator die Glimmerplatte ein und beobachtet, wenn der zu untersuchende Krystall positiv, d. h. wenn die erste Mittellinie die Schwingungsrichtung der kleinsten Lichtgeschwindigkeit ist, das in Fig. 102 dargestellte Interferenzbild, in welchem die Farbenringe in den beiden Quadranten erweitert sind, durch welche das Glimmerblatt, dessen Längsrichtung durch die Linie GG' angedeutet ist, nicht geht. Ist der Krystall dagegen negativ, d. h. ist seine erste Mittellinie die Schwingungsrichtung der größten Lichtgeschwindigkeit, so erscheint bei derselben Lage das Bild Fig. 103, in welchem die Ringe derjenigen beiden Quadranten erweitert sind, welche von der Längsrichtung des Glimmers halbiert werden. Aus dieser Analogie der Erscheinungen mit derjenigen der einaxigen Krystalle ersieht man schon, daß die Erklärung ebenfalls eine jener analoge sein muß, wenn auch die Herleitung bei einem zweiaxigen Krystalle eine weit compliciertere ist. Eine einfache Überlegung lehrt indes, daß das

Fig. 103.



Interferenzbild, welches eine Platte senkrecht zur zweiten Mittellinie zeigt (meist nur in einer stark brechenden Flüssigkeit zu beobachten), durch eine Viertelundulations-Glimmerplatte gerade die entgegengesetzte Veränderung erfahren muß. Die zweite Mittellinie eines positiven Krystalls zeigt daher das Bild Fig. 103, die eines negativen das Bild Fig. 102[1]).

Optisches Verhalten von Combinationen gleichartiger doppeltbrechender Krystalle. Aus den beiden vorher erwähnten optisch zweiaxigen Mineralien Glimmer und Gyps lassen sich vermöge ihrer höchst vollkommenen Spaltbarkeit nach einer Ebene, welche beim Glimmer fast genau senkrecht zur ersten Mittellinie, beim Gyps parallel der Ebene der optischen Axen ist, sehr leicht planparallele Platten von jeder beliebigen Dicke herstellen und in irgendwelcher Weise miteinander combinieren. Das Verhalten des Lichtes, wenn es durch eine solche Plattencombination, gleichsam ein Paket von übereinander geschichteten Glimmer- oder Gypslamellen, hindurchgeht, ist nun von großer Bedeutung für das Studium der sogenannten Zwillingsbildung, d. h. der regelmäßigen (aber nicht parallelen) Verwachsung mehrerer Krystalle, welche nicht selten so stattfindet, daß sie einer nach bestimmten Gesetzen erfolgten Übereinanderlagerung verschieden orientierter Lamellen entspricht; solche Gebilde verhalten sich natürlich in optischer Beziehung anders, als einfache Krystalle Es sollen daher im folgenden die wichtigsten Fälle derartiger Combinationen doppeltbrechender Krystalle behandelt werden, von denen die meisten solche sind, die sich leicht durch Übereinanderschichtung von Glimmer- oder Gypsplatten realisieren lassen.

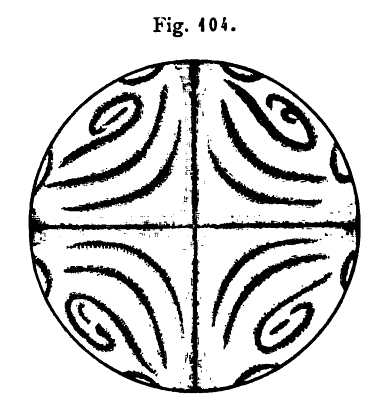
Im allgemeinen leuchtet zunächst ein, daß man durch Aufeinanderlegen zweier doppeltbrechender Krystallplatten, deren Schwingungsrichtungen zusammenfallen, ein Paket erhält, welches die gleichen Schwingungsrichtungen besitzt, also im parallelen polarisierten Lichte in denselben Stellungen dunkel wird, wie die einzelnen Platten. Welche Erscheinung ein solches Paket im convergenten Lichte zeigt, hängt von den optischen Eigenschaften und der Dicke der beiden Platten ab. Seien, um mit einem einfachen Beispiele zu beginnen, diese einaxig und schief zur optischen Axe, doch so geschnitten, daß das Axenbild noch in das Gesichtsfeld des Konoskopes fällt, und werden

---

1) Man bezeichnet deshalb ziemlich allgemein eine Mittellinie, welche, mit der Viertelundulations-Glimmerplatte untersucht, die Erscheinung Fig. 102 zeigt, als positiv, eine solche, welche die Erscheinung Fig. 103 zeigt, als eine negative; doch ist diese Bezeichnung keine ganz correcte, da die Unterscheidung von »positiv« und »negativ« bei zweiaxigen Krystallen sich, wie aus der Erklärung S. 97 hervorgeht, auf die größere Ähnlichkeit der Gestalt der Indexfläche mit der eines einaxigen positiven oder negativen Krystalls, also nicht auf eine bestimmte Richtung bezieht. Beobachtet man um eine Mittellinie die Erscheinung Fig. 102 und bezeichnet jene als »positive Mittellinie« oder »Mittellinie mit positiver Doppelbrechung«, so bedeutet dieses strenggenommen nur, daß diese Mittellinie die Schwingungsrichtung der kleinsten Lichtgeschwindigkeit sei, daß also der Krystall ein positiver sein würde, wenn die Mittellinie die Halbierende des spitzen Axenwinkels wäre.

sie so aufeinander gelegt, daß ihre Hauptschnitte einander und einem der Hauptschnitte der gekreuzten Nicols parallel, ihre optischen Axen aber nach entgegengesetzten Seiten zur Plattennormale geneigt sind, so sieht man das schwarze Kreuz mit den Farbenringen einer jeden gleichweit von der Mitte des Gesichtsfeldes entfernt, und zwar mit gleich weiten Ringen, wenn beide Platten gleich dick sind; zwischen diesen beiden Axenbildern sind secundäre Farbenstreifen, entstanden durch das Zusammenwirken beider Krystalle, sichtbar[1]). Nimmt man zu diesem Versuche statt einaxiger Platten zweiaxige, aus denen die einer optischen Axe parallelen Strahlen schief austreten, so gleicht, wenn die Ebene der beiden optischen Axen einem der beiden Nicolhauptschnitte parallel ist, die Interferenzerscheinung im convergenten Lichte derjenigen einer einfachen, senkrecht zur ersten Mittellinie geschnittenen Platte; denn es treten zwei Axenbilder, Lemniscaten von einem dunkeln Balken durchschnitten, symmetrisch zu beiden Seiten im Gesichtsfelde auf. Diese an natürlichen Verwachsungen zweier Krystalle gewisser Substanzen nicht selten zu beobachtende Erscheinung unterscheidet sich aber von jener durch die erwähnten secundären Farbenstreifen, welche an die Stelle des zweiten, senkrecht zur Ebene der optischen Axen durch die Mitte gehenden dunkeln Balkens treten. Legt man zwei Platten, deren Ebene senkrecht zur ersten Mittellinie ist — und hierzu eignen sich, wie oben erwähnt, am besten zwei Spaltungsplatten von Glimmer — derart aufeinander, daß ihre Schwingungsrichtungen parallel, die Ebenen ihrer optischen Axen aber unter 90° gekreuzt sind, so erblickt man im Gesichtsfelde des Konoskopes vier Axenbilder, gleichweit voneinander und von der Mitte entfernt, und zwischen ihnen hyperbolische Farbenstreifen, deren Asymptoten ein schwarzes, durch die Mitte gehendes Kreuz bilden, dessen Arme den Hauptschnitten der Nicols parallel gehen, wenn die beiden Axenebenen den Diagonalen entsprechen. Wenn man mehrere solche Paare gekreuzter Glimmerplatten übereinander schichtet, so treten diese secundären Interferenzcurven auf Kosten der Lemniscaten immer mehr hervor, und bei 4—5 Paaren erhält man

Fig. 104.



1) Diese und eine Reihe ähnlicher, durch »Zwillingsplatten« hervorgebrachter Interferenzerscheinungen, meist in homogenem Natriumlichte, sind in der Sammlung ausgezeichneter Photographien enthalten, welche H. Hauswaldt herausgegeben hat (Interferenzerscheinungen an doppeltbrechenden Krystallplatten im convergenten polarisierten Licht. Photographisch aufgenommen von Hans Hauswaldt in Magdeburg. Mit einem Vorwort von Th. Liebisch in Göttingen. Magdeburg 1902). Eine 1904 erschienene neue Folge enthält weitere Beispiele, ferner Aufnahmen von Interferenzerscheinungen zweiaxiger Krystalle mit großer Dispersion unter Benutzung verschiedener Wellenlängen, von anomalen Krystallen, Absorptionsspectren u. a.

das in Fig. 104 dargestellte Interferenzbild, in welchem nur noch Reste der die vier Axenpunkte umgebenden Farbencurven vorhanden sind, und das große Ähnlichkeit mit der in Fig. 5 Taf. II abgebildeten Interferenzfigur eines Krystalls mit gekreuzten Axenebenen für verschiedene Farben besitzt. Die Mitte dieses Interferenzbildes bleibt auch beim Drehen der Combination in ihrer Ebene stets dunkel, wenn die einzelnen Platten genau gleich dick sind, andernfalls restiert auch für die senkrecht hindurchgegangenen Strahlen noch ein Gangunterschied, und es entsteht beim Drehen in der Mitte eine Farbe.

Eine ganz andere Interferenzerscheinung (zuerst von Nörremberg beobachtet) erhält man dagegen, wenn die einzelnen, kreuzweise übereinander geschichteten Glimmerlamellen so dünn sind, daß die beiden durch Doppelbrechung in einer solchen entstehenden Strahlen weniger als eine Wellenlänge Gangunterschied erhalten. Fallen die Hauptschnitte des Glimmers mit den beiden gekreuzten Nicols des Instrumentes zusammen, so beobachtet man nämlich ein Interferenzbild, welches vollkommen mit dem einer senkrecht zur optischen Axe geschliffenen Platte eines einaxigen Krystalls übereinstimmt, also aus kreisförmigen Farbenringen, durchschnitten von einem dunkeln Kreuze, besteht. Daß ein solches Paket von genau gleich dünnen Glimmerlamellen sich, wie im vorhergehenden Falle, für senkrecht hindurchgehende Strahlen wie eine normal zur optischen Axe geschnittene Platte eines einaxigen Krystalls verhalten, d. h. im parallelen Lichte einfachbrechend erscheinen muß, ist klar, denn der kleine, in einer Lamelle durch die Doppelbrechung erzeugte Gangunterschied wird durch die folgende, in welcher die beiden Schwingungsrichtungen vertauscht sind, wieder aufgehoben; die Summe aller positiven Gangunterschiede in der einen Hälfte der Lamellen wird also vollständig compensiert durch die Summe aller in der andern Hälfte entstehenden entgegengesetzten Gangunterschiede; die senkrecht einfallenden Strahlen erleiden daher keine Doppelbrechung. Anders verhalten sich jedoch im allgemeinen Lichtstrahlen, welche schief durch eine derartige Combination hindurchgehen, denn ihre Fortpflanzungsrichtung hat in der einen Art von Glimmerplatten eine andere Orientierung, als in den damit gekreuzten, so daß solche Strahlen in den beiden Systemen von Glimmerlamellen eine verschiedene Doppelbrechung erfahren und schließlich mit einem Gangunterschiede austreten, welcher eine bestimmte Farbe erzeugt. So müssen im convergenten Lichte isochromatische Curven erscheinen, welche bei Aufeinanderschichtung einer kleineren Anzahl dickerer Platten die Form von Hyperbeln besitzen, dagegen in concentrische Kreise übergehen, wenn die Zahl der Platten sehr groß und ihre Dicke eine sehr geringe wird. Sind die einzelnen Lamellen des einen Systems zwar gleich dünn, aber ihre Dicke verschieden von derjenigen der Lamellen des andern, mit dem ersten gekreuzten Systems, so wirkt das ganze Paket — und zwar wieder um so vollkommener, je größer die Zahl und je geringer die Dicke der Lamellen — wie eine senkrecht

zur ersten Mittellinie geschnittene Platte eines einfachen zweiaxigen Krystalls, dessen Axenwinkel aber um so kleiner ist, je weniger sich die Lamellen der beiden Systeme in ihrer Dicke unterscheiden.

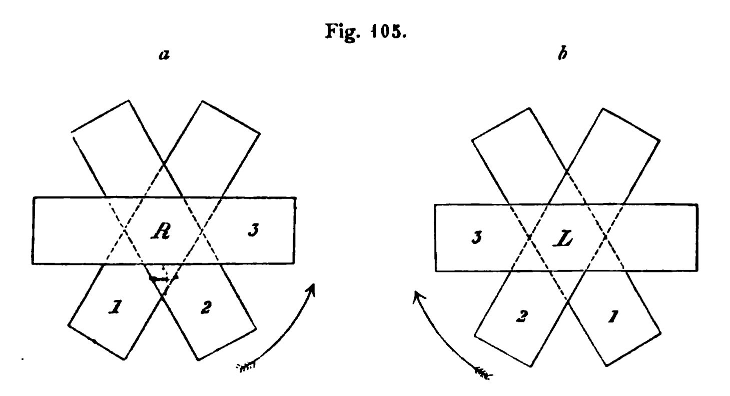
Die Erscheinungen complicieren sich, wenn die Schwingungsrichtungen der combinierten Platten nicht zusammenfallen, wenn also z. B. zwei gleich dicke Gyps- oder Glimmerplatten nicht parallel oder rechtwinkelig, sondern schiefwinkelig gekreuzt aufeinander gelegt werden. Es tritt alsdann aus einer solchen Combination, wenn sie mit parallelem polarisierten Lichte beleuchtet wird, im allgemeinen elliptisch polarisiertes Licht aus; da ein solcher Lichtstrahl (s. S. 15) zweien zueinander senkrechten Schwingungen von ungleicher Intensität entspricht und infolgedessen bei der Zerlegung in einem Nicolschen Prisma nur ein Teil derselben vernichtet werden kann, so wird das austretende Licht vom Analysator in keiner Stellung desselben ausgelöscht. Dreht man die Combination selbst zwischen gekreuzten Nicols, so zeigt sie zwar Ab- und Zunahme der Helligkeit, entsprechend der Orientierung der großen und kleinen Axe der elliptischen Bahn der Ätherschwingungen, wird aber niemals vollständig dunkel. Bilden die Schwingungsrichtungen der beiden gleich dicken Platten 45° miteinander, so werden die Axen der Ellipse gleich groß, das aus der Combination austretende Licht ist circular polarisiert (s. S. 15) und erleidet daher bei der Drehung zwischen gekreuzten Nicols keine Änderung seiner Intensität. Die Erscheinungen im convergenten Lichte hängen auch bei schiefwinkeliger Kreuzung der Platten von deren Natur und Dicke ab; treten durch dieselben den optischen Axen parallele Strahlen aus und ist ihre Dicke eine nicht zu geringe, so beobachtet man, wie bei rechtwinkeligen Plattencombinationen, gleichzeitig die isochromatischen Curven beider Systeme in der dem Kreuzungswinkel entsprechenden relativen Orientierung und dazwischen secundäre Farbencurven, deren Form ebenfalls von dem erwähnten Winkel abhängt.

Wie in dem zuerst betrachteten Falle einer rechtwinkeligen Kreuzung der Krystallplatten, so geht auch bei beliebiger Schiefe derselben das optische Verhalten des Paketes in dasjenige eines einheitlichen Krystalls über, wenn die Dicke der Lamellen genügend klein und ihre Zahl genügend groß genommen wird. Schichtet man sehr dünne Spaltungsblättchen von Glimmer unter einem schiefen Winkel abwechselnd übereinander, so wirkt ein solches Paket optisch, wie ein einfacher zweiaxiger Krystall, dessen Ebene der optischen Axen den spitzen Winkel, welchen die Axenebenen der einzelnen Lamellen beider Systeme miteinander bilden, halbiert, und dessen Winkel der optischen Axen kleiner ist, als derjenige des angewandten Glimmers. Sei z. B. in Fig. 105*a* die Längsrichtung der rectangulären, mit 1 und 2 bezeichneten Glimmerplatten die Trace der Ebene ihrer optischen Axen, und stelle jeder dieser beiden Rectangeln eine Anzahl übereinander liegender paralleler Glimmerlamellen dar, so daß in dem kleinen, unter dem mittleren Sechsecke *R* befindlichen Dreiecke beide Arten

von Lamellen, unter 60° gekreuzt, abwechselnd übereinander geschichtet sind. Alsdann zeigt dieses Dreieck, im parallelen polarisierten Lichte untersucht, den Austritt zweier geradlinig polarisierter Strahlen, deren Schwingungsrichtungen horizontal und senkrecht orientiert sind, also den spitzen und stumpfen Winkel der beiden Systeme von Glimmerlamellen halbieren; wenn diese Richtungen mit den Hauptschnitten der Nicols durch Drehung der Combination zur Deckung gebracht werden, so erscheint das Dreieck vollständig dunkel, wie ein einheitlicher doppeltbrechender Krystall. Im Konoskope zeigt dasselbe das normale Axenbild eines zweiaxigen Krystalls mit der a. vor. S. angegebenen Orientierung der optischen Axen.

Eine zur ersten Mittellinie senkrechte zweiaxige Krystallplatte, in welcher die Hauptschwingungsrichtungen für verschiedene Farben nicht dispergiert sind, geht offenbar durch eine Drehung von 180° um die Mittellinie in eine Stellung über, in welcher sie genau das gleiche Verhalten gegen das

Fig. 105.



Licht zeigen muß, weil alsdann infolge der Symmetrie nach den optischen Hauptschnitten durchweg gleichwertige Richtungen in die gleiche Orientierung gelangen. Beim Glimmer sind zwar diese Bedingungen nicht absolut genau erfüllt, aber doch so nahe, daß die kleinen Abweichungen die resultierenden Erscheinungen nicht mehr wesentlich beeinflussen. Legt man daher auf eine dünne rectanguläre Glimmerlamelle, deren Längsrichtung der Ebene der optischen Axen entspricht, eine zweite unter einem spitzen Winkel, welcher in 180° mit einer ganzen Zahl aufgeht, z. B. 60° oder 45°, auf diese eine dritte um ebensoviel gegen die zweite gedreht usf., so wird im ersten Falle die vierte, im zweiten die fünfte der ersten parallel, d. h. nach je drei bzw. vier Platten wird die gleiche optische Orientierung sich wiederholen; es entsteht eine Säule, welche aus gleichartigen Paketen von 3, 4 usw. Lamellen aufgebaut ist. Wie ein Blick auf die obenstehende Figur, in welcher ein Drehungswinkel von 60° zugrunde gelegt ist, lehrt, können aber solche Pakete in zweierlei Weise zusammengesetzt werden: entweder so, daß die einzelnen Lamellen eine von links nach rechts aufsteigende Wendeltreppe bilden, wie in Fig. 105*a*, oder eine von

rechts nach links aufsteigende, wie sie in Fig. 105*b* dargestellt ist. Eine aus derartigen Packeten aufgeschichtete Säule, nach ihrem Erfinder Reusch-sche Glimmercombination genannt, verhält sich nun in dem mittleren Sechsecke (R und L), in welchem Platten aller drei Orientierungen in gleicher Anzahl übereinander liegen, verschieden je nach dem Sinne, in welchem die Pakete aufgebaut sind. Zwischen gekreuzten Nicols im parallelen Lichte erscheint das Sechseck in jeder Stellung hell, dreht man aber den Analysator um einen bestimmten Winkel, so erhält man vollständige Auslöschung des austretenden Lichtes, wenn dasselbe einfarbig ist; bei Anwendung weißen Lichtes erscheinen wechselnde Farben, wenn der obere Nicol des Orthoskopes gedreht wird. Diese Erscheinungen erklären sich dadurch, daß die senkrecht durch die Combination hindurchgegangenen Strahlen zwar nicht doppelt gebrochen werden, dagegen ihre Schwingungsrichtung bzw. ihre Polarisationsebene eine Drehung erfährt, welche für verschiedene Farben ungleich groß ist, so daß im weißen Lichte durch den Analysator in einer bestimmten Stellung nur eine Farbe ausgelöscht werden kann. Diese Drehung der Polarisationsebene ist nun in einer Glimmercombination von der Art der Fig. 105*a* eine rechte (d. h. im Sinne des Uhrzeigers), in derjenigen 105*b* eine linke, genau gleich große, wenn die beiden Combinationen aus gleich vielen, gleich dünnen Lamellen zusammengesetzt sind, d. h. die eine das genaue Spiegelbild der andern darstellt. Die gleiche Erscheinung zeigen auch natürliche Krystalle, und zwar solche, für die man aus ihrer spiegelbildlich entgegengesetzten Krystallform auf analogen Aufbau aus rechts bzw. links spiralförmig angeordneten kleinsten Teilen schließen muß. Die Beschreibung des Verhaltens solcher »Krystalle mit optischem Drehungsvermögen« soll den Gegenstand des nächsten Abschnittes bilden. — Im convergenten Lichte zeigen die Reuschschen Glimmercombinationen[1]) im allgemeinen das Verhalten optisch einaxiger Krystallplatten, nur ist das die Farbenringe durchsetzende schwarze Kreuz in der Mitte aufgehellt, und bei Anwendung weißen Lichtes erscheint daselbst eine Farbe, welche beim Drehen des Analysators wechselt. Man kann daher die im folgenden Abschnitte für die einaxigen Krystalle mit Drehungsvermögen beschriebenen Erscheinungen, besonders auch die an der Combination eines rechtsdrehenden mit einem linksdrehenden Krystalle zu beobachtenden, ebenso mit rechts- und linksdrehenden Glimmercombinationen hervorbringen.

Aus dem Verhalten der S. 149 erwähnten Glimmercombinationen folgt, daß eine zur ersten Mittellinie normale Platte eines Zwillingskrystalls (s. S. 147), welcher aus zweiaxigen Lamellen in senkrecht gekreuzter Orientierung,

1) Diese Combinationen werden von der Firma Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H. in vorzüglicher Ausführung geliefert, nämlich zusammengesetzt aus 30 Glimmerlamellen, welche so dünn sind, daß sie einzeln nur einen Gangunterschied von $\frac{1}{4}\lambda$ hervorbringen. Ein solches Präparat besitzt ein Drehungsvermögen einer 8 mm dicken Platte von Quarz (s. folgenden Abschnitt).

aber von verschiedener Größe und Dicke, aufgebaut ist, an denjenigen Stellen, wo das Licht nur durch Schichten einer Art hindurchgeht, das zweiaxige Interferenzbild mit dem normalen Axenwinkel zeigen muß, dagegen dort, wo zwischen die Substanz dieser Orientierung feine Lamellen der andern eingelagert sind, ein Interferenzbild mit kleinerem Axenwinkel, welcher in der dazu senkrechten Ebene liegt, wenn die Lamellen der zweiten Orientierung vorherrschen, und daß endlich dort, wo beide Orientierungen im Gleichgewichte sind, der Axenwinkel Null wird und das Interferenzbild eines einaxigen Krystalls erscheint. Ebenso wird ein optisch zweiaxiger Krystall, welcher aus Zwillingslamellen, deren Axenebenen schiefe Winkel miteinander bilden, aufgebaut ist, je nach der Art dieses Aufbaues wechselnden Axenwinkel und wechselnde Orientierung der Ebene der Axen an verschiedenen Stellen, unter Umständen auch Einaxigkeit, verbunden mit Drehung der Polarisationsebene, zeigen. Wenn nun die Lamellen in einem derartig zusammengesetzten Krystalle so dünn sind, daß sie sich selbst der mikroskopischen Beobachtung entziehen, so kann die Art seines Aufbaues nur aus der Gesamtwirkung der Lamellen auf das hindurchgehende polarisierte Licht geschlossen werden; ist der Aufbau an allen Stellen genau gleich, so muß das optische Verhalten das dieser Gesamtwirkung entsprechende eines einheitlichen Krystalls sein; unterscheiden sich aber die verschiedenen Partien des Krystalls in ihrem Aufbau in der soeben angegebenen Weise, so erscheint er inhomogen, d. h. er zeigt an verschiedenen Stellen verschiedenes optisches Verhalten; derartige Krystalle pflegt man »optisch anomale« zu nennen, doch liegt hier eigentlich keine »Anomalie« vor, denn das Verhalten eines derartig zusammengesetzten Gebildes muß notwendig gesetzmäßig aus der Beschaffenheit der dasselbe bildenden Lamellen folgen. Mallard hat zuerst ganz allgemein die Änderungen, welche geradlinig polarisiertes Licht beim Durchgange durch ein Paket beliebig orientierter, dünner doppeltbrechender Krystall-Lamellen erleiden muß, aus der Undulationstheorie des Lichtes abgeleitet und damit die vollständige theoretische Erklärung aller im vorhergehenden betrachteten Erscheinungen gegeben. Auf Grund dieser Theorie ergeben sich auch die optischen Constanten eines derartigen Pakets aus denen der einzelnen Lamellen, so daß in denjenigen Fällen, in welchen eine Substanz sowohl homogen, d. i. in einfachen Krystallen, als auch in scheinbar homogenen, tatsächlich aber aus feinen Zwillingslamellen aufgebauten (polysynthetischen) Krystallen auftritt[1]), die optischen Constanten der letzteren aus denen der ersteren berechnet werden können.

Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in Krystallen.

Die Krystalle einer Anzahl von Substanzen zeigen, unabhängig davon, ob sie doppeltbrechend sind oder nicht, eine Eigenschaft, welche auch

1) Solche, anscheinend verschieden krystallisierende Substanzen nennt man »polysymmetrische«. S. des Verf. Einleitung in die chemische Krystallographie, Leipzig 1904, S. 4.



gewissen Flüssigkeiten, wie dem Terpentinöl, der Zuckerlösung u. a., zukommt, nämlich diejenige, die Polarisations- bzw. die Schwingungsebene eines hindurchgehenden, geradlinig polarisierten Lichtstrahles um einen bestimmten, von der Farbe des letzteren und der Natur des Krystalls abhängigen Winkel zu drehen. Solche Substanzen nennt man »optisch active«.

Die Ursache der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in einem Krystalle ist eine eigentümliche, von der gewöhnlichen vollkommen verschiedene Art von Doppelbrechung im Innern desselben. Die eintretende geradlinige Schwingung wird nämlich in zwei kreisförmige Schwingungen zerlegt, von denen die eine im Sinne des Uhrzeigers, die andere im entgegengesetzten Sinne stattfindet; diese beiden circular polarisierten (s. S. 14 f.) Strahlen pflanzen sich im Krystalle mit verschiedener Geschwindigkeit fort und verlassen daher denselben mit einem von seiner Dicke abhängigen Gangunterschiede. Die Theorie lehrt nun, daß zwei circulare Schwingungen, von denen eine gegen die andere verzögert ist, sich zusammensetzen zu einer geradlinigen Schwingung, welche gegen die ursprüngliche gedreht ist um einen von der Größe dieser Verzögerung abhängigen Winkel. Da nun der in einem derartigen Krystalle entstehende Gangunterschied der beiden circularen Strahlen ein verschiedener ist je nach deren Schwingungsdauer, und zwar um so größer, je größer die Brechbarkeit der betreffenden Farbe, so ist die Drehung der Schwingungsebene, welche eine Platte eines solchen Krystalls hervorbringt, am kleinsten für rote Strahlen, größer für gelbe, grüne, blaue, und am größten für violette; die vor dem Eintritte parallelen Schwingungsrichtungen der einfallenden weißen Lichtstrahlen werden also durch eine derartige Krystallplatte dispergiert. Die Dispersion derselben folgt einem ähnlichen Gesetze, wie es für die durch ein brechendes Prisma hervorgebrachte gilt (vgl. S. 33). Bezeichnen A und B für einen bestimmten Körper gültige Constanten, α den Drehungswinkel für eine 1 mm dicke Platte, so gilt nach Boltzmann folgende Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge (in Luft):

$$\alpha = \frac{A}{\lambda^2} + \frac{B}{\lambda^4} + \cdots$$

Aus der gemessenen Drehung der Polarisationsebene für mindestens zwei Farben von bekannter Wellenlänge kann man daher diejenige für die übrigen Farben ebenso berechnen, wie dies bei der Brechung des Lichtes der Fall ist. So dreht z. B. eine 1 mm dicke Platte von Natriumchlorat (nach Guye) bzw. Quarz (nach Soret und Sarasin) die Schwingungsebene des Lichtes, welches den darüber gesetzten Fraunhoferschen Linien entspricht, um folgende Winkel:

		B	C	D	E	F	G	H
Natriumchlorat:	$\alpha =$	2,27°	2,50°	3,13°	3,94°	4,67°	6,00°	7,17°
Quarz		15,75	17,31	21,71	27,54	32,76	42,59	51,19.

Wie man aus diesen Beispielen ersieht, ist das specifische Drehungsvermögen verschiedener Substanzen ein sehr verschiedenes. Da die relative Verzögerung der beiden, in einem derartigen Krystalle entstehenden circularen Schwingungen die doppelte werden muß, wenn die Strahlen den doppelten Weg im Krystalle zurückzulegen haben, so muß ferner die Drehung proportional mit der Dicke der Platte wachsen; der Drehungswinkel ist also genau der doppelte der angegebenen Werte für eine Platte von zweifacher Dicke usf.

Von jeder der hier in Betracht kommenden krystallisierten Substanzen gibt es nun zwei optisch entgegengesetzte Modificationen mit gleich großem, aber entgegengesetztem Drehungsvermögen, infolge des Umstandes, daß in den Krystallen der einen die rechts herum (im Uhrzeigersinne) stattfindende circulare Schwingung die größere Geschwindigkeit besitzt, in denen der andern Modification die linke; Krystalle der ersten Art drehen die Polarisationsebene nach rechts, diejenigen der zweiten Art, in welchen der Gangunterschied bei gleicher Dicke gleich groß, aber entgegengesetzt ist, um ebensoviel nach links.

Optische Activität hat man bisher an folgenden einfachbrechenden Körpern beobachtet:

Natriumchlorat (chlorsaures Natron),
Natriumbromat (bromsaures Natron),
Natriumsulfantimoniat (Schlippesches Salz),
Uranylnatriumacetat (essigsaures Uranoxyd-Natron).

Diese Krystalle zeigen die aus der Drehung der Polarisationsebene sich ergebenden Erscheinungen in jeder Richtung in gleicher Weise, d. h. ihr specifisches Drehungsvermögen ist für alle Richtungen gleich groß und nur von der Farbe des Lichtes abhängig. Das Verhalten gleich dicker Platten, in welcher Orientierung dieselben auch aus einem derartigen Krystalle herausgeschnitten seien, ist stets das gleiche. Anders ist es bei optisch einaxigen Krystallen, deren eine größere Zahl mit optischem Drehungsvermögen erkannt worden sind:

Quarz (Bergkrystall, Siliciumdioxyd),
Zinnober (Quecksilbersulfid),
Kaliumlithiumsulfat (schwefelsaures Kali-Lithion),
Rubidiumlithiumsulfat (schwefelsaures Rubidion-Lithion),
Ammoniumlithiumsulfat (schwefelsaures Ammon-Lithion),
Kaliumlithiumchromatsulfat (chromsaures und schwefelsaures Kali-Lithion),
Kaliumdithionat (unterschwefelsaures Kali) und das entsprechende Rubidiumsalz,
Calciumdithionat (unterschwefelsaurer Kalk),
Strontiumdithionat (unterschwefelsaurer Strontian),
Bleidithionat (unterschwefelsaures Bleioxyd),
Natriumperjodat (überjodsaures Natron),
Weinsaures Rubidium und Cäsium,

Guanidincarbonat (kohlensaures Guanidin),
Äthylendiaminsulfat (schwefelsaures Äthylendiamin),
Benzil (Diphenyldiketon),
Diacetylphenolphtalein,
Gewöhnlicher Campher und Maticocampher,
Strychninsulfat (schwefelsaures Strychnin),
Sulfobenzoltrisulfidid (Sulfotoluoltrisulfid).

Die Gesetze der circularen Doppelbrechung und der daraus sich ergebenden Drehung der Polarisationsebene, welche zuerst an dem wichtigsten Beispiele aus der Reihe der soeben angeführten optisch einaxigen Krystalle, dem Quarze, von Arago entdeckt und besonders durch Biot und Fresnel näher erforscht wurden, sind die folgenden:

In der Richtung der optischen Axe treten, weil hier keine Doppelbrechung der gewöhnlichen Art vorhanden ist, nur die durch die circulare Doppelbrechung allein bedingten Erscheinungen ein. Z. B. zeigt eine normal zur Axe geschnittene Quarzplatte, wenn sie nur mit senkrecht auffallenden geradlinig polarisierten Strahlen beleuchtet wird, dasselbe Verhalten, wie eine in beliebiger Richtung aus einem einfachbrechenden Krystalle mit optischem Drehungsvermögen geschnittene Platte von entsprechender Dicke. Sobald aber die eintretenden Lichtstrahlen gegen die optische Axe geneigt sind, tritt zu dem von der circularen Doppelbrechung erzeugten Gangunterschiede noch derjenige hinzu, welcher von der gewöhnlichen Doppelbrechung hervorgebracht wird, und dieser letztere steigt mit zunehmender Neigung zur Axe. Das hierdurch bewirkte Verhalten eines optisch activen einaxigen Krystalles gegenüber den Lichtstrahlen ergibt sich aus der von Gouy und in einer etwas andern Form von Wiener entwickelten Theorie der gemeinsamen Wirkung von circularer und linearer Doppelbrechung, welche auf der Voraussetzung beruht, daß die beiden Gangunterschiede, deren einer von der circularen, der andere von der gewöhnlichen Doppelbrechung hervorgebracht wird, sich einfach superponieren. Experimentelle, am Quarze angestellte Untersuchungen haben die Schlußfolgerungen dieser Theorie vollkommen bestätigt und namentlich bewiesen, daß der erste dieser beiden Gangunterschiede, wie in den einfachbrechenden optisch activen Krystallen, bei gleicher Dicke und gleicher Farbe der Lichtstrahlen nach allen Richtungen denselben Wert beibehält, daß aber die Wirkung der circularen durch die gewöhnliche Doppelbrechung bei steigender Schiefe zur Axe immer mehr verringert und schließlich ganz vernichtet wird. Die beiden, parallel der Axe sich fortpflanzenden, circularen Schwingungen verwandeln sich nämlich, wenn die Strahlen einen kleinen Winkel mit jener Richtung einschließen, in zwei elliptische, deren gleichgestaltete, aber verschieden orientierte Bahnen von den Ätherteilchen in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden und welche anfangs nahe gleiche Axen besitzen, dagegen immer mehr gestreckte Gestalt annehmen, je größer die Neigung der Strahlen zur opti-

schen Axe wird. Bei einer gewissen Größe dieser Neigung ist die kleine Axe der Ellipse verschwindend gegen die große, und die Schwingung der Ätherteilchen unterscheidet sich nicht mehr von einer geradlinigen. Alsdann zerfällt ein eintretender, geradlinig polarisierter Lichtstrahl in zwei ebenfalls geradlinig, senkrecht zueinander schwingende Strahlen, deren Polarisationsebene keine Drehung mehr erkennen läßt, d. h. der Krystall verhält sich wie ein gewöhnlicher, optisch einaxiger, ohne optisches Drehungsvermögen.

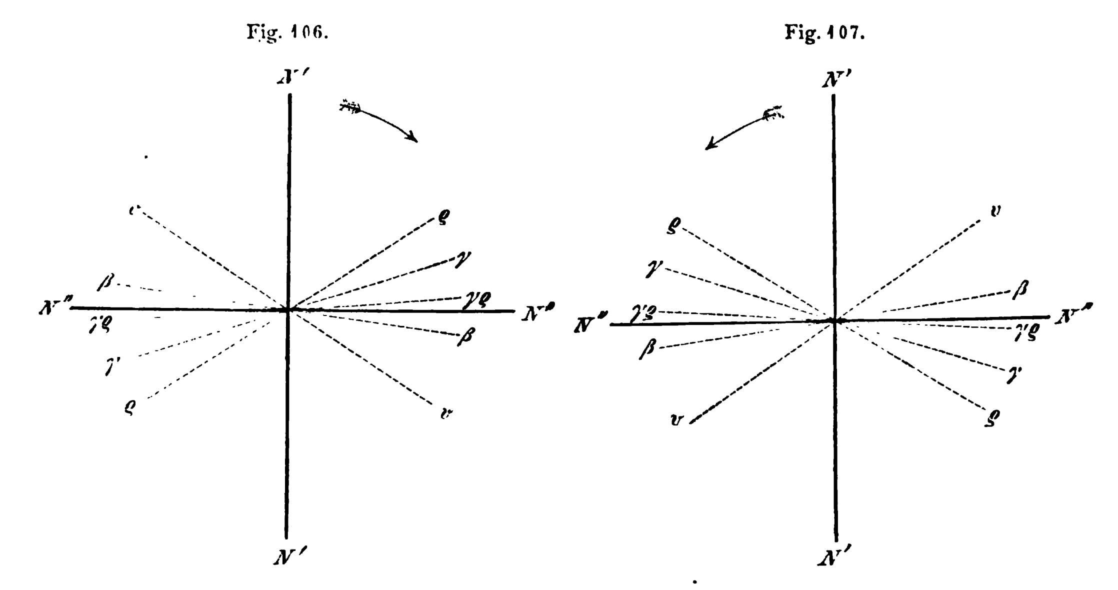
Aus dem Vorstehenden ergeben sich nun die Erscheinungen, welche eine senkrecht zur Axe geschnittene Platte von Quarz zeigen muß. Wird sie im Orthoskope mit einfarbigem Lichte beleuchtet, so erscheint sie zwischen gekreuzten Nicols hell, und man muß den Analysator um einen bestimmten Winkel, bei einer rechtsdrehenden Platte im Sinne des Uhrzeigers, bei einer linksdrehenden im entgegengesetzten, drehen, um das Licht zu vernichten. Dieser Drehungswinkel ergibt sich um so größer, je kleiner die Wellenlänge des angewendeten Lichtes ist, und wächst außerdem für die gleiche Farbe proportional mit der Dicke der Platte. Für eine 1 mm dicke Platte beträgt der Drehungswinkel der verschiedenen Farben nach Biot (die genaueren Werte für die Frauenhoferschen Linien wurden bereits S. 154 angeführt):

äußerstes	Rot	17°,5
mittleres	Rot	19,0
»	Orange	21,4
»	Gelb	24,0
»	Grün	27,8
»	Blau	32,3
»	Indigo	36,1
»	Violett	40,8
äußerstes	Violett	44,1.

Die große Verschiedenheit der Drehung, welche demnach die verschieden gefärbten Strahlen erleiden, ist die Ursache, daß wir im weißen Lichte bei keiner Drehung des Analysators Dunkelheit der Platte hervorbringen können, da die Strahlen verschiedener Farben in ganz verschiedenen Ebenen schwingen, also auch nicht alle zugleich durch den Nicol ausgelöscht werden können. Sei (Fig. 106 S. 158) $N'N'$ die Schwingungsebene der parallelen, in eine rechtsdrehende Quarzplatte von etwa 3 mm Dicke eintretenden weißen Lichtstrahlen, so werden die darin enthaltenen roten Strahlen in dem Quarze die geringste Drehung erleiden, ihre Schwingungsrichtung wird etwa $\varrho\varrho$, diejenige der gelben Strahlen $\gamma\gamma$, der grünen $\gamma\varrho$-$\gamma\varrho$, der blauen $\beta\beta$, der violetten vv sein. Steht der Analysator senkrecht zum Polarisator, ist die Schwingungsebene des durch den ersteren hindurchgehenden Lichtes parallel $N''N''$, so wird derselbe nur diejenigen aus dem Quarze austretenden Strahlen ganz ungeschwächt hindurchlassen, welche parallel $N''N''$ schwingen; dies sind die grünen. Alle

Strahlen der andern Farben werden im Nicol in zwei Componenten zerlegt, von denen eine vernichtet wird, und diese letztere ist um so größer, je größer der Winkel ist, welchen ihre Schwingungsrichtung mit $N'''N'''$ macht. Es werden also alle andern Farben geschwächt, um so mehr, je größeren Winkel ihre Vibrationsrichtung mit der des Analysators $N'''N'''$ einschließt. Der Gesamteindruck aller dieser Farben nach ihrer Zurückführung auf eine Polarisationsebene kann demnach nicht mehr Weiß sein, sondern muß der einer Mischfarbe sein, in welcher das Grün über die andern Farben vorherrscht. Im weißen parallelen Lichte beobachtet, wird also eine solche Platte bei gekreuzten Nicols grün erscheinen. Eine Drehung der Platte in ihrer eigenen Ebene wird an dieser Erscheinung nicht das geringste ändern, da ja hierbei die Richtung, in welcher die Strahlen die Platte durchsetzen, also auch die Drehung ihrer Polarisationsebene stets dieselbe bleibt, wohl aber eine Drehung des einen Nicols gegen den andern. Drehen wir z. B. den Analysator aus der Stellung $N'''N'''$ (Fig. 106) nach rechts (wie der Pfeil in der Figur andeutet), so wird seine Schwingungsrichtung parallel derjenigen des blauen Lichtes, dies wird also in der entstehenden Mischfarbe im Maximum, die andern Farben werden geschwächt sein; die Platte wird blau erscheinen. Bei weiterer Drehung in derselben Richtung fällt $N'''N'''$ mit der Schwingungsrichtung vv des violetten Lichtes zusammen; die Platte erscheint violett. Drehen wir

Fig. 106. Fig. 107.



über $N''N''$ hinaus, bis $N'''N'''$ parallel $\varrho\varrho$ wird, so ist die Platte mit einer Mischfarbe gefärbt, in welcher Rot vorherrscht, also sehen wir sie rot, bei weiterer Drehung gelb, wiederum grün, blau, violett. Drehen wir demnach den Analysator nach rechts, so erscheint die Platte stets farbig, aber ihre Färbung ändert sich in der Weise, daß die verschiedenen Farben

des Spectrums in der Reihenfolge ihrer Brechbarkeit (von dem am wenigsten brechbaren Rot bis zum Violett, welches am stärksten gebrochen wird) erscheinen. Man sieht leicht ein, daß bei umgekehrter Drehung die Farbenfolge die entgegengesetzte sein wird.

Nehmen wir nun statt der rechtsdrehenden eine linksdrehende Quarzplatte von derselben Dicke, und sei wieder $N'N'$ (Fig. 107) die Schwingungsrichtung des in dieselbe eintretenden weißen Lichtes, so werden die Schwingungsrichtungen der roten, gelben, grünen, blauen und violetten Strahlen nach ihrem Austritte aus der Platte jetzt bzw. $\varrho\varrho$, $\gamma\gamma$, $\gamma\varrho$-$\gamma\varrho$, $\beta\beta$, vv sein. Es wird also, wie bei dem rechtsdrehenden Quarze, bei keiner Stellung der Nicols Dunkelheit eintreten, sondern die Platte zeigt stets eine Mischfarbe. Bei gekreuzter Stellung des Analysators, wenn dessen Schwingungsrichtung $N''N''$, erscheint auch diesmal die Platte grün; wird der obere Nicol jedoch rechts herumgedreht, so erscheint jetzt zunächst Gelb, dann Rot usf.; bei derselben Drehung des Nicols, bei welcher wir mittels einer rechtsdrehenden Quarzplatte die Farben in der Reihenfolge ihrer Brechbarkeit erhielten, resultieren dieselben bei einer linksdrehenden Platte in umgekehrter Reihenfolge, d. h. wir müssen in entgegengesetztem Sinne drehen (wie der Pfeil angibt), um dieselbe Farbenfolge zu erhalten.

Hieraus folgt, daß eine rechts- und eine linksdrehende Quarzplatte, zwischen zwei Nicols von bestimmter Stellung zueinander, z. B. senkrecht gekreuzte, gebracht, dieselbe Farbe zeigen, beide sich aber dadurch unterscheiden, daß bei einer Drehung des Analysators die Farben in der Reihenfolge: Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau, Violett erscheinen, wenn die Platte rechtsdrehend ist, bei rechter Drehung des Analysators (wie der Zeiger der Uhr sich bewegt); wenn sie linksdrehend ist, bei entgegengesetzter Drehung jenes Nicols.

Legen wir eine dickere Quarzplatte zwischen zwei gekreuzte Nicols, so muß dieselbe eine andere Farbe zeigen, als die vorige zwischen denselben Nicols, weil sie proportional ihrer Dicke stärker dreht, also die Schwingungsrichtungen der verschiedenen Farben beim Austritte aus derselben andere (stärker gedrehte) Lage haben, folglich durch den Analysator nicht dieselbe Farbe ausgelöscht wird, als vorher. Schon bei einer Dicke von 3,75 mm sind, wie aus den S. 157 angegebenen Zahlen leicht zu ersehen, die roten Schwingungen um über 60°, die grünen über 100°, die violetten etwa 180° gedreht; bei parallelen Nicols erscheint eine solche Platte purpurviolett, und diese Farbe (teinte sensible, teinte de passage) geht ziemlich rasch in Rot oder Blau über, wenn der Analysator nach der einen oder andern Seite gedreht wird. Man benutzt eine derartige, sog. Biotsche Quarzplatte bei mikroskopischen Untersuchungen wohl auch statt einer das Rot I. Ordnung zeigenden Gypsplatte (s. S. 140), doch ist letztere wegen ihrer größeren Empfindlichkeit vorzuziehen. Dagegen ist zur Messung kleiner Drehungen der Polarisationsebene sehr geeignet eine Doppelplatte, zur Hälfte aus rechts-, zur Hälfte aus linksdrehendem Quarze von

3,75 mm Dicke bestehend, welche zwischen zwei genau parallelen oder genau senkrecht gekreuzten Nicols in beiden Hälften die gleiche Farbennuance zeigt; wird nun der Polarisator oder — durch Einfügung einer schwach drehenden Substanz — die aus jenem austretende Schwingung um einen kleinen Winkel gedreht, so erscheinen sofort die beiden Hälften der Doppelplatte ungleich gefärbt, und der Analysator muß um denselben Winkel gedreht werden, um wieder Gleichheit der Farbe in beiden Hälften zu erzielen. Quarzplatten von erheblich größerer Dicke zeigen weniger lebhafte Farben; bei 20 mm z. B. werden die roten Strahlen $2 \times 180^\circ$, die gelbgrünen $3 \times 180^\circ$, die indigoblauen $4 \times 180^\circ$ gedreht; diese schwingen also sämtlich parallel und werden vom Analysator gleichzeitig ausgelöscht. Bei noch größerer Dicke gilt dies für noch mehr Farben des Spectrums, d. h. es erscheint immer vollkommener das Weiß der höheren Ordnung. Ebenso werden aber auch die Farben weniger lebhaft, wenn die angewandte Krystallplatte sehr dünn, d. h. die durch sie bewirkte Drehung der Polarisationsebene eine geringe ist; eine Quarzplatte von 0,1 mm Dicke z. B. dreht die Ebene der Schwingungen für die äußersten Farben nur um 1,7 bzw. 4,4°; dieselben können daher durch eine kleine Drehung des Analysators fast gleichzeitig ausgelöscht werden, während bei genau senkrecht gekreuzten Nicols die Platte nur eine geringe Aufhellung des Lichtes hervorbringt.

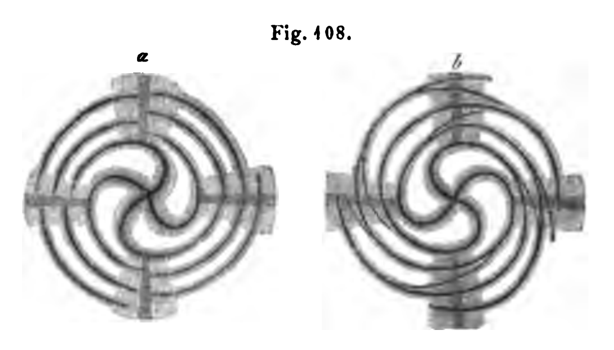
Da das Drehungsvermögen sich nur in der Richtung der optischen Axe und in den der Axe unmittelbar benachbarten Richtungen bemerkbar macht, so muß eine senkrecht zur Axe geschliffene Platte eines einaxigen, optisch activen Krystalls, im convergenten Lichte betrachtet, gleichfalls das schwarze Kreuz mit den kreisförmigen Farbenringen zeigen, wenn die Nicols des Polarisationsinstrumentes gekreuzt sind: nur diejenige Stelle des Gesichtsfeldes, in welcher sich die den Krystall parallel zur Axe durchsetzenden Strahlen vereinigen, d. i. die Mitte und deren unmittelbare Nachbarschaft, kann nicht dunkel erscheinen, weil die Polarisationsebene gerade dieser Strahlen gedreht wird. Die Mitte der Ringe muß also dieselbe Farbe zeigen[1]), welche die ganze Platte im parallelen Lichte zeigt, d. h. bei anderer Dicke eine andere. Ebenso muß diese Farbe sich ändern, wenn der Analysator gedreht wird, und aus der Reihenfolge der auftretenden Farben und dem Sinne der Drehung wird man ebenso, wie im parallelen Lichte, bestimmen können, ob die Platte rechts- oder linksdrehend ist.

Legt man eine rechts- und eine linksdrehende Quarzplatte von gleicher Dicke aufeinander, und bringt beide in das Konoskop zwischen gekreuzte Nicols, so muß die Mitte des Interferenzbildes dunkel bleiben, weil die Drehungen der Schwingungsrichtungen durch beide Platten einander genau aufheben. Von der dunkeln Mitte des entstehenden Interferenzbildes gehen

1) Fig. 2 der Tafel II stellt das Interferenzbild einer senkrecht zur Axe geschliffenen Quarzplatte dar.

aber keine geradlinigen schwarzen Kreuzesarme aus, sondern spiralartig gewundene Curven, nach ihrem Entdecker die Airy'schen Spiralen genannt, deren Windungsrichtung zugleich angibt, in welchen von den beiden entgegengesetzt drehenden Krystallen die Lichtstrahlen zuerst eintreten. Fig. 108*a* stellt die Erscheinung in dem Falle vor, daß das Licht zuerst durch die linksdrehende, Fig. 108*b* in dem, daß es zuerst durch die rechtsdrehende Platte geht[1]).

Fig. 108.



Alles hier Gesagte gilt nun auch für die übrigen Substanzen, deren Krystalle optisch activ sind, nur mit dem Unterschiede, daß das Drehungsvermögen derselben ein anderes ist, bei einigen stärker, bei den meisten schwächer, als das des Quarzes.

In den optisch zweiaxigen Krystallen ist keine Richtung ohne Doppelbrechung vorhanden, denn die den sog. »optischen Axen« parallelen Strahlen haben zwar eine gemeinsame Strahlenfront, aber denselben entsprechen unendlich viele Schwingungen mit allen möglichen Azimuthen, daher der Nachweis der Drehung der Polarisationsebene hier mit Schwierigkeiten verbunden ist. Trotzdem hat Pocklington neuerdings an 1 cm dicken Platten von Rohrzucker in der Mitte des dunkeln Büschels jeder der beiden Axen eine Drehung nachweisen können, und zwar in der einen eine Linksdrehung von 22°, in der andern eine Rechtsdrehung von 64°. Übrigens wurde schon früher nachgewiesen, daß der durch Druck zweiaxig gewordene Quarz noch Drehungsvermögen besitzt (s. unter Einfluß elastischer Deformationen auf die optischen Eigenschaften S. 233).

Absorption des Lichtes in Krystallen.

Das Licht erleidet auf seinem Wege in jedem Körper eine Schwächung seiner Intensität, eine teilweise Absorption; ist diese sehr gering, so nennen wir den Körper durchsichtig, ist sie so stark, daß schon nach Zurücklegung einer kurzen Strecke die Lichtbewegung vernichtet ist, so nennen wir ihn undurchsichtig[2]); zweitens trifft diese Absorption die verschiedenfarbigen Lichtstrahlen in verschiedenem Grade, so daß das aus dem Körper austretende Licht nicht nur nicht mehr die frühere Helligkeit, sondern auch

1) Unter den in der Natur vorkommenden Krystallen des Quarzes finden sich solche, welche aus Schichten von Rechts- und Linksquarz zusammengesetzt sind, und dies ist dann oft nur durch das Auftreten der Airy'schen Spiralen zu erkennen.

2) Hieraus geht hervor, daß beide Worte nur relative Begriffe bezeichnen, und daß es weder einen absolut durchsichtigen, noch einen absolut undurchsichtigen Körper gibt.

nicht mehr die frühere Farbe hat. Ist die Verschiedenheit der Stärke der Absorption in bezug auf die verschiedenen Wellenlängen des Lichtes nur gering, so werden dieselben sich zu einem Farbeneindrucke zusammensetzen, der von dem des eintretenden Lichtes so wenig verschieden ist, daß wir beide nicht zu unterscheiden vermögen; alsdann nennen wir den Körper farblos[1]). Einen absolut farblosen Stoff gibt es aber ebensowenig, wie einen absolut durchsichtigen, und selbst in den uns völlig farblos erscheinenden Körpern werden die verschiedenen Farben des Weiß nicht genau in gleichem Grade absorbiert, so daß die stärker absorbierten an Intensität merklich gegen die andern zurücktreten, sobald wir nur das weiße Licht auf einer sehr langen Strecke durch den Körper hindurchgehen lassen, und daß sie dann nicht mehr den Eindruck des Weiß, sondern den einer Farbe liefern. Sehr viele Substanzen absorbieren aber die verschiedenen Lichtarten so verschieden, daß das weiße Licht schon in dünnen Schichten derselben lebhaft gefärbt wird; dies sind diejenigen, die man besonders farbige Substanzen nennt. Manche absorbieren nur Licht einer oder mehrerer bestimmter Wellenlängen, dieses aber bei einiger Dicke der Schicht vollständig, so daß das durch sie hindurchgegangene Licht, durch ein stark dispergierendes Prisma zerlegt, ein Spectrum liefert, welches durch dunkle Streifen unterbrochen ist (Absorptionsspectrum). Andere absorbieren die Mehrzahl der Farben weit stärker, als eine oder mehrere, so daß diese allein im Spectrum als helle Streifen oder Bänder erscheinen. Es gibt aber keinen Körper, der nur das Licht einer bestimmten Wellenlänge hindurchließe und alle übrigen gleich stark absorbierte, der also zur Erzeugung wirklich einfarbigen Lichtes dienen könnte. Manche rote Gläser absorbieren zwar alle Farben außer Rot so gut wie vollständig, aber daß das hindurchgelassene Licht noch aus Strahlen von, wenn auch nicht sehr viel, verschiedener Wellenlänge besteht, geht aus der spectralen Zerlegung hervor, welche stets ein breites rotes Band liefert. Absolut homogenes Licht erhält man nicht durch Absorption, sondern nur durch Emission von glühenden Körpern, z. B. den früher bereits deshalb erwähnten glühenden Metalldämpfen.

Die Färbung eines Krystalls kann entweder eine allochromatische, seiner Substanz an und für sich nicht zukommende, sondern von der Beimischung eines fremden Stoffes herrührende, — oder eine idiochromatische, d. h. eine solche sein, welche ein notwendiges Attribut seiner stofflichen Natur ist. Zu letzteren gehören die gelben und roten Farben der chromsauren Salze und vieler organischer Nitro- und Azoverbindungen, die blauen und grünen Farben der Kupfersalze. Bei der allochromatischen Färbung kann der färbende Körper in isolierten kleinen Partikeln eingestreut

1) Solche Körper können aber eine sehr starke Absorption ausüben auf Ätherschwingungen, deren Periode größer oder kleiner ist, als die des sichtbaren Spectrums, d. h. auf ultrarote oder ultraviolette Schwingungen.

sein, welche mittels des Mikroskopes im Dünnschliffe des umschließenden Krystalls erkannt werden können (sind diese regelmäßig gelagert, so veranlassen sie im reflectierten Lichte einen Schiller nach bestimmten Richtungen), oder der färbende Körper ist gleichsam aufgelöst (dilut) in dem Krystalle vorhanden, wie dies besonders betreffs mancher organischer Farbstoffe der Fall ist. Im zweiten Falle ist der Krystall anscheinend homogen, wie die Lösung eines Farbstoffs in einer Flüssigkeit, daher er dann als eine »feste Lösung« bezeichnet werden kann; ein derartiger Krystall verhält sich in bezug auf seine von der Farbe abhängigen optischen Erscheinungen, wie die idiochromatisch gefärbten.

Die Körperfarbe der homogen gefärbten Krystalle, d. i. die Farbe, welche sie den hindurchgehenden weißen Lichtstrahlen verleihen, ist nur dann nach allen Richtungen im Krystalle die gleiche, wenn auch die Fortpflanzung der Schwingungen aller beliebiger Richtungen in gleicher Weise, also gleich schnell, vor sich geht: dies ist aber unter den Krystallen nur der Fall bei den einfachbrechenden. Bei denen aller andern vier Gruppen (s. S. 137), den optisch ein- und zweiaxigen, sind die Fortpflanzungsverhältnisse des Lichtes nach verschiedenen Richtungen verschieden, dementsprechend auch Art und Größe der Absorption; bei diesen sind Lichtstrahlen, welche eine gleich dicke Schicht, aber in verschiedener Richtung, durchlaufen haben, verschieden hell und verschieden gefärbt. Die letztere Eigenschaft, nach verschiedenen Richtungen verschiedene Farben zu zeigen, welche also nur den doppeltbrechenden Krystallen zukommen kann, nennt man Pleochroismus, dessen Gesetze besonders von Brewster und Haidinger erforscht worden sind.

Die Absorption des Lichtes ist, wie die Fortpflanzung desselben, eine Ellipsoideigenschaft der Krystalle; ihre Behandlung geschieht am geeignetsten unter Berücksichtigung einer Größe, welche man den Absorptionscoefficienten nennt und mit α zu bezeichnen pflegt. Diese Größe ist eine für die absorbierende Substanz specifische Größe, deren Wert außer von der Natur der Substanz noch von der Richtung der Schwingungen und von der Farbe des Lichtes abhängt. Bezeichnet man die Intensität der einfallenden Strahlen mit J_o, diejenige der aus dem absorbierenden Körper austretenden mit J, die Dicke des letzteren mit z, und ist endlich e die Basis der natürlichen oder Napierschen Logarithmen, so gilt das Gesetz:

$$J = J_o e^{-\alpha z}.$$

Hiernach läßt sich also α berechnen aus dem Verluste an Helligkeit, welchen Strahlen von bekannter Intensität beim Durchgange durch einen Krystall erleiden, dessen Dicke in der betreffenden Richtung gemessen ist. Denkt man sich nun von einem Punkte im Innern des Krystalls aus nach jeder Richtung eine Länge aufgetragen proportional $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, so repräsentiert diese gleichsam ein Maß der übrigbleibenden Helligkeit eines in der

betreffenden Richtung geradlinig schwingenden Lichtstrahles. Verbinden wir alle Endpunkte dieser Längen miteinander, so erhalten wir eine geschlossene krumme Oberfläche (im allgemeinen ein dreiaxiges Ellipsoid), welche uns für eine bestimmte Farbe ein Bild von den Helligkeitsverhältnissen der Lichtstrahlen gibt, deren Schwingungen in allen möglichen Richtungen im Krystalle stattfinden, genau so, wie die Indexfläche ein Bild der Fortpflanzungsverhältnisse derselben liefert. Diese von Mallard als »ellipsoïde inverse d'absorption« bezeichnete Oberfläche wollen wir kurz die Absorptionsfläche nennen. Wie die Indexfläche, so besitzt auch sie für eine andere Farbe eine andere Gestalt, eventuell auch eine andere Orientierung im Krystalle.

a) Einfachbrechende Krystalle: Die Absorptionsfläche hat für jede Farbe die Gestalt einer Kugel. Schwingungen einer bestimmten Farbe, wie sie auch im Krystalle orientiert sind, erleiden die gleiche Absorption; für eine andere Farbe ist jedoch der Durchmesser der Absorptionsfläche ein anderer. Besitzt der Absorptionscoefficient für verschiedene Farben sehr abweichende Werte, so wird weißes Licht schon, nachdem es eine dünne Schicht des Krystalles durchlaufen hat, lebhaft gefärbt erscheinen; die Farbe ist aber nach allen Richtungen genau die gleiche, wenn das Licht eine gleich dicke Schicht des Krystalles passiert hat.

b) Optisch einaxige Krystalle: Die Absorptionsfläche ist ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe die optische Axe des Krystalles ist, d. h. nur diejenigen Strahlen, deren Schwingungsrichtungen gleiche Winkel mit der optischen Axe bilden und welche sich daher im Krystalle mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen, erfahren auch die gleiche Absorption. Für das Licht einer bestimmten Farbe ist daher die Absorption am größten für Schwingungen parallel zur Axe, nimmt ab mit zunehmender Neigung der Schwingungsrichtung gegen die Axe und ist am kleinsten für alle senkrecht zur Axe schwingenden Strahlen — oder das Umgekehrte findet statt: die Minimalabsorption erleiden die parallel der Axe, die Maximalabsorption die senkrecht dazu schwingenden Strahlen. Im allgemeinen gilt die von Babinet aufgestellte Regel, daß die einaxigen Krystalle mit positiver Doppelbrechung den ersten der beiden auseinandergesetzten Fälle repräsentieren, also den extraordinären Strahl stärker absorbieren, während in den negativen Krystallen die Schwingungen senkrecht zur Axe, also die ordinären Strahlen, am meisten geschwächt werden. Kürzer läßt sich diese Regel auch so ausdrücken, daß in einaxigen Krystallen der stärker gebrochene Strahl auch stärker absorbiert wird.

Für verschiedene Farben ist nicht nur die Größe der Absorptionsfläche verschieden, sondern auch ihre Gestalt, d. h. der Absorptionscoefficient hat nicht nur, absolut genommen, einen andern Wert, sondern das Verhältnis desselben für Schwingungen parallel und senkrecht zur optischen Axe ist ebenfalls verschieden. Infolgedessen werden zwar auch wieder alle Strahlen, deren Schwingungsrichtungen den gleichen Winkel mit der optischen Axe

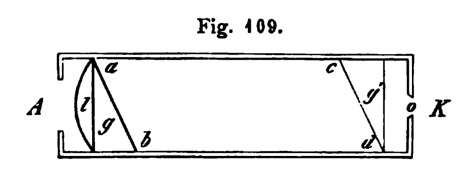
bilden, die gleiche Absorption für jede einzelne Farbe erfahren, aber bei verschiedener Neigung zur Axe wird das Helligkeitsverhältnis der einzelnen Farben ein anderes werden; die entstehende Mischfarbe wird also nur für die unter gleicher Neigung zur Axe einfallenden Strahlen gleich sein, mit größer oder kleiner werdender Neigung dagegen sich ändern, und zwar im entgegengesetzten Sinne, wenn die Schwingungsrichtung der Strahlen sich der optischen Axe nähert oder von ihr entfernt. Bezeichnen wir die beim Eintritte weißen Lichtes in der Richtung der optischen Axe und bei einer bestimmten Dicke des Krystalles entstehende Körperfarbe desselben mit $\mathfrak{o}$; die Schwingungsrichtung dieser Strahlen ist, wenn auch in allen möglichen Azimuthen, doch stets senkrecht zur Axe, und diese Richtungen sind alle gleichwertig, entsprechen also derselben Absorption. Ein Lichtstrahl, welcher durch eine gleich dicke Schicht desselben Krystalles, aber senkrecht zur Axe, hindurchgeht, wird in zwei zerlegt, von denen einer senkrecht, der andere parallel zur optischen Axe schwingt. Der erstere, welche Richtung er auch sonst habe, zeigt die Absorptionsfarbe $\mathfrak{o}$, der zweite eine andere, welche wir $\mathfrak{e}$ nennen wollen und welche nach obigem offenbar von allen Absorptionsfarben desselben Krystalles diejenige ist, welche am meisten von $\mathfrak{o}$ abweicht. Betrachten wir den Krystall so, daß das Licht durch denselben in der zur Axe senkrechten Richtung fällt, so gelangen beide polarisierte Strahlen, der mit der Farbe $\mathfrak{o}$ und der mit der Farbe $\mathfrak{e}$, gleichzeitig in unser Auge, und wir vermögen sie nicht voneinander zu trennen, sondern erhalten einen Gesamteindruck einer Farbe, welche wir mit $\mathfrak{o} + \mathfrak{e}$ bezeichnen wollen. Die beiden Farben $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o} + \mathfrak{e}$, d. h. die Körperfarbe des Krystalles parallel und senkrecht zur Axe, sind nun offenbar um so mehr verschieden, je mehr $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{e}$ selbst voneinander abweichen. In den zwischenliegenden Richtungen ist nun die Körperfarbe des Krystalles auch eine zwischenliegende, um so näher an $\mathfrak{o}$, je näher die Richtung, in welcher das Licht hindurchfällt, derjenigen der Axe ist, und umgekehrt[1]). Ist die Farbe $\mathfrak{o}$ wenig von $\mathfrak{e}$ verschieden, so ist sie noch weniger abweichend von der Mischfarbe $\mathfrak{o} + \mathfrak{e}$, und in solchen Fällen scheint, ohne weitere Hilfsmittel betrachtet, der Krystall nach allen Richtungen die gleiche Körperfarbe zu besitzen. Ganz besonders ist dies der Fall bei den sogenannten farblosen Substanzen, weil bei diesen der ganze Betrag der Absorption schon unmerklich ist, ihre Verschiedenheit nach verschiedenen Richtungen sich also jeder Beobachtung entzieht. Starken Pleochroismus, d. h. große Verschiedenheit der Körperfarbe mit der Richtung, können daher nur stark absorbierende, d. i. lebhaft gefärbte Krystalle zeigen; auch unter diesen gibt es viele, welche nur geringen Grad des Pleochroismus besitzen, bei denen also die Körperfarben parallel und senkrecht zur Axe sehr ähnliche sind.

1) Es ist daher nicht ganz correct, diese Erscheinung mit dem Namen »Dichroismus«, wie vielfach geschieht, zu belegen, weil es sich nicht um zwei Farben handelt, sondern um eine continuierliche Farbenreihe zwischen zwei Extremen.



Um in den letzterwähnten Fällen das Vorhandensein des Pleochroismus, durch welches zugleich das der Doppelbrechung constatiert ist, zu erkennen, muß man sich eines kleinen Apparates bedienen, welcher von Haidinger construiert worden ist und Dichroskop oder dichroskopische Lupe genannt wird. Derselbe besteht aus einem Rhomboeder von Kalkspat, dessen Durchschnitt *abcd* in Fig. 109 ebenso dargestellt ist, wie in Fig. 37 S. 58, so daß *ab* und *cd* die kurzen Diagonalen zweier gegenüberliegender Rhombenflächen sind. Dieses ist in einer Fassung (einem Messingrohre) befestigt und vor und hinter demselben je ein Glaskeil, *g* und *g'*, den Kalkspat berührend, so angebracht, daß die Ein- und Austrittsflächen der Lichtstrahlen senkrecht zu den Rhomboederkanten *ac* und *bd* stehen, an denselben also keine Brechung derjenigen Strahlen, welche diesen Kanten parallel durch das Instrument gehen, stattfindet. Die Fassung hat vorn eine weite runde Öffnung zum Hineinsehen, wobei das Auge sich in *A* befindet, hinten dagegen nur eine 2—3 mm lange und breite quadratische Öffnung *o*, durch welche das Licht einfällt, wenn dieselbe gegen den hellen Himmel oder eine andere Lichtquelle gerichtet wird. Dicht vor dem Glaskeile *g* befindet sich eine planconvexe Linse *l*, vermittelst deren das in *A* befindliche Auge ein vergrößertes virtuelles Bild der hellen Öffnung *o* in der Entfernung der deutlichen Sehweite sehen würde, wenn der Kalkspat nicht vorhanden wäre. Durch dessen Doppelbrechung erscheinen jedoch zwei solcher Bilder, und da das außerordentliche im Hauptschnitte abgelenkt wird, das eine genau über dem andern. Die Länge des Kalkspates wird nun so gewählt, daß die beiden Bilder sich nicht teilweise decken, sondern der obere Rand des unteren den unteren des oberen Bildes berührt.

Fig. 109.

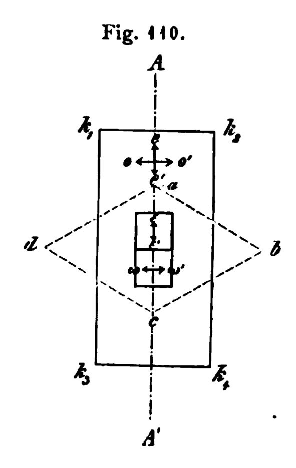


Hält man nun einen einaxigen Krystall so vor die kleine Öffnung[1]), daß die parallel der Längsaxe der Lupe hindurchgehenden Strahlen ihn vorher in einer zu seiner optischen Axe normalen Richtung durchsetzen und daß seine Axe parallel dem Hauptschnitte des Kalkspates ist, so treten die beiden im Krystalle entstehenden Strahlen so in den Kalkspat ein, daß die Schwingungsrichtung des ordinären parallel ist der des ordinären im Kalkspate und ebenso die des extraordinären mit der des gleichen in letzterem zusammenfällt. Es erleidet also keiner von beiden eine neue Zerlegung im Kalkspate, und somit wird von den beiden Bildern der hellen Öffnung in der dichroskopischen Lupe das eine nur von den Strahlen gebildet, welche parallel der Axe des davor gehaltenen Krystalles schwingend

1) Nach dem Vorschlage von V. von Lang umgibt man das Ende *K* des Rohres (Fig. 109) vorteilhaft noch mit einer drehbaren Metallkappe, welche mit einer kreisförmigen Öffnung versehen ist; über dieser befestigt man den Krystall mit Wachs und kann nun seine richtige Stellung durch Drehen der Kappe leicht bewirken.

aus diesem austraten, das zweite nur von denen, deren Schwingungsrichtung in demselben Krystalle senkrecht zur Axe war. Die Farbe des letzteren muß also die früher mit o, die des ersteren die mit e bezeichnete sein. Man ersieht dies leicht aus Fig. 110, in welcher $k_1 k_2 k_3 k_4$ den Umriß des zu untersuchenden Krystalles, AA' die Richtung seiner optischen Axe, folglich oo' die Schwingungsrichtung des ordinären, ee' die des extraordinären aus demselben austretenden Strahles darstellen; $abcd$ ist der Querschnitt des Kalkspatrhomboeders, dessen Hauptschnitt dem des Krystalles parallel ist; $\omega\omega'$ ist die Schwingungsrichtung des Lichtes in dem einen, $\varepsilon\varepsilon'$ die in dem zweiten Bilde der quadratischen, vom Krystalle verdeckten Öffnung. Dreht man nun den letzteren um die Axe des Dichroskopes als Drehungsaxe, so bildet dann oo' und ee' mit $\omega\omega'$ und $\varepsilon\varepsilon'$ einen Winkel, jeder der beiden Strahlen wird im Kalkspate doppelt gebrochen und trägt somit zu jedem der beiden Bilder bei; wenn jener Winkel 45° beträgt, so ist die Componente jedes Strahles zu jedem der beiden Bilder die Hälfte von dessen Helligkeit, also sind diese genau von gleicher Färbung, und zwar von derjenigen o + e, welche der Krystall in der betreffenden Richtung auch dem nicht mit der Lupe bewaffneten Auge zeigt. Bei 90° Drehung zeigen beide Bilder des Dichroskopes wieder die größte Differenz der Färbung, aber die Farben beider sind vertauscht, usf.

Fig. 110.



Jedesmal also, wenn die optische Axe des auf Pleochroismus zu untersuchenden Krystalles einer der Schwingungsrichtungen der beiden im Kalkspate sich fortpflanzenden Strahlen parallel ist, zeigt das eine Bild die Farbe o, das andere die Farbe e. Da nun diese sich mehr voneinander unterscheiden, als die ohne Dichroskop parallel und normal zur Axe im Krystalle sichtbaren Farben o und o + e, da man außerdem in diesem Instrumente beide Färbungen gleichzeitig und unmittelbar nebeneinander sieht, wobei sehr geringe Verschiedenheiten ihrer Nuancen noch erkennbar sind, — so leuchtet ein, daß man mittels dieses einfachen Apparates den Dichroismus eines Krystalles noch constatieren kann, selbst wenn er ziemlich schwach ist, während schon eine sehr bedeutende Verschiedenheit der Absorption, wie sie nur eine beschränkte Zahl von Substanzen zeigt, dazu gehört, um sie ohne Dichroskop zu erkennen.

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn man den Krystall so vor die Öffnung des beschriebenen Instrumentes hält, daß die Lichtstrahlen ihn schräg zu seiner optischen Axe durchsetzen, die Farbe des einen Bildes o, die andere eine zwischen o und e liegende Tinte sein wird, endlich, wenn das Licht den Krystall parallel der Axe durchläuft, bei jeder Drehung desselben in seiner Ebene beide Bilder die gleiche Farbe o zeigen müssen.

Als Beispiele sehr stark pleochroitischer einaxiger Krystalle mögen zwei Mineralien erwähnt werden: der Chlorit oder Pennin, dessen Körperfarbe, durch eine Platte senkrecht zur Axe gesehen, smaragdgrün, durch eine der Axe parallele Platte braunrot erscheint, und der in sehr verschiedener Färbung vorkommende Turmalin, von dem manche Varietäten zugleich ein Beispiel diluter Färbung durch fremde Farbstoffe darbieten. Bei letzteren, wie bei den durch ihren Eisengehalt und daher idiochromatisch gefärbten, wird der ordinäre Strahl so stark absorbiert, daß Turmalinplatten, parallel zur Axe geschnitten, fast nur extraordinäres Licht durchlassen (vgl. S. 39).

Bei gewissen Krystallen mit starkem Pleochroismus kann man auch mittels einer zur optischen Axe senkrechten Platte ohne weiteres die Verschiedenheit der Absorption der parallel und der geneigt zur Axe sie durchsetzenden Strahlen wahrnehmen. Hält man z. B. eine Platte von Magnesiumplatincyanür, in der angegebenen Richtung geschnitten oder gespalten (die Krystalle dieses Salzes spalten vollkommen nach der zur Axe senkrechten Ebene), nahe an das Auge und blickt durch dieselbe auf eine weiße Fläche (am besten eine gleichmäßig weiße Wolkenschicht des Himmels), so sieht man einen kreisrunden violetten Fleck auf zinnoberrotem Grunde. Die Erklärung dieser Erscheinung ist folgende: Das Magnesiumplatincyanür läßt blaue Strahlen nur in der Richtung der Axe und unter sehr kleiner Neigung dagegen hindurch und auch hier nur bei geringer Dicke der Platte, sonst nur rote Strahlen; infolgedessen wird das in der Axe durchgehende weiße Licht violett, bei einer gewissen Neigung zu dieser aber wird das Blau sowohl wegen der zunehmenden Dicke der durchlaufenen Schicht als wegen der Abweichung von der Axe absorbiert, und es bleibt nur noch Rot übrig. Hält man einen Nicol vor oder hinter die Platte, so wird von den in der Schwingungsebene des Nicols zur Axe geneigten Strahlen der ordinäre, also violett gefärbte Anteil ausgelöscht, von den in einer dazu senkrechten Ebene geneigten Strahlen derselbe Anteil hindurchgelassen; alsdann erscheinen in der Schwingungsrichtung des Nicols auf dem violetten Grunde zwei rote Büschel von ähnlicher Form, wie die in Fig. 111 (S. 172) abgebildeten.

c) Optisch zweiaxige Krystalle: Hier ist die Absorptionsfläche für eine bestimmte Farbe im allgemeinen ein dreiaxiges Ellipsoid, dessen drei Axen, die sogenannten Absorptionsaxen (d. h. die Schwingungsrichtungen der größten, mittleren und kleinsten Absorption), ein von dem für die Indexfläche gültigen ganz unabhängiges Längenverhältnis besitzen und im allgemeinen auch der Richtung nach nicht mit den Axen der letzteren zusammenfallen. Für eine andere Farbe ist nicht nur die Größe, sondern auch die Gestalt, d. h. das Axenverhältnis der Absorptionsfläche eine andere.

Gehört der Krystall der höchst symmetrischen Gruppe der zweiaxigen an, d. h. besitzen die drei Axen der Indexfläche für alle Farben die gleiche Orientierung im Krystalle (vgl. S. 117), so fallen auch die Richtungen der

drei Absorptionsaxen für alle Farben untereinander und mit jenen drei aufeinander senkrechten Richtungen zusammen. Alsdann sind nicht nur die Verhältnisse der Fortpflanzung, sondern auch diejenigen der Absorption des Lichtes vollkommen symmetrisch zu den drei optischen Hauptschnitten des Krystalles. Es möge zuerst dieser einfachste Fall betrachtet werden. Nennen wir 𝔞 die Farbe der Strahlen, welche im Krystalle als Schwingungsrichtung die X-Axe der Indexfläche haben, 𝔟 die derjenigen, welche parallel der Y-Axe, 𝔠 die derjenigen, welche parallel der Z-Axe schwingen, so werden wir im Dichroskope durch eine Platte, senkrecht zur Y-Axe, wenn X und Z parallel den Schwingungsrichtungen des Kalkspates sind, in dem einen Bilde die Farbe 𝔞, im andern 𝔠 sehen. Wenden wir aber eine normal zu Z geschnittene Platte an, so zeigt das eine Bild, bei der analogen Stellung des Krystalles gegen das Instrument, 𝔞, das andere 𝔟. Endlich zeigt eine senkrecht zu X geschliffene Platte die Färbungen 𝔟 und 𝔠 getrennt, wenn sie so vor die Öffnung der dichroskopischen Lupe gehalten wird, daß Y oder Z dem Hauptschnitte des in derselben befindlichen Kalkspates parallel ist. Es genügt also bei Anwendung des Dichroskopes schon die Beobachtung des Krystalles in zweien jener Richtungen, um die drei sog. »Axenfarben« zu bestimmen, d. h. die Farben, welche durch die Absorption der nach den drei Absorptionsaxen schwingenden weißen Lichtstrahlen entstehen.

Ohne Dichroskop dagegen vermögen wir keine dieser drei Farben getrennt zu sehen, denn wenn wir z. B. durch eine zu X normale Platte des Krystalles hindurchblicken, so erhalten wir zugleich die $\parallel Y$ schwingenden Strahlen mit der Farbe 𝔟 und die $\parallel Z$ schwingenden mit der Farbe 𝔠 ins Auge, also werden wir eine aus beiden gemischte Färbung, 𝔟 + 𝔠, sehen; ganz ebenso zeigt uns eine normal zu Y geschnittene Platte eine Mischfarbe 𝔞 + 𝔠, und eine Platte, deren Flächen senkrecht auf der Z-Axe stehen, 𝔞 + 𝔟[1]). Es ist nun klar, daß die aus zwei Axenfarben gemischten Farbeneindrücke, nämlich 𝔞 + 𝔟, 𝔞 + 𝔠 und 𝔟 + 𝔠, weniger voneinander verschieden sein werden, als die Axenfarben selbst. Aus denselben Gründen, welche S. 167 bei den einaxigen Krystallen angeführt wurden, kann man daher mit dem Dichroskope weit geringere Grade des Pleochroismus noch erkennen, als ohne dieses Instrument. Mit demselben kann man zugleich, wenn starker Pleochroismus vorhanden ist, sehr leicht einen einaxigen Krystall von einem zweiaxigen unterscheiden, indem bei einem der letzteren Art keine Richtung existiert, in welcher die durchgehenden Strahlen bei jeder Drehung des Krystalles zwei genau gleichgefärbte Bilder liefern, wie dies mit den der optischen Axe der ersteren parallelen Strahlen der Fall ist.

1) Haidinger nannte diese gemischte Farbe, welche eine Krystallplatte ohne Dichroskop zeigt, ihre Flächenfarbe; durch das genannte Instrument wird also die Flächenfarbe einer Platte, welche einem optischen Hauptschnitte parallel ist, in ihre Axenfarben zerlegt. allgemein die Flächenfarbe einer Platte von beliebiger Orientierung in diejenigen beiden Farben, welche den Schwingungsrichtungen der Platte entsprechen.



Was die Körperfarben derartiger zweiaxiger Krystalle in andern Richtungen, als den drei Absorptionsaxen, betrifft, so ändern sich diese mit der Richtung ganz symmetrisch zu den drei optischen Hauptschnitten. Wenn die Richtung der hindurchgehenden weißen Lichtstrahlen innerhalb eines derselben liegt, so besteht die Farbe aus der Mischung einer Nuance, die zwischen zwei Axenfarben liegt, nämlich derjenigen, deren Schwingungen parallel jenem Hauptschnitte stattfinden, mit der dritten Axenfarbe, d. i. derjenigen der ordinären, senkrecht zu jenem Hauptschnitte schwingenden Strahlen. In einer Richtung, welche in keinen der drei Hauptschnitte fällt, zeigt der Krystall eine Absorption, welche zwischen derjenigen der drei Axenfarben, welche die größte Verschiedenheit darstellen, liegt; es existieren also im Krystalle alle möglichen Farbentinten zwischen denjenigen der drei am meisten voneinander verschiedenen, daher der nicht selten gebrauchte Name »Trichroismus« für die Farbenerscheinungen der zweiaxigen Krystalle ebensowenig correct ist, wie der Name »Dichroismus« für diejenigen der einaxigen.

In denjenigen optisch zweiaxigen Krystallen, in welchen die Hauptschwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben nicht zusammenfallen, divergieren auch die Richtungen der Absorptionsaxen sowohl von jenen als auch von einander. Ist eine Hauptschwingungsrichtung für alle Farben gleich orientiert, so ist sie auch die Richtung einer Absorptionsaxe, und die dazu senkrechte Ebene ist auch für die Absorption des Lichtes Symmetrieebene. Besitzt der Krystall keine Symmetrieebene für die Fortpflanzung des Lichtes (Gruppe 1 S. 137), so gilt das gleiche auch für die Absorption. Betrachten wir also beispielsweise eine senkrecht zur ersten Mittellinie der optischen Axen für irgendeine Farbe geschnittene Platte eines derartigen, stark absorbierenden Krystalles in senkrecht auffallendem gewöhnlichen Lichte, so zeigt sie eine bestimmte Absorptionsfarbe; drehen wir sie aber nach der einen oder andern Seite, so daß die Richtung der hindurchgehenden Strahlen sich einmal der einen, einmal der andern optischen Axe nähert, so ändert sich die Körperfarbe nicht nach beiden Seiten gleichartig, weil die Absorptionsverhältnisse nicht symmetrisch zu der Normale der Platte sind, sondern die Richtungen größter, kleinster und mittlerer Absorption für jede Farbe in anderer Weise, stets aber einseitig schief zur Platte orientiert sind.

Die optisch zweiaxigen Krystalle zerfallen folglich in bezug auf die Orientierung der Absorptionsaxen in dieselben drei Gruppen, wie in bezug auf die Orientierung der Hauptaxen des Indexellipsoides.

Unter den optisch zweiaxigen Körpern mit besonders starkem Pleochroismus mögen als Beispiele aufgeführt werden: der Cordierit (wegen dieser Eigenschaft auch »Dichroit« genannt), dessen Färbung einem dilut verteilten fremden Körper zuzuschreiben ist und welcher folgende Axenfarben zeigt: $\mathfrak{a}$ hellgelb bis gelbbraun, entsprechend den Schwingungen parallel der Schwingungsrichtung der größten Lichtgeschwindigkeit, $\mathfrak{b}$ hell-

blau (Absorptionsfarbe der Schwingungen mit der mittleren Geschwindigkeit) und c dunkelblau (Schwingungen mit der kleinsten Geschwindigkeit, d. i. der größten Brechung, welche somit am stärksten absorbiert werden); der Epidot, welcher in der schönen eisenhaltigen Varietät vom Sulzbachtal zeigt: a gelb, b braun, c grün; endlich der zur Amphibolgruppe gehörige Glaukophan mit den Axenfarben: a hellgrüngelb, b violett, c ultramarinblau. Die beiden letzten Beispiele beziehen sich auf Fälle, in denen die Absorptionsaxen und die Hauptschwingungsrichtungen für verschiedene Farben dispergiert sind.

Da die Art und die Intensität der Farbentöne außer von der Richtung der Schwingungen noch von der Dicke der Platte abhängt, so sind dieselben in vorstehenden, wie in den früheren Beispielen, nur ganz allgemein bezeichnet. Genauere Angaben derselben könnten durch Anführung derjenigen Nummer von Raddes internationaler Farbenscala[1]), mit welcher der betreffende Farbenton am besten übereinstimmt, gewonnen werden; eine eigentliche Bestimmung der Absorptionsfarbe würde aber natürlich die spectrale Zerlegung des durch den Krystall gegangenen Lichtes und die Messung der Lichtstärke in den einzelnen Teilen des Spectrums erfordern. In beiden Fällen wäre es nötig, die Dicke der untersuchten Krystallplatte zu bestimmen und anzugeben.

Will man einen mikroskopischen Krystall, z. B. im Dünnschliffe eines Gesteines, auf Pleochroismus prüfen, so empfiehlt sich die von Tschermak vorgeschlagene Methode, das in das Mikroskop einfallende Licht durch einen Nicol zu polarisieren; indem man den drehbaren Objecttisch mit dem Präparate so bewegt, daß einmal die eine, einmal die andere Schwingungsrichtung des betreffenden Krystalldurchschnittes mit dem Hauptschnitte des Polarisators zusammenfällt, ruft man in dem Krystalle nacheinander die beiden, seinen Schwingungsrichtungen entsprechenden Absorptionsfarben hervor, während man im Dichroskope dieselben nebeneinander beobachtet.

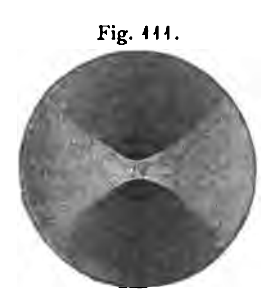
Büschelerscheinungen. Hält man eine senkrecht zu einer der beiden optischen Axen geschliffene Platte von brasilianischem Andalusit oder von dem erwähnten Epidot dicht vor das Auge und gegen den hellen Himmel gerichtet, so erblickt man auf farbigem Grunde zwei dunkle Büschel von der in Fig. 111 (S. 172) dargestellten Form, welche nach der Mitte zu Spuren von Ringen erkennen lassen. Weniger intensiv kann man dieselbe Erscheinung noch bei verschiedenen andern pleochroitischen Mineralien

1) Da transparente Farben, wie man sie in pleochroitischen Krystallen beobachtet, sich nicht sehr leicht mit Farben im auffallenden Lichte, wie sie die Raddesche Farbenscala zeigt, vergleichen lassen, würde es für die Gewinnung schärferer Angaben über die Absorptionsfarbe der Krystalle wünschenswert sein, Vergleichsfarben anzuwenden, welche aus verschiedenfarbigen Gläsern gefertigt wären; diese müßten spitz keilförmig geschliffen werden, um die Bestimmung der Intensität der betreffenden Farbe durch Angabe der Stelle, d. h. der Dicke des Glases, zu ermöglichen.



beobachten, besonders schön endlich bei dem sogenannten »Sénarmontschen Salze«, d. i. salpetersaures Strontium, welches aus einem Auszuge von Campecheholz krystallisiert und durch dilute Aufnahme des Farbstoffes dieser Lösung rot gefärbt ist. Nimmt man von letzterem Salze statt der zu einer Axe senkrechten Platte eine normal zur ersten Mittellinie geschnittene, so sieht man zwei Doppelbüschel, und bei dem Yttriumplatincyanür, dessen Axenwinkel sehr klein ist, sind jene infolgedessen einander so nahe, daß sie vier rote Sectoren bilden, zwischen denen der hier violette Grund in Form eines Kreuzes erscheint. Stets stehen die Büschel senkrecht zur Ebene der optischen Axen, und ihre Mittelpunkte entsprechen den Richtungen der Axen; die Erscheinung kann also zur Aufsuchung der Lage der letzteren ohne Polarisationsinstrument benutzt werden. Eine Erklärung aller dieser Erscheinungen gab W. Voigt in seiner Theorie der Absorption des Lichtes in Krystallen.

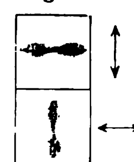
Fig. 111.



Eine ähnliche Erscheinung wie die Büschel müssen auch radialfaserige Aggregate von Krystallen zeigen, wenn letztere deutlich pleochroitisch sind. Denken wir uns z. B. eine aus radialgestellten einaxigen Krystallen, welche diese Bedingung erfüllen und deren Längsrichtung der optischen Axe parallel ist, zusammengesetzte Platte, oder lassen wir einen pleochroitischen Krystall in der S. 52 angegebenen Weise rotieren, so daß er schnell nacheinander die Lage der verschiedenen Krystalle einer solchen Platte einnimmt, und betrachten wir das Gebilde durch einen Nicol oder, was ganz gleichbedeutend ist, lassen wir in dasselbe geradlinig polarisiertes Licht eintreten und beobachten wir ohne Nicol, so muß folgendes stattfinden: Das Licht, welches durch die mit ihrer Längsrichtung im Hauptschnitte des Nicols liegenden Krystalle hindurchgeht, schwingt deren optischer Axe parallel; während diese also in der Farbe des extraordinären Strahles erscheinen, und nahezu ebenso die benachbarten, wenig mit ihnen divergierenden Krystalle, zerlegen die weiter abstehenden das einfallende Licht in einen ordinären und einen extraordinären Strahl und zeigen folglich eine Mischung der Farben dieser beiden; gehen wir endlich zu den senkrecht zur Schwingungsrichtung der eintretenden Vibrationen stehenden Krystallen über, so finden in diesen die hindurchgehenden Oscillationen senkrecht zur Axe statt, diese Krystalle erscheinen demnach mit der Farbe des ordinären Lichtes. Während man also zwischen gekreuzten Nicols in dem Präparate, wie in jedem radialfaserigen Gebilde, das schwarze Kreuz erblicken würde, sieht man mit einem Nicol, wenn der Pleochroismus der Einzelkrystalle genügend stark ist, zwar ebenfalls ein Kreuz, von dem jedoch die beiden Arme, welche der Schwingungsebene des Polarisators parallel sind, die Farbe der extraordinären Strahlen, die beiden andern die Farbe der ordinären Lichtvibrationen besitzen. Auf dieser Eigenschaft pleochroi-

tischer radialfaseriger Gebilde beruhen die »Haidingerschen Polarisationsbüschel«, welche nach Helmholtz dadurch hervorgebracht werden, daß in dem sogenannten gelben Flecke, dem für das Sehen wichtigsten Teile der Netzhaut des menschlichen Auges, die radiären Nervenfasern, welche in den andern Teilen der Netzhaut senkrecht zu deren Oberfläche stehen, schräg nach der Mitte des gelben Fleckes convergieren; diese Fasern sind, wie die meisten organischen Fasern, doppeltbrechend, und es muß angenommen werden, daß dieselben von den parallel und senkrecht zu ihrer Axe schwingenden Lichtstrahlen das Blau und Gelb ungleich absorbieren. Infolgedessen erblickt man, wenn man das Auge auf eine gleichmäßig beleuchtete weiße Fläche richtet und zugleich einen Nicol vor dasselbe hält, um geradlinig polarisiertes Licht einfallen zu lassen, von dem Fixierpunkte des Auges ausgehend zwei bräunlichgelbe Büschel, zwischen denen in der dazu senkrechten Richtung bläuliches Licht erscheint. Die ersteren liegen stets in der Polarisationsebene des Nicols, also senkrecht zur Schwingungsrichtung der polarisierten Strahlen und müssen sich daher mit der Drehung des Polarisators ebenfalls drehen; infolgedessen kann diese Erscheinung dazu dienen, ohne weiteres geradlinig polarisiertes Licht als solches zu erkennen und seine Schwingungsrichtung zu bestimmen. Besonders leicht findet man die Büschel auf, wenn man das Haidingersche Dichroskop gegen eine weiße Wolkenschicht richtet; alsdann erscheinen dieselben in den beiden hellen quadratischen Bildern, weil diese senkrecht zueinander polarisiert sind, in gekreuzter Stellung, wie es in Fig. 112 dargestellt ist (die nebenstehenden Pfeile bezeichnen die Schwingungsrichtungen des Lichtes in den beiden Feldern). Es muß bemerkt werden, daß nicht alle Menschen die sehr schwache Erscheinung der Haidingerschen Büschel zu sehen vermögen, während einzelne Individuen dieselben sogar ohne Nicol, wenn sie ihr Auge gegen den Himmel richten, infolge der (unvollständigen) Polarisation des von diesem reflectierten Lichtes zu sehen imstande sind.

Fig. 112.



Oberflächenfarben. Die meisten Körper, gleichviel ob gefärbt oder farblos, ändern das von ihnen reflectierte Licht nicht, so daß, wenn weißes Licht auf eine ebene Oberfläche derselben fällt, es auch als weißes zurückgeworfen wird. Anders verhalten sich bekanntlich die Metalle, indem z. B. das von einer polierten Kupferplatte reflectierte Bild eines weißen Körpers nicht weiß, sondern rot erscheint. Zwischen den Metallen und den gewöhnlichen durchsichtigen Körpern stehen gleichsam in der Mitte diejenigen Substanzen, welche für gewisse Lichtstrahlen durchsichtig sind, für andere sich den Metallen ähnlich verhalten und sie mit metallischem Glanze reflectieren; solche Medien hat man als Körper mit »Oberflächenfarbe« (»Schillerfarbe«) bezeichnet. Es gehören hierher eine Reihe von Doppelcyanüren des Platins mit andern Metallen und von Salzen organischer Basen, besonders Anilinfarbstoffe u. a. Zur Erklärung des eigentümlichen Verhaltens dieser Körper

muß man annehmen, daß das reflectierte Licht in denselben bis zu einer gewissen Tiefe eingedrungen sei und dabei eine ungleiche Absorption seiner verschiedenen Farben erfahren habe, welche dann in einem bestimmten Zusammenhange mit der Absorption des durchgelassenen Lichtes stehen müßte. In der Tat hat Haidinger gefunden, daß die Oberflächenfarbe dieser Medien in gewissem Sinne complementär zu ihrer Körperfarbe ist. Da nun die letztere in den doppeltbrechenden Krystallen für ungleich gerichtete Schwingungen eine verschiedene ist, so muß wegen jener Beziehung auch die Oberflächenfarbe solcher Krystalle mit der Richtung der Schwingungen sich ändern. Es ist z. B. zu erwarten, daß die Oberflächenfarbe eines einaxigen Krystalles zwar auf allen Flächen, welche der Axe parallel gehen, gleich sei, aber eine andere auf solchen, welche zur Axe geneigt sind, endlich noch eine andere auf der zur Axe senkrechten Ebene. Diese Voraussetzungen werden durch die an solchen Krystallen beobachteten Erscheinungen bestätigt; so zeigt z. B. eine natürliche oder künstliche Oberfläche des karminroten Magnesiumplatincyanürs, welche der optischen Axe des Krystalls parallel geht, eine grüne Oberflächenfarbe[1]), eine zur Axe senkrechte Fläche eine violette. Wendet man zur Beobachtung der Oberflächenfarbe das Dichroskop an, so findet man auf der zur Axe senkrechten Fläche gleiche Farbe beider Bilder, auf den zur Axe parallelen verschiedene. Es geht also hieraus hervor, daß das Licht, welches wir in der Oberflächenfarbe beobachten, in den oberflächlichen Schichten des Krystalls eine ähnliche Änderung erfahren hat, wie das von demselben durchgelassene, indem es in zwei senkrecht zueinander polarisierte (oder wenigstens ähnlich sich verhaltende) und ungleich absorbierte Strahlen zerlegt worden ist. Näheres über derartige Erscheinungen findet man in B. Walter, Die Oberflächen- oder Schillerfarben, Braunschweig 1895 (Ausz. in Zeitschr. f. Kryst., **28**, 632).

Die Verhältnisse der metallischen Reflexion wurden theoretisch von Cauchy und Voigt, speciell für die doppeltbrechenden Krystalle von Drude entwickelt und von letzterem auch durch Versuche geprüft. Danach gestattet die Untersuchung des an so stark absorbierenden Krystallen reflectierten Lichtes die Berechnung der Brechungsindices und Absorptionscoefficienten für verschieden gerichtete Schwingungen des in dieselben eingedrungenen Lichtes, aber nur dann, wenn die Oberfläche eine vollkommen reine ist, wie sie im wesentlichen nur frische Spaltungsflächen zeigen. Auf diesem Wege ergaben sich sehr hohe Brechungsindices mit verhältnismäßig niedrigen Werten für die Absorption bei den einfachbrechenden Metallen Blei, Platin, Eisen, die höchste Brechbarkeit beim

1) Die dazu in gewissem Sinne complementäre Körperfarbe dieses Salzes ist natürlich eine pleochroitische, und zwar für die Schwingungen parallel zur Axe reines Karminrot, für die Schwingungen senkrecht zur Axe Violett. Mit letzterer Farbe ist diejenige, welche eine zur Axe senkrechte Platte bei senkrechter Reflexion zeigt, im wesentlichen identisch; also ist die Reflexion der senkrecht zur Axe stattfindenden Schwingungen eine fast normale, der Krystall verhält sich für diese fast wie ein solcher ohne Oberflächenfarbe.

Bleiglanz und dem optisch zweiaxigen Antimonglanz, während z. B. Silber und Gold sehr niedrige Brechungsindices (0,2 bis 0,4, d. h. die Lichtgeschwindigkeit ist größer, als im leeren Raume) und ein außerordentlich großes Absorptionsvermögen besitzen. Erscheinungen der Doppelbrechung des durchgelassenen Lichtes beobachtete Kundt an äußerst dünnen Schichten von Metallen, welche durch elektrische Zerstäubung von Kathoden hergestellt waren.

Fluorescenz. Der bei der Absorption des Lichtes in einem Körper anscheinend verloren gehende Teil wird in eine andere Art von Bewegung umgesetzt, nämlich in eine solche der Körperteilchen, d. h. in Wärme; in gewissen Körpern erregt die letztere Art von Bewegung jedoch wieder Schwingungen des Äthers, und zwar solche von einer andern Schwingungsdauer. Ist dies der Fall, so sendet das Innere des Körpers unter dem Einflusse einer Bestrahlung wiederum Licht aus, aber von einer andern Farbe. Es sind besonders die Auflösungen eine Reihe organischer Substanzen, welche diese Eigenschaft besitzen; dieselbe tritt ferner an dem durch gewisse organische, dilut verteilte Substanzen gefärbten Flußspate (»Fluorit«), nach welchem man die Erscheinung benannt hat, und an dem sogenannten Uranglase auf, in welchen beiden Fällen es sich ebenfalls um eine Auflösung der fluorescierenden Substanz, aber in einem festen Körper, handelt. Das Uranglas und die Krystalle des Flußspates sind einfachbrechende Medien, senden also Licht aus, dessen Farbe von der Richtung der Schwingungen unabhängig ist. Anders müssen sich offenbar fluorescierende doppeltbrechende Krystalle verhalten, und zwar sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Ist der Krystall stark pleochroitisch, so muß natürlich die Farbe mit der Richtung sich ändern, bei optisch einaxigen also mit dem Winkel, den die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes, welches die Fluorescenz erregt, mit der optischen Axe des Krystalls bildet. Eine Substanz, welche dieses Verhalten besonders gut zeigt, ist nach Lommels Beobachtungen das bereits erwähnte Magnesiumplatincyanür. Läßt man Sonnenlicht, das durch ein blaues oder violettes Glas gegangen ist, auf die zur Axe normale Fläche eines solchen Krystalls fallen, so leuchtet dieselbe mit scharlachrotem Fluorescenzlicht, in welcher Richtung der eintretende Strahl auch polarisiert sei; fällt das Licht aber auf eine der Axe parallele Fläche, so zeigt diese eine »dichroitische Fluorescenz«, indem sie orangegelbes oder scharlachrotes Licht aussendet, je nachdem die Schwingungsrichtung des erregenden Lichtes parallel oder senkrecht zur Axe ist. Dieselben beiden Farben beobachtet man natürlich auch, wenn man, statt das einfallende Licht zu polarisieren, das vom Krystalle ausgesandte durch einen Nicol gehen läßt und dessen Schwingungsebene einmal dem Hauptschnitte parallel, das andere Mal dazu senkrecht hält, oder wenn man den Krystall durch die Haidingersche Lupe betrachtet. Die grüne Oberflächenfarbe verschwindet im violetten Lichte.

2) Ist der Krystall farblos, also nicht dichroitisch, so müßten sich von einem Punkte im Innern aus, an welchem Fluorescenzlicht erregt wird, je zwei Strahlen ausbreiten, welche beim Austritte gleiche Intensität besitzen. Zeigt sich zwischen diesen ein Unterschied der Helligkeit, so beweist dies, daß die Schwingungen der das Licht erregenden Teilchen nach einer Richtung bevorzugt sind. Eine hierauf gerichtete Untersuchung von Sohncke hat nun gezeigt, daß die fluorescierenden Teilchen im Kalkspate vorwiegend parallel der Axe, im Apatit vorwiegend senkrecht zur Axe schwingen.

Phosphorescenz. Bei gewissen Substanzen, in welchen unter dem Einflusse der Bestrahlung eine Aussendung von Licht stattfindet, dauert die letztere auch nach dem Aufhören der Bestrahlung noch fort, d. h. solche Körper leuchten im Dunkeln noch eine Zeitlang weiter. Diese Erscheinung, die Phosphorescenz, kann auch durch Reiben oder durch Erwärmen hervorgebracht werden. Da dieselbe auch bei krystallisierten und doppeltbrechenden Substanzen vorkommt, so ist anzunehmen, daß auch sie den Gesetzen des Pleochroismus unterworfen sei; doch liegen hierüber noch keine Untersuchungen vor, und handelt es sich meistens auch um eine Aussendung von Licht, welches nur eine sehr geringe Intensität besitzt.

2. Thermische Eigenschaften.

Wärmestrahlung.

Die Strahlen der Wärme, welche wir nach ihren Eigenschaften ebenfalls als Wellenbewegungen des Äthers ansehen müssen, verhalten sich gegen die Krystalle mit denen des Lichtes so übereinstimmend, daß auf dieses Verhalten nur ganz kurz eingegangen zu werden braucht, um so mehr, als die Methoden, welche dazu dienen, die Veränderungen der Wärmestrahlen in jenen (ihre Polarisation, ihre Interferenz usf.) zu studieren, nicht entfernt so leicht zu handhaben und so genau sind, wie die optischen, so daß sie nicht, wie diese, zur Unterscheidung der Krystalle praktisch benutzt werden können.

Nicht alle für das Licht durchsichtigen Körper sind es auch in gleicher Weise für die Wärmestrahlen; diejenigen, welche letztere, namentlich die sogenannten dunkeln Strahlen der Wärme, ohne erhebliche Absorption hindurchlassen, nennt man diatherman oder wärmedurchsichtig. Wie die verschiedenen Farben des Lichtes, so werden auch diejenigen der Wärme in den Körpern ungleich absorbiert; wenn diese Ungleichheit jedoch sehr gering ist, so werden dieselben nahe unverändert aus dem Körper austreten, gerade so, wie das weiße Licht nach dem Durchgange durch eine farblose Substanz ungefärbt ist; einen solchen Körper nennen wir wärmefarblos. Die Eigenschaft der Wärmefarblosigkeit, verbunden mit einem hohen Grade von Diathermansie oder Wärmedurchsichtigkeit, besitzt nur eine kleine Anzahl von Stoffen, nämlich die Chloride des Kaliums,

Natriums und Silbers, *KCl*, *NaCl*, *AgCl*, ebenso die wasserfreien Bromide und Jodide der Alkalien, sowie das Sulfid des Zinks, *ZnS*, sämtlich zur Gruppe der optisch isotropen gehörig. Dagegen gibt es viele für das Licht sehr vollkommen farblose Körper, welche von den Wärmefarben einen Teil sehr stark absorbieren, also für letztere Art von Strahlen in ausgesprochener Weise farbig sind. Ein solcher Körper ist z. B. der Alaun $= (SO^4)^2 AlK + 12 H^2 O$, dessen ebenfalls einfachbrechende Krystalle für das Licht ganz farblos, für die Wärmestrahlen aber sehr farbig und wenig durchsichtig sind.

Die Strahlen der Wärme, sowohl die als Lichtstrahlen erscheinenden, als auch die sog. dunkeln (nicht leuchtenden), werden an der Oberfläche eines Krystalls teilweise reflectiert, und zwar nach demselben Gesetze, wie diejenigen des Lichtes, und teilweise im Innern des Krystalls fortgepflanzt.

Ist der Krystall einfachbrechend, so pflanzen sich auch die Wärmestrahlen in demselben nach allen Richtungen gleich schnell fort. Wir beobachten aber, wie beim Lichte, daß es Wärmestrahlen von verschiedener Brechbarkeit, d. h. verschiedene Wärmefarben, gibt, und können daher ganz analog auch von einem Brechungsindex des Krystalls für eine bestimmte Wärmefarbe sprechen; dieser ist in einem einfachbrechenden Krystalle in allen Richtungen derselbe, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmestrahlen jeder Farbe ist unabhängig von der Richtung, in welcher er sich im Krystalle bewegt, ebenso die Absorption derselben, die Wärmefarbe des Krystalls.

In den optisch einaxigen Krystallen werden die Wärmestrahlen genau in derselben Weise doppelt gebrochen, wie die Lichtstrahlen, und zwar sind die beiden entstehenden Strahlen senkrecht zueinander polarisiert. Nur in der Richtung der optischen Axe findet auch keine Doppelbrechung der Wärme statt. Es wurde die Doppelbrechung der Wärmestrahlen und ihre Polarisation zuerst von Knoblauch nachgewiesen an den Krystallen derselben Substanz, an welchen wir anfangs die analogen optischen Erscheinungen erörtert haben, am Kalkspate.

Der Quarz, welcher die Polarisationsebene des Lichtes dreht, übt dieselbe Wirkung auch auf die Wärmestrahlen aus, und zwar ist nachgewiesen worden, daß für die dunkeln Wärmestrahlen, deren Brechbarkeit kleiner ist, als die des roten Lichtes, ganz in derselben Weise, wie für Lichtstrahlen, die Drehung abnimmt mit der Brechbarkeit. Infolgedessen wird für solche Wärmestrahlen, welche eine so viel kleinere Brechbarkeit als das äußerste Rot besitzen, wie dieses im Verhältnisse zum äußersten Violett, die Drehung fast Null.

Daß endlich auch in den zweiaxigen Krystallen die Strahlen der Wärme in ganz analoger Weise doppelt gebrochen werden, wie die des Lichtes, beweist das Verhalten eines Glimmerblattes zwischen gekreuzten Nicols beim Durchgange von Wärmestrahlen. Gerade so, wie dasselbe beim Drehen viermal hell und dunkel (jedesmal, wenn einer seiner Hauptschnitte dem

eines Nicols parallel) wird, so läßt es auch in diesen vier Stellungen keine Wärmestrahlen hindurch, die meisten bei den vier Zwischenstellungen, wenn die Hauptschnitte mit den Nicols 45° einschließen.

Wärmeleitung.

Um die Abhängigkeit, in welcher die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der geleiteten Wärme in einem Krystalle von der Richtung sich befindet, zu studieren, hat Sénarmont folgendes Verfahren angegeben. Man legt auf die zu untersuchende Fläche des Krystalls ein sehr kleines Stück reinen Wachses und erwärmt jenen vorsichtig, bis das Wachs schmilzt und sich in einer dünnen Schicht auf der ganzen Fläche ausbreitet, was man durch Neigen, eventuell auch Abgießen, unterstützen kann. Nach dem Erkalten bildet das Wachs eine dünne und matte Haut auf der Fläche. Nun erwärmt man eine kleine Stelle des Krystalls dadurch, daß man auf dieselbe entweder eine Metallspitze aufsetzt oder in eine daselbst angebrachte Durchbohrung eintreibt und das betreffende Metallstäbchen (ein rechtwinkelig umgebogener Silberdraht eignet sich hierzu besonders) am andern Ende erhitzt, wobei man den Krystall vor directer Erwärmung seitens der Flamme schützen muß. Sobald die Spitze des Drahtes ebenfalls heiß wird, pflanzt sich die Wärme von der Berührungsstelle im Krystalle nach allen Seiten fort, so daß das Wachs rings um jene schmilzt; auch nach dem Abkühlen kann man an einem feinen vorstehenden Wulste genau sehen, wie weit das Wachs rings um die Spitze geschmolzen war. Ist nun die Wärmeleitungsfähigkeit des Krystalls die gleiche in allen Richtungen, welche der mit Wachs überzogenen Krystallfläche parallel gehen, so breitet sich auch die zum Schmelzen des Wachses erforderliche Temperatur nach allen Seiten gleich rasch aus, und die entstehende Schmelzfigur ist ein Kreis. Pflanzt sich aber in verschiedenen, jener Ebene parallelen Richtungen die Wärme verschieden schnell fort, so können die Punkte, welche gleichzeitig auf die Schmelztemperatur des Wachses erwärmt werden, nicht gleichweit von der Berührungsstelle des Drahtes entfernt sein, sondern sie müssen am weitesten abstehen in der Richtung, in welcher die Wärmeleitung am schnellsten stattfindet, am wenigsten in derjenigen, in welcher sie die langsamste ist. Diese beiden Richtungen stehen nun, wie die Beobachtung lehrt, stets senkrecht aufeinander, gerade so, wie die Schwingungsrichtungen der größten und kleinsten Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes innerhalb einer Ebene. Infolgedessen ist alsdann die Schmelzfigur des Wachses stets eine Ellipse, deren größte Axe der Richtung der größten Leitungsfähigkeit, deren kleine derjenigen der kleinsten unter allen der Krystallfläche parallelen Richtungen entspricht.

Jannettaz wandte bei seinen zahlreichen Untersuchungen über die Wärmeleitung einen durch den galvanischen Strom erhitzten dünnen Platindraht an, aus zwei Teilen bestehend, die unten zu einer kleinen Kugel zusammengeschmolzen sind; die letztere wird bis zur Berührung mit der

Krystallfläche herabgelassen und dann der Strom geschlossen, während gleichzeitig durch einen den glühenden Draht umgebenden Wasserbehälter die directe Wärmestrahlung desselben auf die Platte verhindert wird.

Eine sehr sinnreiche Modification der Sénarmontschen Methode wurde von Röntgen angegeben. Wenn man nämlich die Krystallfläche anhaucht, so daß der Hauch dieselbe in einer gleichmäßigen Schicht überzieht, und auf dieselbe eine stark erwärmte Metallspitze aufsetzt, so beobachtet man, daß der Hauch um die Spitze in einem scharf begrenzten, ellipsenförmigen Raume verdunstet. Unterbricht man den Versuch und streut rasch Lycopodium auf die Platte, so haftet dieses leichte Pulver nur da, wo der Hauch noch nicht verdunstet war, und nach dem vorsichtigen Abklopfen des Krystalls wird die freigelassene elliptische Figur so scharf von dem Pulver begrenzt, daß das Verhältnis der großen und kleinen Axe der Ellipse in vielen Fällen noch genauer gemessen werden kann, als dies bei der Sénarmontschen Methode möglich ist.

Ein Verfahren, um aus Beobachtungen der Schmelzcurven von Doppelplatten das Verhältnis der beiden Hauptleitfähigkeiten derselben herzuleiten, gab 1897 Voigt und verbesserte außerdem die Sénarmontsche Methode durch Anwendung der bei 45° schmelzenden Elaidinsäure statt des Wachses.

Alle nach vorstehenden Methoden angestellten Beobachtungen haben nun übereinstimmend gelehrt, daß die thermische Leitungsfähigkeit der Krystalle ebenfalls genau denselben allgemeinen Gesetzmäßigkeiten unterliegt, wie die Fortpflanzung des Lichtes. Denken wir uns von einem Punkte im Innern des Krystalls aus Längen aufgetragen proportional seiner Wärmeleitungsfähigkeit in der betreffenden Richtung, so bilden die Endpunkte derselben eine krumme Oberfläche, welche in den einfachbrechenden Krystallen die Gestalt einer Kugel, in den optisch einaxigen die Form eines Sphäroids, dessen Rotationsaxe die optische Axe ist, und in den optisch zweiaxigen Krystallen die Gestalt eines dreiaxigen Ellipsoides besitzt. Hieraus folgt, wie sich Krystalle, wenn sie nach einer der obigen Methoden untersucht werden, verhalten müssen.

Bei den einfach brechenden Krystallen ist, da diese in allen Richtungen gleiches Wärmeleitungsvermögen besitzen, die isothermische Curve (die Curve, bis zu welcher sich eine Temperatur in einer gewissen Zeit ausgebreitet hat) auf allen Ebenen, deren Richtung mag jede beliebige sein, ein Kreis.

In den einaxigen Krystallen ist in der Richtung der optischen Axe die Wärmeleitung entweder am größten, nimmt von da an nach allen Seiten gleichmäßig ab und ist am kleinsten in allen Richtungen normal zur Axe (thermisch positive Krystalle), — oder sie ist am kleinsten parallel der Axe, nimmt zu mit der Neigung gegen diese und erreicht ihr Maximum in allen senkrecht zur Axe stehenden Richtungen (thermisch negative Krystalle). In beiden Fällen ist sie gleich in allen Richtungen, welche

gleichen Winkel mit der optischen Axe (die man somit auch als »thermische Axe« bezeichnen kann) einschließen. Infolgedessen ist die isothermische Figur nur auf der Ebene, welche normal zur Axe steht, kreisförmig, auf allen andern eine Ellipse, welche um so mehr von der Kreisform abweicht, je kleineren Winkel die Ebene der untersuchten Platte mit der optischen Axe bildet. Die eine der beiden Axen der Ellipse liegt stets im optischen Hauptschnitte der Platte, und zwar die große, wenn das Maximum des Wärmeleitungsvermögens parallel zur optischen Axe stattfindet, die kleine dagegen, wenn in dieselbe Richtung das Minimum der Leitungsfähigkeit fällt.

In den zweiaxigen Krystallen findet die Wärmeleitung ebenfalls in verschiedener Richtung verschieden schnell statt; diejenige, welche dem Maximum, und die, welche dem Minimum des Leitungsvermögens entspricht, stehen normal zueinander; senkrecht zu beiden ist dasselbe ein zwischenliegendes (im allgemeinen nicht das arithmetische Mittel), das mittlere genannt. Die Wärmeleitungsfähigkeit in beliebigen andern Richtungen entspricht den Radien eines dreiaxigen Ellipsoides. In denjenigen zweiaxigen Krystallen, in welchen die drei Hauptschwingungsrichtungen für alle Farben des Lichtes zusammenfallen, sind denselben auch die drei Hauptaxen dieses Ellipsoides, das sind die Richtungen des größten, mittleren und kleinsten Leitungsvermögens, parallel, d. h.: die Richtung der schnellsten Fortpflanzung der geleiteten Wärme fällt zusammen mit der Schwingungsrichtung der größten oder der mittleren oder der kleinsten Lichtgeschwindigkeit usf. Untersuchen wir also eine Platte eines solchen zweiaxigen Krystalls, welche einem optischen Hauptschnitte parallel geschnitten ist, mittels der Sénarmontschen oder Röntgenschen Methode, so zeigt uns die Lage der isothermischen Figur diejenige der beiden Hauptschwingungsrichtungen an, welche der betreffenden Ebene parallel laufen, und ihre Gestalt lehrt uns, welche von beiden das größere Wärmeleitungsvermögen besitzt. Fallen die Hauptschwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben nicht zusammen, so sind auch die Axen des Wärmeleitungsellipsoides anders orientiert.

Es liegt auf der Hand, daß diese Untersuchungsmethode in solchen Fällen, in denen wegen der Undurchsichtigkeit der Substanz eine optische Untersuchung unmöglich ist, gute Dienste zur Unterscheidung und Bestimmung, in welche der fünf Gruppen (s. S. 137) ein gewisser Krystall gehöre, zu leisten imstande ist und z. B. bei einaxigen die Lage der Axe zu erkennen gestattet.

Nach Jannettaz' Beobachtungen ist ferner eine interessante Beziehung vorhanden zu der Spaltbarkeit der Krystalle, derart, daß nach denjenigen Ebenen, nach welchen die leichteste Trennung der Teilchen des Krystalls eintritt, oft auch die leichteste Fortpflanzung der Wärme stattfindet. Z. B. hat die Oberfläche der thermischen Leitungsfähigkeit solcher optisch einaxiger Krystalle, welche vollkommene Spaltbarkeit senkrecht zur Axe zeigen, meist die Gestalt eines sehr platt gedrückten Sphäroids.

Ausdehnung durch die Wärme.

Mit Ausnahme sehr weniger haben alle Körper in höherer Temperatur ein größeres Volumen, sie dehnen sich beim Erwärmen aus. Die Ausdehnung in einer Richtung wird bestimmt durch den linearen Ausdehnungscoefficienten α, d. i. die Zunahme der Längeneinheit des Körpers, gemessen in der betreffenden Richtung, bei der Erwärmung von 0° auf 1°. Ist der Körper isotrop, so ist der Wert von α in allen Richtungen der gleiche, und ein rechtwinkeliges Parallelepiped von der Länge l, der Breite b und der Dicke d bei 0° nimmt bei 1° die Länge $l(1+\alpha)$, die Breite $b(1+\alpha)$ und die Dicke $d(1+\alpha)$ an; während also bei 0° sein Volumen $= bdl$, wird dasselbe bei 1°:

$$bdl\,(1+\alpha)^3 = bdl\,(1+3\alpha+3\alpha^2+\alpha^3).$$

Da α stets ein sehr kleiner echter Bruch ist, so sind α^2 und α^3 so außerordentlich klein, daß man sie vernachlässigen und somit das Volum bei 1°

$$= bdl\,(1+3\alpha)$$

setzen kann. Den dreifachen linearen Ausdehnungscoefficienten 3α nennt man den kubischen Ausdehnungscoefficienten.

Bei den Krystallen, bei denen es sich wesentlich um Gleichheit oder Verschiedenheit der linearen Ausdehnung in verschiedenen Richtungen handelt, werden wir unter »Ausdehnungscoefficient« stets den linearen, α, verstehen.

Strenggenommen hängt diese Größe α selbst wieder von der Temperatur ab, d. h. die Zunahme der Längeneinheit bei der Temperaturerhöhung von 100° auf 101° ist nicht genau gleich der bei der Temperaturerhöhung von 0° auf 1°; diese Änderung ist aber bei den meisten Körpern eine sehr geringe im Verhältnisse zu α. Ist dagegen der Ausdehnungscoefficient sehr klein und nimmt derselbe mit der Temperatur ab, so besitzt der Körper ein sogenanntes Dichtemaximum, d. h. eine Temperatur, bei welcher der Ausdehnungscoefficient Null und jenseits deren er negativ ist, d. h. mit steigender Temperatur zieht von da ab sich der Körper zusammen, mit fallender Temperatur dehnt er sich aus. Diese Ausnahmen sind besonders durch die Untersuchungen von Fizeau erkannt worden; es sind folgende: der Diamant, welcher bei —42°,3, das Kupferoxydul, welches bei —4°,3, der Smaragd, welcher bei —4°,2 die größte Dichtigkeit haben und sich bei weiterer Abkühlung wieder ausdehnen. Der merkwürdigste Körper in dieser Hinsicht ist jedoch das Jodsilber, welches sich schon bei gewöhnlicher Temperatur zusammenzieht, wenn es erwärmt wird.

1. Einfachbrechende Krystalle. Der Ausdehnungscoefficient ist, wie in einem isotropen Körper, in allen Richtungen der gleiche. Denken wir uns daher aus einem solchen Krystalle eine Kugel geschliffen, so wird diese, auf eine höhere Temperatur gebracht, einen größeren Durchmesser

erhalten; da aber jeder ihrer vorigen, einander gleichen Durchmesser um gleich viel gewachsen ist, so bleibt ihre Gestalt nach wie vor die einer Kugel, sie erhält nur ein größeres Volumen.

Die Oberfläche der Kugel repräsentiert in ihren Tangentialebenen alle möglichen Orientierungen von ebenen Flächen eines Krystalls. Denken wir uns zwei solcher Ebenen, durch ihre Tracen a und b Fig. 113 (S. 183) dargestellt, als Begrenzungsflächen des Krystalles, so werden diese, während die Temperatur des Krystalles steigt, sich nur parallel sich selbst nach a' und b' verschieben; dadurch wird der Winkel, welchen sie miteinander bilden, nicht geändert. Es gilt daher für einfachbrechende Krystalle der Satz: Die Winkel, unter welchen deren Flächen zusammenstoßen, sind unabhängig von der Temperatur des Krystalles.

2. Einaxige Krystalle. In solchen ist, wenn sie homogen sind, zwar in allen Geraden gleicher Richtung der Ausdehnungscoefficient derselbe, aber in verschiedenen Richtungen verschieden. Wie diese Krystalle sich in bezug auf die Fortpflanzung der Wärme verhalten, so ist auch die Richtung, in welcher letztere ein Maximum oder Minimum hat, d. h. die thermische (d. i. zugleich die optische) Axe, entweder diejenige der größten oder der kleinsten Ausdehnung durch die Wärme[1]).

In dem Falle, daß die optische bzw. thermische Axe die Richtung des größten Ausdehnungscoefficienten ist, nimmt dieser mit der Neigung gegen jene ab, und zwar nach allen Seiten in gleicher Weise, so daß er für alle Richtungen, welche gleiche Winkel mit der Axe bilden, gleich groß ist, und erreicht sein Minimum in allen Richtungen, welche normal zu derselben stehen. Denken wir uns also aus einem derartigen einaxigen Krystalle, dessen Temperatur 0° ist, eine Kugel geschliffen und diese auf 1° erwärmt, so sind alsdann ihre Durchmesser nicht mehr gleich, sondern derjenige, welcher der optischen Axe parallel ist, hat die größte Zunahme seiner Länge erfahren, die übrigen eine um so geringere, je größer ihre Neigung gegen die Axe ist, diejenigen, welche normal dazu stehen, die geringste. Bei einer höheren Temperatur verwandelt sich die Kugel in ein verlängertes Sphäroid, entstanden durch Rotation einer Ellipse um ihre große Axe, welche zugleich der optischen Axe des Krystalls parallel ist. Es gibt sogar Krystalle, und zu diesen gehört z. B. der Kalkspat, welche sich in der Axe verhältnismäßig stark ausdehnen, senkrecht dazu jedoch eine schwache Zusammenziehung erleiden, wobei aber das gesamte Volumen bei der Temperaturerhöhung zunimmt. Da hier der Ausdehnungscoefficient in der Axe positiv, senkrecht dazu negativ ist, so muß es eine bestimmte Neigung dazwischen geben, in welcher er = 0 ist; ein Stab, in dieser

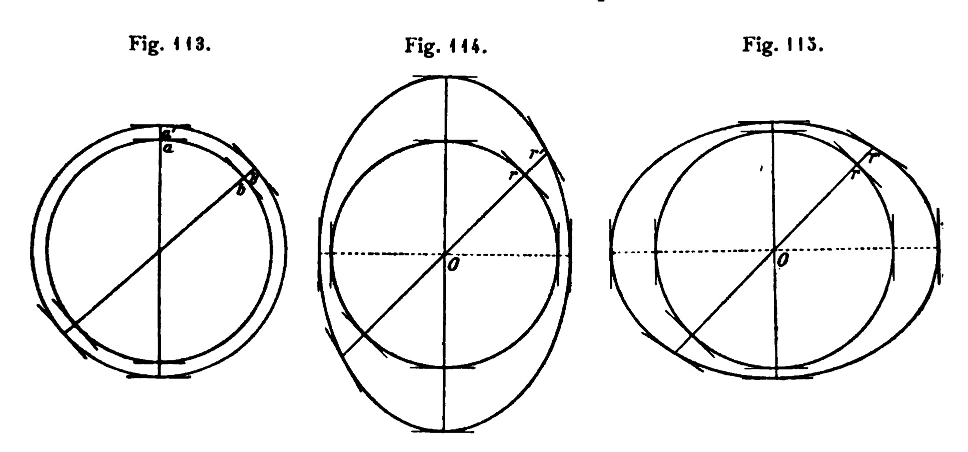
1) Hierbei ist keineswegs bei allen Krystallen, bei denen die optische Axe die Richtung der größten Wärmeleitungfähigkeit ist, dieselbe auch die der größten Ausdehnung durch die Wärme, sondern es kann auch die der kleinsten sein.

Richtung aus Kalkspat geschnitten, ändert also seine Länge nicht, wenn sich seine Temperatur ändert[1]).

Ist jedoch die optische Axe die Richtung des kleinsten Ausdehnungscoefficienten durch die Wärme, so nimmt dieser mit der Neigung gegen jene stetig zu und ist am größten senkrecht dazu, selbstverständlich gleich nach allen Seiten rings um die Axe. Eine Kugel, bei niedrigerer Temperatur aus einem solchen Krystalle geschliffen, wird bei höherer platt gedrückt werden in der Richtung der optischen Axe, sie wird sich in ein Sphäroid verwandeln, entstanden durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe, welche der optischen parallel ist.

Die Oberfläche einer bei 0° aus einem einaxigen Krystalle hergestellten Kugel repräsentiert die Gesamtheit aller beliebig orientierter Ebenen des Krystalls durch ihre Tangentialebenen. Denken wir uns nun eine solche Kugel auf 1° erwärmt, so verwandelt sie sich in ein verlängertes oder abgeplattetes Rotationsellipsoid. Wie man aus den Figg. 114 und 115[2]) ersieht, verschieben sich die beiden zur Axe senkrechten Ebenen und ebenso alle (unendlich viele) der Axe parallelen Ebenen nur sich selbst parallel, da nicht nur die beiden an die Pole der Rotationsaxe gelegten, sondern auch sämtliche durch Punkte auf dem Äquator gehenden Tangentialebenen normal zu den betreffenden Radien vectoren stehen; folglich ändert sich der Winkel nicht, welchen irgend zwei der Axe parallele Ebenen einschließen, und beide Ebenen bleiben der Axe parallel und normal auf die

Fig. 113. Fig. 114. Fig. 115.



zur Axe senkrechte Ebene. Alle übrigen dagegen erfahren eine Drehung in dem einen oder andern Sinne, da ein beliebiger Radius Or der Kugel

1) Der Ausdehnungscoefficient des Kalkspats (nach Fizeau) parallel der Axe ist $\alpha = 0{,}0000264$, derjenige senkrecht dazu $\beta = -0{,}0000053$, eine bei 0° hergestellte Kalkspatkugel ist also bei 100° ein Rotationsellipsoid, dessen Axen sich verhalten, wie

$$(1 - 100\beta) : (1 + 100\alpha) = 0{,}99947 : 1{,}00246 = 1 : 1{,}00316.$$

2) In diesen Figuren, wie in Fig. 113, ist selbstverständlich die Ausdehnung der Deutlichkeit wegen außerordentlich übertrieben dargestellt.



durch die Ausdehnung in den Radius vector Or' eines Ellipsoides übergeht, an dessen Ende die Tangentialebene nun nicht mehr senkrecht zum Radius steht, sondern einen kleineren oder größeren Winkel mit der Axe bildet, je nachdem die größte Ausdehnung parallel (Fig. 114) oder senkrecht (Fig. 115) zur Axe stattfindet. Aus der Gestalt des Ellipsoides, welche durch die beiden Ausdehnungscoefficienten gegeben ist, folgt die Größe des Drehungswinkels ohne weiteres und ebenso die Richtung, in welcher die größte Drehung stattfindet, und von der aus die Äenderung der Richtung geringer wird, wenn man sich der Axe einerseits oder einer dazu parallelen Ebene andererseits nähert. Da, wie man aus den Figuren 114 und 115 sofort ersieht, die Drehung zweier entgegengesetzter paralleler Ebenen die gleiche ist, so müssen je zwei Ebenen, welche bei einer Temperatur parallel sind, es auch bei jeder andern sein.

Aus der Betrachtung der beiden Figuren ergeben sich folgende Sätze:

An einem optisch einaxigen Krystalle, dessen Axe die Richtung der größten Ausdehnung durch die Wärme ist, bleiben bei steigender Temperatur alle Flächen, welche parallel oder normal zu jener Richtung sind, sich selbst parallel, alle unter schiefen Winkeln dagegen geneigte Flächen indes nehmen eine steilere Lage an (wenn man sich die optische Axe vertical gestellt denkt). Dabei erhalten alle Paare paralleler Flächen ihren Parallelismus bei allen Temperaturen.

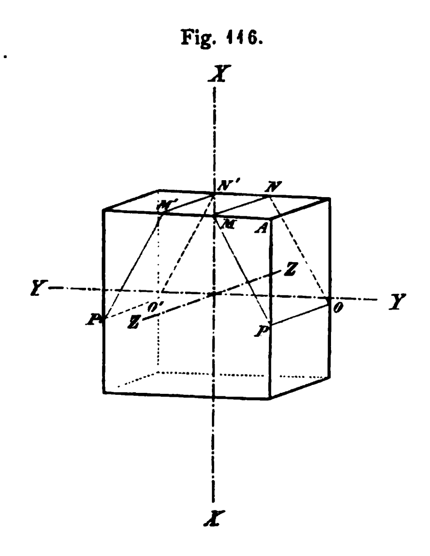
Bei denjenigen einaxigen Krystallen, welche parallel der Axe den kleinsten Ausdehnungscoefficienten haben, bleiben ebenfalls alle Flächen, welche die Winkel 0° und 90° mit der optischen Axe bilden, beim Erwärmen sich selbst parallel, dagegen alle unter andern Winkeln gegen jene geneigten Flächen nehmen eine weniger steile Lage an, wobei alle Paare paralleler Flächen nach wie vor parallel bleiben.

Da in beiden Arten von einaxigen Krystallen der Ausdehnungscoefficient in allen Richtungen, welche denselben Winkel mit der optischen Axe bilden, der gleiche ist, so ist die durch Erwärmung hervorgebrachte Änderung der Neigung gegen jene für alle Flächen, welche denselben Winkel mit ihr einschließen, genau gleich. Bilden also mehrere Flächen mit der optischen Axe denselben Winkel, so bilden sie bei jeder andern Temperatur mit jener ebenfalls gleiche Winkel, deren Wert jedoch größer oder kleiner ist, je nachdem der Krystall in der Richtung der Axe den kleinsten oder größten Ausdehnungscoefficienten besitzt. So haben wir z. B. S. 64f. in dem Rhomboeder des Kalkspats eine Krystallform kennen gelernt, deren drei obere und die drei, jenen parallelen, unteren Flächen gleiche Neigung gegen die optische Axe besitzen; infolgedessen sind die Winkel, in welchen die Flächen an den drei, oben im Punkte *a* Fig. 48 einander schneidenden Kanten zusammentreffen, alle drei gleich, nämlich 105° 4′ (innerer Winkel) bei 10°; da der Kalk-

spat, wie wir S. 182 sahen, zu den Krystallen gehört, welche sich in der Richtung der Axe am stärksten ausdehnen, so müssen beim Erwärmen die oben in *a* zusammenstoßenden Flächen gleichmäßig eine steilere Lage annehmen, jene drei Flächenwinkel also kleiner werden. Sie betragen in der Tat bei 110°, also nach einer Temperaturerhöhung um 100°, nur noch 104° 56′, und durch diese Änderung hat Mitscherlich zuerst entdeckt, daß die Winkel der einaxigen Krystalle, mit Ausnahme derjenigen zwischen solchen Flächen, die normal oder parallel zur Axe sind, ihrer Größe nach von der Temperatur des Krystalls abhängig sind.

Diese Abhängigkeit ermöglicht es, aus den Änderungen, welche die Flächenwinkel eines Krystalles durch Temperaturänderungen erfahren, die Ausdehnungscoefficienten derselben nach verschiedenen Richtungen abzuleiten. Denken wir uns aus einem optisch einaxigen Krystall bei 0° statt einer Kugel einen Würfel Fig. 116 von solcher Orientierung hergestellt, daß XX die Richtung der optischen Axe, YY und ZZ zwei beliebige, dazu senkrechte Richtungen repräsentieren. Seien nun durch $MNOP$ und $M'N'O'P'$ die Orientierung zweier Ebenen im Krystalle dargestellt, welche mit der optischen Axe den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$, miteinander also den Winkel φ bilden, so ist offenbar

Fig. 116.



$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{AM}{AP}.$$

Wird nun der Würfel gleichmäßig auf 1° erwärmt, so verwandelt er sich in ein rechtwinkeliges Parallelepiped, dessen Höhe ($\parallel XX$), wenn der Ausdehnungscoefficient parallel der Axe $= \alpha$, $(1 + \alpha)$ mal so groß ist als vorher, während die horizontalen Dimensionen $(1 + \beta)$ mal so groß werden, wenn β der Ausdehnungscoefficient des Krystalls senkrecht zur Axe ist. Sei der Winkel zwischen den Ebenen $MNOP$ und $M'N'O'P'$ bei dieser höhern Temperatur $= \varphi'$, so ist offenbar

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi' = \frac{AM(1+\beta)}{AP(1+\alpha)}.$$

Diese Gleichung, in die obere dividiert, liefert

$$(1) \qquad \frac{1+\alpha}{1+\beta} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi'}.$$

Die vorstehenden Betrachtungen gelten ebenso, wenn ein beliebig gestalteter Krystall zwei zur Axe XX gleich geneigte Krystallflächen als

Begrenzungsebenen besitzt und der Winkel zwischen denselben bei zwei verschiedenen Temperaturen gemessen wird. Wir besitzen dann eine Relation zwischen α und β, welche uns zwar das Verhältnis derselben, die relativen Ausdehnungscoefficienten, nicht aber deren absolute Werte erkennen läßt. Hierzu ist es nötig, noch die Volumvermehrung desselben Körpers bei der gleichen Temperaturerhöhung zu bestimmen. Haben wir einen Würfel mit den Kantenlängen s bei der niedrigeren Temperatur so hergestellt, daß vier seiner Flächen der optischen Axe parallel sind, so ist dessen Volumen V

$$V = s^3.$$

Sei sein Volumen V' in der höheren Temperatur gemessen worden; dieses ist

$$V' = s^3 (1 + \alpha)(1 + \beta)^2.$$

Diese Gleichung, durch die vorhergehende dividiert, gibt

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)^2 = \frac{V'}{V}. \tag{2}$$

Da man sich jedes irgendwie gestaltete Volum aus beliebig kleinen Würfeln aufgebaut denken kann, so gilt diese Gleichung auch für irgendein Volum V (z. B. eine Anzahl Krystallbruchstücke), welches bei 1° die Größe V' annimmt. Nachdem V und V' durch Bestimmung des specifischen Gewichts bei 0° bzw. 1° gefunden sind, kann man aus den beiden Gleichungen (1) und (2) die Ausdehnungscoefficienten α, denjenigen parallel der optischen Axe, und β, den senkrecht dazu, berechnen. Auf diese Weise hat Mitscherlich zuerst die Werte der Ausdehnungscoefficienten des Kalkspats bestimmt, und zwar durch Erhöhung der Temperatur um 100°, so daß die Messung der um hundertmal so großen Änderungen möglich war.

3. Zweiaxige Krystalle. Auch bei diesen sind die Ausdehnungscoefficienten in verschiedenen Richtungen verschieden, daher die Neigungswinkel der Krystallflächen mit der Temperatur veränderlich; nur sind die Gesetzmäßigkeiten der thermischen Deformationen hier weniger einfach, als bei den einaxigen Krystallen. Wie in optischer Beziehung sind bei den zweiaxigen Krystallen drei Hauptrichtungen oder thermische Dilatationsaxen zu unterscheiden, diejenige der größten, die der mittleren und die der kleinsten linearen Ausdehnung durch die Wärme. Die Ausdehnungscoefficienten nach diesen drei Richtungen sollen bzw. mit α, β, γ bezeichnet werden. Denken wir uns bei 0° aus einem derartigen Krystalle eine Kugel vom Durchmesser d geschliffen, so wird dieselbe diese Form nicht mehr besitzen, wenn sie auf eine um 1° höhere Temperatur gebracht wird, sondern ihre Oberfläche wird eine Gestalt annehmen, deren Durchmesser nach der Richtung der größten Ausdehnung $= d(1 + \alpha)$, nach derjenigen der kleinsten $= d(1 + \gamma)$ und senkrecht zu diesen beiden $= d(1 + \beta)$ ist. Der Durchschnitt dieser Form nach den drei zueinander senkrechten

thermischen Hauptschnitten, d. h. den Ebenen, welche durch je zwei der Hauptrichtungen der thermischen Ausdehnung bestimmt sind, ist eine Ellipse, aber in jedem derselben eine solche von anderer Form. Die Kugel verwandelt sich also durch die Erwärmung in ein dreiaxiges Ellipsoid, und wir können an diesem, genau so wie an dem Rotationsellipsoide bei den optisch einaxigen Krystallen (Fig. 114 und 115), die Änderungen, welche beliebig orientierte Ebenen durch Temperaturerhöhung erfahren, mit einem Blicke übersehen. Jeder Radius der Kugel verwandelt sich bei Änderung der Temperatur in einen Radius vector des dreiaxigen Ellipsoides, und zwar verwandeln sich drei beliebige, aufeinander senkrechte Durchmesser in drei sog. conjugierte Durchmesser des Ausdehnungsellipsoides; diese stehen aber in einem dreiaxigen Ellipsoide nicht aufeinander senkrecht, mit einziger Ausnahme der drei Hauptaxen desselben. Die letzteren, die drei thermischen Hauptaxen, können wir daher auch definieren als die einzigen Richtungen im Krystalle, welche bei jeder Temperatur ihre Rechtwinkeligkeit bewahren. Da ein dreiaxiges Ellipsoid nur drei Durchmesser besitzt, an deren Endpunkten die Tangentialebene senkrecht zum Radius vector steht, nämlich die drei Hauptaxen, so folgt daraus, daß nur die thermischen Hauptschnitte ihre Richtung behalten, also lediglich eine Parallelverschiebung erfahren. Die Tangentialebene an einem beliebigen andern Punkte, aber innerhalb einer der drei Hauptschnittellipsen, steht wegen der symmetrischen Gestalt des dreiaxigen Ellipsoids stets senkrecht zu diesem Hauptschnitte; eine so orientierte Ebene am Krystalle kann daher eine Drehung nur in dem Sinne erfahren, daß ihr Winkel zu den beiden Axen der betreffenden Hauptschnittellipse ein anderer wird, — während endlich eine Tangentialebene, welche keiner der drei Hauptaxen des Ellipsoides parallel geht, ihre Neigung zu allen dreien ändern muß. Da die Tangentialebenen des dreiaxigen Ellipsoides an den beiden Endpunkten eines jeden Durchmessers parallel sind, so sind zwei Tangentialebenen an den beiden Enden eines Durchmessers der Kugel auch nach deren thermischer Deformation noch parallel, wie auch ihre Orientierung sich geändert haben möge.

Es ergeben sich also folgende Sätze:

Zwei Ebenen am Krystalle, welche bei irgendeiner Temperatur parallel sind, sind es auch bei jeder andern.

Die drei aufeinander senkrechten Ebenen, deren Durchschnittsrichtungen parallel den drei Richtungen der größten, mittleren und kleinsten Ausdehnung durch die Wärme sind, schneiden einander bei allen Temperaturen unter rechten Winkeln.

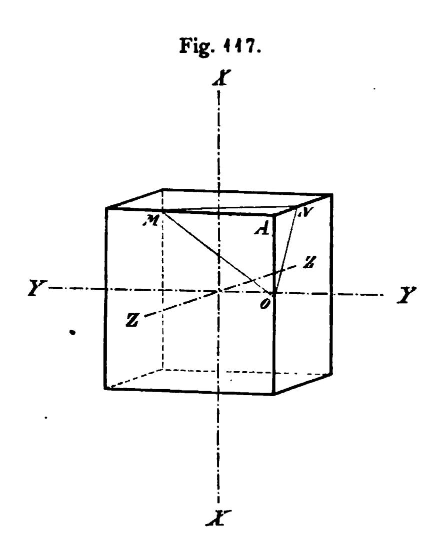
Alle Ebenen an einem zweiaxigen Krystalle, welche einer thermischen Dilatationsaxe parallel, also normal zu einem thermischen Hauptschnitte sind, bleiben es zwar bei allen Temperaturen, aber ihre gegenseitigen Neigungen, sowie die Winkel,

welche sie mit den beiden andern thermischen Hauptschnitten bilden, sind beim Erwärmen veränderlich in der Weise, daß sie nach der Seite des relativ größeren Ausdehnungscoefficienten hin spitzer, die Supplementwinkel, welche nach der Seite der kleineren Ausdehnung hin liegen, um ebensoviel stumpfer werden.

Ebenen endlich, welche keiner der drei thermischen Dilatationsaxen parallel gehen, ändern mit der Temperatur ihre Neigung gegen diese drei Axen, und zwar gegen jede um einen andern Betrag, welcher von dem Verhältnisse der drei Ausdehnungscoefficienten abhängt.

Wenn der in Fig. 116 dargestellte Würfel aus einem zweiaxigen Krystalle bei 0° hergestellt worden wäre, dessen thermische Dilatationsaxen X, Y, Z sind, so würde man nach dem S. 185 angegebenen Verfahren aus der Änderung des Winkels zwischen den beiden der Z-Axe parallelen Ebenen $MNOP$ und $M'N'O'P'$ das Verhältnis zweier Ausdehnungscoefficienten, nämlich $\alpha : \beta$, berechnen können. Denken wir uns eine Ebene MNO (Fig. 117), welche keiner der thermischen Axen parallel ist, so wird deren Lage gegen jene offenbar gegeben durch das Verhältnis der Längen $AM = m$, $AN = n$ und $AO = o$. Diese drei Längen dehnen sich aber sämtlich verschieden aus, denn sie werden nach einer Temperaturerhöhung um 1° sein: $m(1+\beta)$, $n(1+\gamma)$ und $o(1+\alpha)$, und es ist aus der Figur ersichtlich, daß auch in diesem Falle aus der Änderung, welche die Winkel dieser Ebene gegen die drei thermischen Hauptschnitte erfahren, eine Berechnung der relativen Ausdehnungscoefficienten, wenn auch weniger einfach, doch möglich ist.

Fig. 117.



Am einfachsten gestalten sich die thermischen Verhältnisse bei derjenigen Gruppe der optisch zweiaxigen Krystalle, in welchen die Hauptschwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben zusammenfallen. Für diese sind nämlich denselben drei Richtungen auch diejenigen mit den Ausdehnungscoefficienten α, β und γ parallel, so daß mit einer der drei Axen ihrer für alle Farben gleich orientierten optischen Indexfläche die Richtung der stärksten thermischen Ausdehnung, mit einer zweiten die der mittleren, mit der dritten endlich die der kleinsten Ausdehnung zusammenfällt.

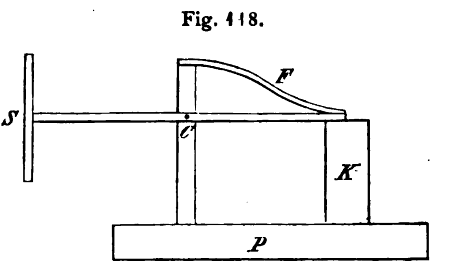
Gehört ein Krystall zu einer der beiden Gruppen zweiaxiger, in welchen die Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes für verschiedene Farben

nicht zusammenfallen, so ist auch die Orientierung der thermischen Dilatationsaxen a priori eine unbestimmte und kann daher mit dem in Betracht kommenden Temperaturintervalle variieren. Die drei permanent aufeinander normal stehenden Richtungen im Krystalle existieren alsdann nur für ein sehr kleines Temperaturintervall, für eine größere Ausdehnung, d. h. für eine stark abweichende Temperatur, haben sie eine andere Orientierung im Krystalle Diese Abhängigkeit der Richtung der drei thermischen Hauptaxen von der Temperatur kann eine vollständige sein, oder — entsprechend dem S. 121 f. betrachteten Falle, daß eine Hauptschwingungsrichtung des Lichtes für alle Farben identisch ist — eine teilweise, indem alsdann auch eine der Dilatationsaxen eine constante, mit jener Hauptschwingungsrichtung zusammenfallende Richtung besitzt, während die beiden andern in der zur ersten senkrechten Ebene (dem alsdann einzigen constanten thermischen Hauptschnitte) eine mit der Temperatur variable Orientierung zeigen. In beiden Fällen muß also der Messung der größten, mittleren und kleinsten Ausdehnung durch die Wärme noch eine Bestimmung der Richtung der thermischen Hauptaxen für bestimmte Temperaturintervalle vorausgehen oder mit ihr verbunden werden. Es haben besonders Beckenkamp und Hecht nachgewiesen, in welcher Weise die Richtung und Größe derselben für bestimmte Temperaturintervalle aus der Messung der Änderungen, welche eine größere Anzahl von Winkeln am Krystalle bei den betreffenden Temperaturänderungen erfahren, berechnet werden können.

Aus den vorstehenden Darlegungen ersieht man, daß nur die an einfachbrechenden Krystallen bei einer bestimmten Temperatur gemessenen Flächenwinkel für alle andern Temperaturen Gültigkeit haben, während die Messung der Neigung zweier ebener Flächen eines ein- oder zweiaxigen Krystalls im allgemeinen nur für die Temperatur richtig ist, welche der Krystall hatte, als die Messung stattfand. Es ist indes der Einfluß derjenigen Temperaturdifferenzen, wie sie in Beobachtungsräumen vorzukommen pflegen, auf die Krystallwinkel in den meisten Fällen geringer, als der Grad der Genauigkeit der Messung selbst beträgt. Es ist also nur bei sehr genauen Messungen die Temperatur während derselben mit in Rechnung zu ziehen.

Messung der thermischen Ausdehnung der Krystalle. Directe Bestimmungen der absoluten Werte der Ausdehnungscoefficienten sind zuerst ausgeführt worden von Pfaff, welcher Krystalle nach verschiedenen Richtungen auf eine Platte P (Figur 118) brachte, so daß der Krystall K oben von einem in C drehbaren Hebel berührt wurde, den eine Feder F schwach andrückte; an dem andern Ende dieses Hebels befand sich ein Spiegel S, in

Fig. 118.



welchem mittels eines Fernrohres eine entfernte Scala abgelesen wurde. Dehnt sich nun der Krystall durch die Erwärmung aus, so wird der ihn berührende Hebelarm gehoben, der andere gesenkt, so daß im Spiegel ein anderer Scalenteil abgelesen wird. Aus der Länge des Hebelarmes, der Entfernung des Spiegels von der Scala und der Differenz der beiden Ablesungen kann alsdann die Größe der Ausdehnung des Krystalles berechnet werden.

Bei weitem die genaueste Methode jedoch zur directen Bestimmung der Ausdehnungscoefficienten ist diejenige von Fizeau. Der Apparat besteht zunächst in einem Dreifuße von Platin, dessen Füße in Spitzen nach oben endigen, auf welche eine planconvexe Linse mit ihrer unteren ebenen Fläche horizontal aufgelegt ist. Zwischen diesen Füßen auf einer ebenfalls horizontalen Fläche des Dreifußes aufliegend befindet sich die zu untersuchende Krystallplatte. Die nach oben gekehrte Fläche derselben, etwas convex geschliffen und poliert, befindet sich ganz nahe an der unteren Fläche der aufgelegten Linse. Wird diese nun durch von oben einfallendes homogenes Licht, z. B. eine durch Chlornatrium gefärbte Flamme, erleuchtet, so interferieren die an der unteren Fläche der Linse und an der Oberfläche der Krystallplatte reflectierten Lichtstrahlen derart miteinander, daß ein System dunkler und heller Ringe im zurückgeworfenen Lichte erscheint, deren Lage gegen bestimmte, auf der Linse markierte feste Punkte fixiert wird. Die Lage dieser dunkeln Ringe hängt offenbar ab von dem Abstande der unteren Fläche der letzteren von der Oberfläche des Krystalles. Wird das Ganze nun in einen oben durch eine planparallele Glasplatte geschlossenen Raum von höherer Temperatur gebracht, so dehnt sich der Krystall aus und verringert dadurch jenen Abstand; zugleich dehnen sich jedoch auch die Platinfüße, welche die Linse tragen, aus und vermehren denselben; die Änderung jenes Abstandes ist daher die Differenz der Ausdehnung des Krystalls in der verticalen Richtung und des Platins. Ist die letztere bestimmt[1]), so kann man aus der Änderung des Abstandes der unteren Fläche der Linse von der Oberfläche des Krystalls auch die erstere ableiten. Wird jener mehrfach erwähnte Abstand nun durch die Temperaturerhöhung geändert, so wird der Gangunterschied der interferierenden Lichtstrahlen ein anderer, d. h. die Streifen verschieben sich; und wenn man die Zahl der Interferenzfransen zählt, welche an einem bestimmten Punkte der Glaslinse vorübergezogen sind, bis die Temperatur des Erhitzungsraumes constant geworden ist, so kann man daraus die Änderung jenes Abstandes mit außerordentlicher Genauigkeit berechnen, und aus dieser, wie erwähnt, die Ausdehnung der aufgelegten Krystallplatte in der verticalen Richtung. Verbesserungen des Fizeauschen Apparates wurden

---

1) Dies geschieht mit demselben Apparate ohne Krystallplatte durch Beobachtung der Streifen, welche durch die Interferenz der an der Unterseite der Linse und der horizontalen polierten Fläche des Platindreifußes entstehen.

später besonders von Abbe (s. Pulfrich, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1893, **13**, 365f.) und Tutton (Zeitschr. f. Kryst. 1899, **30**, 529f.) vorgenommen.

Diese äußerst genaue Methode zur Bestimmung der Ausdehnungscoefficienten war nun besonders geeignet, die Richtigkeit der Schlüsse zu prüfen, welche man bereits früher aus der Constanz oder der Variabilität der Krystallwinkel in bezug auf die Ausdehnungsverhältnisse der Krystalle gezogen hatte. So wurden von Fizeau nacheinander geprüft und vollkommen bestätigt alle die Gesetze, welche über die Ausdehnung der verschiedenen Gruppen von Krystallen von S. 181 bis 188 auseinandergesetzt worden sind, und so einleuchtend dieselben auch im Hinblicke auf die Analogie mit den optischen Verhältnissen waren, so können sie doch erst seit Fizeaus Untersuchungen als über jeden Zweifel erhaben betrachtet werden.

Einfluſs der Wärme auf die optischen Eigenschaften.

Durch die Erwärmung wird der Abstand der kleinsten Teilchen der festen Körper geändert, es müssen also bei einer andern Temperatur die Kräfte, welche die Teilchen aufeinander ausüben und deren Gleichgewicht ihren Abstand bestimmt, andere geworden sein. Da nun der Lichtäther unter dem Einflusse dieser Kräfte steht, so müssen auch dessen Verhältnisse durch die Wärme eine Änderung erfahren. In der Tat lehrt die Beobachtung, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem festen Körper bei einer Temperaturänderung desselben eine andere wird, und zwar in der Weise, daß bei einigen der Brechungsindex mit der Temperaturerhöhung zunimmt, während die Mehrzahl der untersuchten festen Körper, sowie die Flüssigkeiten, hierbei eine Abnahme desselben zeigen [1]). Welche der beiden Erscheinungen eintritt, hängt nach der electromagnetischen Theorie des Lichtes von der Art der Absorption desselben in dem Körper ab; die meisten Substanzen besitzen im Ultraviolett ein Gebiet metallischer Reflexion, und dieses verschiebt sich beim Erwärmen nach dem sichtbaren Teile des Spectrums, wodurch Zunahme der Brechung und Dispersion bewirkt wird, wenn jenes Gebiet dem sichtbaren Teile des Spectrums nahe steht, während an und für sich die Brechung mit steigender Temperatur abnehmen muß (Näheres in J. Königsberger, Über die Absorption des Lichtes in festen Körpern. Habil.-Schr. Freiburg 1900).

Da die thermischen Ausdehnungsverhältnisse der fünf Gruppen von Krystallen verschiedene sind, so müssen diese auch in bezug auf die dadurch bewirkten Änderungen ihrer optischen Verhältnisse getrennt behandelt werden, wie es im folgenden geschehen soll.

1. Einfachbrechende Krystalle. Dieselben haben, wie aus der

---

1) Wegen dieser Änderung muß bei genauen Bestimmungen der Brechungsindices eines Körpers stets dessen Temperatur während der Messung angegeben werden.



Constanz ihrer Winkel für alle Temperaturen hervorgeht, und wie auch durch die genauen Fizeauschen Messungen direct bewiesen worden ist, nach allen Richtungen gleichen Ausdehnungscoefficienten, folglich wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem derartigen Krystalle durch eine Erwärmung desselben nach allen Richtungen um gleich viel verändert. Sobald also der Krystall in allen seinen Teilen gleichmäßig die höhere Temperatur angenommen hat, ist sein Brechungsindex kleiner [1]) als vorher, aber er hat denselben Wert in allen Richtungen, der Krystall ist optisch isotrop geblieben und bleibt es bei allen Temperaturen.

Zeigt ein einfachbrechender Krystall Drehung der Polarisationsebene, wie es z. B. beim Natriumchlorat (s. S. 155) der Fall ist, so ändert sich sein Drehungsvermögen mit der Temperatur, aber in allen Richtungen um gleich viel. Nach Sohncke erfährt das Drehungsvermögen des genannten Salzes mit steigender Temperatur eine beträchtliche Zunahme.

2. Einaxige Krystalle. Genaue Bestimmungen der Änderung der Brechungsindices einaxiger Krystalle durch die Wärme liegen nur vor über Quarz, Kalkspat, Beryll und Phenakit. Von ersterem wies Fizeau nach, daß die Brechungsindices sowohl des ordinären, als des extraordinären Strahles bei höherer Temperatur kleiner werden und ihre Abnahme bei beiden wenig verschieden ist. Für den Kalkspat fand er dagegen, daß beide zunehmen, der des ordentlichen Strahles sehr wenig, der des außerordentlichen sehr bedeutend. Eine Zunahme der Brechungsindices, aber für ω eine größere als für ε, ergab sich aus den Messungen von Dufet und Offret am Beryll (Smaragd), welcher auch in bezug auf die Ausdehnung durch die Wärme eine exceptionelle Stellung einnimmt (vgl. S. 181). Am Phenakit endlich fand Offret eine ungefähr gleich große Zunahme von ω und ε. Hiernach wird die Doppelbrechung mit steigender Temperatur beim Kalkspate erheblich stärker, beim Quarz und Beryll dagegen schwächer.

Aus dem Verhalten der einaxigen Krystalle in der Wärme wissen wir, daß sie sich in allen Richtungen, welche gleiche Winkel mit der optischen Axe einschließen, gleich stark ausdehnen; es ist daher zu erwarten, daß in allen dergleichen Richtungen auch die Änderung der Lichtgeschwindigkeit durch die Wärme die gleiche sein muß, sei es, daß sie mit der Temperatur wächst oder abnimmt. Ein bei einer Temperatur einaxiger Krystall muß dann auch bei jeder andern einaxig bleiben; und das bestätigen die Beobachtungen an allen in ihrem Verhalten gegen die Wärme untersuchten, zahlreichen Krystallen. Da die Ausdehnung senkrecht zur optischen Axe einen andern Wert hat, als

1) Wenigstens ist dies der Fall bei den vier von Stefan untersuchten krystallisierten Stoffen Chlorkalium und Chlornatrium (deren Brechungsindex sich sehr stark mit der Temperatur ändert), Flußspat (Fluorcalcium) und Alaun, während der Diamant (nach A. Sella) und das amorphe Glas sich entgegengesetzt verhalten.

parallel derselben, so ist auch die Änderung, welche das optische Verhalten durch die Erwärmung in der ersteren, von derjenigen, welche es in der letzteren Richtung erfährt, mehr oder weniger verschieden, d. h. bei einer höheren Temperatur des Krystalles wird die Differenz seines optischen Verhaltens für Schwingungen parallel und senkrecht zur Axe und somit die Stärke seiner Doppelbrechung (s. die Beispiele a. vor. S.) größer oder kleiner. Ist das letztere der Fall und die Doppelbrechung schon bei gewöhnlicher Temperatur sehr schwach, so gibt es eine solche, bei welcher der Krystall für eine Farbe gleiche Geschwindigkeit des ordentlichen und des außerordentlichen Strahles besitzt, aber eben nur für das Licht einer bestimmten Schwingungsdauer, wodurch er nicht aufgehört hat, ein einaxiger Krystall zu sein (vgl. S. 89 Anm.).

Die Interferenzerscheinungen der einaxigen Krystalle können also durch eine gleichmäßige Temperaturerhöhung keine andere Änderung erfahren, als solche, die aus einer Änderung der Brechungsindices und der Stärke der Doppelbrechung folgen. Es werden demnach die von einer normal zur Axe geschnittenen Platte hervorgebrachten Farbenringe entweder enger oder weiter werden, ihre Kreisform aber stets behalten.

Wie die gewöhnliche, so erfährt auch die circulare Doppelbrechung eine Änderung durch die Temperatur. Diese Tatsache steht im Einklange mit der S. 152 erwähnten Annahme, daß das Drehungsvermögen der betreffenden Krystalle auf einem spiralförmigen Aufbau aus doppeltbrechenden Lamellen beruhe; da deren Doppelbrechung nämlich durch die Temperatur beeinflußt wird, so muß für die aus derselben sich ergebende Drehung der Polarisationsebene das gleiche der Fall sein. Für den Quarz ist nachgewiesen worden, daß sein Drehungsvermögen mit steigender Temperatur zunimmt, und zwar schneller als letztere, aber für alle Farben merklich um gleich viel.

3. Zweiaxige Krystalle. In diesen Krystallen ist die Ausdehnung durch die Wärme eine andere in der Schwingungsrichtung der größten, in derjenigen der mittleren und der der kleinsten Lichtgeschwindigkeit; folglich erleiden die drei Hauptbrechungsindices ungleiche Änderungen, wenn der Krystall auf eine höhere Temperatur gebracht wird. Beim Aragonit, wo dies zuerst durch die Messungen Rudbergs nachgewiesen worden ist, entspricht der Richtung der größten, mittleren und kleinsten Ausdehnung durch die Wärme die kleinste, größte und mittlere Abnahme der Brechungsndices, beim Gyps nach Dufets Beobachtungen der größten, mittleren und kleinsten Ausdehnung auch die größte, mittlere und kleinste Abnahme der Brechung der jenen Richtungen parallel schwingenden Strahlen, nur fallen hier die Richtungen der Maxima und Minima nicht genau zusammen, weil der Gyps zu den Krystallen mit dispergierten Hauptschwingungsrichtungen gehört. Die drei isomorphen Mineralien Schwerspat (schwefelsaures Baryum), Cölestin (schwefelsaures Strontium) und Anglesit (schwefelsaures Blei) zeigen nach den Untersuchungen von Arzruni sämtlich die stärkste Abnahme

bei dem größten Brechungsindex γ, die kleinste bei α, aber das Verhältnis der Ausdehnung durch die Wärme in den drei Hauptschwingungsrichtungen ist nicht übereinstimmend; denn während bei dem ersten dieser Körper diejenige der mittleren Lichtgeschwindigkeit die größte Ausdehnung erfährt, ist es bei dem Anglesit die der kleinsten, die sich am meisten ausdehnt. Etwas abweichende Werte für Baryt fand Offret, welcher außerdem in einer sehr umfangreichen und sorgfältigen Untersuchung zeigte, daß im Topas, Cordierit, Sanidin und Oligoklas sämtliche drei Hauptbrechungsindices nicht ab-, sondern zunehmen. Eine Abnahme der Brechungsindices zeigte sich nur bei denjenigen Substanzen, welche sehr große Ausdehnungscoefficienten besitzen. Man kann daher annehmen, daß hier die Abnahme durch die bei der Erhöhung der Temperatur erfolgte große Volumänderung, d. h. Abnahme der Dichte, verursacht sei, und das eigentliche Brechungsvermögen der Substanz, auf gleiche Dichte bezogen, stets mit der Temperatur zunehme. Die Untersuchung Offrets umfaßte auch die Änderung der Doppelbrechung und der Dispersion durch die Wärme und führte zu dem Resultate, daß die Dispersion bei allen untersuchten Körpern mit der Temperatur zunimmt, die Doppelbrechung dagegen nicht nur in verschiedenen Substanzen, sondern auch für die verschiedenen Hauptbrechungsindices einer und derselben Substanz teils wächst, teils abnimmt.

Daß die durch die Wärme hervorgebrachte Änderung der den drei Hauptschwingungsrichtungen entsprechenden Lichtgeschwindigkeiten bei allen zweiaxigen Krystallen eine ungleich große ist, kann leicht auf indirectem Wege nachgewiesen werden, und dieser Beweis ist bereits für zahlreiche Substanzen erbracht worden. Wenn nämlich die drei Hauptbrechungsindices durch die Erwärmung ungleich geändert werden, so ändert sich auch ihr Verhältnis zueinander; von diesem hängt aber die Größe des Winkels der optischen Axen ab, es muß also auch dieser eine Function der Temperatur sein, d. h. größer oder kleiner werden, wenn der Krystall erwärmt wird. Um dies zu constatieren, muß man die S. 130 beschriebene Methode mit einer solchen Änderung anwenden, daß sich bei der Messung des Axenwinkels der Krystall in einer constanten höheren Temperatur befindet. Dies geschieht dadurch, daß man zwischen die Sammellinse und das Objectiv des horizontalen Polarisationsinstrumentes einen nach beiden Seiten weit hervorragenden Metallkasten einschiebt, in dessen Vorder- und Hinterwand je eine planparallele Glasplatte eingefügt ist, so daß man wie vorher durch das Instrument das Licht fallen lassen kann. Ist der Krystall nun zwischen diesen beiden Glasplatten, im Innern des Kastens, centriert und drehbar befestigt, und die Luft in dem letzteren erhitzt und durch längere Zeit hindurch auf constanter (durch eingesetzte Thermometer gemessener) Temperatur gehalten, wodurch also auch die Krystallplatte in allen ihren Teilen dieselbe angenommen hat, so ergibt die Messung, ganz ebenso angestellt, wie bei gewöhnlicher Temperatur, die jener entsprechende Größe des Axenwinkels.

Zahlreiche, besonders von Des Cloizeaux ausgeführte Bestimmungen des Winkels der optischen Axen bei verschiedenen Temperaturen mittels eines derartigen Erhitzungsapparates (dessen Einrichtung in der III. Abteilung eingehender beschrieben werden soll) haben nun gezeigt, daß in der Tat jener Winkel sich bei allen untersuchten Körpern mit der Temperatur ändert, bei einigen so wenig, daß der Unterschied kaum durch die Messung constatiert werden konnte, bei der größten Zahl um mehrere Grade bei einer Erwärmung auf 100°, während es endlich auch Krystalle gibt, deren optische Axen ihre Richtung schon bei geringerer Erwärmung um viele Grade ändern. Unter diesen befindet sich z. B. der Gyps, dessen Axenwinkel beim Erwärmen so rasch abnimmt, daß er schon bei einer noch unter 100° C befindlichen Temperatur gleich Null wird, also bei einem gewissen Wärmegrade der kleinste Brechungsindex für eine bestimmte Farbe gleich dem mittleren wird. Der Krystall ist dann temporär einaxig, aber natürlich wegen der Dispersion der Axen bei einer Temperatur nur für eine Farbe, nicht für die übrigen (während ein eigentlicher, d. h. permanent einaxiger Krystall es bekanntlich für alle Farben und für alle Temperaturen ist). Wird ein Gypskrystall nun noch weiter erwärmt, so daß der vorher kleinste Brechungsindex noch weiter zunimmt, demnach größer wird, als der vorher mittlere, so ist nun die Axenebene senkrecht zu ihrer vorigen Lage, d. h. die optischen Axen gehen bei weiterer Erwärmung in der zur ersten normalen Ebene auseinander, und man sieht leicht ein, daß die Axen für diejenige Farbe, für welche vorher deren Winkel den kleinsten Wert hatte, nunmehr den größten Winkel, verglichen mit dem der andern Farben, einschließen. Dieselbe Erscheinung zeigen Sanidin und Glauberit; bei letzterem, dessen Krystalle einen sehr kleinen Axenwinkel besitzen, tritt die Einaxigkeit successive für violettes, blaues usw. bis rotes Licht schon zwischen 17° und 58° C ein.

Die drei letztgenannten Substanzen gehören übrigens zu einer derjenigen Gruppen von Krystallen, deren Hauptschwingungsrichtungen für verschiedene Farben nicht zusammenfallen, daher auch die thermischen Axen eine von der jener abweichende Orientierung besitzen. In Übereinstimmung damit ist auch die Richtung der ersten Mittellinie der optischen Axen in diesen Krystallen nicht nur von der Farbe, sondern auch von der Temperatur abhängig, d. h. bei steigender Temperatur ändert sich die Orientierung der Mittellinie zur Krystallplatte, und infolgedessen beobachtet man eine ungleiche Winkelbewegung der beiden optischen Axen im Gesichtsfelde. Erwärmt man z. B. eine senkrecht zur 1. Mittellinie für mittlere Farben geschliffene Gypsplatte allmählich, so sieht man deutlich, wie die beiden Axen sich mit ungleicher Geschwindigkeit einander nähern, bis sie bei einer bestimmten Temperatur zusammenfallen in einer Richtung, welche merklich schief zur Platte steht; bei weiterem Erwärmen entfernen sich beide Axen in der zur früheren Axenebene senkrechten Ebene voneinander, und zwar gleich schnell — weil im Gyps ein optischer Hauptschnitt für

alle Farben gemeinsam ist, und daher alle optischen Erscheinungen in bezug auf diese Ebene vollkommen symmetrisch stattfinden —, aber die Lage der Mittellinie verschiebt sich weiter in demselben Sinne, wie vorher. In Krytallen, in welchen sämtliche drei Hauptschwingungsrichtungen für alle Farben identische Orientierung besitzen, ist vollständige Symmetrie der optischen Eigenschaften nach den drei aufeinander senkrechten Hauptschnitten für alle Temperaturen (soweit die Substanz nicht verändert wird) vorhanden. Ein derartiger Krystall, demselben Versuche unterworfen, zeigt also eine vollkommen gleich schnelle Annäherung oder Entfernung der optischen Axen voneinander, d. h. constante Orientierung der Mittellinie.

Aus den soeben geschilderten Erscheinungen geht also hervor, daß infolge der Änderung der Doppelbrechung mit der Temperatur die Indexfläche eines zweiaxigen Krystalles bei einem andern Wärmeinhalte desselben eine andere Gestalt, d. h. ein anderes Verhältnis ihrer drei Axen, besitzt, daß aber ihre Orientierung im Krystalle eine constante ist, wenn keine Dispersion jener Axen für die verschiedenen Farben vorhanden ist; andernfalls hängt auch ihre Orientierung von der Temperatur ab.

3. Magnetische und elektrische Eigenschaften.

Magnetische Induction.

Wenn man ein aus einem amorphen Körper, z. B. Glas, gefertigtes Stäbchen horizontal drehbar zwischen den beiden Polen eines starken Elektromagneten an einem dünnen verticalen Faden (z. B. einem Coconfaden) aufhängt, so wird in dem Stäbchen Magnetismus induciert, und zwar so, daß seine beiden Enden entweder von den beiden Magnetpolen angezogen oder beide von diesen abgestoßen werden. In ersterem Falle, welcher z. B. eintritt, wenn das Stäbchen aus eisenhaltigem Glase besteht, suchen sich beide Enden den Magnetpolen so sehr als möglich zu nähern, d. h. das Stäbchen dreht sich, bis es genau mit seiner Längsaxe in der Verbindungslinie der Magnetpole steht, d. h. bis seine Längsrichtung den magnetischen Kraftlinien parallel ist; die angenommene Stellung, in welcher es verharrt, da in dieser offenbar seine Enden den Polen am nächsten stehen, nennt man die axiale Stellung. Besteht das Stäbchen dagegen aus eisenfreiem Glase, so werden seine Enden von beiden Polen des Magneten gleich stark abgestoßen, dasselbe kann sich also nur in derjenigen Stellung in Ruhe befinden, in welcher beide Enden die größtmögliche Entfernung von den Polen haben. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn die Längsrichtung senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien ist, das Stäbchen dreht sich also in der horizontalen Ebene, bis es quer gegen die Verbindungslinie der beiden Magnetpole steht; diese Stellung nennt man die äquatoriale.

Nach diesem Verhalten im »magnetischen Felde« werden alle Substanzen in zwei Klassen eingeteilt, von denen man diejenigen, welche von

den Magnetpolen angezogen werden, die paramagnetischen, die davon abgestoßenen die diamagnetischen nennt. Die Stärke der magnetischen Induction wird angegeben durch eine Größe, welche man den »Magnetisierungscoefficienten« nennt; dieser hat im ersteren Falle einen positiven, im zweiten einen negativen Wert.

Hängt man eine aus irgendeinem amorphen Stoffe, sei es ein para- oder ein diamagnetischer, gefertigte Kugel genau in die Mitte zwischen zwei Magnetpole, so wird dieselbe in jeder Lage in Ruhe bleiben, da sie sich in allen ihren Durchmessern gleichmäßig verhält, diese aber gleich lang sind, folglich sämtlich gleich stark magnetisiert werden. Man nennt einen solchen Körper magnetisch isotrop.

Anders verhalten sich dagegen (wie Plücker zuerst nachgewiesen) im allgemeinen die Krystalle, indem in diesen die Intensität der inducierten Magnetisierung in analoger Weise von der Richtung abhängig ist, wie bei den bisher betrachteten physikalischen Eigenschaften. Dieselbe läßt sich also ebenso darstellen durch ein im allgemeinsten Falle dreiaxiges Ellipsoid, das sog. Inductionsellipsoid, dessen drei Hauptaxen proportional den drei »Hauptmagnetisierungscoefficienten« sind. In dem speciellen Falle der optisch einaxigen Krystalle geht das Inductionsellipsoid in ein Rotationsellipsoid, in dem Falle eines einfachbrechenden Krystalles in eine Kugel über. Ob der Krystall ein para- oder diamagnetischer ist, erfährt man durch Aufhängen eines sehr dünnen, mit dem Pulver des Krystalles gefüllten Glasröhrchens zwischen den Polen des Magneten. Da die Partikel des Pulvers alle möglichen Orientierungen besitzen, wird der Einfluß der Richtung vollständig eliminiert, und es hängt die Einstellung des Röhrchens nur davon ab, ob die Substanz an sich para- oder diamagnetisch ist. Das Verhalten der verschiedenen Gruppen der Krystalle ergibt sich aus obigem in folgender Weise:

1. Die einfachbrechenden Krystalle erhalten nach allen Richtungen gleichen Grad des Para- oder des Diamagnetismus; folglich verhalten sie sich genau wie amorphe Körper, d. h. eine Kugel nimmt zwischen den Polen keine bestimmte Stellung an. Um zu bestimmen, ob die Substanz para- oder diamagnetisch ist, genügt es also, ein Stäbchen aus derselben in irgendeiner Richtung herauszuschneiden, zwischen die Magnetpole zu hängen und zu beobachten, ob es sich axial oder äquatorial einstellt.

2. Die optisch einaxigen Krystalle nehmen in der Richtung der Axe den stärksten Para- oder Diamagnetismus an, senkrecht dazu (nach allen Seiten gleich) den geringsten (magnetisch positive Krystalle), oder umgekehrt ist die eine oder die andere Eigenschaft in der ersteren Richtung im Minimum, in der letzteren im Maximum (magnetisch negative Krystalle); sie sind also auch magnetisch einaxig, und ihre magnetische Axe fällt mit der optischen zusammen. Eine Kugel, aus einem einaxigen Krystalle geschnitten, wird also nur dann zwischen den Polen eines Magneten in jeder Stellung in Ruhe bleiben, wenn sie so aufgehängt wird, daß sie

sich nur um ihre optische bzw. magnetische Axe drehen kann, weil dann alle in der horizontalen Drehungsebene liegende Richtungen gleiche magnetische Induction erfahren. Wird sie dagegen so aufgehängt, daß die Axe in der Drehungsebene liegt, so wird sie stets eine ganz bestimmte Einstellung annehmen[1]; es stellt sich nämlich die Richtung ihrer Axe,

A) wenn der Krystall paramagnetisch und positiv ist, axial, wenn dabei seine Axe das Minimum des Magnetismus zeigt, äquatorial;

B) wenn der Krystall diamagnetisch und positiv ist, äquatorial; wenn er aber diamagnetisch negativ ist, axial.

Ganz ebenso verhält sich ein aus dem Krystalle geschnittener Würfel, dessen drei Flächenpaare genau gleichen Abstand haben und deren eines normal zur Axe ist, wenn derselbe so aufgehängt wird, daß die Axe sich in der horizontalen Ebene befindet.

3. Die optisch zweiaxigen Krystalle haben drei verschiedene Hauptmagnetisierungscoefficienten nach drei aufeinander senkrechten Richtungen; die im Magnetfelde auf sie ausgeübte Induction entspricht also einem dreiaxigen Ellipsoide. Da ein solches zwei Kreisschnitte besitzt, so existieren in jedem zweiaxigen Krystalle zwei Ebenen, in welchen alle Richtungen gleich starke Magnetisierung erfahren. Wird eine Kugel normal zu einer derselben so aufgehängt, daß sie innerhalb einer solchen Ebene drehbar ist, so verhält dieselbe sich im Magnetfelde wie ein magnetisch isotroper Körper. Die beiden Normalen zu diesen Ebenen heißen die magnetischen Axen; die optisch zweiaxigen Krystalle sind demnach auch magnetisch zweiaxig. Bei jeder andern, als der eben beschriebenen, Art der Aufhängung nimmt eine Kugel im Magnetfelde eine bestimmte Art der Einstellung an, derart, daß sich unter allen in der Drehungsebene liegenden Richtungen diejenige des stärksten Magnetismus, bzw. des schwächsten Diamagnetismus, axial stellt.

In denjenigen Krystallen, in welchen die Orientierung der Axen der optischen Indexflächen für alle Farben die gleiche ist, besitzen auch die drei Hauptaxen des magnetischen Inductionsellipsoides die gleichen Richtungen. Wenn man also aus einem solchen Krystalle einen Würfel schneidet, dessen Flächen den drei optischen Hauptschnitten parallel sind, und denselben so aufhängt, daß ein Flächenpaar der horizontalen Drehungsebene parallel ist, so stellt er sich zwischen den Magnetpolen stets so ein, daß eines der beiden andern Flächenpaare axial, das dritte äquatorial wird, und zwar nimmt dasjenige die erstere Stellung an, dessen Normale schwächeren

[1] Aus der von Lord Kelvin entwickelten Theorie der magnetischen Induction in anisotropen Medien läßt sich das Drehungsmoment berechnen, welches auf eine Kugel von bekanntem Volum ausgeübt wird, aus der Stärke des magnetischen Feldes, den Hauptmagnetisierungscoefficienten der Kugel und deren Orientierung. Messungen dieses Drehungsmomentes an Kugeln von Kalkspat ergaben eine vollständige Übereinstimmung mit der Theorie.

Para- oder stärkeren Diamagnetismus hat, als die Normale zum dritten Flächenpaare. Hängt man nun den Würfel das zweite Mal so auf, daß eine andere Hauptschwingungsrichtung vertical ist, so wird die Einstellung lehren, welche der beiden, alsdann horizontalen Hauptschwingungsrichtungen größeren Para- oder Diamagnetismus besitzt. Hierdurch ist nunmehr bestimmt, welche der drei Hauptaxen des Inductionsellipsoides die der größten, mittleren und kleinsten Magnetisierungsconstante ist (ob die letzteren Größen einen positiven oder negativen Wert haben, ermittelt man wieder in der auf S. 197 angegebenen Weise).

In denjenigen Krystallen, in welchen nur eine Hauptschwingungsrichtung für alle Farben identisch ist, stellt dieselbe auch zugleich die Richtung einer der drei Hauptaxen des Inductionsellipsoides dar; die beiden andern liegen demnach in der dazu senkrechten Ebene, in welcher auch die beiden andern Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes liegen; ihre Orientierung gegen die letzteren ist alsdann durch Aufhängung des Krystalles nach der ersten (gemeinsamen) Axe zu ermitteln. Handelt es sich hierbei um die Richtung des größten und des kleinsten Hauptmagnetisierungscoefficienten, so liegen in derselben Ebene auch die beiden magnetischen Axen. Ist aber die gemeinsame Axe die Richtung einer der beiden genannten Coefficienten, so steht die Ebene der magnetischen Axen offenbar senkrecht zu jener Ebene.

In den Krystallen endlich, in welchen alle drei Hauptaxen der optischen Indexfläche für verschiedene Farben dispergiert sind, besitzen diejenigen des Inductionsellipsoides eine von jenen unabhängige, für jeden einzelnen Fall erst zu ermittelnde Orientierung. Stets sind aber drei zueinander senkrechte Richtungen und drei durch dieselben gegebene Ebenen vorhanden, in bezug auf welche die Intensität der Magnetisierung sich mit der Richtung symmetrisch ändert, d. h. stets kann diese Eigenschaft durch ein dreiaxiges Ellipsoid dargestellt werden.

Während im allgemeinen der inducierte Magnetismus nur so lange existiert, als der Krystall sich unter dem Einflusse des magnetischen Feldes befindet, erfahren gewisse Substanzen durch einen starken Elektromagneten eine permanente Magnetisierung, so daß sie sich gleichsam zu den übrigen, den temporär magnetisierten, verhalten, wie Stahl zu weichem Eisen. Dies gilt z. B. für die Krystalle des Magnetit[1]), ferner für diejenigen von Eisenglanz und Magnetopyrit, welche magnetisch einaxig sind und in welchen der remanente Magnetismus in der Richtung der Axe sehr groß, senkrecht dazu sehr klein (beim Magnetopyrit nicht mehr meßbar) ist, endlich in geringem Grade, sowohl parallel als senkrecht zur Axe, auch für Quarz.

---

1) Die Krystalle dieses Minerales müßten nach ihren sonstigen Eigenschaften zu den magnetisch isotropen gehören. P. Weiss fand jedoch, daß dieselben nach verschiedenen Richtungen ungleichen Magnetismus zeigen, und erklärt dies durch einen regelmäßigen Aufbau aus magnetischen und unmagnetischen Schalen.



Elektrische Eigenschaften leitender Krystalle.

Die elektrische Leitungsfähigkeit metallischer krystallisierter Körper bietet das vollkommene Analogon zu der Leitungsfähigkeit der Krystalle für die Wärme und steht auch ihrem Werte nach mit dieser in gesetzmäßiger Beziehung. Dementsprechend sind die einfachbrechenden Krystalle nicht nur optisch, sondern auch elektrisch isotrop, d. h. die Leitungsfähigkeit für den elektrischen Strom ist innerhalb eines solchen in allen Richtungen gleich groß[1]), während sie in einem optisch einaxigen Krystalle in der Richtung der Axe ein Maximum oder ein Minimum besitzt und von dieser aus ab- oder zunimmt bis zu den sämtlich untereinander gleichwertigen Richtungen senkrecht zur Axe. Diese Eigenschaft kann also, wie die thermische Leitungsfähigkeit, dargestellt werden durch ein Ellipsoid, und zwar in dem Falle der einaxigen Krystalle durch ein Rotationsellipsoid. Die Gestalt dieses letzteren wurde für die Krystalle des Wismutes bestimmt durch Mateucci, für diejenigen des Eisenglanzes durch Bäckström; in ersteren verhält sich die Leitungsfähigkeit in der Axe zu derjenigen in einer dazu normalen Richtung wie 1,6 : 1, im Eisenglanze dagegen wie 1 : 1,96[2]) (bei gewöhnlicher Temperatur, während in höherer dieses Verhältnis merklich kleiner wird). Die absoluten Werte der elektrischen Leitungsfähigkeit zeigen bei dem letzteren Minerale nach Bäckström eine bedeutende Zunahme mit der Temperatur, wie bei Elektrolyten und Isolatoren, obgleich die Krystalle ziemlich gute Leiter sind.

Wird eine quadratische dünne Platte eines metallischen Krystalles in ein Magnetfeld, mit ihrer Ebene senkrecht zu den Kraftlinien, gebracht und durch die Mitten zweier gegenüberliegender Seiten derselben ein elektrischer Strom durchgeleitet, so wird in der Platte ein elektrischer Strom senkrecht zu dem ersten erregt (»Halleffect«). Die Stärke dieses Stromes ist nach den Beobachtungen von Everdingen beim Wismute groß für eine Magnetkraft senkrecht zur Hauptaxe, sehr klein für eine solche parallel der Axe. Für eine willkürliche Orientierung der Ebene der Platte im Krystalle kann die Stärke des Halleffectes berechnet werden durch ein Rotationsellipsoid, dessen Gestalt durch die Werte parallel und senkrecht zur Axe bestimmt ist.

---

1) Dies wurde zuerst von Bäckström durch Messung des Widerstandes verschieden orientierter Stäbe von Magnetit, welcher nach seiner Krystallform der Gruppe der einfachbrechenden Krystalle angehören muß, nachgewiesen, indem diese bei gleicher Temperatur (die Leitungsfähigkeit dieses Körpers nimmt mit steigender Temperatur langsam zu) stets gleichen Widerstand ergaben. Anders verhält sich dasselbe Mineral beim Contact mit Elektrolyten: werden zwei Stücke desselben mit je einer Fläche, deren Normalen ungleichwertigen Richtungen im Krystalle entsprechen, in eine Flüssigkeit eingetaucht und leitend verbunden, so liefern sie einen Strom, verhalten sich also wie zwei ungleiche Metalle (vgl. Anmerk. S. 199).

2) In letzterem Minerale ist auch das Wärmeleitungsvermögen am kleinsten in der Richtung der Axe, aber das Verhältnis für beide Richtungen ist ein anderes (1,12).

Thermoelektricität. Wird die Berührungsstelle zweier leitend verbundener metallischer Substanzen auf eine andere Temperatur gebracht, als der übrige Stromkreis, so entsteht bekanntlich ein sog. »Thermostrom«, und man bezeichnet dasjenige der beiden Metalle, nach welchem hin der Strom sich bewegt, wenn die Contactstelle erwärmt wird, als positiv in bezug auf das andere; beim Abkühlen der Contactstelle fließt der Strom durch dieselbe in umgekehrter Richtung, vom positiven zum negativen Metalle. Nach der Stärke des bei gleich großer Temperaturdifferenz zwischen der Contactstelle und dem übrigen Stromkreise entstehenden Thermostromes ordnet man die metallischen Substanzen in eine Reihe, die thermoelektrische Spannungsreihe, an deren positivem Ende von den gewöhnlichen Metallen das Antimon steht, während das stärkst negative das Wismut ist. Die Berührungsstelle zweier metallischer Körper liefert daher bei gleicher Temperaturänderung einen um so stärkeren Thermostrom, je näher das positive der beiden in der Spannungsreihe dem Antimon, und je näher das negative dem Wismut steht.

Bei den zur Klasse der metallischen Körper gehörigen Krystallen ist nun die thermoelektrische Kraft im allgemeinen eine Function der Richtung, so daß also zwei Stäbe, in verschiedener Richtung aus einem solchen Krystalle geschnitten und zur Berührung gebracht, bei einer Temperaturänderung sich verhalten, wie zwei verschiedene Metalle, d. h. einen Thermostrom hervorbringen. Dies wurde zuerst von Svanberg und Franz an den Krystallen von Antimon und von Wismut nachgewiesen, und durch vollständigere Bestimmungen von Bäckström der Beweis geliefert, daß die Gesetze der Abhängigkeit der thermoelektrischen Kraft von der Richtung analog denen der elektrischen Leitungsfähigkeit sind. Dementsprechend ist diese Kraft in allen Richtungen gleich groß nur bei den optisch isotropen Krystallen; zwei verschieden orientierte Stäbe aus einem solchen liefern keinen Thermostrom. Erwärmt man dagegen die Berührungsstelle eines und desselben Metalles, z. B. Kupfer, mit einem leitenden einaxigen Krystalle, einmal mit einer der Axe parallelen Fläche desselben, das andere Mal mit einer zur Axe senkrechten, so erhält man Thermoströme von verschiedener Stärke. Das gleiche ist der Fall in bezug auf Flächen, welche zur Axe verschieden geneigt sind, während alle mit der Axe den gleichen Winkel einschließenden Flächen sich thermoelektrisch gleichwertig erweisen. Die thermoelektrische Kraft ändert sich mit der Richtung im Krystalle, wie die Länge der Radien vectoren eines Rotationsellipsoides. In analoger Weise entsprechen Flächen eines leitenden zweiaxigen Krystalles, welche in bezug auf ein dreiaxiges Ellipsoid ungleich orientiert sind, verschiedenen Stellen in der thermoelektrischen Spannungsreihe. Berührt man daher solche Flächen mit einem erwärmten Drahte eines Metalles, welches in jener Reihe zwischen ihnen steht, so verhält sich die eine Fläche gegen dasselbe positiv, die andere dagegen negativ.

Zu diesen durch verschiedene Orientierung im Krystalle bedingten

Differenzen treten aber meist noch weitere dadurch hinzu, daß sehr geringe Beimengungen erhebliche Verschiedenheiten in den thermoelektrischen Eigenschaften einer Substanz hervorzubringen imstande sind. Solche Beimengungen sind aber in den natürlichen Krystallen der metallischen Mineralien sehr häufig, und daher erklärt es sich, daß manche derselben bei der Berührung mit einem erwärmten Kupferdrahte teils einen Strom in dem einen Sinne, teils im entgegengesetzten liefern. Indessen gibt es einige Mineralien, deren Krystalle zweien an sich verschiedenen Modificationen anzugehören scheinen, in ähnlicher Weise, wie diejenigen des Quarzes den beiden Arten der rechts- und linksdrehenden (S. 155 f.), und zwar handelt es sich hier um Substanzen, welche der Gruppe der einfachbrechenden angehören, d. h. nach verschiedenen Richtungen die gleiche thermoelektrische Kraft äußern. Marbach fand nämlich, daß die Krystalle des Pyrit (Eisenkies, Schwefelkies), wie diejenigen des Kobaltin (Kobaltglanz), in der thermoelektrischen Spannungsreihe z. T. jenseits des positiven Antimons, z. T. jenseits des negativen Wismutes ihren Platz haben, so daß ein Pyritkrystall der ersten Art mit einem solchen der zweiten Art combiniert einen stärkeren Thermostrom liefert, als Antimon mit Wismut. Bei dieser großen Verschiedenheit ist es wahrscheinlich, daß dieselbe nicht durch geringe Beimengungen bewirkt wird, sondern auf einem Gegensatze der Structur der betreffenden Krystalle beruht, in ähnlicher Weise, wie dies beim Quarze der Fall ist. (Näheres darüber siehe in der II. Abteilung bei den Krystallformen der betreffenden Substanzen.)

Elektrische Eigenschaften isolierender Krystalle.

Genau so, wie in nicht magnetischen Körpern unter dem Einflusse eines Elektromagneten Magnetismus induciert wird, nehmen sog. Isolatoren, d. h. die Elektricität nicht leitende Substanzen, unter dem Einflusse benachbarter elektrischer Körper durch Verteilung (Influenz, Induction) eine elektrische Polarität an; man nennt sie deshalb Dielektrica und bezeichnet ihre Erregung als dielektrische Polarisation[1]). Die Stärke dieser Erregung wird durch eine Größe bestimmt, die sog. »Dielektricitätsconstante«, von welcher in der durch Maxwell aufgestellten elektromagnetischen Lichttheorie angenommen wird, daß dieselbe proportional sei dem Quadrate des Brechungsindex. Nach dieser Theorie können durch einen Isolator transversale elektrische Wellen sich ebenso fortpflanzen, wie Lichtwellen, und sie unterscheiden sich von diesen überhaupt nur durch die Größe ihrer Wellenlänge. Aus Maxwells Theorie folgt somit, daß doppeltbrechende

---

1) Trotz der hier auftretenden Polarität gehört die Dielectricität zu den bivectoriellen Eigenschaften, weil die Umkehrung des einen (an sich vectoriellen) elektrischen Zustandes die Umkehrung des andern zur Folge hat und daher eine Ungleichwertigkeit der beiden entgegengesetzten Richtungen im Krystalle, selbst wenn sie vorhanden wäre, nicht zur Geltung kommen kann.

Krystalle, weil sie im allgemeinen für verschieden gerichtete Schwingungen des Lichtes verschiedene Brechungsindices besitzen, auch entsprechende Verschiedenheiten der Dielektricitätsconstante zeigen müssen. Dies lehrt in der Tat die Erfahrung. Eine Kugel eines optisch isotropen Dielektricums stellt sich zwischen zwei entgegengesetzt elektrisierten Metallflächen (im »elektrischen Felde«) ebensowenig ein, wie eine Kugel eines magnetisch isotropen Körpers im Magnetfelde; Kugeln dagegen, welche aus doppeltbrechenden Krystallen geschliffen sind, zeigen eine bestimmte Einstellung, d. h. sie werden nach gewissen Richtungen stärker elektrisch erregt, als nach andern. Im allgemeinsten Falle, dem eines optisch zweiaxigen Krystalles, wird die Größe der Dielektricitätsconstante in ihrer Abhängigkeit von der Richtung dargestellt durch ein dreiaxiges Ellipsoid, dessen größte, mittlere und kleinste Axe mit der dem größten, mittleren und kleinsten Brechungsindex entsprechenden Schwingungsrichtung zusammenfallen, sobald letztere für alle Farben gleichartig orientiert sind. Untersuchungen von Boltzmann an einer Kugel von Schwefel haben in der Tat für die Dielektricitätsconstante in den drei Hauptschwingungsrichtungen, gemessen mit langen elektrischen Wellen, Werte ergeben, welche genügend mit den von der Theorie erforderten Brechungsindices für sehr große Wellenlänge übereinstimmen. Die Maxwellsche Theorie hat jedoch zu ihrer Voraussetzung, daß der betreffende Körper ein absoluter Isolator sei. Dies ist nun bei dem Schwefel nahezu vollkommen der Fall, während die meisten Dielektrica weniger vollkommene Isolatoren sind und ein gewisses, wenn auch geringes elektrisches Leitungsvermögen besitzen. Infolge dieses Umstandes tritt die elektrische Polarität derselben nicht, wie die magnetische, sofort bei dem Beginne der Induction mit der entsprechenden Intensität auf und bleibt während derselben constant, solange die wirkenden elektrischen Kräfte sich nicht ändern, sondern es läßt sich eine Abhängigkeit der Erregung von der Zeit erkennen, aus welcher man auf die Größe der vorhandenen inneren Leitungsfähigkeit zu schließen imstande ist. Auf diesem indirecten Wege hat z. B. J. Curie die elektrische Leitungsfähigkeit einer Anzahl krystallisierter Substanzen nach verschiedenen Richtungen bestimmt. Für die Dielektricitätsconstanten solcher Körper ergaben sich hierbei meist erheblich größere Werte, als die für vollkommene Isolatoren aus der Theorie folgenden, aber dieselben befolgen die gleichen Gesetzmäßigkeiten, d. h. sie sind gleich groß für alle Richtungen eines einfachbrechenden Krystalles, sie entsprechen in einem optisch einaxigen Krystalle einem Rotationsellipsoide, und zwar mit dem Maximum der Dielektricitätsconstante in der optischen Axe (der Rotationsaxe), wenn der Krystall positive Doppelbrechung besitzt, mit dem Minimum dagegen, wenn die Doppelbrechung negativ ist, usf. Die bei derselben Untersuchung ermittelten Leitungsfähigkeiten erwiesen sich als sehr stark beeinflußt durch höchst geringe Mengen von in den Krystallen eingeschlossenen fremden Körpern, namentlich mikroskopischen Flüssigkeitseinschlüssen, infolge deren

die betreffenden Krystalle in gewissen Richtungen sich wie Elektrolyten verhielten.

Bei dem gut isolierenden Schwefel entsprechen, wie erwähnt, die Werte der drei Hauptdielektricitätsconstanten mit genügender Genauigkeit den Quadraten der drei Hauptbrechungsindices für unendlich große Wellen. In neuester Zeit sind jedoch (von Schmidt und von Fellinger) ebenfalls gute Isolatoren unter den Krystallen gefunden worden, welche diese von der Maxwellschen Theorie geforderte Beziehung nicht zeigen. Der optisch einaxige, und zwar negative Siderit hat in der Richtung der Axe die größte Dielektricitätsconstante, und im Baryt ist die Schwingungsrichtung des mittleren Brechungsindex nicht die Richtung der mittleren, sondern die der weitaus größten Dielektricitätsconstante. Dieses Resultat weist darauf hin, daß für unendlich große Wellen die Doppelbrechung eine ganz andere ist, als für die kleinen Wellen des sichtbaren Spectrums, so daß beim Baryt die Axenebene für erstere senkrecht gekreuzt zur Ebene der optischen Axen für sichtbare Lichtstrahlen ist, wie es z. B. im Brookit (s. S. 120) schon für verschiedene Farben der Fall ist (s. Graetz, Über elektrische Dispersion der Krystalle. Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904, 477).

Dielektrische Körper vermögen freie Elektricität auf ihrer Oberfläche fortzuleiten, und nach der Theorie muß diese superficielle Conductibilität auf der ebenen Oberfläche eines Krystalles nach verschiedenen Richtungen ungleich groß sein, wenn diese Richtungen sich in bezug auf die Dielektricitätsconstante des Krystalles unterscheiden, und zwar am größten in derjenigen Richtung, in welcher jene Constante ihr Maximum erreicht. Derartige Verschiedenheiten wurden in der Tat von G. Wiedemann und Sénarmont an doppeltbrechenden Krystallen experimentell nachgewiesen. Ersterer bestreute die ebene Oberfläche eines amorphen Körpers, wie Glas oder Harz, mit einem feinen, schlecht leitenden Pulver, z. B. Lycopodiumsamen, befestigte alsdann senkrecht darauf an einem geeigneten Halter eine isolierte Nähnadel und teilte derselben durch Annäherung des Knopfes einer mit positiver Elektricität geladenen Leidener Flasche Elektricität mit; alsdann wurde das Pulver von der elektrisierten Spitze aus abgestoßen, und eine kreisförmige von Strahlen durchzogene Fläche freigelegt. Nahm er nun statt des amorphen Körpers eine Krystallplatte, so erschien um die elektrisierte Spitze statt der kreisförmigen Figur im allgemeinen eine elliptische, deren größter und kleinster Durchmesser eine bestimmte Orientierung in bezug auf den Krystall besaßen; z. B. war bei Platten, aus einaxigen Krystallen parallel der Axe geschnitten, die große Axe der Ellipse stets parallel oder senkrecht zur optischen Axe. Allgemein zeigten sich hier die Verhältnisse genau analog denen der Wärmeleitungsfähigkeit, wie sie durch den Sénarmontschen Versuch (S. 178) sich ergaben. Übereinstimmend damit erhielt Wiedemann auf Platten einfachbrechender Krystalle immer eine kreisförmige Figur. Sénarmont beobachtete im Dunkeln die, je nach dem untersuchten Krystalle und der benutzten Fläche desselben,

kreisförmige oder elliptische Lichtfigur, welche durch die Entladung einer elektrisierten, auf die Krystallfläche aufgesetzten Metallspitze im luftverdünnten Raume entstand.

4. Homogene Deformationen.

Unter einer »homogenen Deformation« versteht man eine Änderung der Gestalt eines homogenen Körpers, durch welche er nicht aufhört, die Bedingungen der Homogenität (s. S. 3) zu erfüllen, und für welche folgende Beziehungen zwischen dem ursprünglichen und dem deformierten Körper bestehen[1]): Eine beliebige Gerade in dem nicht deformierten Körper ist auch nach der Deformation eine Gerade, während ihre Richtung durch die Deformation im allgemeinen eine Änderung erfährt; je zwei parallele Gerade in dem ursprünglichen Körper sind auch in dem deformierten Körper parallel, welche Änderung ihrer Richtung auch stattgefunden habe. Hieraus folgt ohne weiteres, daß eine Ebene, welche als Begrenzungsfläche des ursprünglichen Körpers auftritt, auch nach dessen Deformation noch eine Ebene ist, deren Stellung, d. h. deren Winkel zu andern den Körper begrenzenden Ebenen, jedoch eine Änderung erfahren haben kann, — ferner, daß je zwei parallele, den Körper begrenzende Ebenen auch nach der Deformation parallel sind, wie auch ihre Stellung sich geändert habe.

In einem einer homogenen Deformation unterworfenen Krystalle existieren immer drei zueinander senkrechte Richtungen, welche durch die Deformation ihre Lage nicht ändern, und denen parallel die größte, mittlere und kleinste Änderung der linearen Dimensionen des Krystalles stattfindet. Diese werden als die »Hauptaxen der Deformation« bezeichnet. Die Vergrößerung oder Verkleinerung der linearen Dimensionen in der Richtung dieser drei Hauptaxen der Deformation ist im allgemeinen eine verschiedene, so daß eine aus dem Krystalle hergestellte Kugel sich durch die Deformation in ein dreiaxiges Ellipsoid, das »Deformationsellipsoid«, verwandelt. Besitzt der Krystall die Form eines Würfels, dessen Kanten den drei Hauptaxen der Deformation parallel sind, so geht diese Gestalt durch die Deformation über in die eines rechtwinkeligen Parallelepipeds, dessen drei Seiten ungleich lang sind; ein Würfel, dessen Kanten eine andere Orientierung besitzen, verwandelt sich durch die Deformation in ein schiefwinkeliges Parallelepiped, dessen Kanten drei conjugierten Durchmessern des Deformationsellipsoides parallel laufen. Da ein dreiaxiges Ellipsoid zwei Kreisschnitte besitzt, so erfahren alle in diesen beiden Ebenen gelegenen Geraden die gleiche Längenänderung; die Figur, in welcher die äußere Form des Krystalles durch eine solche Ebene geschnitten wird, bleibt daher bei der Deformation des Krystalles sich selbst ähnlich, aber die

1) Diese Beziehungen bezeichnet man auch als solche der »Affinität«.

Winkel, welche die Flächen desselben mit jener Ebene bilden, können sich ändern.

Eine homogene Deformation wurde bereits behandelt, nämlich die Ausdehnung durch die Wärme (S. 181 f.), und ihr vollkommen entsprechend würde diejenige sein, welche ein allseitig gleicher Zug, der an allen Stellen des Krystalles gleichmäßig angriffe, hervorbringen würde. Eine homogene Deformation mit einer der vorigen entgegengesetzten Änderung der linearen Dimensionen findet statt, wenn ein Krystall von einer höheren Temperatur auf eine niedrigere gebracht wird, und dieselbe Wirkung hätte ein allseitig gleicher Druck, welcher an allen Stellen des Krystalles gleichmäßig zur Geltung kommt.

In bezug auf ihr Verhalten gegen eine homogene Deformation zerfallen die Krystalle in dieselben fünf Gruppen, wie in bezug auf alle übrigen bisher betrachteten Eigenschaften:

1. In denjenigen optisch zweiaxigen Krystallen, in welchen die Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes und die Hauptaxen des Absorptionsellipsoides für verschiedene Farben, ferner die Hauptaxen der Ellipsoide der Wärmeleitung, der magnetischen Induction und der dielektrischen Polarisation eine voneinander unabhängige Lage haben, ist auch die Orientierung der drei Hauptaxen der Deformation an keine allgemeine Gesetzmäßigkeit gebunden.

2. Ist eine Richtung im Krystalle eine Hauptaxe der Indexfläche und des Absorptionsellipsoides für alle Farben, also auch eine für jedes der Ellipsoide der bisher behandelten thermischen, magnetischen und elektrischen Eigenschaften, so geht ihr auch eine der Hauptaxen des Deformationsellipsoides parallel; eine homogene Deformation findet alsdann symmetrisch zu der auf dieser Axe normalen Ebene statt, d. h. die optische, thermische usw. Symmetrie nach dieser Ebene wird dadurch nicht verändert.

3. Fallen die Hauptschwingungsrichtungen für alle Farben zusammen, so coincidieren sie, wie mit den Hauptaxen der übrigen Ellipsoideigenschaften, auch mit den drei Hauptaxen der Deformation. Die Symmetrie aller dieser Eigenschaften nach den drei zueinander senkrechten optischen Hauptschnitten wird also durch eine homogene Deformation nicht alteriert, da diese ebenfalls symmetrisch zu diesen drei Ebenen stattfindet.

4. In den optisch einaxigen Krystallen sind zwei der Hauptaxen der Deformation gleich groß, das Deformationsellipsoid verwandelt sich in ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe die optische Axe ist.

5. In den einfachbrechenden Krystallen endlich sind alle drei Hauptaxen der Deformation gleich groß, das Deformationsellipsoid ist eine Kugel; diese Krystalle verhalten sich also nicht nur einer gleichmäßigen Veränderung ihrer Temperatur, sondern auch einem allseitig gleichen Drucke gegenüber wie amorphe Körper. Sie bilden zugleich die einzige Gruppe unter den Krystallen, in denen, wie in den amorphen Körpern, die durch

eine gleichmäßige Erwärmung hervorgerufene Deformation durch einen allseitig gleichen Druck compensiert werden kann.

Da die homogenen Deformationen, welche durch einen allseitig gleichen Druck oder Zug hervorgebracht werden, vollkommen den von einer gleichmäßigen Temperaturänderung bewirkten entsprechen, so gelten die S. 191 f. gegebenen Darlegungen des Einflusses der letzteren auf die optischen Eigenschaften auch für erstere. Die von ihnen verursachten Änderungen der Lichtgeschwindigkeit sind somit in allen optisch gleichwertigen Richtungen gleich groß, so daß ein einfachbrechender Körper auch nach der Deformation noch einfachbrechend, ein einaxiger Krystall noch einaxig ist, usf.

Die durch eine homogene Deformation bewirkte Änderung der linearen Dimensionen erfordert eine Entfernung der Teilchen des Krystalles voneinander in derjenigen Richtung, in welcher eine Vergrößerung (Dilatation) stattfindet, eine Annäherung derselben aneinander, wenn eine Verkleinerung der linearen Dimensionen (Compression) eintritt, in jedem Falle also eine Entfernung der Teilchen aus derjenigen Lage, in welcher die Kräfte, mit denen sie aufeinander wirken, im Gleichgewichte sind. Hierzu bedarf es einer Arbeit, welche im Falle der thermischen Ausdehnung von der zugeführten Wärme geleistet wird, im andern Falle eine äußere mechanische Kraft erfordert. Mit dem Aufhören der letzteren stellt sich infolge jener inneren Kräfte des Krystalles diejenige gegenseitige Lage der Teilchen wieder her, welche dem Gleichgewichte derselben entspricht, wenn die Deformation durch die erwähnte äußere Kraft eine gewisse Grenze nicht überschritten hatte. Diese Fähigkeit eines festen Körpers, seine vorige Gestalt wieder anzunehmen, heißt seine Elasticität, und danach werden diejenigen durch äußere Kräfte bewirkten Änderungen eines festen Körpers, welche infolge seiner Elasticität wieder verschwinden, wenn die deformierenden Kräfte aufhören zu wirken, elastische Deformationen genannt. Der Wert, welchen die Kraft nicht überschreiten darf, wenn keine dauernden Veränderungen der Gestalt des Körpers eintreten sollen, heißt die Elasticitätsgrenze. Innerhalb derselben ist die Verschiebung der Teilchen, also die Deformation des Körpers, der auf ihn wirkenden Kraft proportional.

Überschreitet der Wert der deformierenden Kraft die Elasticitätsgrenze, so erleidet der Krystall Deformationen, welche nicht wieder rückgängig werden. Die Eigenschaft eines Körpers, infolge weiterer Beanspruchung durch äußere Kräfte bleibende, aber allmähliche und stetige Veränderungen seiner Gestalt zu erleiden (ohne durch ein plötzliches Ereignis den Zusammenhang seiner Teile einzubüßen), heißt Plasticität. Die Kraft endlich, bei deren Einwirkung eine vollständige Trennung der Teilchen des Körpers eintritt, wird seine Festigkeitsgrenze genannt. Bezeichnet man den auf die Einheit der Angriffsfläche berechneten Wert der einwirkenden Kraft, bei welcher eine eben noch erkennbare bleibende

Deformation eintritt, als das »Maß der vollkommenen Elasticität«, die vorher definierte, ebenso berechnete Kraft als »das Maß der Festigkeit«, so ist die Plasticität des Körpers nichts anderes, als der Überschuß seiner Festigkeit über seine elastische Vollkommenheit. Wäre dieser gleich Null, so hieße der Körper absolut spröde. Einen »absolut spröden« Körper gibt es nicht, und auch scheinbar sehr spröde Körper sind noch in einem gewissen Grade plastisch. Versuche über diese Eigenschaft stellte Auerbach an, indem er eine planparallele Platte auf einer sphärischen Oberfläche (einer Linse) derselben Substanz aufruhen ließ und durch Gewichte belastete; die Berührung beider findet alsdann nicht mehr in einem Punkte, sondern in einer kleinen kreisförmigen Fläche statt, indem die Kugelfläche abgeplattet, zugleich aber auch die planparallele Platte eingedrückt wird. Das Gewicht, bei welchem der kleinste derartige Eindruck sich als bleibend erweist, abgezogen von demjenigen, bei welchem ein Sprung an dem Rande der kleinen kreisförmigen Druckfläche eintritt, ist nach dem Vorhergehenden ein Maß für die Plasticität. Nach dieser Methode erwiesen sich als die sprödesten Körper Glas und Quarz; während Kalkspat noch als verhältnismäßig spröde zu bezeichnen ist, besitzt der härtere Flußspat eine beträchtliche Plasticität, eine noch weit größere das allerdings auch sehr weiche Steinsalz. Daß die drei zuletzt genannten krystallisierten Körper plastisch sind, wurde von Kick auch durch Anwendung allseitigen Druckes auf dieselben nachgewiesen. Aus dem Verhältnisse von Kalkspat und Flußspat geht also hervor, daß »plastisch« nicht gleichbedeutend ist mit »weich« (über den Begriff der »Härte« s. S. 241).

Manche Krystalle besitzen einen so hohen Grad von Plasticität, daß die geringsten Kräfte genügen, sie zu deformieren, und bei einigen ist die Elasticitätsgrenze so nahe an Null, daß sie sich wie eine Flüssigkeit verhalten. Nach den Untersuchungen von Lehmann kann man ein Aggregat derartiger »fließender Krystalle« durch Druck oder Zug in parallele Orientierung bringen (Homöotropie L.), so daß die Masse, wenn die Krystalle doppeltbrechend sind, dann parallele Auslöschung zeigt. Endlich kann sogar die Oberflächenspannung die Elasticität übertreffen, und dann nimmt jeder Krystall die Form eines Tropfens an, wie eine vollkommene Flüssigkeit, deren Elasticitätsgrenze = 0 ist (»flüssige Krystalle« Lehmanns)[1]).

Wenn bei der Einwirkung einer äußeren Kraft auf einen Krystall die Elasticitätsgrenze überschritten wird, so führt dies im allgemeinen zu Deformationen, welche nicht mehr homogen sind, und bei der Überschreitung der Festigkeitsgrenze hört der Krystall überhaupt auf, als Ganzes zu existieren.

Diejenigen mechanischen Kräfte, welche homogene Deformationen bewirken (allseitig gleicher Zug und Druck), sind die einzigen, bei welchen,

1) O. Lehmann, Flüssige Krystalle sowie Plasticität von Krystallen im allgemeinen, molekulare Umlagerungen und Aggregatszustandsänderungen. Mit 483 Figg. im Text und 39 Taf. in Lichtdruck. Leipzig 1904.

wie bei einer gleichmäßigen Temperaturänderung, die Ursache der Deformation eine scalare, d. h. von einer bestimmten Richtung unabhängige, ist und nur deshalb eine nach verschiedenen Richtungen im allgemeinen ungleiche Wirkung im Krystalle hervorbringt, weil der letztere nach verschiedenen Richtungen nicht die gleiche Beschaffenheit besitzt und daher der Deformation nicht den gleichen Widerstand entgegensetzt. Ganz anders und erheblich complicierter, als in allen bisher betrachteten physikalischen Beziehungen, gestalten sich dagegen die Verhältnisse, wenn die Ursache der Deformation eine vectorielle wird, wenn also eine mechanische Kraft in einer gewissen Richtung auf einen krystallisierten Körper einwirkt. Die Wirkung bestimmt gerichteter Kräfte von gleicher Größe, aber verschiedener Orientierung in bezug auf bestimmte Richtungen im Krystalle, läßt sich auch im einfachsten Falle eines einfachbrechenden Krystalles nicht mehr durch eine Kugel, im allgemeinsten Falle nicht mehr durch ein dreiaxiges Ellipsoid darstellen, dessen drei Axen den Zahlenwert der betreffenden Eigenschaft für sämtliche übrigen Richtungen im Krystalle bestimmen. Es sind also die hierhergehörigen Eigenschaften der Elasticität und Cohäsion in einem Krystalle niemals nach allen Richtungen gleich groß. Auch hört der Krystall durch eine solche Deformation im allgemeinen auf, homogen zu sein. Die Abhängigkeit der stattfindenden Einwirkung der Kraft von der Richtung im Krystalle kann vielmehr nur durch eine Oberfläche von complicierterer Gestalt dargestellt werden, welche im allgemeinen einen erheblich geringeren Grad von Symmetrie besitzt, als das dreiaxige Ellipsoid. Deshalb werden im folgenden die betreffenden Eigenschaften der Krystalle als solche von »niederer Symmetrie« von den bisher betrachteten getrennt behandelt werden. Dieselben gehören aber noch zu den »bivectoriellen«, weil Druck oder Zug, in den beiden entgegengesetzten Richtungen einer Geraden auf einen Körper wirkend, den gleichen Effect hervorbringt. Unter den bivectoriellen Eigenschaften von niederer Symmetrie bieten diejenigen der Festigkeit (Cohäsion) verhältnismäßig die einfachsten Verhältnisse dar und sind die am leichtesten zu bestimmenden, daher diese im folgenden Abschnitte zuerst behandelt werden.

B. Bivectorielle Eigenschaften von niederer Symmetrie.

Cohäsion (Spaltbarkeit).

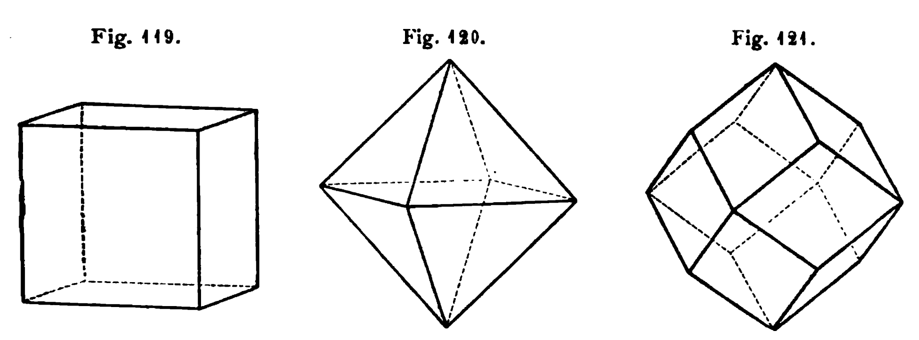
Wenn die Beanspruchung eines Körpers durch äußere Kräfte (Druck oder Zug) derart gesteigert wird, daß die einzelnen Teile ihren Zusammenhang aufgeben, so hat man die Festigkeitsgrenze überschritten. Der Widerstand der Teile gegen eine Trennung heißt Cohäsion.

Während die Cohäsion eines amorphen Körpers nach allen Richtungen gleich groß ist, hängt dieselbe in einem Krystalle von der Richtung der Kraft ab, und diese Eigenschaft ist sehr leicht an einem solchen zu erkennen. Nach derjenigen Richtung nämlich, oder, wenn deren mehrere vorhanden sind, nach den Richtungen, in welchen die Cohäsion ihr Minimum erreicht, findet am leichtesten eine Trennung der Teilchen statt, und zwar in allen parallelen Geraden gleich leicht, so daß, wenn durch Zug in jener Richtung der Krystall zerrissen wird, senkrecht zu derselben eine Trennungsebene entsteht, welche um so leichter und vollkommener darzustellen ist, je mehr die Cohäsion senkrecht dazu abweicht von derjenigen in andern Richtungen. Diese Eigenschaft, nach bestimmten Ebenen mehr oder weniger leicht getrennt werden zu können, eine Eigenschaft, welche sonach nur die Krystalle besitzen und durch welche wir am leichtesten einen krystallisierten Körper von einem amorphen unterscheiden können, heißt Spaltbarkeit. Man stellt eine Spaltungsebene gewöhnlich in der Weise dar, daß man in der Richtung derselben ein Messer auf den Krystall aufsetzt und auf dasselbe einen kurzen Schlag mit einem kleinen Hammer ausführt. Die als Maß der Cohäsion zu betrachtende Zugfestigkeit, d. h. das Gewicht, welches nötig ist, um Prismen, in bestimmten Richtungen aus dem Krystalle geschnitten, zu zerreißen, ist bei den am vollkommensten spaltbaren Krystallen in differierenden Richtungen außerordentlich verschieden; so ist z. B. bei dem Steinsalze jenes Gewicht, nach den Messungen von Sohncke, senkrecht zur Spaltbarkeit, also im Minimum, nur etwas mehr als $\frac{1}{3}$ von der Zugfestigkeit desselben Stoffes in derjenigen Richtung, in welcher sie ihr Maximum erreicht.

In bezug auf die Abhängigkeit der Cohäsion von der Richtung zerfallen die Krystalle in sieben Gruppen:

I. In den einfachbrechenden Krystallen existieren drei zueinander senkrechte Richtungen, in welchen entweder gleich große Maxima oder ebensolche Minima der Cohäsion vorhanden sind; im letzteren Falle spalten die

Krystalle gleich vollkommen nach den drei zu jenen Richtungen senkrechten Ebenen. Bringt man jede dieser Trennungsebenen zweimal in gleichem Abstande hervor, so erhält man einen Würfel oder ein reguläres Hexaeder (Fig. 119, Beisp. Steinsalz). Auch die vier Hauptdiagonalen des Würfels sind


Fig. 119. Fig. 120. Fig. 121.

gleichwertige Minima oder Maxima der Cohäsion; im ersteren Falle spaltet der Krystall nach vier einander unter gleichen Winkeln (70°32′) durchschneidenden Ebenen, welche die Würfelecken abstumpfen, d. h. nach den Flächen des regulären Oktaeders (Fig. 120, Beisp. Flußspat). Endlich können auch die Diagonalen der Würfelflächen Richtungen minimaler Cohäsion sein; alsdann spalten die Krystalle nach den sechs Flächen des Rhombendodekaeders (Fig. 121, Beisp. Zinkblende). Von den angeführten drei Arten von Richtungen kann offenbar nur eine dem absoluten Maximum und eine zweite dem absoluten Minimum der Cohäsion entsprechen, während die dritte nur ein relatives Maximum oder Minimum darstellen muß; ist das letztere der Fall, d. h. ist die Cohäsion in diesen Richtungen geringer als in den benachbarten, so ist auch nach den zu ihnen senkrechten Ebenen Spaltbarkeit vorhanden, aber weniger vollkommen, als nach den Ebenen, welche zu den Richtungen des absoluten Minimums normal sind. Beim Steinsalze z. B. sind die Hauptminima der Cohäsion die Normalen der Würfelflächen, aber in den Normalen des Dodekaeders liegen offenbar sekundäre Minima, denn nach ihnen ist eine unvollkommene Spaltbarkeit vorhanden, und (nach Sohnckes Versuchen) beim Zerreißen eines Steinsalzstückes erhält man dieselben zuweilen als Trennungsflächen.

Um für die Krystalle des Steinsalzes die Abhängigkeit der Cohäsion von der Richtung durch eine geschlossene Oberfläche darzustellen, müßte man die Größe der Cohäsion nach jeder Richtung als deren Radius von einem Punkte aus auftragen, welcher das »Symmetriecentrum« derselben wäre, da die Cohäsion in je zwei entgegengesetzten Richtungen gleich groß ist. Diese »Cohäsionsfläche« hätte an sechs Stellen tiefe Einsenkungen, entsprechend den drei Normalen des Würfels; ihr centraler Durchschnitt parallel einer Würfelebene hätte die Gestalt einer achtseitigen Rosette mit vier scharfen Knicken, welche den zwei kleinsten Durchmessern (parallel den beiden in dieser Ebene liegenden Kanten des Hexaeders) entsprechen, und

vier weniger tiefen Einsenkungen, welche den beiden Diagonalen zu den ersten beiden Durchmessern, d. h. den secundären Minimis senkrecht zu den Ebenen des Rhombendodekaeders entsprechen. Die vollständige Cohäsionsfläche kann symmetrisch halbiert werden durch die drei Ebenen parallel den Würfelflächen und durch die sechs, den Dodekaederflächen parallelen Ebenen, welche den Würfelkanten parallel sind und die Winkel je zweier Hexaederflächen halbieren. Diese, wie die Cohäsionsflächen sämtlicher optisch einfachbrechender Krystalle besitzen also nur neun Symmetrieebenen, während die Bezugsfläche derselben Krystalle für die Ellipsoideigenschaften (die Kugel) unendlich viele besitzt.

Die optisch einaxigen Krystalle haben ein singuläres, d. h. nicht in einer zweiten Richtung wiederkehrendes Maximum oder Minimum der Cohäsion in der Richtung der optischen Axe; in letzterem Falle spalten sie nach der dazu senkrechten Ebene, der »Basis«, und nach keiner zweiten gleich vollkommen[1]). Fällt das Minimum nicht mit der optischen Axe zusammen, so sind stets mehrere gleichwertige Richtungen minimaler Cohäsion vorhanden, welche entweder senkrecht oder schief zur optischen Axe liegen. Nach der Zahl und Orientierung dieser Minima zerfallen die einaxigen Krystalle in drei Gruppen:

II. Es sind sechs gleiche Minima vorhanden, welche sämtlich gleiche Winkel mit der Axe einschließen und in drei, einander in der Axe unter 60° bzw. 120° schneidenden Ebenen liegen; alsdann spaltet der Krystall nach einer hexagonalen Doppelpyramide (Figur 122). In dem besonderen Falle, daß der Winkel dieser Minima zur Axe = 90°, fallen je zwei in dieselbe Gerade, und es resultieren drei, zur Axe senkrechte und einander unter gleichen Winkeln schneidende Minima; der Krystall spaltet nach einem hexagonalen Prisma, welches in Fig. 123 mit dem zur Axe senkrechten Flächenpaare, der Basis, abgebildet ist. Die Cohäsionsfläche eines solchen Krystalles hat sieben

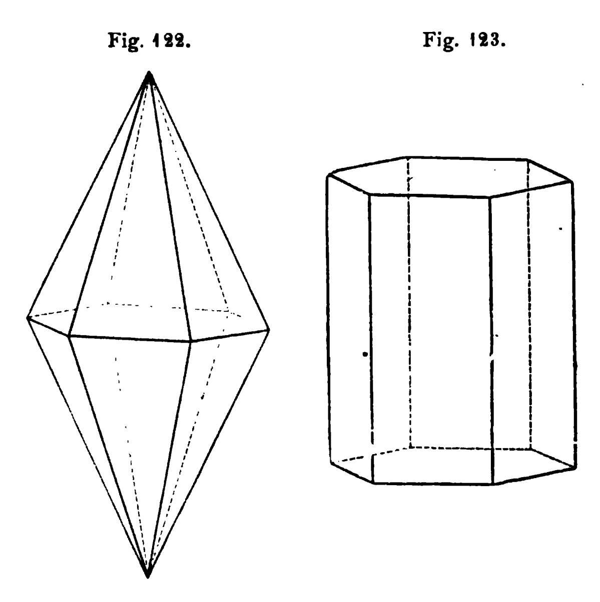


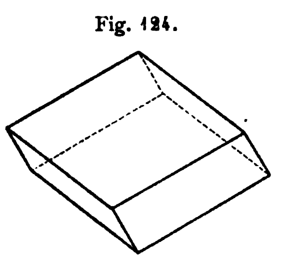
Fig. 122. Fig. 123.

1) »Basische« Spaltungsplatten einaxiger Krystalle z. B. von Brucit, Uranglimmer u. a. sind danach so orientiert, daß sie im convergenten polarisierten Lichte das schwarze Kreuz und die Farbenringe in der Mitte des Gesichtsfeldes zeigen.

Symmetrieebenen, nämlich die Basis und sechs dazu senkrechte Ebenen, welche einander in der Axe schneiden; von diesen sind drei dem hexagonalen Prisma (Fig. 123) parallel, die drei andern halbieren deren Winkel und entsprechen einem zweiten hexagonalen Prisma, dessen Flächen paarweise zu denen des ersten senkrecht sind.

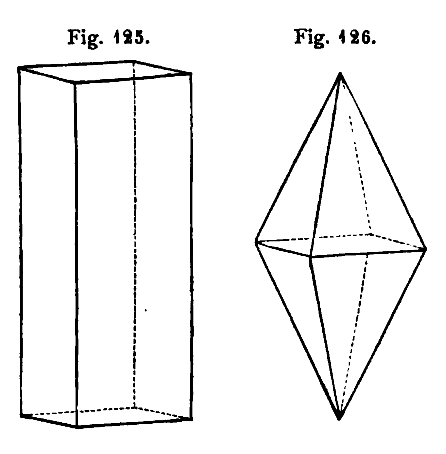
III. Es sind nur drei gleiche Minima vorhanden, welche zur Axe und zueinander gleich geneigt sind (dieselben entsprechen den drei abwechselnden von den sechs der vorigen Gruppe); alsdann spaltet der Krystall nach einem Rhomboeder (Fig. 124, Beisp. Kalkspat). Nimmt der Winkel dieser Minima zur Axe seinen größten Wert 90° an, so resultieren die gleichen Minima, wie bei der vorigen Gruppe, also Spaltbarkeit nach dem hexagonalen Prisma (Fig. 123, Beisp. Zinnober). Die Cohäsionsfläche besitzt nur drei Symmetrieebenen, welche einander in der Hauptaxe unter 60° schneiden und durch die drei, an der oberen bzw. unteren Ecke des Rhomboeders zusammentreffenden Kanten gehen.

Fig. 124.



IV. Krystalle dieser Gruppe besitzen, wenn sie nicht basisch spaltbar sind, entweder zwei zueinander senkrechte, gleiche Minima parallel der Basis — alsdann spalten sie nach einem quadratischen Prisma, dessen Flächen der optischen Axe parallel sind (Fig. 125, Beisp. Rutil) —, oder es existieren vier gleichwertige Minima, welche in zwei aufeinander senkrechten, in der optischen Axe einander schneidenden Ebenen liegen und gleiche Winkel mit der Axe einschließen; die zu ihnen senkrechten vier Paare paralleler Flächen bilden eine quadratische Doppelpyramide (Fig. 126, Beisp. Anatas). Die Cohäsionsfläche hat fünf Symmetrieebenen, die Basis und vier in der Axe einander unter gleichen Winkeln schneidende Ebenen, deren je zwei zueinander senkrechte ein quadratisches Prisma bilden.

Fig. 125. Fig. 126.



Die Cohäsion eines einaxigen Krystalles kann übrigens außer einem absoluten Minimum in der optischen Axe auch secundäre Minima in schief bzw. senkrecht dazu geneigten Richtungen annehmen oder umgekehrt; z. B. spaltet Scheelit nach einer quadratischen Doppelpyramide und nach der Basis, aber natürlich nicht gleich vollkommen.

Die optisch zweiaxigen Krystalle zerfallen in bezug auf die Abhängigkeit der Cohäsion von der Richtung genau in dieselben drei Gruppen, wie in bezug auf ihre Ellipsoideigenschaften:

V. In der ersten Gruppe ändert sich die Cohäsion mit der Richtung symmetrisch nach den drei (für alle Farben gemeinsamen) optischen Hauptschnitten. Eine der drei Hauptschwingungsrichtungen kann z. B. absolutes Minimum sein; alsdann spaltet der Krystall nach dem dazu senkrechten optischen Hauptschnitte, aber nach keiner zweiten Ebene gleich vollkommen. Dabei ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß in einer der beiden andern Hauptschwingungsrichtungen ein zweites (relatives) Minimum existiert, so daß parallel dem entsprechenden zweiten Hauptschnitte eine mehr oder weniger in bezug auf ihre Vollkommenheit davon abweichende, d. h. weniger leichte Spaltbarkeit stattfindet. Der Anhydrit spaltet sogar nach allen drei, aufeinander senkrechten Hauptschnitten, nach dem einen »sehr vollkommen«, nach dem zweiten fast ebenso leicht, nach dem dritten nur »deutlich«.

Fig. 127.

a b

Fällt das Minimum der Cohäsion nicht mit einer Hauptschwingungsrichtung zusammen, so kann dasselbe doch in der Ebene eines optischen Hauptschnittes liegen; in diesem Falle erfordert die Symmetrie nach den beiden dazu senkrechten Hauptschnitten die Existenz eines zweiten gleichwertigen Minimums, in jener Ebene gleich und entgegengesetzt geneigt zu den beiden in derselben Ebene liegenden Hauptschwingungsrichtungen; alsdann spaltet der Krystall nach einem rhombischen Prisma (Fig. 127a), dessen Kanten einer Hauptschwingungsrichtung parallel laufen und dessen Winkel von zwei optischen Hauptschnitten halbiert werden. Erreicht endlich die Cohäsion ein Minimum in einer zu allen drei Hauptschwingungsrichtungen geneigten Richtung, so müssen deren vier gleichwertige, zu den Hauptschnitten symmetrisch liegende vorhanden sein, und der Krystall spaltet nach den vier Fächenpaaren einer rhombischen Doppelpyramide (Fig. 127*b*). Alle aufgezählten Fälle sind vereinigt am Baryt, dessen Krystalle das absolute Minimum der Cohäsion parallel einer Hauptschwingungsrichtung besitzen, daher sie nach dem dazu senkrechten Hanptschnitte vollkommen spalten; in letzterem liegen außerdem zwei secundäre Minima, die Krystalle spalten daher, aber nur deutlich, nach einem Prisma; ferner sind weitere vier, jedoch nur wenig ausgesprochene secundäre Minima parallel Richtungen, welche in keinem optischen Hauptschnitte liegen, also unvollkommene Spaltbarkeit nach einer rhombischen Doppelpyramide vorhanden, und endlich noch ein secundäres Minimum parallel der langen Diagonale des Rhombus des Spaltungsprismas, d. h. unvollkommene Spaltbarkeit nach demjenigen Hauptschnitte, welcher den stumpfen Winkel des Spaltungsprismas halbiert.

VI. Besitzt der Krystall nur eine Ebene der optischen Symmetrie, so ändert sich die Cohäsion mit der Richtung auch nur nach dieser einen Ebene symmetrisch. Fällt das absolute Minimum mit deren Normale zusammen, in welchem Falle natürlich ein zweites gleichwertiges nicht exi-

stieren kann, so spaltet der Krystall parallel jener Symmetrieebene, welche nach S. 121 zugleich ein optischer Hauptschnitt für alle Farben ist (Beisp. Gyps). Das Minimum ist gleichfalls ein singuläres, wenn es in die Ebene der Symmetrie fällt; alsdann spaltet der Krystall nach einem Flächenpare *a*, welches senkrecht zur Symmetrieebene steht (Glimmer). In der gleichen Ebene kann aber noch ein zweites, also secundäres, Minimum der Cohäsion vorhanden sein, in welchem Falle der Krystall noch nach einem zweiten, zur Symmetrieebene senkrechten Flächenpaare *b* spaltet, welches mit dem ersteren, der Ebene der vollkommeneren Spaltbarkeit, im allgemeinen einen schiefen Winkel bildet (s. Fig. 128*a*, in welcher *s* die Ebene der Symmetrie; Beisp. Epidot). Ist endlich der Winkel, welchen die Richtung der kleinsten Cohäsion mit der Symmetrieebene einschließt, weder 0, noch 90°, so sind notwendig zwei gleichwertige Minima vorhanden, welche gleich und entgegengesetzt zur Symmetrieebene geneigt sind; der Krystall spaltet dann nach einem Prisma, dessen stumpfe oder scharfe Winkel von der Symmetrieebene halbiert werden (Beisp. Hornblende). Infolge des Vorhandenseins secundärer Minima der Cohäsion können mehrere der eben erwähnten Arten von Spaltbarkeit an demselben Krystalle auftreten, z. B. nach einem Prisma *m* und einer zur Symmetrieebene senkrechten Ebene *c* Fig. 128*b*. So zeigt der Gyps eine höchst vollkommene Teilbarkeit nach der Symmetrieebene, zwei deutliche nach einem Prisma (daher beim Durchbrechen dünner Platten ein faseriger Bruch parallel den Kanten dieser Form erscheint) und eine unvollkommene nach einer Fläche senkrecht zur Symmetrieebene. Die Krystalle des Feldspates (Orthoklas) spalten vollkommen nach einer Ebene senkrecht zu derjenigen der Symmetrie, deutlich nach der letzteren und unvollkommen nach einem Prisma.

Fig. 128.

VII. Diejenigen optisch zweiaxigen Krystalle, welche nach keiner Ebene Symmetrie ihrer optischen, thermischen usw. Verhältnisse zeigen, besitzen nur singuläre Minima der Cohäsion, d. h. sie spalten niemals gleich vollkommen nach mehreren Ebenen. Wenn nach dem Vorhergehenden in den Krystallen dieser letzten Abteilung auch keine einfache gesetzmäßige Beziehung der Spaltungsflächen zu den in bezug auf andere physikalische Eigenschaften ausgezeichneten Richtungen zu erwarten ist, da selbst für eine und dieselbe Eigenschaft, z. B. das Licht bei verschiedener Farbe, die betreffenden Richtungen eine voneinander unabhängige und keiner allgemeinen Gesetzmäßigkeit folgende Orientierung im Krystalle haben, — so scheint eine gewisse Abhängigkeit der optischen Verhältnisse von denen der Cohäsion doch aus der Beobachtung hervorzugehen, daß in den meisten, nach einer Ebene sehr vollkommen spaltbaren Krystallen dieser Gruppe eine der Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes nahe senkrecht, die beiden andern nahe parallel jener Ebene orientiert sind. Das gleiche gilt für

diejenigen Krystalle der vorigen Gruppe, welche eine sehr vollkommene, zur Symmetrieebene senkrechte Spaltbarkeit besitzen, nach deren Ebene eine weitere Symmetrie nicht zu erwarten und in strengem Sinne wegen der Dispersion der Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes in der dazu normalen Symmetrieebene auch nicht möglich ist. Das beste Beispiel hierfür liefert der zur VI. Gruppe gehörige Glimmer, dessen Spaltbarkeit die vollkommenste überhaupt existierende ist, und dessen erste Mittellinie der optischen Axen so nahe senkrecht zur Ebene der Spaltbarkeit steht, daß die Abweichung davon lange Zeit übersehen und das Mineral als der Gruppe V angehörig betrachtet worden ist.

Elasticitätseigenschaften.

Wird in einem homogenen Stabe von der Gestalt eines Prismas von quadratischem oder rectangulärem Querschnitte eine Spannung parallel seiner Längsrichtung hervorgebracht, indem ein Gewicht P entweder auf seine obere Endfläche aufgelegt ist, während er mit der unteren auf einer festen Unterlage aufruht (Druckspannung), oder indem dasselbe Gewicht P an seinem unteren Ende hängt, während das obere Ende des vertical hängenden Stabes festgehalten wird (Zugspannung), — so erleidet der Stab im ersteren Falle eine Verkürzung (Compression), im zweiten eine Verlängerung (Dilatation) λ; hatte er also vorher die Länge L, so besitzt er nun die Länge $L - \lambda$ im ersten, $L + \lambda$ im zweiten Falle. Die Beobachtung an einem im Verhältnisse zur Länge L nur schmalen Stabe von rechtwinkeligem Querschnitte, dessen Breite $= B$ und dessen Dicke $= D$ (BD also gleich dem Flächeninhalte des Querschnittes) ist, lehrt nun, daß die Dilatation λ, solange die Elasticitätsgrenze (s. S. 207) nicht überschritten ist, bestimmt wird durch die Gleichung:

$$\lambda = \frac{PL}{BD} E,$$

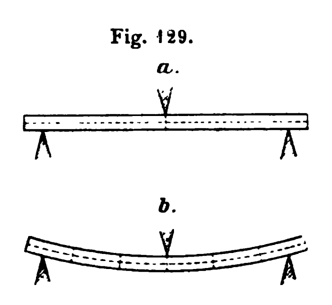
d. h. daß die Verlängerung oder Verkürzung des Stabes proportional ist dem dieselbe hervorbringenden Gewichte und seiner Länge, umgekehrt proportional seinem Querschnitte, außerdem aber proportional einem von jenen Größen unabhängigen, für die Substanz des Stabes charakteristischen Factor E, welcher »Dehnungscoefficient« genannt wird. Setzen wir $P = 1$ (z. B. Gramm), $L = 1$ (z. B. Meter), $D = B = 1$ (z. B. Millimeter), so wird $\lambda = E$, d. h. der Dehnungscoefficient ist diejenige Dilatation, welche ein rechteckiger Stab, dessen Länge und Querschnitt $= 1$ sind, durch die Belastung 1 erleidet. Setzt man dagegen $B = D = \lambda = L = 1$, so wird P, d. h. das Gewicht, mit welchem man einen rechteckigen Stab, dessen Dimensionen $= 1$ sind, belasten muß, damit er die Dilatation 1 erfahre, $= \frac{1}{E}$. Der Wert $C = \frac{1}{E}$, d. i. der reciproke Wert des Dehnungscoefficienten, wird der »Dehnungswiderstand« oder (bei nicht krystallisierten

Körpern) »Elasticitätsmodulus« genannt. Derselbe ist gleich dem Verhältnisse eines Gewichtes, welches dem Stabe, dessen Dimensionen der Einheit gleich sind, eine Verlängerung λ verleiht, zu der Größe dieser Verlängerung, denn für $B = D = L = 1$ ist $P = C\lambda$, also $C = \frac{P}{\lambda}$. Bei beliebigen Dimensionen des Stabes (nur wieder vorausgesetzt, daß der Querschnitt im Verhältnisse zur Länge klein sei) folgt aus der Gleichung für λ (s. vor. S.) unmittelbar:

$$E = \frac{BD\lambda}{PL},$$

so daß also durch Messung der Breite, Dicke und Länge des Stabes und seiner durch ein bestimmtes Gewicht hervorgebrachten Dehnung der Dehnungscoefficient in der Längsrichtung theoretisch am einfachsten bestimmt werden könnte. Der praktischen Anwendung dieser Methode bei krystallisierten Körpern steht jedoch der Umstand entgegen, daß kaum jemals Krystalle die zur Herstellung geeigneter Stäbe genügenden Dimensionen besitzen, um die auftretenden Verlängerungen noch genau genug messen zu können. Man bedient sich daher eines andern Verfahrens, nämlich der Durchbiegung eines an beiden Enden unterstützten und in der Mitte belasteten Stäbchens, welches mit seinen breiten Flächen aufliegt, so daß der Druck in der Richtung der Dicke wirkt (s. Fig. 129). Hatte der Stab vor der Biegung die Gestalt Fig. 129 *a*, so hat er nachher diejenige Fig. 129 *b* angenommen, wobei die Biegung allerdings weit stärker gezeichnet ist, als es bei wirklichen Beobachtungen vorkommt. Alsdann haben sämtliche, anfangs horizontale Längsschnitte über dem durch die punktierte Linie angedeuteten mittleren Schnitte eine dem Abstande von letzterem proportionale Compression in der Richtung der Längsaxe erlitten, alle unterhalb gelegenen eine entsprechende Dilatation. Die anfangs verticalen Querschnitte haben um so größere Drehungen erfahren, je weiter sie von dem belasteten mittleren Querschnitte entfernt sind. Die durch die Verschiebung der Teilchen gegeneinander in der Längsrichtung hervorgerufenen inneren Kräfte streben jeden Querschnitt wieder in seine ursprüngliche Lage zurückzudrehen; die einwirkende äußere Kraft bewirkt die Drehung so weit, bis die mit der Größe der Verschiebung wachsenden inneren Kräfte ihr das Gleichgewicht halten. Ist dieses eingetreten, so muß für jeden Querschnitt die auf ihn wirkende innere Kraft der äußeren gleich sein. Unter der Voraussetzung, daß die einzelnen Querschnitte nur Drehungen um eine horizontale Axe erleiden, welche der Breitenrichtung parallel ist (d. i. die Normale zur Zeichnungsebene), und innerhalb eines jeden Querschnittes weder Verschiebungen der einzelnen Teile gegeneinander

Fig. 129.



noch Drehungen vorkommen, läßt sich die Senkung η des mittleren Querschnittes berechnen[1]). Diese ist

$$\eta = \frac{PL^3E}{4BD^3}.$$

Ist also η gemessen, so findet man E nach der Formel:

$$E = \frac{4BD^3\eta}{PL^3}.$$

Dieser Weg zur Bestimmung des Dehnungscoefficienten ist nun dem vorher erwähnten directen deshalb vorzuziehen, weil einer sehr geringen Dehnung eine verhältnismäßig große Senkung entspricht, sobald die Dicke D genügend klein genommen wird, und deshalb Stäbe von mäßiger Länge, wie sie aus Krystallen, namentlich einer Anzahl Mineralien, zu gewinnen sind, benutzt werden können. Die Beobachtung der Senkung geschieht mittels eines vor dem Stabe aufgestellten Mikroskopes oder noch genauer durch Beobachtung von Interferenzstreifen in einem nach dem Principe Fizeaus (s. S. 190) construierten Apparate.

Bestimmen wir nun in der angegebenen Weise den Dehnungscoefficienten eines amorphen Körpers, z. B. Glas, indem wir aus demselben nach verschiedenen Richtungen Stäbe herausschneiden, so finden wir denselben stets gleich groß. Für eine bestimmte amorphe Substanz hat dieser Coefficient also einen constanten, von der Richtung unabhängigen Wert, welcher natürlich für eine andere Substanz ein anderer ist. Diese Unabhängigkeit der Größe E von der Richtung gilt aber nur für die amorphen Körper. Schneiden wir dagegen aus einem Krystalle in verschiedener Richtung Stäbe heraus und untersuchen ihre Biegung, so finden wir zwar in denjenigen, deren Längsrichtung im Krystalle parallel orientiert ist, gleichen Dehnungscoefficienten, an verschieden orientierten aber, bei gleichen Dimensionen und gleicher Belastung, im allgemeinen eine andere Größe der Senkung, d. h. der Dehnungscoefficient ändert sich in einem Krystalle mit der Richtung des untersuchten Stabes. Während also der Elasticitätsmodulus C (s. S. 216) eines amorphen Körpers für alle Richtungen den gleichen Wert besitzt, ändern sich die Elasticitätsverhältnisse eines Krystalles mit der Richtung, und das gleiche muß daher auch für alle Größen gelten, welche von C abhängen. Dies ist z. B. der Fall mit der Fortpflanzung einer periodischen Schwingungsbewegung in dem Körper, deren Geschwindigkeit, wenn C der Elasticitätsmodulus und d die Dichte

1) In Wirklichkeit ist mit jeder Längendilatation eine Quercontraction verbunden, die obige Voraussetzung also nicht vollständig erfüllt. Der dadurch entstehende Fehler ist um so geringer, je kleiner der Querschnitt des Stabes im Verhältnisse zur Länge ist. Ferner findet, wenn der Stab aus einem Krystalle geschnitten ist und seine Orientierung nicht bestimmte Bedingungen in bezug auf die Symmetrie des Krystalles erfüllt, auch noch Drehung (Torsion) der einzelnen Querschnitte um die Längsrichtung, also keine »reine Biegung« statt. Ob man diese Abweichungen vernachlässigen darf, ergibt sich aus der Übereinstimmung der Beobachtungen an zwei Stäben von verschiedenen Dimensionen.

des letzteren, proportional $\sqrt{\frac{C}{d}}$ ist. Daß wirklich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einem Krystalle eine Function der Richtung ist, hat Savart nachgewiesen durch die Verschiedenheit der Klangfiguren von Quarzplatten, welche in verschiedener Orientierung aus den Krystallen geschnitten waren, und Groth mittels einer von Warburg angegebenen Methode durch directe Messung der Schallgeschwindigkeit im Steinsalze nach zwei 45° miteinander bildenden Richtungen.

Die Gesetze, nach denen die Änderung der Elasticität mit der Richtung im Krystalle vor sich geht, sind besonders von Voigt theoretisch entwickelt und dann durch die Erfahrung bestätigt worden.

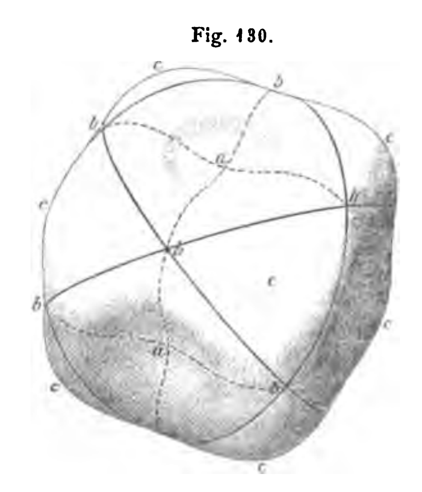
Die von F. Neumann begründete Theorie geht davon aus, die auf die Flächen eines im Innern des Krystalles gedachten, so kleinen Würfels, daß er als homogen deformiert betrachtet werden kann, wirkenden inneren Druckkräfte zu entwickeln, welche durch die Deformation geweckt werden und den die letztere bewirkenden äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Da im Krystalle das Verhältnis zwischen einer vorhandenen Deformation und der durch sie hervorgebrachten Druckcomponente nach einer bestimmten Richtung für verschiedene Richtungen verschieden ist, so ergeben sich die Werte der Druckcomponenten abhängig von einer Reihe von Größen, welche man die »Elasticitätsconstanten« der betreffenden krystallisierten Substanz nennt, und deren Anzahl im allgemeinsten Falle 21 beträgt, während sie sich bei den meisten Krystallen dadurch auf eine geringere reduciert, daß mehrere derselben gesetzmäßig gleich groß werden. Um diese Größen zu bestimmen, genügt nicht die Messung der Dehnung, selbst nicht diejenige von beliebig vielen, verschieden orientierten Stäben, sondern nur die Combination solcher Messungen mit der Beobachtung der Größe der Torsion von bestimmt orientierten Stäben, welche an einem Ende festgehalten werden, während in der Ebene des andern Endquerschnittes ein Drehungsmoment wirkt, durch welches der Stab »gedrillt« wird. Es tritt hier wieder eine von den Dimensionen des Stabes unabhängige Größe auf, der »Drillungscoefficient«, dessen reciproker Wert der »Drillungswiderstand« ist. Hat man diese Größe, sowie den Dehnungscoefficienten an verschieden orientierten Stäben, deren notwendige Anzahl von derjenigen der Elasticitätsconstanten für den betreffenden Krystall abhängt, bestimmt, so kann man daraus die letzteren berechnen, und die Kenntnis dieser Constanten gestattet endlich die Berechnung der Dehnung eines Stabes von jeder beliebigen Orientierung im Krystalle.

Das Verhalten eines Krystalles gegen eine elastische Spannung ist ebenso, wie seine Cohäsion, eine bivectorielle Eigenschaft desselben, denn es ist bestimmt durch eine Zahlengröße (den Betrag der auf die Flächeneinheit wirkenden Kraft), welche für die beiden entgegengesetzten Seiten einer Geraden gleich groß ist, weil zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte die gleiche Spannung erzeugen. Was speciell den Dehnungscoefficienten, d. h. die Compression oder Dilatation der Längeneinheit in einer Richtung, in welcher der Druck oder Zug 1 wirkt, betrifft, so erhält man am leichtesten eine Übersicht von der für eine krystallisierte Substanz charakteristischen Abhängigkeit derselben von der Richtung im Krystalle, wenn man sich von einem Punkte aus nach allen Richtungen Längen aufgetragen denkt, proportional der Größe E (s. S. 216) für die betreffende Richtung im Krystalle, und die Endpunkte derselben durch eine geschlossene krumme Fläche, die

»Oberfläche der Dehnungscoefficienten«, verbindet. Diese Oberfläche (welche nach dem a. S. 218 Gesagten für die amorphen Körper, und nur für diese, die Form einer Kugel besitzt) hat für die verschiedenen Krystalle eine sehr mannigfache und z. T. höchst complicierte Gestalt, jedoch ist sie aus dem vorher angeführten Grunde stets centrisch symmetrisch, d. h. die beiden Endpunkte eines jeden Durchmessers derselben sind gleichweit von ihrem Mittelpunkte entfernt. Je nachdem, welche unter den Elasticitätsconstanten einander gleich werden, nimmt die aus den übrigbleibenden berechnete Oberfläche der Dehnungscoefficienten eine mehr oder weniger symmetrische Form an, die in gesetzmäßiger Beziehung zu den Symmetrieverhältnissen der geometrischen Form der betreffenden Krystalle steht, d. h. zu dem Vorhandensein einer größeren oder geringeren Anzahl gleichwertiger Richtungen an letzterer, welche dann auch in Hinsicht ihrer Dehnung sich gleichwertig erweisen. Wie die Theorie lehrt und die Erfahrung bestätigt hat, existieren in bezug auf die Gestalt der Oberfläche ihrer Dehnungscoefficienten neun verschiedene Gruppen von Krystallen.

I. Für einen einfachbrechenden Krystall kann die betreffende Oberfläche berechnet werden aus drei Constanten und ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert: drei zueinander senkrechte Durchmesser sind gleich groß und entsprechen entweder dem absoluten Maximum oder Minimum des Dehnungscoefficienten; die vier Durchmesser, welche mit den drei ersteren gleiche Winkel bilden, sind ebenfalls gleichwertig und im ersten Falle die kleinsten, im zweiten die größten unter allen; jede der vier zu den letzteren Richtungen senkrecht durch die Mitte gelegten Ebenen schneidet die Oberfläche in einem Kreise. Fig. 130 stellt ein Beispiel einer solchen Fläche von der zweiten Art dar, nämlich diejenige des Flußspates (Fluorcalcium)[1]. Hier sind die den Mitten der Flächen eines regulären Würfels entsprechenden Punkte a die Endpunkte der kleinsten Radii vectores, während die den Ecken des Würfels entsprechenden Punkte c den größten Abstand von der Mitte haben; geht man von a nach einem andern a, so erreicht der Radius vector ein Maximum in b, dies ist aber kein absolutes, denn für die Radii vectores zwischen zwei Punkten c ist es

Fig. 130.



1) Nach einem Gypsmodelle, welches, ebenso wie die den Figuren 132 und 133 entsprechenden Modelle für Quarz und Baryt, nach den Angaben des Prof. Finsterwalder von dem Gypsformator Kreittmayr in München angefertigt wurde. Copien dieser Modelle sind von dem Letztgenannten zu beziehen.

ein Minimum. Die den Ebenen des regulären Oktaeders parallelen Kreisschnitte der Oberfläche sind in der Figur durch ausgezogene Linien bezeichnet, die centralen Schnitte mit den durch je zwei der drei gleichwertigen Minima gehenden Ebenen des Würfels mittels punktierter Linien. Diesem Typus gehören die vier von Voigt untersuchten Substanzen Flußspat, Steinsalz (Chlornatrium), Sylvin (Chlorkalium) und Pyrit (Eisendisulfid) an. Eine Oberfläche des andern Typus, wie sie nach Beckenkamps Messungen den Alaunen zukommt, würde an den Punkten *a* nicht eingedrückt, sondern ausgebaucht, dagegen an den Punkten *c* eingesenkt erscheinen.

Die optisch einaxigen Krystalle zerfallen nach den Symmetrieverhältnissen ihrer Oberflächen der Dehnungscoefficienten in fünf Gruppen:

II. Die Dehnung ist für alle gleich gestalteten Stäbe, deren Längsrichtung den gleichen Winkel mit der optischen Axe einschließt, gleich groß; die Oberfläche der Dehnungscoefficienten ist also eine Rotationsfigur, welche durch Umdrehung einer nach der optischen Axe und der dazu senkrechten Geraden symmetrischen Curve um die erstere erzeugt wird und deren Berechnung fünf Constanten erfordert. Die erzeugende Curve besitzt Maxima und Minima in der optischen Axe, senkrecht dazu und zwischen beiden Richtungen. Für den Beryll, welcher dieser Abteilung angehört, ist der Dehnungscoefficient am kleinsten senkrecht zur Axe, nimmt von da aus zu bis zu dem absoluten Maximum unter 43° zur Axe und dann wieder ab, bis er in der optischen Axe ein relatives Minimum erreicht.

IIIa. Die aus sechs Constanten zu berechnende Oberfläche der Dehnungscoefficienten besitzt nur einen einzigen Kreisschnitt, die senkrecht zur optischen Axe durch die Mitte gelegte Ebene, und ist symmetrisch zu drei, in der optischen Axe einander unter gleichen Winkeln durchschneidenden Ebenen[1]). Hierher gehört der Kalkspat, in welchem die eben erwähnten Ebenen mit den drei S. 64 definierten optischen Hauptschnitten des Spaltungsrhomboeders identisch sind; Fig. 131 *a* stellt den Durchschnitt der Fläche mit einer solchen Ebene und zugleich denjenigen des Kalkspatrhomboeders mit derselben Bezeichnung wie in Fig. 36 dar; *AA* ist die optische Axe, die punktierten Linien die Richtungen des größten und kleinsten Dehnungscoefficienten;

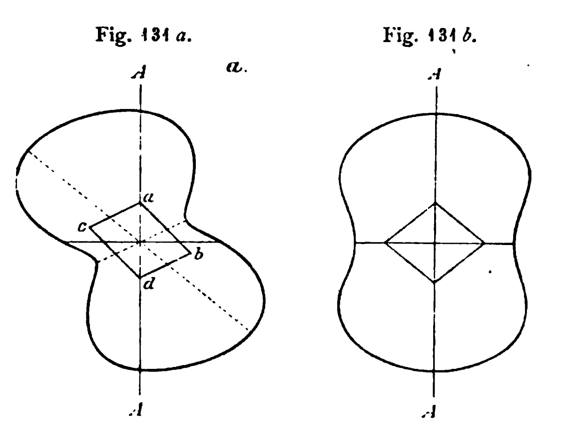


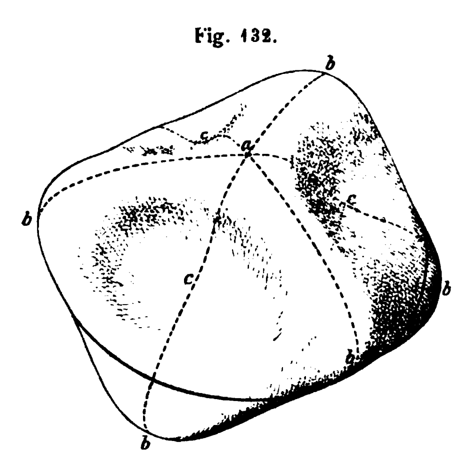
Fig. 131 *a*. Fig. 131 *b*.

1) Die Gruppen IIIa und b entsprechen der Gruppe III der Krystalle in bezug auf Cohäsion, die Gruppen IVa und b der Gruppe IV (s. S. 213).



die zur Ebene der vorigen Figur senkrechte Ebene wird von der Oberfläche der Dehnungscoefficienten und dem Kalkspatrhomboeder in der nach *AA* symmetrischen Fig. 131 *b* geschnitten. Eine Übersicht über die gesamte Form einer solchen Dehnungsfläche gibt die Abbildung derjenigen des Quarzes, Fig. 132, auf welcher *a* der obere Endpunkt der optischen Axe, *bb* die Endpunkte der drei größten und *cc* diejenigen der drei kleinsten Durchmesser sind; die ausgezogene Curve ist der horizontale Kreisschnitt. Man sieht aus dieser Figur, daß die Form in einer ähnlichen Beziehung zu der eines Rhomboeders steht, wie die in Fig. 130 dargestellte zu einem Würfel.

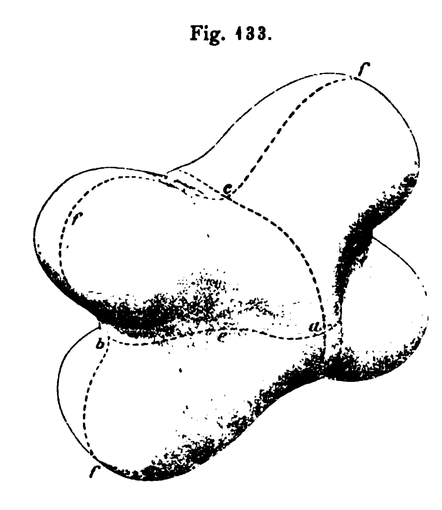
Fig. 132.



IIIb. Die Oberfläche der Dehnungscoefficienten eines Krystalles dieser Gruppe, welcher sieben voneinander unabhängige Elasticitätsconstanten besitzt, unterscheidet sich von denen der vorigen dadurch, daß die Symmetrie nach drei in der optischen Axe einander schneidenden Ebenen fehlt (Beispiel: Dolomit).

IVa. Hier und in der folgenden Gruppe ist keine Ebene mehr vorhanden, in welcher alle Richtungen unter gleichen Umständen gleiche Dehnung erfahren, d. h. die Fläche besitzt keinen Kreisschnitt. Dagegen sind ihre Durchmesser in zwei zueinander senkrechten Richtungen der zur optischen Axe normalen Ebene gleich groß; sie ist ferner symmetrisch nach den beiden durch diese Richtungen und die Axe gelegten Ebenen und kann aus sechs Constanten berechnet werden.

Fig. 133.



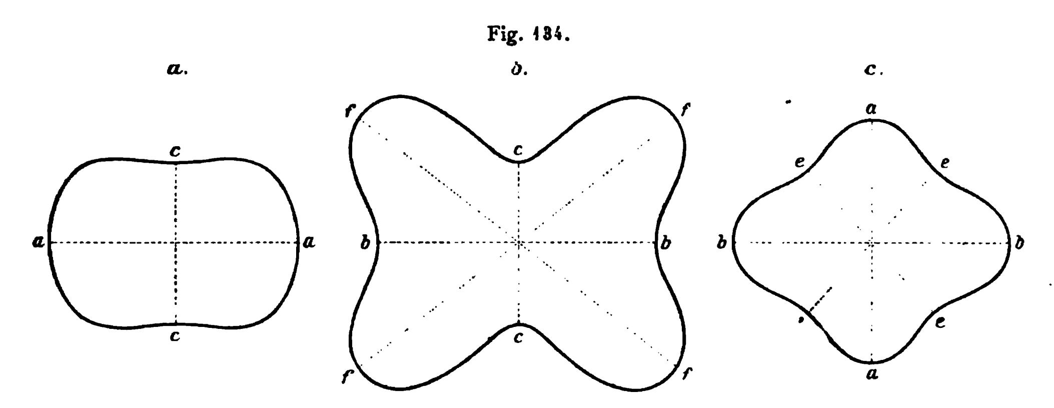
IVb. Der Fläche fehlt die letzterwähnte Symmetrie, und ihre Berechnung erfordert sieben Constanten. Beispiele der beiden letzten Gruppen sind bisher noch nicht experimentell untersucht worden.

Die optisch zweiaxigen Krystalle zerfallen in bezug auf die Eigenschaften ihrer Oberfläche der Dehnungscoefficienten in genau dieselben drei Gruppen, wie in bezug auf die Abhängigkeit ihrer Cohäsion von der Richtung (S. 214 u. 215).

V. In denjenigen Krystallen, in welchen die Indexflächen des Lichtes

für alle Farben identische Orientierung besitzen, deren optische Verhältnisse also vollkommen symmetrisch sind zu drei aufeinander senkrechten Ebenen, wird auch die Fläche der Dehnungscoefficienten durch dieselben drei Ebenen symmetrisch halbiert. Fig. 133 stellt die betreffende Fläche des Baryt (natürl. schwefelsaures Baryum) in perspectivischer Ansicht dar, auf welcher die Durchschnitte mit den drei Symmetrieebenen durch punktierte Linien angegeben sind, während in Fig. 134 diese drei Schnittcurven für sich mit

Fig. 134.



den der vorigen Figur entsprechenden Buchstabenbezeichnungen wiedergegeben sind. Wie ersichtlich, liegt in der mit *c* bezeichneten Richtung (einer der drei Axen der Indexfläche) das absolute Minimum, in *b* ein relatives, während eine intermediäre Richtung *f* dem absoluten Maximum entspricht). Beim Topas ist eine der drei Hauptschwingungsrichtungen größter Durchmesser der Oberfläche, die Unterschiede sind hier aber viel geringer. Die Anzahl der zu bestimmenden Größen beträgt in dieser Gruppe neun.

VI. Ist nur eine Axe der Indexfläche für verschiedene Farben identisch orientiert, so sind auch die Dehnungsverhältnisse, wie die optischen, nur symmetrisch in bezug auf eine Ebene, welche zu jener gemeinsamen Richtung senkrecht steht. Der Durchschnitt der Dehnungsfläche mit dieser Ebene ist also nicht, wie im vorigen Falle, nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen (welche zweien weiteren Symmetrieebenen entsprechen) symmetrisch. In der Tat haben ältere unvollständige Beobachtungen am Gyps für die Dehnungscoefficienten in der Symmetrieebene eine ähnliche Curve ergeben, wie die im Hauptschnitte des Kalkspates Fig. 131 *a*, am Glimmer für eine zur Symmetrieebene senkrechte Ebene eine Curve, welche durch erstere symmetrisch halbiert wird. Die noch an keinem Krystalle ausgeführte vollständige Bestimmung der Oberfläche der Dehnungscoefficienten bedarf dreizehn voneinander unabhängiger Messungen der Dehnung und Torsion.

VII. Diejenigen optisch zweiaxigen Krystalle, in denen sämtliche Schwingungsrichtungen dispergiert sind, welche also nach keiner Ebene

Symmetrie ihrer optischen Eigenschaften darbieten, entbehren dieser auch in bezug auf ihr Verhalten gegenüber einer Dilatation oder Compression. Sie stellen also den S. 219 erwähnten allgemeinen Fall dar, in welchem sämtliche 21 Elasticitätsconstanten verschiedene Werte besitzen. Die aus ihnen sich ergebende Oberfläche der Dehnungscoefficienten (welche noch für keinen Krystall bestimmt worden ist) kann also nur in bezug auf ihr Centrum symmetrisch sein, d. h. je zwei entgegengesetzte Radien derselben sind gleich lang, sonst bietet jedoch ihre Gestalt keinerlei Gesetzmäßigkeit dar.

In einem krystallinischen Aggregate (vgl. S. 51), welches aus unregelmäßigen Partikeln einer krystallisierten Substanz in beliebiger gegenseitiger Orientierung besteht, müssen, wenn dasselbe genügend »dicht«, d. h. wenn die Partikel genügend klein sind, also in der Längsrichtung eines der Dehnung oder Torsion unterworfenen Stabes sehr viele derselben liegen, ihre durch die ungleiche Orientierung bedingten Unterschiede in den Elasticitätsverhältnissen sich ausgleichen, so daß für die letzteren ein Mittelwert resultiert. Das gleiche gilt offenbar auch für einen in beliebiger anderer Richtung aus demselben Aggregate geschnittenen Stab, daher in einem solchen Körper die Dehnung und Torsion scheinbar von der Richtung unabhängig sind, wie in den amorphen Körpern; man bezeichnet solche deshalb als »quasi-isotrope« Körper. Die in der von Voigt ausgearbeiteten und eingehend mit der Erfahrung verglichenen Theorie auftretenden »Elasticitätsconstanten« reducieren sich in den isotropen, d. h. amorphen Körpern auf zwei, von welchen der Dehnungs- und der Torsionscoefficient in sehr einfacher Weise abhängen. Diese Constanten, welche nach der älteren Elasticitätstheorie von Poisson u. a. in einem bestimmten, für alle Körper gleichen Zahlenverhältnisse stehen müßten, lassen sich nach Voigts Theorie für einen »quasi-isotropen« Körper aus den Elasticitätsconstanten der Krystalle derselben Substanz berechnen unter der Voraussetzung, daß jener aus Krystallfragmenten bestehe, deren Dimensionen groß sind gegen die Wirkungssphäre der Moleküle, aber klein gegen seine gesamte Ausdehnung, und welche ohne Zwischenräume aneinander gelagert sind. Die hiernach berechneten Werte für »dichten« Flußspat, Baryt usw. wurden in der Tat im wesentlichen durch die Beobachtung bestätigt. Die Werte des Elasticitätsmodulus von Metallen, wie sie sich allgemein angegeben finden, beziehen sich auf den »quasi-isotropen« Zustand derselben, da sie sämtlich mit Stäben bestimmt wurden, welche aus einem krystallinischen Aggregate des betreffenden Metalles bestanden.

Einfluß elastischer u. a. Deformationen auf die optischen Eigenschaften. Die durch einen in bestimmter Richtung wirkenden Zug oder Druck hervorgebrachten Differenzen der Beschaffenheit eines Körpers nach verschiedenen Richtungen übertragen sich auch auf die Beschaffenheit des unter dem Einflusse der Körperteilchen stehenden Lichtäthers, so daß dieser nunmehr die in vorher optisch gleichwertigen Richtungen stattfindenden Lichtschwingungen im allgemeinen nicht mehr mit der gleichen Geschwindigkeit

fortpflanzt. Die Gesetze dieser Änderungen sind von F. Neumann experimentell erforscht und theoretisch erklärt worden auf Grund der Annahme, daß ein an allen Stellen gleichförmig in einer bestimmten Richtung dilatierter oder comprimierter amorpher Körper im allgemeinen die Eigenschaften eines homogenen, optisch zweiaxigen Krystalles annimmt, in welchem die Axen der Indexfläche mit denen des Deformationsellipsoides zusammenfallen. In einem ungleichförmig dilatierten oder comprimierten Körper ist zwar für jede einzelne Stelle das gleiche anzunehmen, aber Gestalt und Orientierung der optischen Indexfläche wechseln mit dem Orte im deformierten Körper. Da die Krystalle deformierenden Kräften gegenüber nach verschiedenen Richtungen sich ungleich verhalten, so sind ihre optischen Verhältnisse im deformierten Zustande, auch wenn es sich um einfachbrechende handelt, sehr viel complicierter, als bei den amorphen Körpern, daher die an den letzteren zu beobachtenden Erscheinungen zuerst behandelt werden mögen.

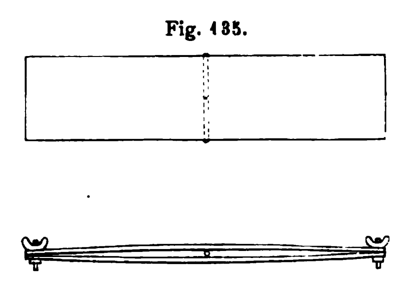
Würden wir einen aus gewöhnlichem Glase hergestellten Cylinder senkrecht zu den beiden kreisförmigen Basisflächen so zusammenpressen, daß er an allen Stellen im Innern gleichförmig deformiert wäre, so würde er genau dieselben optischen Eigenschaften annehmen, wie sie ein negativer einaxiger Krystall besitzt, dessen optische Axe in der Druckrichtung liegt[1]). Durch Druck nimmt das Glas also negative Doppelbrechung an. Eine ebensolche Dehnung in derselben Richtung würde den entgegengesetzten Effect hervorbringen, das Glas würde sich verhalten, wie ein positiver einaxiger Krystall; durch eine solche Deformation wird das Glas also positiv doppeltbrechend.

Daß in der Tat im Glase eine Compression in der Schwingungsrichtung eines Lichtstrahles eine Vergrößerung, eine Dilatation eine Verkleinerung seiner Fortpflanzungsgeschwindigkeit hervorbringt, läßt sich durch die auftretenden Erscheinungen der Doppelbrechung, deren Charakter durch eine der S. 138 f. beschriebenen Methoden bestimmt werden kann, nachweisen. Diese Erscheinungen, und zwar beide, die durch Druck und die durch Dehnung hervorgebrachten gleichzeitig, kann man am einfachsten

1) Sehr schön kann man diese Wirkung des Druckes an weicher Gelatine, einer ebenfalls amorphen Substanz, nachweisen, wenn man eine kreisrunde Platte derselben zwischen Glasplatten auf den Objectträger des Nörrembergschen Polarisationsapparates bringt und alsdann das Ocularrohr so weit herabschraubt, daß die Platte zusammengepreßt wird; dieselbe zeigt dann die normale Interferenzfigur eines einaxigen Krystalls. Eine Mischung von Wachs und Harz', zwischen zwei Glasplatten mäßig gepreßt, verhält sich ebenso, und ein solches Präparat zeigt die Erscheinung sogar dauernd; doch wird von manchen Autoren angenommen, daß dieselbe darauf beruhe, daß in solchen organischen Substanzen sich sehr winzige krystallinische Partikel befinden, welche regellos durcheinander liegen, so daß ihre doppeltbrechende Wirkung auf das Licht sich gegenseitig aufhebt, während sie durch Druck parallel orientiert werden und nunmehr eine gemeinsame optische Wirkung ausüben. Übrigens verhält sich Flintglas mit hohem Bleigehalte abweichend von gewöhnlichem Glase, indem es durch Druck positiv doppeltbrechend wird.

durch folgenden, von F. Neumann angegebenen Versuch zur Anschauung bringen: Man nimmt zwei Spiegelglasstreifen von 2—3 Decimeter Länge, etwa $\frac{1}{2}$ Decimeter Breite und 5—6 mm Dicke, legt zwischen dieselben einen Metalldraht und krümmt sie, am besten durch Klemmschrauben, allmählich bis zur Berührung an den Enden, so daß sie einander die concaven Seiten zukehren (s. Fig. 135, welche dieselben von der Seite und von oben darstellt). Durch diese Krümmung sind die äußeren, convexen Flächen der Platten größer, die inneren concaven dagegen kleiner geworden, als sie vorher waren, jene sind also in der Längsrichtung gedehnt, diese in derselben Richtung zusammengepreßt.

Fig. 135.



Die Figur 136 zeigt dies deutlicher, da hier die Krümmung so stark dargestellt ist, wie sie mit Glasstreifen in Wirklichkeit nicht vorgenommen werden kann.

Fig. 136.



In der äußersten Glasschicht, z. B. bei a, ist die Dehnung $\parallel ll$ gerichtet, also ist an dieser Stelle die Geschwindigkeit der parallel ll schwingenden Strahlen am kleinsten, am größten (nämlich gleich der im ungepreßten Zustande) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der $\parallel qq$ schwingenden. An einer weiter nach innen liegenden Stelle b ist immer noch eine Verlängerung nach ll, jedoch eine geringere, vorhanden; die $\parallel ll$ schwingenden Strahlen haben also die kleinste, die $\parallel qq$ schwingenden die größte Geschwindigkeit, aber die Differenz beider ist kleiner. In der Mitte des Glasstreifens, bei c und auf allen Punkten der durch c gehenden Linie CC', wird jene Differenz Null sein; es ist dies diejenige Linie, welche im ungebogenen Zustande des Glasstreifens die gleiche Länge besitzt, also weder eine Pressung noch eine Dehnung erfahren hat. Auf der concaven Seite dagegen ist der Glasstreifen durch die Biegung in seiner Längsrichtung zusammengepreßt, und zwar in der Linie DD' weniger, als in JJ', denn letztere Linie ist von allen die kürzeste geworden. In d sowohl als in i ist infolge der Pressung die Lichtgeschwindigkeit der $\parallel l'l'$ schwingenden Strahlen am größten, die der senkrecht dazu, $\parallel q'q'$, schwingenden am kleinsten, aber in i ist die Differenz beider im Maximum. Der Glasstreifen muß also in seiner ganzen Dicke doppeltbrechend sein, bis auf eine Zone in der Mitte; die Doppelbrechung ist am stärksten in der äußersten und der innersten Zone, aber in der einen negativ, in der andern positiv, und sie nimmt von da an Stärke ab nach innen bis zu jener neutralen Zone, wo sie gleich Null wird. Bringen

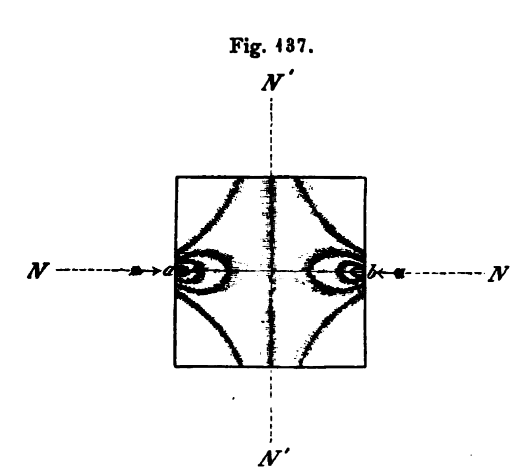
wir die so gebogenen Glasstreifen nun derart zwischen zwei gekreuzte Nicols (in das Polarisationsinstrument mit parallelem Lichte), daß die Lichtstrahlen parallel der Längsrichtung des Drahtstückes Fig. 135, also durch eine etwa $\frac{1}{2}$ Decimeter dicke Glasschicht hindurchgehen, so werden alle Strahlen, mit Ausnahme der in die neutrale Zone fallenden, in je zwei polarisierte zerlegt, welche parallel ll und qq schwingen und sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Eine noch geringere Biegung, als sie Fig. 135 darstellt, genügt bei den angegebenen Dimensionen bereits, den beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen in der innern und äußern Grenzschicht beim Austritte einen Gangunterschied von mehreren Wellenlängen zu verleihen, in den der Mitte näheren Zonen natürlich weniger. In einem bestimmten Abstande von der neutralen Zone wird derselbe genau $= \lambda$ sein, dort wird also bei gekreuzten Nicols vollständige Vernichtung des Lichtes stattfinden, wie in der einfachbrechenden Zone selbst, ebenso in derjenigen, wo der entstehende Gangunterschied $= 2\lambda$ ist usf. Stellt man die Längsrichtung der Glasstreifen einem der Nicols parallel, so werden natürlich alle Stellen derselben dunkel erscheinen. In jeder andern Stellung dagegen müssen, wenn das angewandte Licht homogenes war, zwischen den Zonen mit den Gangunterschieden 0, λ, 2λ usf. helle Zonen auftreten, deren Helligkeit am größten in der Mitte zwischen zwei dunkeln sein muß, da dort der Gangunterschied bzw. $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$ usf. beträgt. Den größten Unterschied der Intensität zwischen hellen und dunkeln Zonen erhält man selbstverständlich, wenn die Längsrichtung der Glasstreifen $45°$ mit den Schwingungsrichtungen der Nicols bildet. Hieraus ergibt sich ganz von selbst die Erscheinung im weißen Lichte: in der Mitte des Glasstreifens erscheint die neutrale Zone in der ganzen Länge schwarz, zu beiden Seiten, ihr und den Außenflächen der Glasstreifen parallel, erscheinen Farbenstreifen, von der Mitte aus nach beiden Seiten genau in derselben Reihenfolge der Farben, wie sie (im convergenten Lichte) in den Farbenringen der einaxigen Kystalle, senkrecht zur Axe geschnitten, auftreten.

Umwindet man eine kreisförmige Platte von Glas auf ihrer cylindrischen Seitenfläche mit einer sehr festen Schnur und zieht diese stark an, so wird jene von allen Punkten des Umfanges aus nach dem Centrum hin zusammengepreßt, am stärksten am Rande, immer weniger nach der Mitte zu. Im parallelen Lichte zeigen alle Stellen gleichen Druckes, d. h. alle auf einem mit dem Umfange der Platte concentrischen Kreise liegenden Punkte, gleiche Farben; es erscheinen also die kreisförmigen isochromatischen Curven mit dem schwarzen Kreuze, genau wie bei den einaxigen Krystallen im convergenten Lichte[1]).

1) Eine schwache Doppelbrechung zeigen Linsen in optischen Instrumenten, wenn ihre Fassung eine Pressung auf dieselbe ausübt. In einem Konoskope, welches derartige Linsen enthält, kann man natürlich zwischen gekreuzten Nicols kein gleichmäßig dunkles Gesichtsfeld erhalten.

Preßt man ein quadratisches Stück Glas nicht gleichmäßig von zwei gegenüberliegenden Flächen, sondern nur von zwei Stellen aus zusammen und bringt es so in paralleles polarisiertes Licht bei gekreuzten Nicols, daß die Gerade zwischen jenen beiden Punkten 45° mit den Nicols einschließt, so entsteht eine Aufhellung, bei stärkerem Drucke eine Farbe, in der Nähe der beiden gepreßten Stellen. Diese Aufhellung wird aber nach allen Seiten von da aus schwächer, d. h. das Glas ist unmittelbar bei denselben am stärksten zusammengepreßt, und der Druck nimmt ab mit der Entfernung von ihnen, der mittlere Teil ist gar nicht von ihnen betroffen worden, bleibt also dunkel. Wird jedoch ein stärkerer Druck ausgeübt, so werden die benachbarten Glasteilchen in der Druckrichtung eine um so viel größere Compression angenommen haben, als senkrecht dazu, daß die beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen um mehrere Wellenlängen gegeneinander verschoben sind, also eine Farbe zweiter oder dritter Ordnung daselbst erscheint. Fig. 137 zeigt die alsdann im parallelen polarisierten Lichte beobachtete Erscheinung, wenn die durch Pfeile bezeichnete Druckrichtung *ab* dem Hauptschnitte des einen Nicols parallel ist; von *a* und *b* aus nimmt der Druck, folglich auch die Stärke der Doppelbrechung, nach allen Seiten ab, also erscheinen in größeren Abständen andere Interferenzfarben, die zusammen ein Bild isochromatischer Curven liefern, welches mit dem bekannten Lemniscatensystem zweiaxiger Krystalle große Ähnlichkeit besitzt.

Fig. 137.



Erwärmt man ein Stück Glas ungleichmäßig, so treten in demselben durch die ungleiche Dilatation Dehnungen und Pressungen ein, und es zeigen sich dementsprechende Erscheinungen der Doppelbrechung. Diese Spannungen lassen sich auch d a u e r n d machen, indem das Glas stark erhitzt und dann schnell abgekühlt wird; man erhält dann sog. »gekühlte Gläser«, welche im polarisierten Lichte je nach ihrer Gestalt die mannigfaltigsten Interferenzbilder liefern.

Unter den amorphen organischen Körpern gibt es viele sog. colloidale Substanzen, wie Collodium, Gelatine u. a., welche die Eigenschaft haben, beim Übergange aus dem gelösten in den festen Zustand, bei der Entfernung des Lösungsmittels durch Eintrocknen, eine erhebliche Contraction zu zeigen. Läßt man solche Körper unter Umständen eintrocknen, unter denen sie sich nicht nach allen Richtungen gleichmäßig zusammenziehen können, so

müssen dieselben in denjenigen Richtungen, in welchen die Contraction verhindert wurde, sich im Zustande der Spannung befinden. Gießt man z. B. eine starke Auflösung von Gelatine warm in einen auf einer Glasplatte liegenden, mit einer Handhabe versehenen Rahmen, hebt nach dem Gerinnen die entstandene Scheibe von der Glasplatte ab und läßt sie in dem Rahmen frei eintrocknen, so haftet dieselbe ringsum an dem letzteren und kann sich also in ihrer Ebene nicht contrahieren. Nach dem vollständigen Erhärten besitzt daher eine solche Platte eine Spannung in allen ihrer Ebene parallelen Richtungen und behält dieselbe auch, wenn sie aus dem Rahmen gelöst wird. Gelänge es, diese Spannung nach allen jenen Richtungen gleich stark zu machen, so würde eine solche Platte im convergenten Lichte das Interferenzbild eines einaxigen Krystalls zeigen müssen; da aber die Gelatine nicht in allen Teilen gleichmäßig eintrocknet, oft sich auch an einzelnen Stellen vom Rande ablöst, so sind es immer nur einzelne Partien in größeren Platten, welche gleichmäßig genug gespannt geblieben sind, um jene Erscheinung zu zeigen. Käufliche Gelatineplatten, wie sie von Lithographen gebraucht werden, zeigen zuweilen deutlich das dunkle Kreuz und, wenn mehrere derselben übereinander geschichtet werden, auch die Farbenringe; die Doppelbrechung in diesen Platten ist negativ, woraus hervorgeht, daß auch in der Gelatine Dehnung ebenso wie im Glase wirkt. Bei den im Rahmen erstarrten Platten ist dagegen im allgemeinen die Spannung in verschiedenen, der Platte parallelen Richtungen ungleich, die Platte muß also die optischen Eigenschaften eines zweiaxigen Krystalls annehmen. In der Tat zeigen alle Stellen einer solchen, in denen auf eine gewisse Erstreckung hin die Spannungsverhältnisse nahezu constant sind, im convergenten polarisierten Lichte das Interferenzbild zweiaxiger Krystalle, verschiedene Stellen einer und derselben Platte aber mit verschiedenem Axenwinkel und verschiedener Richtung der Axenebene, weil mit dem Orte in der Platte auch das Verhältnis, in welchem die Spannung nach verschiedenen Richtungen steht, und die Orientierung der Maximalspannung wechselt; endlich hängt die Verteilung der Spannungsverhältnisse natürlich auch ab von der Form des Rahmens, in welchem die Erstarrung erfolgte. Bei dünnen Platten reduciert sich wegen der schwachen Doppelbrechung die Interferenzerscheinung auf das Auftreten des dunkeln Kreuzes bzw. der Hyperbeln auf hellem Grunde (je nachdem die Ebene der optischen Axen an der betreffenden Stelle einem Nicolhauptschnitte parallel geht oder beide schief durchschneidet); man beobachtet daher gleichsam nur den mittleren Teil der in Fig. 80 *b* und 81 *b* dargestellten Erscheinung; bei dickeren Platten treten aber auch die Farbenringe in das Gesichtsfeld. Ähnliches Verhalten zeigen: Horn, Tierblase (besonders mehrfach übereinander gelegt) und andere organische Substanzen. Endlich enthalten auch die gekühlten Gläser Stellen, welche deutliche Axenbilder liefern, und diese lassen da, wo der Axenwinkel einen größeren Wert erreicht, auch eine deutliche Dispersion der Axen erkennen, woraus zu schließen, daß der



Druck die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes verschiedener Farbe in ungleicher Weise beeinflußt.

Wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so wird auch die Absorption des Lichtes durch Spannung beeinflußt. Infolgedessen wird ein Druck oder Zug, welcher einen amorphen Körper in einen doppeltbrechenden verwandelt, bei ausgesprochener Farbe des Körpers auch Dichroismus hervorbringen. In der Tat wies Kundt zuerst an gespannten Kautschuk- und Guttaperchaplatten einen solchen »temporären Dichroismus« mit der Haidingerschen Lupe nach.

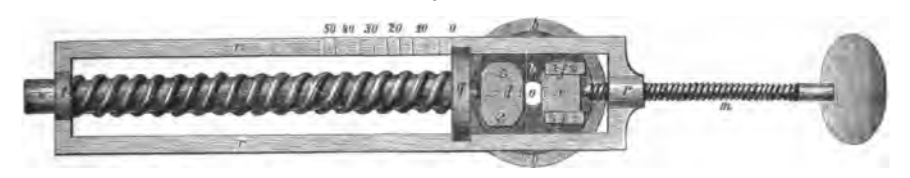
Daß in Krystallen ebenso wie in amorphen Körpern durch gerichteten Druck oder Zug eine Änderung der Beschaffenheit des Äthers erzeugt wird, beobachtete Brewster bereits 1815; doch ist erst in neuerer Zeit die von F. Neumann gegebene Theorie der Änderung der optischen Eigenschaften der amorphen Körper durch elastische Deformationen von Pockels auf jene angewendet und gezeigt worden, in welcher Weise die Änderungen der optischen Indexfläche von dem »Deformationsellipsoide« des Krystalls abhängig ist. Da nun das Verhalten eines Krystalls in bezug auf Compression und Dilatation ein verschiedenes ist, je nach seiner Zugehörigkeit zu einer der neun S. 220 f. erwähnten Gruppen, so ist auch die Änderung der optischen Eigenschaften dementsprechend verschieden.

1. Die einfachbrechenden Krystalle werden durch Druck (oder Zug), wie derselbe auch orientiert sei, doppeltbrechend, und zwar ist die optische Änderung proportional dem Drucke, und für jede beliebige Richtung desselben läßt sich mittels der Theorie (welche von Pockels für mehrere hierher gehörige Körper durch Versuche geprüft wurde) die Gestalt und Orientierung der im allgemeinen optisch zweiaxigen Indexfläche berechnen aus der durch die Elasticitätsconstanten des Krystalles und die auf ihn wirkenden Kräfte bestimmten Deformation desselben, aus seinen optischen Constanten im unveränderten Zustande und aus gewissen zu beobachtenden Größen, welche die Änderung der optischen Eigenschaften bestimmen. Optisch einaxig wird ein Krystall dieser Gruppe nur dann, wenn die Richtung des Druckes die Normale eines Kreisschnittes der Oberfläche der Dehnungscoefficienten oder eine der drei zueinander senkrechten Maxima oder Minima derselben ist (vgl. S. 220).

2. Optisch einaxige Krystalle, in der Richtung ihrer optischen Axe einem Drucke unterworfen, werden stärker oder schwächer doppeltbrechend, bleiben aber immer optisch einaxig. Alsdann entspricht die Druckrichtung nämlich ebenfalls einem Kreisschnitte der Dehnungsfläche oder einer Richtung, zu welcher senkrecht zwei Richtungen mit gleichem Dehnungscoefficienten existieren (vgl. S. 221 II—IVb). In jeder andern Richtung bewirkt dagegen ein einseitiger Druck eine Deformation, welche den Krystall in einen optisch zweiaxigen verwandelt. Zur Beobachtung der in diesem Falle eintretenden Erscheinungen dient der von Bücking construierte, in Fig. 138 abgebildete Apparat, welcher zugleich gestattet, die Stärke des

auf den Krystall ausgeübten Druckes zu messen. Derselbe besteht zunächst in einer in der Mitte durchbohrten Messingscheibe *b*, welche an Stelle des drehbaren Krystallträgers mit dem Nörrembergschen Polarisationsapparate

Fig. 138.



verbunden werden kann. Auf dieser ist eine Stahlplatte *d* festgeschraubt, gegen welche die zu untersuchende, über der Öffnung *o* befindliche Krystallplatte angelegt und mittels einer zweiten, zwischen den abgeschrägten Schienen *f* verschiebbaren Platte *e* durch Anziehen der Schraube *m* zusammengepreßt wird. Letztere geht durch einen von Messing gefertigten starken Rahmen *r*, welcher an der entgegengesetzten Seite bei *t* eine kreisförmige Durchbohrung besitzt; in dieser ist ein Messingcylinder *n* verschiebbar, dessen Ende eine Scheibe *q* trägt, in welche der Rahmen *r* so eingelassen ist, daß *q* sich nur verschieben, nicht drehen läßt. Um den Cylinder *n* ist eine starke Spiralfeder gewunden, welche in gespanntem Zustande gegen den Querbalken *t* des Rahmens und gegen die Messingplatte *q* drückt; letztere trägt auf der dem Cylinder entgegengesetzten Seite in ihrer Mitte einen Bolzen, der in eine Vertiefung der Platte *d* hineinragt. Wird nun nach Einfügung der Krystallplatte die Schraube *m* angezogen, so wird der Rahmen *r* dem Kopfe der Schraube genähert und dadurch die Spiralfeder comprimiert; ihre Spannung wirkt durch *q* auf die Platte *d*, sowie durch *m* auf die Platte *e* und somit auch auf den zwischen den beiden Platten befindlichen Krystall. An der einen längeren Seite des Rahmens ist eine Teilung angebracht, deren Nullpunkt derjenigen Stellung der Scheibe *q* entspricht, in welcher die Feder ungespannt ist; an derselben kann die Spannung der Feder und damit der auf den Krystall ausgeübte Druck direct in Kilogrammen abgelesen werden. Mit Hilfe dieses Apparates ist es leicht, sich von dem Vorhandensein der Doppelbrechung in einem gepreßten Würfel, hergestellt aus Glas oder einem einfachbrechenden Krystalle, zu überzeugen. Um nun das Verhalten eines einaxigen Krystalles zu prüfen, schleift man aus einem solchen einen kleinen Würfel derart, daß zwei Seitenpaare desselben der optischen Axe parallel, das dritte dazu senkrecht ist. Bringt man diesen Würfel so zwischen die beiden Stahlplatten *d* und *e*, daß zwei Flächen der ersteren Art an den letzteren anliegen und die optische Axe des Krystalls senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht, so erfährt der Krystall beim Anziehen der Schraube eine Compression, deren Richtung senkrecht zu seiner optischen Axe steht. Ist nun der Druckapparat mit dem Polarisationsinstrumente (für convergentes

Licht) verbunden, so erblickt man in diesem die normale Interferenzerscheinung des einaxigen Krystalls, solange die Platte noch keiner Pressung unterworfen ist. Zieht man dagegen die Schraube an, so beginnen die kreisförmigen Farbenringe sich elliptisch zu verlängern, und wenn die Richtung der Verlängerung diagonal zu den Hauptschnitten der Nicols des Instrumentes liegt, so gehen die Arme des schwarzen Kreuzes in der Mitte auseinander und verwandeln sich in Hyperbeln, kurz, es entsteht das Interferenzbild eines zweiaxigen Krystalls mit kleinem Axenwinkel, dessen Größe jedoch mit Zunahme des Druckes wächst. Was die Richtung der Ebene betrifft, in welcher die beiden nun vorhandenen optischen Axen liegen, so hängt sie davon ab, ob der untersuchte Krystall positive oder negative Doppelbrechung besaß. Wird durch einen Druck, wie im Glase (s. S. 225), die Geschwindigkeit der in der Druckrichtung schwingenden Lichtstrahlen vergrößert, so muß bei den beiden Arten von einaxigen Krystallen das Resultat in bezug auf die Lage der Axenebene gerade das entgegengesetzte sein, wie leicht einzusehen. Bei den positiven Krystallen nämlich haben die parallel der Axe schwingenden Strahlen die kleinste Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die senkrecht dazu schwingenden die größte; wird nun für einen der letzteren die Geschwindigkeit durch den Druck noch weiter vergrößert, so wird dessen Schwingungsrichtung diejenige der größten, die dazu senkrecht in derselben Ebene gelegene die der mittleren, die frühere optische Axe bleibt die Schwingungsrichtung der kleinsten Lichtgeschwindigkeit; da die optischen Axen eines zweiaxigen Körpers stets in der Ebene der ersten und dritten dieser Richtungen liegen, so müssen die beiden Axen infolge des Druckes in einer Ebene auseinandergehen, welche der Druckrichtung parallel ist. Da der durch Pressung hervorgebrachte Axenwinkel immer klein ist, so bleibt die frühere optische Axe stets erste Mittellinie, also ist der zweiaxige Krystall, welcher aus dem positiven einaxigen entsteht, ebenfalls positiv. Bei den negativen Krystallen enthält die zur optischen Axe senkrechte Ebene alle Schwingungsrichtungen der kleinsten Lichtgeschwindigkeit; in der Druckrichtung wird die letztere vergrößert, folglich wird sie Schwingungsrichtung der jetzt mittleren, die dazu senkrecht in derselben Ebene gelegene wird die der kleinsten, die frühere optische Axe bleibt die der größten Lichtgeschwindigkeit; die beiden optischen Axen gehen demnach in einer zur Druckrichtung senkrechten Ebene auseinander, und es entsteht ein negativ zweiaxiger Krystall. Dieses Verhalten zeigen nun in der Tat alle bisher untersuchten einaxigen Krystalle, und zwar haben die Versuche Bückings gelehrt, daß ein verhältnismäßig geringer Druck imstande ist, in einem einaxigen Krystalle einen kleinen Axenwinkel hervorzurufen, daß aber ein sehr viel stärkerer Druck nötig ist, um den Axenwinkel weiter zu vergrößern, daß also die Änderung des letzteren nicht proportional dem Drucke vor sich geht.

Besonders interessante Resultate liefert die Anwendung eines Druckes auf solche einaxige Krystalle, welche die Polarisationsebene des Lichtes

drehen, z. B. Quarz. Dieser ist positiv doppeltbrechend, erhält also, wenn er senkrecht zur Axe gepreßt wird, zwei Axen in der der Druckrichtung parallelen Ebene. Das entstehende Axenbild zeigt dann in den Mitten der die beiden Axen umgebenden Ringe ebenso eine Färbung, welche sich beim Drehen des Analysators ändert, wie die Mitte des Interferenzbildes einer ungepreßten Quarzplatte, daher auch in der Richtung der beiden optischen Axen eine Drehung der Polarisationsebene des Lichtes stattfinden muß. Die Versuche von Mach und Merten haben gezeigt, daß in diesen Richtungen nicht je zwei circular, sondern zwei elliptisch schwingende Strahlen von entgegengesetztem Sinne der Bewegung sich fortpflanzen und beim Austritte sich zu einer einzigen elliptischen Vibration zusammensetzen, deren große Bahnaxe im Sinne des Strahles von größerer Fortpflanzungsgeschwindigkeit gedreht ist, wobei der Gangunterschied, verglichen mit dem der beiden circularen Strahlen im normalen Quarze, durch den Druck sogar vermehrt worden ist. Unter Berücksichtigung der nach der Theorie von Gouy (s. S. 156) stattfindenden Superposition der durch die gewöhnliche und die circulare Doppelbrechung hervorgebrachten Gangunterschiede hat Beaulard durch Untersuchung der Elliptícität vorher geradlinig polarisierter, durch gepreßten Quarz in verschiedenen Richtungen hindurchgegangener Lichtstrahlen gefunden, daß das Rotationsvermögen des Quarzes durch den Druck nicht verändert werde, sondern nur die Doppelbrechung, und daß in jeder der beiden (in dem betr. Falle einen Winkel von 13° einschließenden) optischen Axen normale circulare Doppelbrechung vorhanden sei.

3. Optisch zweiaxige Krystalle, in der Richtung einer ihrer Hauptschwingungsrichtungen einem Drucke unterworfen, müssen, da hierdurch das Verhältnis der drei Axen der optischen Indexfläche, von welchem die Größe des Axenwinkels abhängt, geändert wird, eine Änderung des letzteren erfahren. Die bisher mit dem Bückingschen Apparate untersuchten Krystalle haben gezeigt, daß auch bei ihnen die Geschwindigkeit der in der Druckrichtung schwingenden Strahlen durch den Druck vergrößert wird. Schleift man z. B. aus einem negativen Krystalle einen Würfel, dessen Seiten den drei optischen Hauptschnitten parallel sind, und bringt denselben so in das Instrument, daß die erste Mittellinie senkrecht steht, im Polarisationsapparate also das Interferenzbild mit den Lemniscaten sichtbar ist, und preßt den Krystall in der Richtung der Y-Axe der Indexfläche, d. h. senkrecht zur Axenebene, so wird die mittlere Lichtgeschwindigkeit größer, nähert sich also der größten, d. i. derjenigen in der ersten Mittellinie, also muß der Axenwinkel zunehmen. Dreht man nun den Krystall um die erste Mittellinie um 90° und preßt ihn von den beiden andern Seitenflächen aus, d. h. in der Schwingungsrichtung der kleinsten Lichtgeschwindigkeit, so muß diese größer werden, sich also der mittleren nähern; die beiden zur ersten Mittellinie senkrechten, im Instrumente horizontalen Axen der Indexfläche sind folglich dann weniger voneinander

verschieden, der Krystall nähert sich in seinen optischen Eigenschaften einem solchen, in welchem diese beiden Richtungen optisch gleichwertig sind, d. h. einem einaxigen Krystalle; der Axenwinkel muß somit kleiner werden. Es leuchtet ein, daß bei einem kleinen Axenwinkel, d. h. wenn die Hauptbrechungsindices β und γ schon von vornherein wenig verschieden sind, ein gewisser Druck genügen wird, um beide ganz gleich zu machen: alsdann ist der Krystall in einen negativ einaxigen verwandelt. Steigert man den Druck noch weiter, so wird das frühere γ größer als β und somit die Z-Axe der optischen Indexfläche die mittlere; die optischen Axen müssen also wieder auseinandergehen, aber in einer zu der früheren senkrechten Ebene. Bei demjenigen Drucke, unter welchem $\beta = \gamma$, ist aber der Krystall einaxig nur für eine bestimmte Farbe, da die durch Druck hervorgebrachte Änderung der Fortpflanzungsverhältnisse des Lichtes für verschiedene Farben eine ungleiche ist; wendet man also einen Druck an, durch welchen der Krystall für mittlere Farben einaxig wird, so liegen die optischen Axen für den einen Teil des Spectrums noch in der früheren Ebene, für den andern sind sie bereits in der neuen Axenebene auseinandergetreten; eine solche Platte verhält sich also, wenn ihre Dispersion groß genug ist, wie die S. 120 beschriebenen Substanzen mit gekreuzten Axenebenen. Bei positiven Krystallen muß, wie eine analoge Betrachtung lehrt, ein Druck senkrecht zur Ebene der Axen den Winkel derselben verkleinern (bei kleinem Anfangswinkel der Axen den Krystall in einen positiv einaxigen umwandeln), ein Druck parallel der Axenebene den Axenwinkel vergrößern. Wirkt endlich der Druck nicht parallel einer der drei Hauptschwingungsrichtungen, sondern in einer beliebigen andern Richtung, so ist klar, daß sich nicht nur die Gestalt, sondern auch die Orientierung der optischen Indexfläche ändern muß.

Optisch anomale Krystalle. Nach dem Vorstehenden bewirkt bestimmt gerichteter Druck oder Zug in einem Krystalle stets, daß derselbe Eigenschaften annimmt verschieden von denjenigen, welche gesetzmäßig der Gruppe von Krystallen zukommen, der jener im normalen Zustande angehört. Wenn die betreffenden Kräfte nicht auf alle Teile des Krystalles gleichmäßig wirken, so sind die entstehenden Erscheinungen, gerade so, wie die S. 226f. beschriebenen deformierter amorpher Körper, auch noch mit dem Orte im Krystalle wechselnde; der letztere hat dann auch aufgehört, homogen zu sein. Wenn nun in einem Krystalle durch irgendeine Ursache die Abweichungen seiner optischen Eigenschaften von denjenigen im normalen Zustande dauernde geworden sind, so bezeichnet man einen solchen als »optisch anomal«. In den einfachbrechenden Diamantkrystallen finden sich z. B. nicht selten fremde, während der Bildung eingeschlossene Körper (Krystalle anderer Mineralien) umgeben von einer Zone, in welcher der Diamant deutliche Doppelbrechung zeigt. Die Ursache dieser Erscheinung ist die Ungleichheit der Ausdehnungscoefficienten beider Körper, deren Krystallisation bei einer andern, jedenfalls sehr hohen Temperatur statt-

fand; infolgedessen zogen sich beide während der Abkühlung auf die jetzige Temperatur in verschiedenem Grade zusammen, so daß nun die Teile, in welchen sie aneinander grenzen, in der jedesmaligen Richtung der Normale zur Grenzfläche sich im Zustande einer Compression oder Dilatation befinden müssen. Da durch Druck auch die Absorptionsverhältnisse gefärbter Körper beeinflußt werden (s. S. 230), so können in der angegebenen Weise auch »pleochroitische Höfe« in Krystallen, eingeschlossene kleinere einer andern Substanz umgebend, entstehen.

Krystalle von großer Plasticität (s. S. 208), welche also sehr leicht dauernde Deformationen erfahren, erleiden oft locale Verdichtungen, und infolgedessen entstehen optische Anomalien. So zeigt das einfachbrechende Steinsalz nach einer Pressung, ja schon nach dem Zerschlagen doppeltbrechende Streifen.

Manche andere, ihren sonstigen Eigenschaften nach ebenfalls zur Gruppe der einfachbrechenden gehörige Krystalle, welche keine erkennbaren Einschlüsse enthalten und keiner nachträglichen Deformation unterworfen wurden, zeigen trotzdem in ihrer ganzen Ausdehnung deutliche Doppelbrechung, meist in der Art, daß sie in regelmäßiger Weise aus Teilen zusammengesetzt erscheinen, in denen die Orientierung der Schwingungsrichtungen eine verschiedene ist. Ebenso gibt es Krystalle, welche die Form optisch einaxiger besitzen, aber zweiaxig sind, und zwar an verschiedenen Stellen mit verschiedenem Winkel der Axen und verschiedener Orientierung der Ebene derselben. Für diese optischen Anomalien, welche, wie die S. 226f. beschriebenen amorpher Körper, zuerst von Brewster beobachtet wurden, versuchte Reusch eine Erklärung durch die Annahme zu geben, daß die betreffenden Substanzen während ihrer Krystallisation, ähnlich wie colloidale Körper beim Festwerden, eine gewisse Contraction erleiden, durch welche alsdann eine bleibende Spannung in denselben entstehe. In den Krystallen des Alauns z. B. tritt die Doppelbrechung in der Weise auf, als sei die Substanz des Krystalles gespannt innerhalb gewisser Ebenen, parallel welchen die schichtenweise Auflagerung beim Aufbaue desselben stattfand. Alsdann müßte die Verteilung dieses anomalen Zustandes in einer gewissen Abhängigkeit von der äußeren Form eines solchen Krystalles stehen, und dies ist in der Tat bei den hierher gehörigen Substanzen der Fall. Für diese Erklärung der Erscheinung sind deshalb die Versuche von Interesse, welche man mit amorphen Körpern angestellt hat, denen künstlich eine den Krystallen entsprechende Form gegeben wurde. Ben Saude fertigte zu diesem Zwecke Hohlformen von Krystallmodellen, füllte dieselben mit Gelatine, nahm letztere nach 2—3 tägigem Trocknen heraus und schnitt daraus in bestimmten Richtungen Platten, welche zur Verhinderung weiteren Eintrocknens in Canadabalsam eingelegt wurden. Diese zeigten denn nun in der Tat Doppelbrechungserscheinungen, analog denen solcher optisch anomaler Krystalle, welche dieselben Formen wie die Gelatinemodelle besitzen; besonders lassen sie eine Teilung in Sectoren mit verschiedenen

Auslöschungsrichtungen erkennen, deren Grenzen eine von der Form des Modells abhängige Lage besitzen.

Da nun aber für die Annahme, daß eine krystallisierte Substanz während des Vorganges der Krystallisation Volumänderungen erfahre, wie ein allmählich in den festen Zustand übergehender colloidaler Körper, keinerlei Beweis geliefert werden kann, so stellte Mallard jener Erklärung der optischen Anomalien diejenige entgegen, daß die betreffenden Krystalle aus einander durchdringenden Partien bzw. sehr dünnen Lamellen von normal beschaffener, aber verschieden orientierter Krystallsubstanz aufgebaut seien. Daß dieselben alsdann die erwähnten Erscheinungen zeigen müssen, ist bereits S. 152—153 auseinandergesetzt worden. Für sehr viele, früher als »optisch anomal« bezeichnete Krystalle hat Mallard in der Tat den Beweis der Richtigkeit dieser Erklärung geliefert. Da es sich nun bei derartig zusammengesetzten Gebilden, welche sich an verschiedenen Stellen optisch verschieden verhalten, nur um scheinbar einfache Krystalle handelt, und die verschieden orientierten Partien derselben optisch normal beschaffen sind, so darf man ein solches Gebilde eigentlich nicht als einen »optisch anomalen Krystall« bezeichen, wie es vielfach geschieht. Die Fälle wirklicher »optischer Anomalie« eines Krystalles (abgesehen von der temporären, S. 230 bis 234 beschriebenen) reducieren sich wahrscheinlich auf die durch Einschlüsse hervorgebrachten (s. S. 234) und vielleicht auf gewisse Erscheinungen sog. »isomorpher Mischungen«, d. h. Krystalle, welche aus den kleinsten Teilchen zweier Salze von sehr ähnlichen, jedoch nicht genau gleichen Dimensionen aufgebaut sind, so daß es wohl möglich erscheint, daß durch diese molekulare Inhomogenität dauernde Spannungen des ganzen Gebildes zustande kommen. Dafür sprechen die Beobachtungen von Klocke und Brauns, nach denen z. B. Krystalle des Alauns normal einfachbrechend sind, wenn sie aus dem chemisch reinen Salze bestehen, dagegen deutliche Doppelbrechung zeigen, wenn sie isomorphe Beimischungen enthalten, so daß in diesem Falle wahrscheinlich eine wirkliche optische Anomalie vorliegt.

C. Vectorielle Eigenschaften.

Polare Pyro- und Piezoelektricität.

Gewisse die Elektricität nicht leitende Krystalle zeigen in bestimmten und in den ihnen entgegengesetzten Richtungen eine Verschiedenheit ihres Verhaltens, indem sie, erhitzt und alsdann der Abkühlung überlassen, eine elektrische Polarität annehmen, welche sich nur bei einer Änderung der Temperatur entwickelt und verschwindet, wenn die letztere stationär geworden ist. Diese Eigenschaft bezeichnet man als »polare Pyroelektricität« und die Richtung, in welcher die Polarität erregt wird, als »elektrische Axe«. An der Oberfläche der optisch einaxigen Krystalle des Turmalins, an welchen diese Eigenschaft zuerst beobachtet wurde, treten die beiden entgegengesetzten elektrischen Ladungen während der Abkühlung stets in derselben Weise an den beiden, in bezug auf die optische Axe entgegengesetzten Enden des Krystalles auf; erwärmt man aber einen Krystall, so zeigen während dieser Zeit, d. h. bei entgegengesetztem Vorzeichen der Temperaturänderung, die beiden Enden des Krystalles die umgekehrte Polarität. Man nennt nun dasjenige Ende des Krystalles, welches während des Erwärmens positiv, während der Abkühlung negativ elektrisch wird, den analogen Pol der elektrischen Axe; der entgegengesetzte, während des Erwärmens negative, während der Abkühlung positive Pol heißt der antiloge.

Die an den beiden Seiten der elektrischen Axe auftretenden elektrischen Spannungen sind gleich stark und gehören nicht bestimmten Stellen der Oberfläche an; denn sie erscheinen auch nach dem Zerbrechen des Krystalles auf den Trennungsflächen, so daß dann jedes der Fragmente wieder die gleiche Polarität besitzt. Dieselben müssen daher auf einer Ursache beruhen, derzufolge das Innere des Krystalles nach den beiden entgegengesetzten, der elektrischen Axe parallelen Richtungen eine verschiedene Wirkung auf die Oberfläche ausübt. In der Theorie der polaren Pyroelektricität wird angenommen, daß die kleinsten Teilchen eines solchen Krystalles eine permanente elektrische Polarität besitzen, deren Stärke jedoch mit der Temperatur variiert. Dann erklärt sich auch die Tatsache, daß die Gesamtheit der entwickelten Elektricität unabhängig ist von der Länge des Krystalles in der Richtung der elektrischen Axe, dagegen proportional dem Querschnitte und dem Betrage der Temperaturänderung.

Um die Verteilung der auf der Oberfläche eines pyroelektrischen Krystalles angesammelten Elektricität zu bestimmen, kann man sich eines

Elektroskopes oder Elektrometers bedienen, wie dies der Fall war bei den Untersuchungen von Rieß und G. Rose und den zahlreichen Bestimmungen Hankels, endlich bei den mit etwas verändertem Verfahren angestellten Versuchen C. Friedels. Noch genauer ist die von Röntgen vorgeschlagene Methode, nach welcher Koch eine Anzahl Krystalle untersuchte: es wurde aus einer feinen Öffnung ein heißer Luftstrom auf die Krystallfläche geblasen und die in derselben erregte Elektricität mit einem sehr empfindlichen Elektrometer gemessen. Während jedoch diese Methoden immer nur die Untersuchung des elektrischen Zustandes einer einzelnen Stelle gestatten, hat Kundt ein sehr bequemes Verfahren gelehrt, durch welches die Verteilung der Elektricität auf der ganzen Oberfläche des Krystalles gleichzeitig übersehen werden kann, und welches wegen der weiterhin zu besprechenden Beziehungen dieser Verteilung zu der Form desselben von großer praktischer Wichtigkeit für die Krystallographie geworden ist. Dieses Verfahren ist das folgende:

Man erwärmt den Krystall im Luftbade auf eine (je nach dessen Substanz verschiedene) höhere Temperatur und bringt ihn dann, nachdem man ihn einige Male durch eine Weingeistflamme gezogen hat, um von seiner Oberfläche die Elektricität zu beseitigen, in einen kälteren Raum. Hat hier die regelmäßige Abkühlung begonnen, so bestäubt man den Krystall mit dem zur Hervorbringung der sog. Lichtenbergschen Figuren dienenden Pulver, aus feingesiebtem Schwefel und Mennige bestehend, mittels des einem Blasebalge ähnlichen »Bestäubers«, welcher durch ein feinmaschiges Sieb von Baumwolle geschlossen ist. Beim Durchgange durch dieses Sieb wird der Schwefel negativ elektrisch und setzt sich daher auf die positiv elektrischen, die positiv elektrisch werdende Mennige auf die negativ elektrischen Oberflächenteile des Krystalles, so daß jene gelb, diese rot erscheinen, und zwar häuft sich das gelbe oder rote Pulver um so stärker auf ihnen an, je stärker die elektrische Spannung auf den betreffenden Oberflächenteilen ist. Die nach dieser Methode erhaltenen Figuren lassen sich dann leicht auf ein mit Gummi bestrichenes Papier abdrücken und so dauernd erhalten. Aus Taf. III, auf welcher eine Anzahl pyroelektrischer, derartig bestäubter Krystalle dargestellt sind, ist ersichtlich, daß diejenigen der Weinsäure, des Kieselzinkerzes, des Struvit und des Turmalin (Fig. 1—5) eine einzige elektrische Axe besitzen, während im Quarze (Fig. 6 und 7) deren drei, in einer Ebene einander unter 60° schneidend, vorhanden sind und im Boracit (Fig. 11) die vier Hauptdiagonalen des Würfels die Polarität elektrischer Axen zeigen. (Statt des Gemenges von Schwefel und Mennige wendet Bürker ein solches von Carmin, Schwefel und Lycopodium an.)

Wenn nun auch die Zahl und Richtung der elektrischen Axen aus der Verteilung des Schwefel- und Mennigepulvers unmittelbar hervorgeht, so zeigt sich doch in der letzteren ein merklicher Einfluß der geometrischen Gestalt des Krystalles; denn von dieser hängt ja offenbar die Verteilung der Temperaturen während der Abkühlung, also die Ursache der

elektrischen Erregung ab. Sobald die Form von derjenigen einer Kugel abweicht, reagiert ferner die oberflächlich angesammelte Elektricität durch Influenz auch auf die Verteilung derselben im Innern, so daß letztere nicht mehr gleichförmig ist. Will man daher die von den Einflüssen der (in gewissem Sinne wechselnden) äußeren Gestalt des Krystalles unabhängigen elektrischen Erscheinungen, welche lediglich der von der inneren Beschaffenheit des Krystalles herrührenden Polarität entsprechen, allein beobachten, so muß man eine aus dem Krystalle angefertigte Kugel dem Kundtschen Verfahren unterwerfen. Alsdann erscheinen an den beiden Endpunkten eines Durchmessers, welcher einer elektrischen Axe parallel ist, Maxima der elektrischen Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen, folglich stärkste Anhäufung des Schwefels, bzw. der Mennige, und Abnahme derselben nach allen Seiten. Eine Turmalinkugel z. B. würde an dem einen Pole der optischen Axe am intensivsten rot, am andern ebenso gelb erscheinen, und die Pulvermenge würde nach dem größten Kreise hin, dessen Ebene zur Axe senkrecht steht, regelmäßig abnehmen, so daß dieser als eine neutrale äquatoriale Zone zwei entgegengesetzt elektrische Halbkugeln trennen würde. Eine Quarzkugel, mit der optischen Axe senkrecht gestellt, würde sechs abwechselnd rote und gelbe Zonen und größte Anhäufung des betreffenden Pulvers an sechs Punkten, welche auf dem horizontalen Äquator je um 60° voneinander entfernt sind, zeigen.

Da eine Compression eines Körpers wirkt wie eine Verminderung, eine Dilatation wie eine Erhöhung der Temperatur desselben, so ist zu erwarten, daß in den polar pyroelektrischen Krystallen auch während einer Compression oder Dilatation eine Polarität in der Richtung ihrer elektrischen Axen erregt werde, und zwar müßte die Abnahme des Druckes an demselben Pole einer solchen Axe die entgegengesetzte Elektricität erzeugen, als die Zunahme desselben. Diese mit dem Namen »polare Piezoelektricität« belegte Eigenschaft polar pyroelektrischer Krystalle entdeckten J. und P. Curie. Wird z. B. ein Turmalin von zwei zur optischen Axe senkrechten Endflächen aus zusammengepreßt, so nimmt dasjenige Ende, welches beim Abkühlen des ganzen Krystalles positiv würde (d. i. der antiloge Pol), ebenfalls positive Elektricität an, beim Nachlassen des Druckes dagegen negative, wie beim Erwärmen des Krystalles. Preßt man eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Quarzplatte, welche, nach dem Kundtschen Verfahren untersucht, die in Fig. 7 Taf. III dargestellte Erscheinung zeigen würde, von zwei Ecken aus, d. h. in der Richtung einer der dre elektrischen Axen, zusammen, so zeigt sie nach der Bestäubung die in Fig. 9 abgebildete Verteilung des Pulvers; läßt man aber den Druck senkrecht zu einer elektrischen Axe wirken, so resultiert die Erscheinung Fig. 10. Wie Röntgens Versuche an einer Quarzkugel gezeigt haben, entsteht durch Compression in der Richtung der optischen Axe schwache Erregung an den Polen der drei dazu senkrechten elektrischen Axen, während die Druckstellen selbst unelektrisch bleiben; das letztere ist auch

der Fall, wenn die Druckrichtung geneigt zur optischen Axe in einem Hauptschnitte liegt, welcher zu einer elektrischen Axe senkrecht steht, deren Enden alsdann die relativ stärkste Elektricität zeigen, und zwar entgegengesetzt derjenigen, welche entsteht, wenn die Compression parallel einer elektrischen Axe stattfindet; ist endlich das letztere der Fall, so tritt das Maximum der elektrischen Erregung der beiden gegenüberliegenden Druckstellen ein.

Wie durch elastische Deformationen eines polaren dielektrischen Krystalles Elektricität erzeugt wird, so bewirkt umgekehrt die Elektrisierung eines solchen eine Deformation desselben. Während J. und P. Curie diese durch Messungen direkt nachwiesen, zeigte Kundt, daß die im convergenten polarisierten Lichte erscheinenden kreisförmigen Farbenringe einer Quarzplatte im elektrischen Felde in elliptische übergehen, wie sie durch einen senkrecht zur Axe gerichteten Druck hervorgebracht werden.

Beobachtungen von Voigt am Turmalin haben übrigens gezeigt, daß die Erscheinungen der polaren Pyroelektricität zum großen Teile eine Folge der durch die Erwärmung bewirkten Deformation, also auf die polare Piezoelektricität zurückzuführen sind.

Durch den mit Hilfe der Kundtschen Methode so leicht erbrachten Nachweis des Vorhandenseins oder Fehlens polarer elektrischer Axen in einem Krystalle ist man imstande, in den bisher unterschiedenen Gruppen der Krystalle noch Unterabteilungen von abweichender Symmetrie zu erkennen, und zwar ergeben die Beobachtungen folgendes:

Die einfachbrechenden Krystalle besitzen entweder a) keine elektrischen Axen oder b) vier elektrische Axen parallel den Normalen zu den Oktaederflächen (s. Fig. 120 S. 211), so daß diese bei einer Temperaturänderung abwechselnd positiv und negativ elektrisch werden; alsdann entbehren die Krystalle offenbar der Symmetrie nach den drei Ebenen des Würfels.

Die einaxigen Krystalle haben a) keine elektrische Axe, b) eine solche; alsdann ist diese stets der optischen Axe parallel, und es fehlt den Krystallen die Symmetrie nach der zur Axe senkrechten Ebene; c) es sind mehrere gleichartige elektrische Axen vorhanden, z. B. drei zur optischen Axe senkrechte, wie beim Quarze, in welchem Falle ein solcher Krystall nach keiner der optischen Axe parallelen Ebene symmetrisch sein kann; d) es sind sowohl die optische Axe als auch drei dazu senkrechte Richtungen elektrische Axen; in diesem Falle kann keine der S. 212—213 angeführten Ebenen Symmetrieebene des Krystalles sein.

Die optisch nach drei Ebenen symmetrischen zweiaxigen Krystalle können a) dieselbe Symmetrie auch in bezug auf alle andern Eigenschaften besitzen, und dann zeigen sie keine polare Pyroelectricität, oder b) sie besitzen eine elektrische Axe, dann fällt diese mit einer der drei Axen der Indexellipsoide zusammen, und es fehlt die Symmetrie nach dem dazu senkrechten Hauptschnitte; oder c) es sind vier elektrische Axen vorhanden,

und die Flächen der rhombischen Doppelpyramide Fig. 127 (S. 214) werden bei einer Temperaturänderung abwechselnd positiv und negativ; alsdann ist keine einzige Symmetrieebene vorhanden.

Die optisch zweiaxigen Krystalle mit einem gemeinsamen Hauptschnitte für alle Farben sind nur dann nach dieser Ebene überhaupt symmetrisch, a) wenn sie keine polare Pyroelektricität zeigen, oder b) wenn sie zwei zu derselben gleich geneigte elektrische Axen besitzen; ist dagegen c) nur eine elektrische Axe vorhanden, so ist diese die Normale zu jenem Hauptschnitte und die Krystalle sind nicht symmetrisch in bezug auf diesen (s. Fig. 1 und 2 Tafel III).

Die zweiaxigen Krystalle mit Dispersion aller Hauptschwingungsrichtungen können a) ein Centrum der Symmetrie besitzen, dann zeigen sie keine polare Pyroelektricität, oder b) sie sind acentrisch und besitzen eine oder mehrere elektrische Axen, so daß parallele entgegengesetzte Flächen bei einer Temperaturänderung entgegengesetzt elektrisch werden.

Daß jede elektrische Axe eines Krystalles zugleich eine Richtung ist, in bezug auf welche seine geometrische Form eine Ungleichwertigkeit der ihren beiden entgegengesetzten Enden angehörigen Krystallflächen darbietet, tritt in den Figuren 1—6 und 11 der Tafel III sehr deutlich hervor; diese Ungleichwertigkeit kann nun unter Umständen auch eine weniger leicht erkennbare, als in den dort abgebildeten Fällen, sein; alsdann ist es aber durch das elektrische Verhalten des Krystalles möglich, nicht nur die Existenz einer solchen polaren krystallographischen Axe unzweifelhaft nachzuweisen, sondern auch die beiden Pole derselben jederzeit sicher zu unterscheiden. Zu der hierdurch bedingten großen praktischen Wichtigkeit der Kundtschen Methode für die Krystallographie kommt noch der Umstand hinzu, daß sie uns in den Stand setzt, scheinbar einfache Krystalle als regelmäßige Verwachsungen verschieden orientierter Partien zu erkennen und den Aufbau solcher Gebilde mit einem Blicke zu übersehen; so zeigen die Figuren 8 (verglichen mit 7) und 12 Tafel III an der Verteilung des Pulvers, daß es sich um Durchwachsungen mehrerer Krystalle mit verschieden orientierten elektrischen Axen handelt, welche bei der Behandlung der betreffenden Substanzen in der II. Abteilung erläutert werden sollen.

Härte und Gleitung.

Härte. Gewöhnlich versteht man unter »Härte« den Widerstand, welchen eine ebene Oberfläche eines Körpers dem Eindringen einer Spitze entgegensetzt, und nennt einen Körper härter als einen andern, wenn man mit einer Ecke desselben den zweiten zu ritzen vermag. Da hierbei Teile des geritzten Körpers aus ihrem Zusammenhange mit den benachbarten gerissen werden, muß bei diesem Vorgange die Cohäsion desselben überwunden werden, und handelt es sich um einen Krystall, so muß offenbar die Leichtigkeit, mit welcher dies geschieht, abhängen von der Orientierung der Ebene, auf welcher der Versuch vorgenommen wird. Nachdem

Frankenheim die hierbei zu beobachtenden Unterschiede zu schätzen versucht hatte, construierte Seebeck den ersten Apparat zur Messung derselben, das »Sklerometer«, welches darauf beruht, die ritzende Spitze, unter welcher die zu prüfende Ebene des Krystalles horizontal weggezogen wird, so lange mit Gewichten zu belasten, bis eben eine erkennbare Strichlinie auf dem Krystalle hervorgebracht wird. Mit einem von Grailich und Pekárek verbesserten Instrumente dieser Art stellte Exner eine größere Reihe von Beobachtungen an, aus denen sich ergab, daß diese Methode zwar nicht geeignet ist, die Härte verschieden orientierter Ebenen eines Krystalles oder diejenige verschiedener Krystalle zu vergleichen, weil die Resultate in zu hohem Grade von der Beschaffenheit der untersuchten Ebene abhängen, — wohl aber dazu, die Verschiedenheiten der Härte in den verschiedenen Richtungen innerhalb einer Ebene festzustellen. Die Abhängigkeit derselben von der Richtung kann alsdann dargestellt werden durch eine Curve, die sog. »Härtecurve« der betreffenden Fläche, deren Radien vectoren proportional dem Gewichte sind, welches als Belastung der Spitze zur Hervorbringung des feinsten Ritzes in der Richtung des betr. Radius erforderlich war. Wie nach den Cohäsionsverhältnissen zu erwarten, zeigen nun die Härtecurven auf Ebenen eines Krystalles je nach deren Orientierung Symmetrieverhältnisse, welche zu denen der Abhängigkeit der Cohäsion von der Richtung in dem betreffenden Krystalle in Beziehung stehen, jedoch unterscheidet sich die Härte als eine vectorielle Eigenschaft dadurch von der Cohäsion, daß sie nicht notwendig in zwei entgegengesetzten Richtungen gleich groß ist, daß also zwei entgegengesetzte Radien der Härtecurve nicht immer gleich lang sind. So ist z. B. die Härte auf einer zur optischen Axe senkrechten Ebene des Kalkspates sehr verschieden, je nachdem die Bewegung der ritzenden Spitze nach einer Ebene des Spaltungsrhomboeders hin oder in der entgegengesetzten Richtung, d. h. nach der Kante zwischen den beiden andern Rhomboederflächen hin, stattfindet; die Härtecurve auf dieser Ebene hat nämlich die Gestalt einer dreiblättrigen Rosette und besitzt in drei 120° voneinander abstehenden Radien Maxima, in den diese Winkel halbierenden Radien Minima. Auf einer rhomboedrischen Spaltungsebene des Kalkspates ist die Härte nicht nur sehr verschieden in den beiden Diagonalen des Rhombus, sondern in der kürzeren auch je nach der Richtung des Ritzens, d. h. je nachdem dieses im Sinne der Neigung der beiden andern Spaltungsflächen oder dieser entgegengesetzt gerichtet ist. In andern Fällen sind die entgegengesetzt gerichteten Radien der Härtecurve gleich lang: Eine hexaedrische Spaltungsebene von Steinsalz z. B. zeigt die geringste Härte parallel den beiden andern Spaltungsebenen, die größte in den diagonalen Richtungen; die Härtecurve, deren Gestalt einer vierblättrigen Rosette gleicht, hat also vier Minima parallel den Seiten und vier Maxima parallel den Diagonalen der quadratischen Würfelfläche. Auf einer Hexaederebene des Natriumchlorates hat die Härtecurve nahezu die Gestalt eines

Kreises, entsprechend dem Umstande, daß dieses Salz sehr geringe Unterschiede der Cohäsion und daher keine deutliche Spaltbarkeit besitzt. Baryt liefert auf der Ebene der vollkommensten Spaltbarkeit (s. S. 214) eine ähnliche, centrisch symmetrische Härtecurve, wie die in Fig. 134*c* dargestellte Dehnungscurve derselben Ebene. Die Untersuchung der Ebene vollkommenster Spaltbarkeit am Gyps (vgl. S. 215) liefert eine centrisch symmetrische, sonst aber vollkommen unsymmetrische Curve, entsprechend dem Umstande, daß diese Fläche selbst die einzige Symmetrieebene des Krystalles in bezug auf seine Cohäsionsverhältnisse ist.

Um auch verschieden orientierte Flächen eines Krystalles oder verschiedene krystallisierte Substanzen in bezug auf ihre Härte miteinander vergleichen zu können, wandte Pfaff folgende Methode an: Die zu untersuchende Ebene wird horizontal befestigt; durch einen Diamantsplitter von bestimmter Gestalt, welchen man mit constanter Belastung hundert oder mehr Male in der gleichen Richtung über die Fläche wegführt, wird eine Furche und durch Wiederholung des Verfahrens nach einer kleinen seitlichen Verschiebung allmählich ein breiter Streifen aus der Fläche ausgehobelt; die Menge des hierbei entstandenen Pulvers bestimmt man durch den Gewichtsverlust des Krystalles. Um das Verhältnis der Härte zweier verschiedener, so behandelter Ebenen eines Krystalles oder dasjenige zweier Ebenen verschiedener Krystalle zu berechnen, wird die Annahme gemacht, daß die Härte bei gleicher Belastung der hobelnden Spitze, gleicher Zahl ihrer Hin- und Hergänge und gleichem Flächeninhalte des abgehobelten Streifens sich umgekehrt verhalte, wie das Volum des entstehenden Pulvers. Wenn nun auch diese Voraussetzung wegen der Vernachlässigung der Geschwindigkeit der Bewegung nicht zutrifft, und daher der gefundene relative Wert (als »absolute Härtebestimmung« kann dieses Verfahren keinesfalls bezeichnet werden) noch mit erheblicher Unsicherheit behaftet ist, so gestattet diese Methode doch zuweilen eine bessere Bestimmung der Härtecurve, als die vorher erwähnte, und eine angenäherte Messung des Unterschiedes verschieden orientierter Ebenen eines Krystalles. Dieselbe ergab z. B. für Kalkspat die größte Härte auf gewissen der optischen Axe parallelen Ebenen, die geringste auf der zur Axe senkrechten Ebene, innerhalb deren sie aber sehr verschieden ist (s. vor. S.). Auf demselben Princip, wie das bei diesen Bestimmungen benutzte Instrument, beruht das ebenfalls von Pfaff construierte »Mesosklerometer«, welches dazu dienen soll, die mittlere Härte einer Krystallfläche in allen verschiedenen, ihr parallelen Richtungen zu messen. Das Abhobeln geschieht hier durch eine rasch rotierende Diamantspitze; läßt man diese stets gleich tief in den Krystall eindringen, so hat man in der Zahl der Umdrehungen, welche hierzu erforderlich ist, ein Maß für die Härte der betreffenden Fläche. Auch nach dieser Methode ergibt sich im Kalkspate auf der zur optischen Axe senkrechten Ebene eine sehr viel kleinere Härte, als auf den ihr parallelen Flächen. Von den untersuchten Körpern gab auffallenderweise

der sehr unvollkommen spaltbare Quarz weit größere Unterschiede der Härte, als der gut spaltbare Flußspat.

Abgesehen von verschiedenen z. T. bereits erwähnten Fehlerquellen leiden die vorstehend beschriebenen Methoden an dem Übelstande, daß ihnen keine strenge Definition des Begriffes der »Härte« zugrunde liegt, bei welcher die Abhängigkeit von dem fremden Materiale der Spitze wegfällt. Eine solche versuchte Hertz aufzustellen und Auerbach durch Messungen zu begründen: Wenn man eine Kugelfläche von bekannter Krümmung mit einer bestimmten Belastung auf eine ebene Fläche desselben Körpers (um von fremdem Materiale ganz unabhängig zu sein) wirken läßt und die Belastung steigert, bis die Elasticitätsgrenze überschritten wird, d. h. bis bei spröden Körpern (vgl. S. 208) ein Sprung, bei plastischen eine dauernde Formänderung eintritt, so ist nach den genannten Autoren die »Härte« des Körpers der auf die Einheit der Oberfläche berechnete Druck im Mittelpunkte der kreisförmigen Fläche, in welcher die Ebene und die Kugelfläche einander berühren, der sog. Druckfläche, in dem Momente, in welchem die Elasticitätsgrenze überschritten wird. Die nach diesem Principe angestellten Härtemessungen haben indessen ergeben, daß der Druck auf die Flächeneinheit, bei welchem ein Sprung in der ebenen Platte eintritt, bei gleichem Materiale nicht unter allen Umständen derselbe ist, sondern um so größer, je stärker gekrümmt die Kugelfläche, je kleiner also die Druckfläche ist. Darnach würde die als »Härte« eines Körpers definierte Größe auch noch abhängen von der Oberflächenkrümmung desselben. Wenn somit auch das Problem der Definition und Messung der »Härte« eines festen Körpers noch als ein nicht vollkommen gelöstes bezeichnet werden muß, so haben die Untersuchungen von Auerbach doch das interessante Resultat ergeben, daß gewisse Körper, welche man früher für spröde hielt (wie Flußspat, vgl. S. 208), einen nicht unbeträchtlichen Grad von Plasticität besitzen, so daß die durch die Kugelfläche auf der Platte hervorgebrachte Einsenkung, wie die Abplattung der ersteren, nach dem Aufhören des Druckes bestehen bleibt, daß dagegen bei den spröden Körpern, in denen am Rande der Druckfläche ein Sprung entsteht, wenn die Elasticitätsgrenze überschritten wird, eine Beziehung zwischen dem hierzu erforderlichen Drucke und dem Dehnungscoefficienten existiert, welcher zufolge der entstehende Sprung nur dann eine kreisförmige Gestalt besitzt, wenn der Körper ein amorpher ist, z. B. Glas, dagegen eine regelmäßig eckige, wenn die Substanz krystallisiert ist.

Gleitung. Außer den Spaltungsflächen existieren in den Krystallen noch andere Ebenen, ausgezeichnet dadurch, daß parallel denselben in einer bestimmten Richtung (nicht aber notwendig auch in der entgegengesetzten Richtung) ein Gleiten der Teilchen aneinander mit besonderer Leichtigkeit stattfinden kann, so daß, wenn der Krystall z. B. gepreßt wird, die Teilchen desselben sich längs einer solchen Ebene gegeneinander verschieben, zuweilen sogar eine vollständige Trennung nach derselben stattfindet. Diese

Ebenen wurden von Reusch, welcher zuerst auf ihre Exsitenz hinwies, Gleitflächen genannt. Sie entstehen bei gewissen Krystallen als Trennungsflächen, wenn man auf deren Oberfläche die Spitze eines Stahlconus (besonders eignet sich hierzu der Körner der Metallarbeiter) aufsetzt und durch einen kurzen Schlag mit einem Hämmerchen eintreibt. Die durch dieses Verfahren, die sog. »Körnerprobe«, erhaltene Schlagfigur besteht aus in einer oder mehreren Richtungen von der Schlagstelle ausstrahlenden geradlinigen Sprüngen, welche gewöhnlich den Gleit-, nicht den Spaltungsflächen entsprechen, wie z. B. in den Krystallen des Steinsalzes. Diese gehören zur Klasse der einfachbrechenden und besitzen daher nach S. 210 drei zueinander normale Richtungen, in welchen sie sich der Einwirkung äußerer Kräfte gegenüber gleichartig verhalten; parallel diesen ist ihre Festigkeit ein Minimum, so daß sie nach den drei dazu senkrechten Ebenen sehr leicht spalten; die Schlagfigur auf einer solchen Spaltungsfläche bildet nun einen vierstrahligen Stern, dessen Strahlen nicht den beiden andern Spaltungsebenen parallel gehen, sondern den Winkel derselben halbieren; da sich alle drei Spaltungsebenen in dieser Beziehung gleich verhalten, so existieren in einem Steinsalzkrystalle sechs Gleitflächen, welche die Winkel eines durch Spaltung hergestellten Würfels halbieren. Stumpft man zwei gegenüberliegende Kanten eines solchen durch Anschleifen dazu paralleler, zu den andern Kanten diagonaler Ebenen ab und preßt das Stück senkrecht zu diesen Flächen zusammen, so kann man eine glänzende Bruchfläche nach der diagonalen, die abgestumpften Würfelkanten verbindenden Ebene erhalten. Ein von den sechs Würfelflächen begrenztes Prisma von den Endflächen her, also in einer der Kantenrichtungen, zusammengepreßt, wird kürzer und dicker durch Gleiten der Teilchen nach den 45° mit der Druckrichtung einschließenden Gleitflächen, und es lassen sich so bedeutende Deformationen hervorbringen, ohne daß das Stück zerbricht. Hierbei, sowie beim Zerschlagen, Schleifen usw., entstehen aber zugleich infolge der Plasticität des Steinsalzes (s. S. 208) immer lokale Verdichtungen, welche sich durch Doppelbrechung (Aufhellung zwischen gekreuzten Nicols) zu erkennen geben (s. S. 235). Man findet sogar selten ganz homogene und von doppeltbrechenden Stellen freie Steinsalzstücke.

Die weitaus interessantesten und theoretisch wichtigsten Erscheinungen bietet jedoch der Kalkspat dar, in welchem die Existenz der Gleitflächen ebenfalls zuerst von Reusch entdeckt wurde. Schleift man nämlich an ein Spaltungsrhomboeder dieses Minerals, dessen Hauptschnitt *abcd* Fig. 139*a* (s. f. S.) darstellt (wobei *ab* und *cd* zwei gegenüberliegende stumpfe Kanten, *bc* und *ad* die Diagonalen der beiden Endflächen), zwei horizontale Ebenen an, wie sie die punktierten Linien andeuten, und läßt mittels einer Pressung in der Richtung der Pfeile einen Druck auf das Kalkspatstück wirken, so geht ein Abwärtsgleiten der rechten, eine Aufwärtsbewegung der linken Hälfte vor sich, und zwar in der Weise, daß innerhalb des Raumes zwischen zwei der Gleitfläche parallelen Ebenen, welche, zur Zeichnungsebene senkrecht,

die Kanten *ab* und *cd* gerade abstumpfen würden, eine Umlagerung der Kalkspatsubstanz in die symmetrisch entgegengesetzte Stellung stattfindet. Die entstehende Lamelle (s. Fig. 139*b*) ist in Fig. 140 in größerer Breite dargestellt und mit *II* bezeichnet, während *I* und *III* die parallel gegeneinander verschobenen, sonst aber unverändert gebliebenen Teile sind.

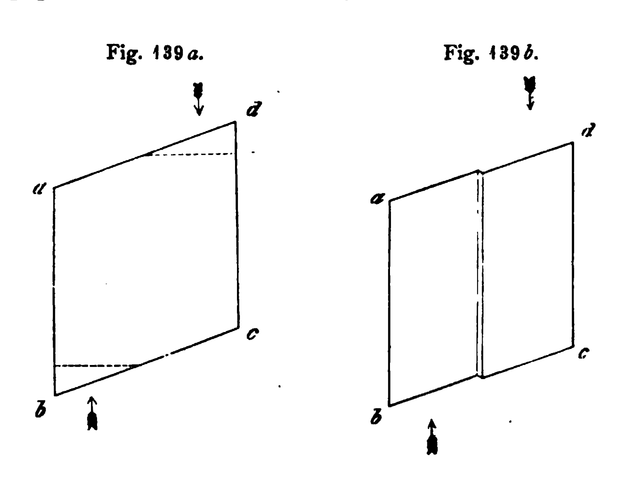
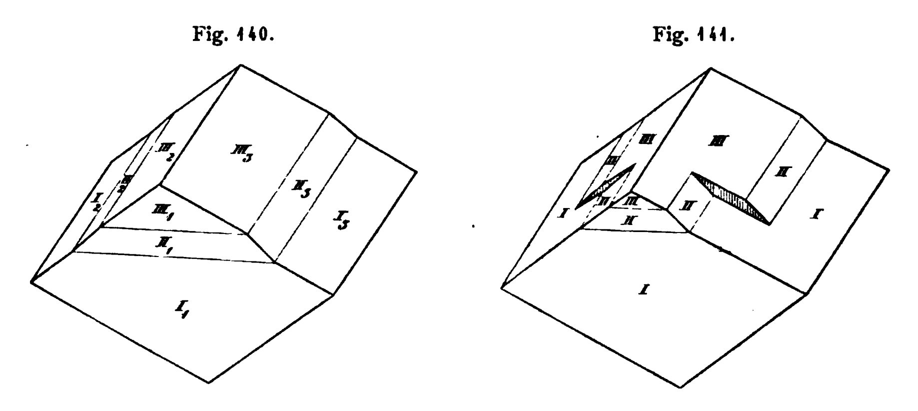


Fig. 139*a*. Fig. 139*b*.

Die (in Fig. 139 senkrecht gedachten) Flächenteile I_2 II_2 III_2 fallen in eine Ebene, ebenso I_3 II_3 III_3, dagegen bildet die Kante zwischen III_1 und II_1 einen einspringenden (die parallelen hinteren Flächen einen ausspringenden) Winkel von 38° 14′, diejenige von II_1 und I_1 einen ebenso großen ausspringenden. Die Lamelle erscheint also nur auf der in Fig. 139 oberen und der parallelen unteren Fläche des Spaltungsrhomboeders als ein meist sehr schmaler geradliniger Streifen, welcher genau der längeren Diagonale der Rhombusfläche parallel verläuft. Gewöhnlich entstehen nun in einem solchen Rhomboeder eine größere Zahl derartiger Lamellen, so daß dasselbe auf zwei gegenüberliegenden Flächen eine S t r e i f u n g, parallel der


Fig. 140. Fig. 141.

längeren Diagonale, zeigt. Manchmal setzt eine solche Lamelle in eine andere Ebene über, und es ist aus Fig. 141 leicht ersichtlich, daß alsdann ein Hohlraum entstehen muß, welcher in Form einer Röhre von rhombischem Querschnitte den Krystall von einer Seite bis zur andern durchzieht; hört die Lamelle inmitten des Krystalles ganz auf, so muß statt der Röhre

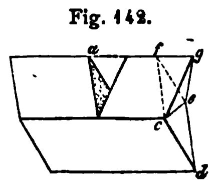
eine parallelwandige Kluft, parallel einer Spaltungsfläche, bis an die beiden andern heranreichend, erscheinen, und auch dies beobachtet man zuweilen. Nun besitzt aber der Kalkspat drei gleichwertige Gleitflächen, denn die soeben beschriebenen Lamellen können nicht nur parallel der Abstumpfungsfläche der Kante zwischen den Flächen 2 und 3 (Fig. 140), sondern auch parallel denjenigen der beiden andern Kanten, zwischen 1 und 2 bzw. 1 und 3, hervorgebracht werden, und wo deren zwei, verschiedenen Kanten parallele, einander durchkreuzen, ist ebenfalls keine vollständige Ausfüllung des Raumes durch Krystallsubstanz möglich; auf der Durchschnittslinie der beiden Lamellen entsteht daher ebenfalls ein hohler Kanal.

Unterwirft man eine zur optischen Axe senkrechte Platte von Kalkspat einem seitlichen Drucke, so wird sie zweiaxig (Axenebene senkrecht zur Druckrichtung, vgl. S. 232), bei weiterer Steigerung des Druckes aber entstehen plötzlich in derselben bleibende Änderungen, welche sich durch ein wesentlich von dem normalen verschiedenes Interferenzbild im convergenten Lichte (weit engere Farbenringe, Störung des Kreuzes und Auftreten von vier diagonalen, durch farbige Bögen verbundene dunkle Flecke usw.) verraten. Die Ursache dieses Verhaltens ist die Entstehung von Lamellen der angegebenen Art in der Platte.

Sämtliche bisher beschriebenen Erscheinungen, besonders die Streifung parallel der längeren Diagonale der Rhomboederflächen, zeigt nun der Kalkspat auch sehr häufig im natürlichen Zustande unter Verhältnissen seines Vorkommens, welche zu der Annahme führen, daß auch hier ein auf das Mineral ausgeübter Druck seine Auslösung in einer Bildung jener Lamellen gefunden hat. Ebenso waren die oben erklärten hohlen Kanäle, welche infolge der Doppelbrechung als je zwei von der Oberfläche aus divergierende Röhren erscheinen, im Innern durchsichtiger Kalkspatkrystalle schon oft beobachtet worden, aber erst nach der Entdeckung der Möglichkeit künstlicher Erzeugung der Lamellen gelang es G. Rose, ihre Entstehung auf die letzteren zurückzuführen.

Während nach dem Verfahren von Reusch beim Pressen eines Kalkspatrhomboeders meist nur eine Anzahl dünner Lamellen entsteht[1]), hat Baumhauer eine Methode kennen gelehrt, durch welche ein beliebiger Teil eines Rhomboeders in die symmetrisch entgegengesetzte Stellung übergeführt werden kann. Legt man ein prismatisch geformtes Spaltungsstück (Fig. 142) mit einer stumpfen Kante horizontal fest auf (am besten in eine entsprechend geschnittene Rinne eines Holzbrettchens), so daß die lange Diagonale *ce* der rechten Endfläche *cdef* desselben ebenfalls horizontal ist, setzt im

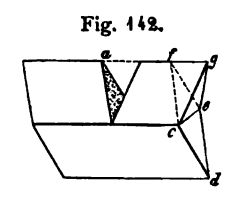
Fig. 142.



1) Nur unter ganz besonderen Umständen gelingt es zuweilen, auf ein Rhomboeder wie in Fig. 139 den Druck so wirken zu lassen, daß dasselbe ganz umgelagert wird, d. h. daß in *b* und *d* nun die stumpfen, in *a* und *c* die spitzen Ecken liegen.

Punkte *a* die Schneide eines Messers rechtwinkelig zur oberen Kante auf und drückt sie allmählich in den Krystall ein, so verschiebt sich der rechts von dem Messer befindliche Teil desselben in der Weise, daß er, wenn die Schneide des Messers bis zu den mittleren Kanten eingedrungen ist (was bei größeren Stücken einen beträchtlichen Druck erfordert), genau die Form eines entgegengesetzt liegenden halben Rhomboeders, d. h. die des Spiegelbildes zu dem unteren in bezug auf die horizontale, durch *ce* gehende Gleitfläche, angenommen hat. Das Dreieck *cef* hat nun die Lage *ceg* erhalten; die vorher stumpfe Ecke *f*, die sogenannte Polecke des Rhomboeders (*a* Fig. 48, S. 65), an welcher drei gleich große stumpfe Kanten zusammenstießen, ist nun zu einer »Seitenecke« geworden, in welcher zwei scharfe Kanten *cg* und *eg* und eine stumpfe *fg* zusammenstoßen; infolgedessen ist die linke obere Ecke des umgelagerten Stückes zu einer »Polecke« geworden.

Fig. 142.



Untersuchen wir nun den in der neuen Stellung befindlichen Teil des Krystalles näher, so erweist sich derselbe als physikalisch vollkommen **homogen**, aber seine Eigenschaften entsprechen nicht mehr seiner früheren, sondern seiner jetzigen Gestalt. Z. B. ist derselbe an allen Stellen gleichmäßig optisch einaxig mit der gleichen Doppelbrechung, wie vorher, aber seine optische Axe liegt in dem senkrechten Hauptschnitte nicht, wie in dem links von *a* liegenden (und dem unteren) Teile, von rechts oben nach links unten geneigt (vgl. z. B. Fig. 53, S. 69, bei horizontaler Lage der Kante *ac*), sondern unter dem gleichen Winkel von links oben nach rechts unten geneigt, entsprechend der neuen Lage der Polecke. Dieser Orientierung der optischen Axe entsprechen nun auch alle andern physikalischen Eigenschaften. Wir haben es hier also mit einer besonderen Art von »homogenen Deformationen« zu tun, welche als »einfache Schiebung nach Gleitflächen« bezeichnet wird und sich von den S. 205 f. behandelten elastischen schon dadurch unterscheidet, daß sie eine bleibende ist. Sämtliche deformierte Teile des Krystalles haben durch dieselbe Verschiebungen erlitten, welche ihren Abständen von der durch *ce* gehenden horizontalen Gleitfläche proportional und der Schnittlinie der letzteren mit der senkrechten Symmetrieebene des Rhomboeders, also auch der Richtung *fg*, parallel sind. Infolgedessen hat, wie aus Fig. 142 unmittelbar ersichtlich, auch keine Volumänderung des Kalkspates bei der Umlagerung stattgefunden, ebensowenig wie eine Dilatation oder Contraction senkrecht zum Hauptschnitte, d. i. in der Richtung *ce*. Von den S. 205 allgemein definierten homogenen Deformationen liegt also hier der specielle Fall vor, daß das Verhältnis, in welchem sich eine Länge durch die Deformation ändert, in der Z-Axe des Deformationsellipsoides der reciproke Wert desjenigen der Änderung in der X-Axe, der Richtung der größten Dilatation, ist (d. h. es findet in ersterer eine entsprechende Contraction statt), während die der

Y-Axe parallelen Geraden ihre Länge nicht ändern. Alsdann bilden, wie sich leicht zeigen läßt, die beiden Kreisschnittebenen des Deformationsellipsoides, d. h. die beiden Ebenen, in welchen keine Verzerrung erfolgt, vor der Deformation mit der *X*-Axe die gleichen Winkel, welche ihre Normalen nach der Deformation mit derselben Axe bilden. Denken wir uns in der zu *ce*, welches nach dem Vorhergehenden die *Y*-Axe des Deformationsellipsoides sein muß, senkrechten Symmetrieebene (dem Hauptschnitte durch *fg*) einen Rhombus, dessen eine Seite parallel *fg*, dessen andere Seite parallel der Verbindungslinie von *g* mit der Mitte von *ce*, so ist die in *g* endigende längere Diagonale dieses Rhombus die *X*-Axe (vor der Deformation war sie die kurze Diagonale des umgekehrt liegenden Rhombus), und die nunmehr kürzere Diagonale ist die *Z*-Axe, d. h. die Richtung, welche die größte Verkürzung erfahren hat (da dieselbe vorher lange Diagonale war). Eine der drei Rhomboederflächen — nämlich *cef* vor, *ceg* nach der Deformation — und die Gleitfläche sind die beiden Kreisschnittebenen des Deformationsellipsoides; der Winkel, unter welchem diese nach der Schiebung einander schneiden, ist das Supplement desjenigen, welchen sie vorher miteinander bildeten, und dies entspricht der oben angegebenen Beziehung. Daß diese beiden Ebenen in der Tat diejenigen sind, innerhalb deren keine Verzerrung stattfindet, läßt sich leicht nachweisen, indem man vor Anstellung des Baumhauerschen Versuches auf den drei Rhomboederflächen je einen kleinen Kreis einritzt; nach der Schiebung hat nur derjenige auf der Endfläche *ceg* wieder die Gestalt eines Kreises angenommen, während die beiden andern sich dauernd in Ellipsen verwandelt haben. Was die krystallographische Bedeutung der Flächen des Spaltungsrhomboeders betrifft, so bleibt diese die gleiche auch nach der Schiebung, was für andere Krystallflächen nicht gilt. Sei z. B. die nicht deformierte Polecke *f* durch eine zur optischen Axe senkrechte Ebene abgestumpft, so bildet diese nach der Deformation eine Abstumpfung der Seitenecke des Rhomboeders und ist sehr schief zur optischen Axe geneigt.

Beim Steinsalze und Kalkspate bildet die Gleitebene gleiche Winkel mit zwei gleich vollkommenen Spaltungsebenen, und die Gleitrichtung ist parallel deren Durchschnittsrichtung. Ähnliche Beziehung zur Cohäsion zeigen auch manche andere unter den zahlreichen krystallisierten Substanzen, an denen namentlich durch die Forschungen Mügges die Gleitfähigkeit nachgewiesen worden ist. Liebisch zeigte ferner, wie, auf Grund der Zugehörigkeit dieser Erscheinungen zu der im vorhergehenden an dem Beispiele des Kalkspates erläuterten speciellen Art von homogenen Deformationen, aus der Lage der beiden Ebenen, in welchen ein Krystall keine Verzerrung erleidet, für jeden Fall die krystallographische Bedeutung, welche eine beliebige Fläche infolge der Schiebung nach der Gleitfläche annimmt, aus derjenigen vor der Umlagerung berechnet werden kann. Unabhängig davon lieferte Fedorow die allgemeinste theoretisch-geometrische Untersuchung über die mechanischen Deformationen der Krystalle.

Was nun die Ursache des im vorstehenden beschriebenen merkwürdigen Verhaltens gewisser krystallisierter Körper betrifft, so sind für das Verständnis derselben von großem Interesse Betrachtungen, welche Voigt für das am besten studierte Beispiel, den Kalkspat, anstellte: Aus den Elasticitätsconstanten (s. S. 219) läßt sich der Widerstand berechnen, welchen eine in einer bestimmten Richtung parallel einer Ebene schiebende Kraft innerhalb des Krystalles findet. Führt man nun diese Rechnung für alle möglichen Richtungen in der zu *ce* senkrechten Symmetrieebene des Kalkspatrhomboeders aus, so ergeben sich zwei zueinander senkrechte, durch *ce* gehende Ebenen, in welchen eine Schiebung parallel dem Hauptschnitte den kleinsten, und zwar einen nur ungefähr halb so großen Widerstand erfährt, als in den beiden damit 45° bildenden Ebenen, in denen die Maxima desselben liegen. Eine jener beiden Ebenen kleinsten Widerstandes fällt nun nahezu mit der Gleitfläche zusammen, d. h. im Kalkspate findet eine elastische Schiebung nahezu den kleinsten Widerstand, wenn sie parallel einer Gleitfläche stattfindet, dagegen einen nahezu doppelt so großen Widerstand, wenn die Schiebung parallel einer unter 45° gegen die Gleitfläche geneigten, ebenfalls zur Symmetrieebene senkrechten Ebene stattfindet. Daß jedoch die Existenz derartig stark differierender Maxima und Minima für sich allein noch nicht hinreicht, um die Existenz der Gleitflächen zu erklären, beweist die Tatsache, daß die zweite Ebene des minimalen Widerstandes, wie es alsdann doch der Fall sein müßte, beim Kalkspate nicht Gleitfläche ist. Vergleichen wir die Orientierung der optischen Axe vor und nach der Deformation, so ergibt sich, daß dieselbe eine Drehung von 52½° in einem bestimmten Sinne erfahren hat; da nun die gesamte innere Beschaffenheit des Krystalles in bezug auf die neue Richtung der Axe des Rhomboeders die gleiche geworden ist, wie sie vorher in bezug auf die alte Richtung jener Axe war, so müssen die kleinsten Teilchen des Kalkspates außer der Schiebung noch eine Drehung erfahren haben, und es kommt also außer dem Widerstande gegen erstere auch noch der gegen letztere in Betracht. Die Rechnung lehrt nun, daß bei einer Schiebung nach der zur Gleitfläche senkrechten zweiten Ebene minimalen Widerstandes die Teilchen gerade die entgegengesetzte Drehung machen müßten, als sie zur Erreichung der symmetrischen Lage nötig wäre.

Da ein nach der Gleitfläche verschobener Kalkspat genau dieselben Eigenschaften, nur in veränderter Orientierung, besitzt, wie ein nicht verschobener, so muß die Anordnung, wie die Richtung der kleinsten Teile, in beiden Fällen demselben Gleichgewichte der inneren Kräfte entsprechen; wenn also durch äußere Kräfte eine Schiebung bewirkt wird, so muß die sie begleitende Drehung der Teilchen derartig sein, daß, wenn die mittlere Lage des verschobenen Stückes zwischen Anfangs- und Endlage erreicht ist, auch die halbe Drehung der kleinsten Teile eingetreten ist[1]) und infolgedessen diese durch die inneren Kräfte ebenso leicht in die eine, wie in die andere Gleichgewichtslage übergeführt werden können. Dementsprechend kann man in der Tat (wie schon Reusch fand) bei der Herstellung von Lamellen im Kalkspate beobachten, daß eine noch nicht bis zur Hälfte vor sich gegangene Umlagerung vollständig wieder verschwindet, wenn der Druck aufhört zu wirken, während, wenn der labile Zustand in

Fig. 142.

1) Die Hälfte der Drehung der Fläche *cef* (Fig. 142) in die Lage *ceg* beträgt 19°; die Drehung der optischen Axe, also auch diejenige der kleinsten Teilchen, von der ersten in die zweite Lage 52½° im entgegengesetzten Sinne, die Hälfte also 26¼°.

der Mitte der Schiebung bereits überschritten war, die Lamelle nun von selbst zustande kommt, weil die Teilchen infolge der inneren Kräfte der zweiten Gleichgewichtslage zustreben.

Auflösung und Wachstum.

Läßt man auf eine Ebene eines in Wasser löslichen Krystalles einen senkrechten (am besten aufwärts gerichteten) dünnen Wasserstrahl einwirken, so entsteht auf derselben nicht eine kreisförmige, sondern eine eckige Vertiefung (Lösungsfigur) von bestimmter Gestalt und Orientierung, z. B. auf einer Würfelfläche von Steinsalz ein den Seiten derselben paralleles Quadrat, eine Tatsache, welche beweist, daß die durch das Lösungsmittel bewirkte Trennung der Teilchen nach gewissen Richtungen im Krystalle leichter stattfindet, also rascher vorschreitet, als nach andern. Wird der ganze Krystall in das Lösungsmittel eingetaucht, so beginnt die Auflösung gleichzeitig an vielen, regellos verteilten Punkten und schreitet von jedem derselben aus nach verschiedenen Richtungen verschieden schnell fort, und so entstehen regelmäßig begrenzte Vertiefungen, welche man »Corrosions«- oder »Ätzfiguren« nennt. Dieselben Erscheinungen beobachtet man aber auch, wenn es sich nicht um den rein physikalischen Vorgang einer einfachen Lösung der Substanz handelt, sondern wenn gleichzeitig eine chemische Veränderung derselben stattfindet, wie es bei der Auflösung von Quarz durch Flußsäure, schmelzendes Kali u. dgl. der Fall ist, endlich auch dann, wenn krystallisierte Verbindungen mit Wasser, Benzol, Aceton usw. durch Erwärmen zum Zerfallen (Verwittern) gebracht werden. Unter »Corrosionsfiguren« sind daher auch die sog. »Zersetzungsfiguren« und »Verwitterungsfiguren«[1]) zu verstehen.

Die Corrosionsfiguren sind besonders dann scharf begrenzt, wenn sie durch eine sehr langsame Wirkung des Ätzmittels hervorgebracht werden; da bei fortgesetzter Einwirkung des letzteren immer neue entstehen, und die früheren, größer werdend, ineinander verfließen, so ist es im allgemeinen vorteilhaft, den Proceß zu einer Zeit zu unterbrechen, in welcher die einzelnen Figuren nur geringe Dimensionen erreicht haben, daher zu ihrer Beobachtung meist das Mikroskop erforderlich ist.

Vergleicht man nun die auf einer ebenen Fläche eines Krystalles entstandenen Corrosionsfiguren, so erkennt man, daß dieselben sämtlich von gleicher Gestalt und Orientierung sind, und da es sich bei der Auflösung und Zersetzung um eine Trennung der kleinsten Teile des Krystalles, also um Überwindung der Kräfte handelt, mit welchen diese aufeinander wirken, so können wir aus der Gleichwertigkeit zweier Richtungen in bezug auf die Ätzerscheinungen auf die Gleichheit der inneren Kräfte in diesen beiden

1) Die Verwitterungsfiguren der Gypskrystalle auf der Ebene vollkommenster Spaltbarkeit, welche zugleich die einzige Ebene optischer Symmetrie ist, zeigen nach der Untersuchung von Sohncke (Zeitschr. für Kryst. 1899, **30**, 1 f.) gewisse Beziehungen zu den thermischen Axen.



Richtungen schließen. Die Gestalt und Orientierung der Corrosionsfiguren hängt aber ferner ab von der Natur des Ätzmittels, von der Temperatur und von andern Verhältnissen bei seiner Einwirkung, so daß auch zwei nicht gleichwertige Richtungen sich unter gewissen Verhältnissen so ähnlich verhalten können, daß sie anscheinend gleichwertig sind. Sobald aber zwei Richtungen im Krystalle sich bei irgendeiner Art der Ätzung constant verschieden verhalten, so muß daraus geschlossen werden, daß ihnen parallel die innere Natur des Krystalles nicht übereinstimmt, daß die beiden Richtungen also nicht gleichwertig sind. Dasselbe gilt für zwei Ebenen des Krystalles, welche unter irgendwelchen Umständen verschiedene Ätzfiguren liefern.

Da nun die größere oder geringere Anzahl gleichwertiger Richtungen den Grad der Symmetrie der inneren Beschaffenheit des Krystalles bestimmt, so bieten die Corrosionserscheinungen eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Erkennung des Grades der Symmetrie krystallisierter Körper dar. Erweisen sich zwei Richtungen schon durch eine der bisher betrachteten Eigenschaften als ungleichwertig (z. B. die beiden entgegengesetzten Richtungen einer elektrischen Axe), so ist dies stets auch der Fall bei der Auflösung, und ebenso verhalten sich zwei entgegengesetzte parallele Ebenen, welche z. B. durch Pyroelektricität sich zueinander polar erweisen, gegenüber der Ätzung verschieden.

Ein lehrreiches Beispiel für die Unterscheidung zwischen Gleichwertigkeit und Ungleichwertigkeit zweier Richtungen durch die Ätzerscheinungen bieten die Mineralien Kalkspat und Dolomit, welche zu einer und derselben Gruppe (III S. 213) der optisch einaxigen Krystalle in bezug auf ihre Cohäsionsverhältnisse gehören und übereinstimmend nach einem Rhomboeder von sehr ähnlicher Gestalt spalten, dessen Flächen symmetrisch halbiert werden durch die dem Hauptschnitte entsprechende kurze Diagonale. Diese Symmetrie zeigt aber eine solche Fläche der Auflösung gegenüber nur beim Kalkspate (Fig. 143), nicht beim Dolomit (Fig. 144), wie die in beide Flächen in relativer Vergrößerung eingezeichneten, durch Salzsäure hervorgebrachten Ätzfiguren (nach Tschermaks Beobachtungen) beweisen; während dieselben auf dem Kalkspatrhomboeder rechts und links gleiche und entgegengesetzte, d. h. nach der kurzen Diagonale symmetrische Form besitzen, sind sie beim Dolomit unsymmetrisch. In solchen Fällen lehrt nun die Erfahrung, daß dieser niedrigere Grad von Symmetrie dem Kry-

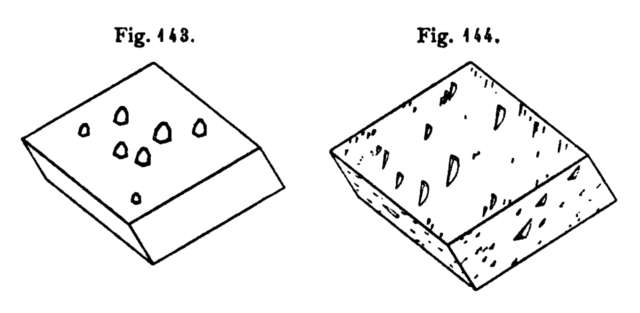


Fig. 143. Fig. 144.

stalle auch in bezug auf sein Wachstum, d. h. in bezug auf die Bildung seiner Krystallflächen zukommt, daß also weitere Krystallflächen, wenn solche an diesen Rhomboedern auftreten, beim Kalkspate auf beiden Seiten des Rhombus sich vollkommen symmetrisch bilden, beim Dolomit dagegen nicht. Als ein weiteres Beispiel hierfür möge das Kieselzinkerz erwähnt werden, dessen Krystalle der ersten Gruppe der optisch zweiaxigen (s. S. 214) angehören, in ihren Cohäsionsverhältnissen also vollkommene Symmetrie nach den drei zueinander senkrechten optischen Hauptschnitten zeigen; trotzdem läßt die Gestalt der Ätzfiguren (durch Salzsäure hervorgebracht), wie sie in Fig. 3 Taf. III auf der mit *b* bezeichneten Krystallfläche abgebildet sind, nur Symmetrie nach zweien der optischen Hauptschnitte, nicht nach dem dritten (horizontalen) erkennen; das gleiche ist aber auch in bezug auf die Ausbildung des Krystalles der Fall, und da diese von dem Wachstum desselben abhängig ist, so sieht man, daß die beiden Erscheinungen, Wachstum und Auflösung eines Krystalles, reciproke sind und den gleichen Gesetzmäßigkeiten unterliegen. Dementsprechend beobachtet man, daß die Ätzfiguren stets dieselbe Symmetrie ihrer Form und Orientierung zeigen, welche auf Grund der Wachstumsverhältnisse des betreffenden Krystalles der Ebene, auf welcher sie erscheinen, zukommt. Ein sehr bequemes Hilfsmittel zur Erkennung der Symmetrie der auf einer geätzten Fläche entstandenen mikroskopischen Vertiefungen bietet die sog. »Lichtfigur« derselben, d. h. die durch Beugung (Diffraction) des Lichtes erzeugte Verzerrung des reflectierten Bildes einer entfernten kleinen Lichtquelle, da die Art dieser Verzerrung, welche jede mit regelmäßig gestalteten Unebenheiten versehene Fläche bewirkt, von der Gestalt dieser Unebenheiten abhängt.

In bezug auf ihr Verhalten beim Wachstum oder bei der Auflösung zerfallen somit die Krystalle in eine noch größere Zahl von Unterabteilungen, als es in bezug auf die bisher betrachteten Eigenschaften der Fall ist; diese Untergruppen, welche sich durch ihre Symmetrieverhältnisse unterscheiden, sollen daher als »Symmetrieklassen« bezeichnet werden.

I. Die einfachbrechenden Krystalle zeigen nämlich fünf verschiedene Arten der Symmetrie:

1. Symmetrie nach den Ebenen des Hexaeders und des Rhombendodekaeders,
2. nur nach denen des Würfels,
3. nur nach den Ebenen des Rhombendodekaeders,
4. keine Ebene der Symmetrie, aber Gleichwertigkeit der Normalen zu allen acht Flächen des regulären Oktaeders,
5. ebenfalls keine Symmetrieebene und Polarität der Oktaedernormalen, daher Ungleichwertigkeit der abwechselnden Oktaederflächen.

In den Krystallen der 3. und 5. Klasse sind die Normalen zu den Oktaederflächen elektrische Axen, so daß dahin gehörige Krystalle schon

durch die Erscheinungen der polaren Pyroelektricität (s. S. 240) von den andern zu unterscheiden sind. Allen fünf Klassen gemeinsam ist die Gleichwertigkeit der Normalen zu den Hexaederebenen, und da dies auch in bezug auf das Wachstum gilt, so ist der Würfel eine allen Klassen gemeinsame Krystallform. Die Ätzfiguren auf dessen Flächen sind aber nur bei einem Krystalle der 1. Klasse notwendig symmetrisch zu den Seiten und zu den Diagonalen der Würfelfläche, bei einem der 2. Klasse nur nach den Seiten, bei einem der 3. Klasse nur nach den Diagonalen, bei denen der 4. und 5. Klasse nach keinem von beiden; die Unterscheidung der beiden letzteren kann durch die Gleichheit oder Verschiedenheit der Ätzung entgegengesetzter Oktaederflächen oder durch den Nachweis des Vorhandenseins oder Fehlens elektrischer Axen erfolgen.

II. Diese S. 212 in bezug auf ihre Cohäsionsverhältnisse besprochene Gruppe der optisch einaxigen Krystalle zerfällt ebenfalls in fünf Symmetrieklassen, von denen (wie in der I. Gruppe) nur eine in ihrem Verhalten bei Auflösung und Wachstum die gleiche Symmetrie zeigt, wie sie den Cohäsionsverhältnissen der ganzen Gruppe zukommt, während die Krystalle der vier andern in bezug auf jenes Verhalten einen geringeren Grad von Symmetrie besitzen.

III. Auch in dieser Gruppe hat man durch die Erscheinungen beim Wachstume und bei der Auflösung fünf verschiedene Arten der Symmetrie nachweisen können, von denen zwei durch die S. 252 besprochenen Beispiele des Kalkspats und des Dolomits repräsentiert werden. Allen gemeinsam ist die Gleichwertigkeit je dreier Richtungen, welche gleiche Winkel mit der optischen Axe bilden, und für diejenigen Klassen, in welchen diese Richtungen nicht polar sind, ist das Rhomboeder geradeso eine gemeinsame Krystallform, wie das Hexaeder für alle Klassen der I. Gruppe; in welcher Weise das Verhalten dieser Form beim Ätzen dazu dienen kann, die einzelnen Klassen zu unterscheiden, ist an den beiden obengenannten Beispielen gezeigt worden.

Außer diesen fünf Arten der Symmetrie sind nach Analogie mit den übrigen Gruppen der Krystalle noch zwei weitere als möglich anzunehmen, bisher aber noch nicht durch Beobachtung nachgewiesen.

IV. Hier hat man bereits vier Symmetrieklassen festgestellt und muß eine fünfte aus denselben Gründen, wie in der vorigen Gruppe, als möglich annehmen.

V. Die optisch zweiaxigen Krystalle dieser Gruppe zerfallen durch ihr Verhalten beim Wachsen und Auflösen in drei Symmetrieklassen, und diese sind genau die gleichen, welche sich schon durch das Vorhandensein oder Fehlen der polaren Pyroelektricität ergeben haben (s. S. 240).

VI. Auch hier liefert die Untersuchung drei Arten der Symmetrie, welche mit den bereits durch Nachweis des Vorhandenseins oder Fehlens elektrischer Axen gegebenen identisch sind.

VII. Für die optisch zweiaxigen Krystalle ohne Ebene der Symmetrie

sind, wie in bezug auf polare Pyroelektricität, nur zwei Fälle möglich: entweder besitzen sie ein Centrum der Symmetrie; dann sind je zwei entgegengesetzte parallele Krystallflächen in bezug auf Wachstum und Auflösung gleichwertig — oder es fehlt ihnen jede Symmetrie, und dann verhalten sich alle Krystallflächen derselben, auch die parallelen Gegenflächen, verschieden.

Somit ist die Gesamtzahl der Symmetrieklassen, welche bei den Krystallen anzunehmen sind, zweiunddreißig.

Wie aus dem Vorhergehenden zu ersehen, sind einzelne Krystallformen mehreren dieser Klassen gemeinsam, und in solchen Fällen bietet das Verhalten der Flächen derselben gegenüber der Auflösung ein Hilfsmittel dar, über die Zugehörigkeit des betreffenden Krystalles zu einer bestimmten Klasse zu entscheiden. Es sind namentlich die unermüdlichen Forschungen Baumhauers[1]) auf diesem Gebiete gewesen, welche die Wichtigkeit dieses Hilfsmittels für die praktische Krystallographie erwiesen haben. Aus denselben ist besonders die schon erwähnte Tatsache hervorgegangen, daß die Gestalt der Ätzfiguren auf einer bestimmten Ebene eines Krystalles nicht allein von der Natur des letzteren, sondern auch von der des angewandten Lösungsmittels (bei Ätzung durch Säuren z. B. von deren Concentration) abhängt. Da aber in allen Fällen die gleichen Gesetzmäßigkeiten betreffs der Symmetrie gelten, so ist dadurch die Anwendbarkeit der Methode für den vorhin erwähnten Zweck noch gesteigert, indem der Nachweis der Symmetrie dann durch mehrere Ätzmittel geführt werden kann, falls eines derselben Figuren liefern sollte, welche nicht vollkommen entscheidend sind. Ebenso wie zur Erkennung der Symmetrieverhältnisse eines Krystalles können die Corrosionserscheinungen auch dazu dienen, einen anscheinend einfachen Krystall als Verwachsung verschieden orientierter Partien zu erkennen, da alsdann auf den verschiedenen Teilen einer Ebene sich verschieden gestaltete oder ungleich orientierte Ätzfiguren bilden.

Aus den erwähnten Beziehungen geht hervor, daß die Flächen, welche die vertiefte Ätzfigur zusammensetzen, die sog. »Ätzflächen«, zu denjenigen gehören, welche vermöge der Wachstumsverhältnisse des Krystalles an letzterem ausgebildet erscheinen können; doch liegt es in der Natur der Sache, daß dieselben infolge der fortgesetzten Wirkung des Lösungsmittels niemals vollkommene Ebenen sein können, sondern mehr oder weniger abgerundet erscheinen müssen, daher eine genaue Bestimmung ihrer Orientierung durch Messung mit dem Reflexionsgoniometer nur in seltenen Fällen möglich ist. Dasselbe gilt für die sog. »Ätzhügel«, d. h. die von den gleichen Flächen begrenzten Erhöhungen, welche zwischen benachbarten Ätzvertiefungen stehen bleiben. Am wenigsten gerundet erscheinen nach

1) Beispiele für alle obenerwähnten Verhältnisse werden beschrieben und durch ausgezeichnete Lichtdrucktafeln erläutert in dem Werke: Die Resultate der Ätzmethode in der krystallographischen Forschung, an einer Reihe von krystallisierten Körpern dargestellt von H. Baumhauer, Leipzig 1894.



den Beobachtungen von Molengraaff die in den Ätzfiguren am tiefsten liegenden Teile ihrer seitlichen Begrenzungsflächen, und dies ist auch nach der Vorstellung, welche man sich von den Sättigungsverhältnissen der Lösung in einer derartigen Vertiefung machen muß, zu erwarten. Die wirklichen Krystallflächen, deren Lage sich die Ätzflächen somit in ihren tiefsten Teilen mehr oder weniger nähern, werden von V. v. Ebner, welcher besonders die beiden polymorphen Formen des Calciumcarbonates, Calcit und Aragonit, in dieser Beziehung studierte, als »Lösungsflächen« bezeichnet und in Parallele gestellt mit den Spaltungsflächen, mit denen sie jedoch nicht zusammenfallen; sie sind nach Becke, welchem wir ebenfalls umfassende Untersuchungen über die Ätzerscheinungen verdanken, als Ebenen zu betrachten, deren Normalen die Richtungen größten Widerstandes gegen Auflösung oder chemische Zersetzung sind.

Die infolge der fortgesetzten Wirkung des Lösungsmittels sofort nach Entstehung ebener Ätzflächen, welche sich in geradlinigen scharfen Kanten schneiden, beginnende Abrundung der letzteren findet natürlich auch an denjenigen Kanten, in welchen die natürlichen Flächen eines Krystalles einander schneiden, sowie an dessen Ecken statt, sobald derselbe in ein Lösungsmittel eingetaucht wird. Dadurch entstehen an denselben nicht selten anscheinend ebene, meist aber mattflächige (d. h. aus mikroskopisch kleinen Ätzvertiefungen und -erhöhungen zusammengesetzte) Abstumpfungsflächen, welche man zum Unterschiede von den inneren Corrosionsflächen der Ätzfiguren auch als »Prärosionsflächen« bezeichnet hat. Wie aus den gesetzmäßigen Beziehungen der Corrosion zu der Symmetrie des Krystalles hervorgeht, kann die gleiche oder verschiedene Angreifbarkeit seiner Kanten und Ecken durch eine ätzende Flüssigkeit dazu dienen, die Gleichwertigkeit oder Ungleichwertigkeit derselben zu erkennen.

Quantitative Bestimmungen der Unterschiede, welche ungleichwertige Flächen eines Krystalles in bezug auf die Löslichkeit darbieten, führte zuerst Lavizzari aus, indem er die von verschiedenen Flächen des Kalkspates unter der Einwirkung von Säure entwickelten Mengen von Kohlensäure getrennt feststellte. Spring fand die größte Lösungsgeschwindigkeit des Kalkspates durch Säuren für die Ebene senkrecht zur optischen Axe (d. i. die Ebene, in welcher die Härte am kleinsten ist, s. S. 243), die geringste für Flächen parallel zur Axe, wobei das Verhältnis beider sehr nahe mit demjenigen der Brechungsindices des ordinären und des extraordinären Strahles übereinstimmte, und Cesàro bestätigte dies auch für die intermediär gelegenen Flächen des Spaltungsrhomboeders[1].

In der allgemeinsten Weise endlich läßt sich die Abhängigkeit, in welcher die Löslichkeit eines Krystalles von der Richtung steht, erforschen, wenn man eine aus demselben hergestellte Kugel der Auflösung unterwirft.

1) Diesem Verhalten kann eine allgemeine Gesetzmäßigkeit natürlich nicht zugrunde liegen, da sonst einfachbrechende Krystalle nach allen Richtungen gleiche Lösungsgeschwindigkeit zeigen müßten.



Dies unternahm ebenfalls zuerst Lavizzari, indem er eine Kugel von Kalkspat in concentrierter Salpetersäure sich auflösen ließ und beobachtete, daß dieselbe nicht ringsum gleichmäßig an Durchmesser abnahm, sondern sich allmählich in eine hexagonale Doppelpyramide verwandelte. Sehr eingehende Untersuchungen über die Gestalten (»Lösungskörper«), welche Kugeln von Kalkspat unter der Einwirkung verschiedener Säuren annehmen, haben in neuester Zeit Goldschmidt und Wright veröffentlicht und durch zahlreiche Abbildungen erläutert. Die von Meyer und Penfield angestellten Versuche der Gestaltänderung einer Quarzkugel bei allmählicher Auflösung durch Flußsäure wiederholte und vervollständigte Gill durch genaue Messungen der nach verschiedenen Richtungen stattgefundenen Abnahme des Durchmessers. Nach diesen ist die Auflösung am stärksten in der Richtung der optischen Axe, so daß die Kugel in dieser stark abgeplattet wird; in der dazu senkrechten Ebene ist sie sehr gering, so daß die Unterschiede verschiedener Richtungen nicht hervortreten, während dies

Fig. 145.

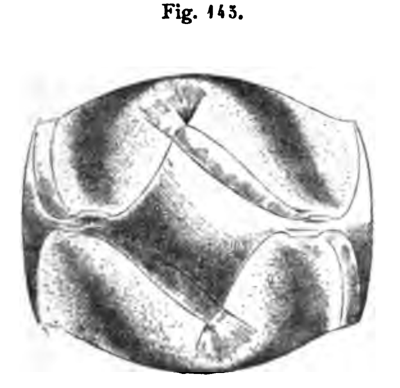
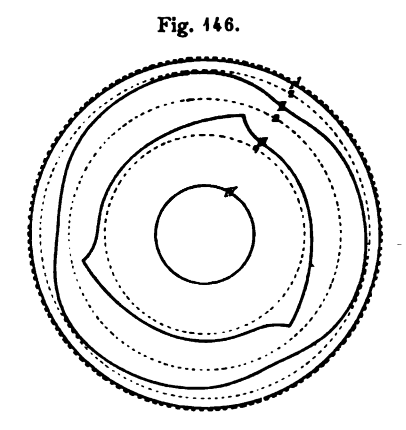


Fig. 146.



in intermediären Richtungen in hohem Grade der Fall ist; die complicierte Form, in welche die Kugel sich durch die nach verschiedenen Richtungen ungleiche Angreifbarkeit verwandelt, ist angenähert zu ersehen aus Fig. 145, in welcher die optische Axe senkrecht ist, genauer aus den Curven *I*, *II*, *III*, *IV* Fig. 146, welche die Durchschnitte der Oberfläche mit denjenigen horizontalen Ebenen darstellen, die von der Kugel vor der Ätzung in den punktierten Kreisen 1, 2, 3, 4 geschnitten wurden. Die Ätzung einer Quarzkugel mit einer unter Druck überhitzten Lösung von Kaliumcarbonat ergab geringere Unterschiede nach verschiedenen Richtungen, zeigte aber deutlich, daß die entgegengesetzten Pole der elektrischen Axen des Quarzes ungleiche Löslichkeit besitzen; dementsprechend werden auch die zweierlei Kanten eines Prismas von Quarz (s. Fig. 6*a*, 6*b* Taf. III) durch Ätzmittel sehr ungleich angegriffen.

Das Verhalten einer aus einem Krystalle hergestellten Kugel, wenn dieselbe in eine gesättigte Lösung der gleichen Substanz gebracht wird und

sich durch Verdunstung auf ihr neues Material absetzt, d. i. das Wachstum einer solchen Kugel, hat Rauber[1]) durch eingehende Versuche an Kugeln des einfachbrechenden Alauns studiert. Die Kugel bedeckt sich bald mit ebenen glänzenden Flächen des regulären Oktaeders und des Rhombendodekaeders (s. Fig. 120 u. 121, S. 211), zwischen denen sich rauhe Felder von der Stellung der Würfelflächen befinden; später werden letztere von den glatten Oktaederflächen überwuchert, und schließlich resultiert ein einfaches Oktaeder. Das radiale Wachstum der Kugel ist also am größten in den Richtungen der Normalen zu den Würfelflächen, d. h. in den sechs Richtungen, in welchen die spitzen Ecken des Oktaeders entstehen, denn hier ist die neue Oberfläche am weitesten von der ursprünglichen entfernt; am kleinsten ist dagegen das radiale Wachstum der Kugel in den Richtungen der Normalen zu den Oktaederflächen. Daraus folgt, daß für die Herstellung der schließlich entstehenden Form auch das »Flächenwachstum«, die Art der Anlagerung der Teilchen in der Ebene der sich bildenden Krystallflächen, in Betracht kommt.

Die bei dem Wachstume einer Kugel schließlich resultierende Form eines Polyeders, gebildet von ebenen Flächen mit geradlinigen Kanten, welche einander unter bestimmten Winkeln durchschneiden, beobachten wir aber stets auch dann, wenn ein Krystall in einer Lösung oder Schmelze entsteht, d. h.: beim Beginne einer Krystallisation zeigt schon das kleinste, in die Grenzen mikroskopischer Sichtbarkeit tretende Gebilde die Form eines derartigen Polyeders, und das Wachstum desselben findet im allgemeinen in der Weise statt, daß seine ebenen Flächen in der Richtung nach der Lösung hin, sich selbst immer parallel bleibend, stetig vorschreiten[2]). Wieviel aber dieses Fortschreiten in einer bestimmten Richtung beträgt, das hängt, außer von der Art der anziehenden Kräfte der Partikel des Krystalles selbst, auch von der Menge des in den benachbarten Teilen der Flüssigkeit zur Verfügung stehenden Materials zum Aufbau des Krystalles ab, d. h. von der Schnelligkeit der Verdunstung oder Abkühlung, der Herzuführung neuer Teilchen durch Diffusion der Lösung, von lokalen

---

1) In dem durch zahlreiche photographische Abbildungen erläuterten Werke: Die Regeneration der Krystalle, Leipzig 1895, mit einem Atlas in 7 Lief. 1896—1901. In demselben sind die Regenerationserscheinungen der mannigfachsten, künstlich hergestellten Formen von Alaun beschrieben und abgebildet. Ferner: A. Rauber, Die Umbildung der Kugel, m. 2 lith. Tafeln (Acta et comm. F. Univ. Jurjewensis, olim Dorpatensis, 1897, Nr. 2).

2) Dies ist natürlich nur dann möglich, wenn die den Flächen benachbarte Flüssigkeit sich in einem, wenn auch nur geringen, Grade der Übersättigung befindet, da im Falle einer nur gesättigten Lösung Gleichgewicht zwischen Krystall und Lösung bestände. Daß ersteres tatsächlich in der unmittelbaren Nähe des wachsenden Krystalles der Fall ist, hat namentlich Miers dadurch nachgewiesen, daß der während des Wachstumes der Krystalle verschiedener löslicher Substanzen durch Totalreflexion an den wachsenden Flächen derselben gemessene Brechungsindex der Lösung sich stets etwas größer ergab, als der einer genau gesättigten Lösung bei gleicher Temperatur.

Temperaturdifferenzen[1]) und dadurch bewirkten Strömungen in der Flüssigkeit usf., also von Ursachen, welche mit der Natur des Krystalles selbst nichts zu tun haben.

Daraus folgt: Wenn auch an einem Krystalle mehrere Ebenen vorhanden sind, welche vermöge seiner inneren Natur völlig gleichwertig sind und daher gleichartige Anziehungen nach außen ausüben, so kann doch der Betrag des Wachstumes nach denselben ein sehr verschiedener sein; wenn nämlich durch die zufällige Lage des wachsenden Krystalles an einer Fläche sehr viel weniger Substanz zugeführt wird, als an der andern. Hieraus leuchtet ein, daß es ein besonderer Zufall wäre (ein Fall unter unendlich vielen möglichen), wenn auf mehreren gleichwertigen Flächen eines Krystalles aus der ihn umgebenden, von Strömungen durchzogenen Flüssigkeit in einer bestimmten Zeit genau gleich viel Substanz[2]) zur Ablagerung gelangen würde. Diese Abhängigkeit des Krystallwachstumes von dem zufälligen Zuflusse an Material muß bewirken, daß ein Krystall in keinem Stadium seines Wachstums die gleichwertigen Flächen genau gleich groß zeigen wird. Besitzt derselbe z. B. drei zueinander senkrechte und drei zu diesen parallele, sämtlich gleichwertige Ebenen, wie es bei den einfachbrechenden Krystallen der Fall ist, so wird er niemals genau die Gestalt eines geometrischen »Würfels« haben, dessen Flächen Quadrate sind, sondern der Abstand der drei Paare paralleler Flächen wird im allgemeinen ein verschiedener sein, diese Flächen also die Gestalt von Rectangeln besitzen.

Die somit notwendigerweise variable Gestalt des Umrisses der Flächen eines jeden Krystalles hat es veranlaßt, daß die Alten die Gesetzmäßigkeiten der Krystallformen übersahen, und daß erst im 16. Jahrhunderte erkannt wurde, daß an jedem Krystalle, wie auch die Größe und infolgedessen die Umrißfigur der Flächen variiere, doch ihre Orientierung eine ganz constante bleibe, so daß entsprechende Flächen einander stets unter ganz bestimmten Winkeln schneiden[3]).

Wir erhalten also alle möglichen Gestaltungen, welche eine und dieselbe Krystallform annehmen kann, wenn wir ihre Ebenen parallel sich selbst verschoben denken, wobei ja die Winkel, unter denen dieselben einander schneiden, unverändert bleiben. Da der Ort, an welchem in jedem einzelnen Falle eine Krystallfläche zustande kommt, von äußeren Umständen

1) Da der Grad der Concentration von der Temperatur abhängt, könnte infolge solcher Differenzen sogar gleichzeitig an einem Teile des Krystalles Auflösung, am andern Wachstum stattfinden.

2) Künstlich kann man dies einigermaßen ermöglichen bei einem langsam sich vergrößernden Krystalle, indem man ihn öfters in der Lösung umlegt, oder noch besser durch fortwährende gleichmäßige Rotation desselben mit der Lösung, wie es in den weiterhin erwähnten Untersuchungen G. Wulffs geschah.

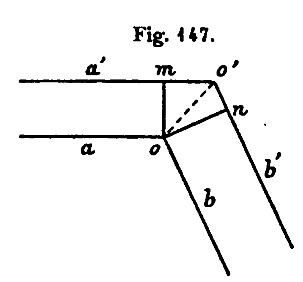
3) Die sehr kleinen Änderungen, welche gewisse Winkel durch Änderung der Temperatur des Krystalles erfahren (s. S. 184 f.), sind erst viel später entdeckt worden und sollen hier zunächst noch unberücksichtigt bleiben.

abhängt, nämlich von der zufälligen Zufuhr an Material zum Wachstume, so kann derselbe keiner Gesetzmäßigkeit unterliegen, und an der krystallographischen Bedeutung einer Fläche wird somit nichts geändert, wenn man dieselbe parallel sich selbst verschoben denkt. Da hiernach Größe und Gestalt der Krystallflächen für die Form irrelevant sind und nur ihre Stellung oder Orientierung, d. h. die Richtung der in ihr liegenden Geraden, von wesentlicher Bedeutung ist, so ergibt sich folgende Definition:

Eine Krystallform ist der Inbegriff einer Anzahl ebener Flächen, welche einander unter bestimmten Winkeln durchschneiden.

Ein Krystall kann nun entweder nur von gleichwertigen Flächen begrenzt sein, wie bei dem S. 258 erwähnten Beispiele des Alauns nur von Oktaederflächen, und dann ist die Geschwindigkeit des Wachstumes derselben (vorausgesetzt, daß die vorhin besprochenen äußeren Ursachen ungleichen Wachstumes beseitigt sind) gleich groß — oder der Krystall wird von ungleichwertigen Flächen begrenzt, und in diesem Falle ist die Geschwindigkeit ihres Wachstumes, auch wenn vollkommen gleichartiger Zufluß von Material von außen stattfindet, eine verschiedene. Wie schon erwähnt, muß man bei dem Wachstume einer Krystallfläche zweierlei unterscheiden: das eigentliche Wachstum, d. h. das Vorschreiten in der Richtung der Flächennormale, und die tangentiale Vergrößerung der Fläche. Seien a und b Fig. 147 die Durchschnittsrichtungen zweier Flächen, welche nach einer Zeiteinheit die Stellungen a' und b' einnehmen, so daß die vorhin durch den Punkt o dargestellte Kante derselben nach o' gerückt ist; alsdann repräsentieren om und on die Wachstumsgeschwindigkeiten, während mo' und no' den Vergrößerungen der Krystallflächen entsprechen, und es ist ohne weiteres ersichtlich, daß die letztere für die langsamer wachsende Fläche größer ist. Mit andern Worten: An einem Krystalle entwickeln sich am größten diejenigen Flächen, deren Wachstumsgeschwindigkeit am kleinsten ist.

Fig. 147.



Die Auflösung ist eine dem Wachstume entgegengesetzte Erscheinung und findet nur in einer ungesättigten Lösung statt, daher zu erwarten ist, daß die Flächen mit der geringsten Wachstumsgeschwindigkeit sich auch am langsamsten auflösen, also den S. 256 erwähnten Ebenen größten Widerstandes gegen die Auflösung parallel sind. G. Wulff, welcher das Verhältnis der Wachstumsgeschwindigkeit verschiedenartiger Flächen des sog. Mohrschen Salzes $(SO_4)_2 Fe(NH_4)_2 \cdot 6H_2O$ nach der S. 259 Anmerk. erwähnten Methode rotierender Krystallisationsgefäße bestimmte, versuchte auch die Auflösungsgeschwindigkeiten derselben zu messen, um beide vergleichen zu können. Es zeigte sich aber, daß die betreffenden Flächen sich sofort mit Ätzfiguren bedecken, durch die Abnahme des Krystalles in

der Richtung der Normalen einer Fläche also nicht deren Auflösungsgeschwindigkeit gemessen wird, sondern die mittlere Auflösungsgeschwindigkeit der verschiedenen Flächen, welche die Ätzvertiefungen bilden, daher die gefundenen Werte für verschiedenartige Flächen wenig voneinander abweichen, während die Wachstumsgeschwindigkeit sehr verschieden gefunden wurde, und zwar für die am größten ausgebildeten Flächen am kleinsten, entsprechend dem obigen Satze. Eine weitere Bestätigung desselben liefern die nach der gleichen Methode ausgeführten Versuche von Weyberg an Alaunkrystallen, welche unter bestimmten Bedingungen in wässeriger Lösung wuchsen; diese Versuche ergaben, daß die Wachstumsgeschwindigkeit der Oktaederflächen weitaus die kleinste ist, indem diejenige normal zu den Würfelflächen viermal und diejenige nach den Rhombendodekaederflächen achtmal so groß gefunden wurde, entsprechend der Tatsache, daß unter denselben Bedingungen die Krystalle fast nur von Oktaederflächen begrenzt werden.

Das Verhältnis der Wachstumsgeschwindigkeiten verschiedenartiger Flächen eines Krystalles und damit seine Ausbildung erweist sich abhängig nicht nur von der Verschiedenheit der inneren Beschaffenheit des Krystalles nach verschiedenen Richtungen, sondern auch von der Natur der Flüssigkeit, in welcher die Krystallisation stattfindet, deren Temperatur usw. So krystallisiert z. B. aus alkalischen Lösungen der Alaun nicht in Oktaedern, sondern in Würfeln, daher in diesem Falle ein ganz anderes Verhältnis der Wachstumsgeschwindigkeiten herrschen muß, als es Weyberg für die Krystallisation in neutraler Lösung fand. Diese Abhängigkeit des Wachstumes von der Beschaffenheit der Mutterlauge läßt sich allgemein durch die folgenden Betrachtungen einsehen, welche von P. Curie zuerst angestellt und von G. Wulff (Zeitschr. f. Kryst. 1901, **34,** 512) weitergeführt und vereinfacht wurden.

Zur Vergrößerung der Trennungsfläche zwischen zwei Medien bedarf es einer Kraft, welche den inneren Kräften derselben entgegenwirkt. Die Energie, welche aufgewendet werden muß, um eine Einheit der Trennungsfläche beider herzustellen, ist die charakteristische Capillaritätsconstante k für die Grenze zwischen den beiden Medien. Befindet sich nun ein bestimmtes Volum einer deformierbaren isotropen Substanz, ohne daß andere als die inneren Kräfte einwirken, innerhalb einer zweiten, z. B. ein bestimmtes Flüssigkeitsvolum in einer mit ihr nicht mischbaren, gleich schweren Flüssigkeit, so erfordert die Herstellung einer bestimmten Oberfläche S, wie auch deren Gestalt sei, die Energie kS, da für isotrope Substanzen jede Flächeneinheit der Grenzfläche, sie mag eine Stellung haben wie sie wolle, die Capillaritätsconstante k besitzt. Dieses Product nimmt seinen kleinsten möglichen Wert an, wenn die Oberfläche S am kleinsten wird, d. h. die Gestalt einer Kugel annimmt; alsdann ist Gleichgewicht vorhanden, weil nun den inneren Kräften, welche die Verkleinerung der Oberfläche erstreben, keine Arbeit mehr zu leisten übrigbleibt. Wäre

dagegen ein in einer Flüssigkeit schwebender, deformierbarer Körper nicht isotrop und von ungleichwertigen Flächen mit verschiedenen Capillaritätsconstanten zur umgebenden Flüssigkeit, k_1, k_2, k_3 ..., begrenzt, und sei die Summe des Flächeninhaltes der einen Art von Flächen $= S_1$, die der andern $= S_2$ usf., so erfordert die Herstellung der Oberfläche $S_1 + S_2 + S_3 \ldots$ die Energie $k_1S_1 + k_2S_2 + k_3S_3 \ldots$, und es kann nur dann Gleichgewicht vorhanden sein, wenn diese Summe ihren kleinsten Wert angenommen hat. Aus der Ungleichwertigkeit zweier Krystallflächen, d. h. aus der Verschiedenheit ihrer Auflösungs- und Wachstumsgeschwindigkeiten, ist auf eine Verschiedenheit ihrer tangential wirkenden inneren Kräfte, somit auch ihrer Capillaritätsconstanten, zu schließen. Ein Krystall mit ungleichwertigen Flächen würde daher den zuletzt erwähnten Fall realisieren, wenn er beliebig deformierbar wäre, d. h. wenn er, in seiner gesättigten Lösung befindlich, auf den Flächen einer Art Auflösung, auf denen der andern Art Absatz von Substanz erfahren könnte, ohne daß dabei der Krystall und die Lösung ihr Volum und ihre Natur änderten. Da sich hierdurch die Größen $S_1, S_2, S_3 \ldots$ ändern würden, so müßte alsdann jener Austausch so lange stattfinden, bis $k_1S_1 + k_2S_2 + k_3S_3 \ldots$, die gesamte Oberflächenenergie, ihren kleinsten Wert erreicht hätte; dann erst wäre Gleichgewicht vorhanden. Bringen wir einen starren Krystall in eine gesättigte Lösung, so ist zu einem derartigen Austausche von Substanz zwischen den verschiedenartigen Flächen keine Veranlassung vorhanden, da es an einem Anstoße hierzu fehlt. Anders liegt die Sache jedoch beim Wachstume eines Krystalles, denn hier entstehen die Trennungsflächen zwischen fester Substanz und Flüssigkeit ja erst, und Gleichgewicht wird hierbei nur dann eintreten, wenn die Oberflächenenergie ihren kleinsten Wert hat.

Es läßt sich nun für jedes von ebenen Flächen begrenzte Polyeder nachweisen, daß bei gegebenem Volumen das Minimum der Oberflächenenergie dann erreicht wird, wenn die Entfernungen der Flächen von einem und demselben Punkte proportional den Capillaritätsconstanten sind. Diese Entfernungen entsprechen aber den Wachstumsgeschwindigkeiten, folglich sind letztere proportional den Capillaritätsconstanten der Flächen in bezug auf die Mutterlauge, so daß also durch die Messung der relativen Wachstumsgeschwindigkeit der Flächen eines Krystalls zugleich die relative Größe der Capillaritätsconstanten dieser Flächen in bezug auf die Mutterlauge, in welcher der Krystall wächst, gemessen wird. Je größer daher die Oberflächenenergie zwischen einer Krystallfläche und der angrenzenden Lösung ist, desto mehr Substanz setzt sich in bestimmter Zeit auf der Fläche ab.

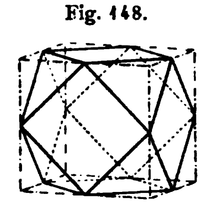
Sei z. B. die von dem wachsenden Krystalle angenommene Form ein quadratisches Prisma mit Basis (s. Fig. 125 S. 213), und seien die Entfernungen der beiden Basisflächen von der Mitte je $= x$, die der vier Prismenflächen je $= y$, so ergibt sich der kleinste Wert der Oberflächenenergie, wenn die Capillaritätsconstante k_1 der Basisfläche sich zu der der Prismenflächen k_2 verhält, wie $x : y$. Ist also für eine bestimmte Lösung k_1 sehr klein gegen k_2, so muß die

Form der sich bildenden Krystalle diejenige dünner quadratischer Tafeln sein; ist dagegen in einer andern Lösung die Capillaritätsconstante k_1 groß gegen k_2, so entstehen in dieser Krystalle von der Form langer quadratischer Prismen mit kleinen Basisflächen.

Das folgende Beispiel soll zeigen, daß die gleiche Substanz, unter verschiedenen Umständen krystallisierend, nicht nur eine sehr verschiedene Entwickelung derselben Krystallflächen besitzen, sondern unter Umständen die Krystalle derselben sogar in dem einen und dem andern Falle von ganz verschiedenen Flächen begrenzt sein können.

Es sei die in einer bestimmten Mutterlauge entstehende Form eines einfachbrechenden Krystalles, z. B. Alaun, die eines sog. »Kubooktaeders« Fig. 148 und die Capillaritätsconstante der Würfelflächen k_1, die der Oktaederflächen k_2, so ergibt sich, wenn man die Länge einer Seite des strichpunktiert angegebenen Würfels = 1 setzt, als Bedingung des Minimums der Oberflächenenergie das Verhältnis $k_1 : k_2 = \sqrt{3} : 2$, d. i. das Verhältnis der Abstände der Würfelflächen von der Mitte zu denjenigen der Oktaederflächen. Hierbei ist das von einer Oktaederfläche auf der Würfelkante abgeschnittene Stück $= \frac{1}{2}$; bezeichnen wir dies allgemein mit x, so gilt für diese Größe die Bedingung

Fig. 148.



$$x = \frac{3}{2} - \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

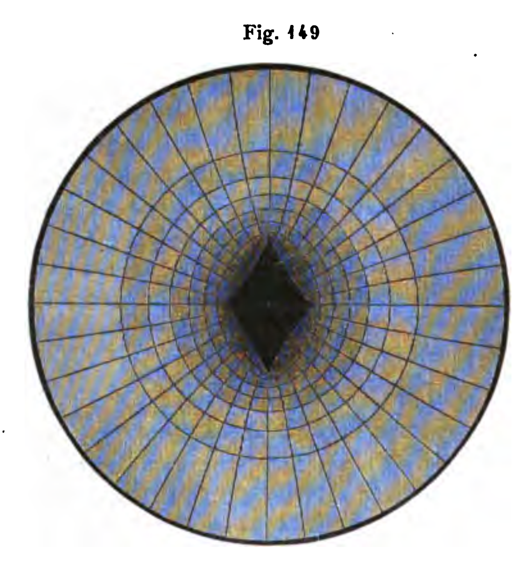
Wäre nun in einer anders beschaffenen Lösung das Verhältnis $k_2 : k_1$ größer als $2 : \sqrt{3}$ (s. oben), so würde x kleiner als $\frac{1}{2}$ und für $k_2 : k_1 = \sqrt{3}$ wäre es 0, d. h. in dieser könnten sich keine Oktaederflächen bilden, die Substanz würde in Würfeln krystallisieren. Ist aber in einer andern Mutterlauge das Verhältnis $k_2 : k_1$ kleiner als $2 : \sqrt{3}$, so ergibt sich aus der obigen Formel $x > \frac{1}{2}$, und für $k_2 : k_1 = 1 : \sqrt{3}$ folgt $x = 1$, d. h. je vier Oktaederflächen schneiden einander in der Mitte einer Würfelfläche, so daß von letzterer nichts mehr übrigbleibt. In einer Lösung, für welche die Capillaritätsconstanten der Würfelflächen $\sqrt{3}$ mal so groß sind, als die der Oktaederflächen, oder noch größer, können also Würfelflächen nicht mehr entstehen, sondern nur Oktaederflächen.

Durch die vorstehenden Betrachtungen werden nun auch die Erscheinungen beim Fortwachsen solcher Krystalle erklärt, deren Form nicht der Beschaffenheit der Mutterlauge, in welcher sie weiter wachsen, entspricht. Bringt man z. B. einen Alaunkrystall, welcher in alkalischer Lösung entstanden war und daher neben den Oktaederflächen große Würfelflächen besitzt, oder ein Alaunoktaeder, an welchem durch Abschleifen der Ecken Würfelflächen künstlich angebracht sind, in eine gesättigte neutrale Alaunlösung und läßt diese langsam verdunsten, so findet das Wachstum auf den Würfelflächen so rasch statt, und infolgedessen dehnen sich die Oktaederflächen derart aus, daß die ersteren nach kurzer Zeit ganz oder fast ganz verschwinden und diejenige Form ensteht, welche der Beschaffenheit der Mutterlauge entspricht und welche von da ab unverändert weiter wächst. Hat man dem in die Lösung gebrachten Krystalle vorher durch Abschleifen die Gestalt einer Kugel gegeben, so entstehen zwar zuerst auch die Flächen des Hexaeders und des Rhombendodekaeders, diese müssen aber bald durch diejenigen des Oktaeders ersetzt werden, weil letzteren die kleinste Wachstumsgeschwindigkeit zukommt, und das gleiche ist bei andern Arten der künstlich hervorgebrachten Verstümmelung der Fall. Findet vorübergehend, durch Temperaturerhöhung oder Verdünnung der Lösung, eine

teilweise Auflösung des Krystalles statt, so werden die Kanten und Ecken desselben abgerundet, und es entstehen daselbst Prärosionsflächen (s. S. 256). Folgt nun auf die Periode der Auflösung wieder eine solche des Wachstums, so wachsen zuerst die Prärosionsflächen weiter, müssen aber wegen ihrer großen Wachstumsgeschwindigkeit später wieder ganz verschwinden, indem die abgerundeten Ecken und Kanten sich wiederherstellen. Wird die Krystallisation vorher unterbrochen, so zeigt der Krystall nun an den Ecken und Kanten Krystallflächen, welche bei normalem Wachstume in der betreffenden Mutterlauge nicht beobachtet werden.

Eine wichtige Rolle spielen bei der Auflösung und dem Wachstume der Krystalle die im vorhergehenden noch nicht berücksichtigten Strömungen, besonders die Diffusionsströmungen. Wird ein Krystall in ein Lösungsmittel gebracht, so beginnt die Auflösung an seiner Oberfläche, und die gelöste Substanz diffundiert nach allen Seiten in das Lösungsmittel. Denkt man sich nun in irgendeinem Augenblicke während dieses Processes alle Punkte gleicher Concentration der Lösung durch eine geschlossene krumme Oberfläche verbunden, so unterscheidet sich diese in genügender Entfernung vom Krystalle nicht von einer Kugel. Je näher jedoch die Flächen gleicher Concentration dem Krystalle liegen, desto mehr schmiegen sie sich der Gestalt desselben an, und die am stärksten concentrierte Lösung ist endlich diejenige, welche in unmittelbarer Berührung mit der Oberfläche des sich auflösenden Krystalles steht. Wie aus Fig. 149 ersichtlich, liegen daher die Concentrationsflächen am dichtesten aneinander in der Nähe der Ecken und Kanten des Krystalles, d. h. hier ist das Gefälle der Concentration am stärksten; infolgedessen sind die in der Figur durch radiale Linien angedeuteten Diffussionsströme hier am intensivsten, und daher findet die Auflösung des Krystalles am stärksten statt an den Ecken und Kanten, so daß ein leicht löslicher Krystall sich in dem Lösungsmittel sehr rasch abrundet zu einer der Kugel ähnlichen Form und in dieser verschwindet.

Fig. 149



Genau das Umgekehrte findet statt bei raschem Wachstume eines Krystalles, also bei schneller Verdunstung oder Abkühlung der Lösung bzw. der Schmelze. Da der Krystall beim Wachsen der Lösung die aufgelöste Substanz entzieht, so muß in seiner Nähe eine Verdünnung entstehen, und

diese wird durch Diffusion von den weiter entfernten Teilen der Lösung her wieder ausgeglichen; so entstehen Diffusionsströme wie in Fig. 149, nur in umgekehrter Richtung, und da deren Intensität aus denselben Gründen, wie vorher, an den Ecken und Kanten des Krystalles am größten ist, so muß hier das rascheste Wachstum eintreten; dadurch können dann sternförmige Aggregate (Wachstumsformen, Krystallskelette) entstehen, welche bei fortgesetztem Wachstum durch Ausfüllung der Zwischenräume zwischen den Strahlen die Form eines größeren Krystalles nachahmen, von welchem jedoch nur Ecken und Kanten angedeutet, statt der Flächen treppenförmige Vertiefungen vorhanden sind.

Fig. 150.

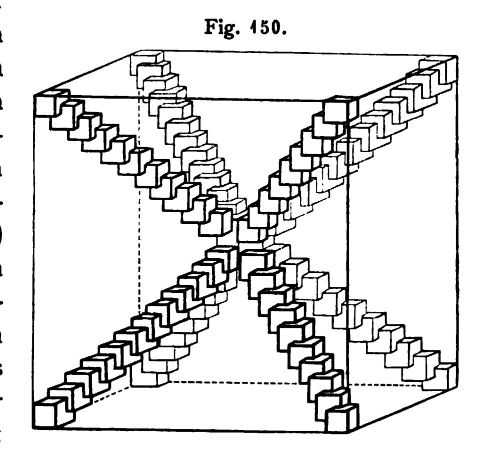
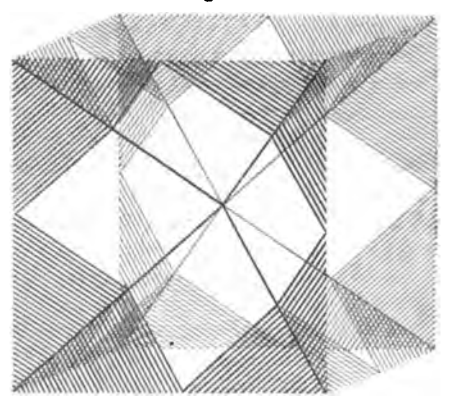
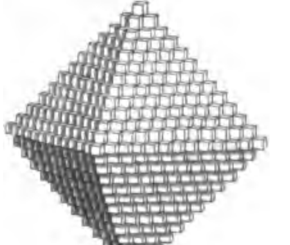


Fig. 151.



Als Beispiel eines solchen Krystallskeletts möge das in Fig. 150 dargestellte des Chlorkaliums (nach den Beobachtungen von Knop) dienen, wie es sich beim Erkalten einer in höherer Temperatur gesättigten Lösung des Salzes bildet. Das Wachstum der zuerst ausgeschiedenen kleinen Würfel findet vorwiegend statt an den Ecken, indem sich an diese neue kleine Würfel anlagern und so Balken bilden, welche den Normalen der Oktaederflächen parallel gehen. Von den Würfelecken der diese Balken zusammensetzenden Kryställchen gehen dann von neuem Ansätze nach denselben vier Richtungen aus, von denen jedesmal eine dem betreffenden Balken selbst entspricht, die drei anderen Anlaß zur Bildung eines Balkensystems 2. Ordnung geben, wie es für das gleiche Beispiel in Fig. 151 schematisch dargestellt ist. Bestehen die einzelnen Kryställchen jedoch aus Oktaedern, wie es beim Chlorammonium der Fall ist, so findet das schnellste Wachstum nach den Normalen der Würfelflächen statt, und es entstehen rechtwinkelig einander kreuzende, aus kleinen aneinander gereihten Oktaedern bestehende Stäbchen (hierher gehören auch die sogenannten »gestrickten« Formen der Metalle). Ändern sich während des Wachstumes die Verhältnisse der Lösung derart, daß die sich ausscheidenden Krystalle eine andere Form annehmen, so ändern sich auch die Richtungen des vorherrschenden Wachstumes. Nicht selten beobachtet man auch Übergänge von Krystallskeletten zu regelmäßigen Krystallen, z. B. scheinbare Oktaeder, aufgebaut aus kleinen Würfeln, bei denen die drusigen Oktaederflächen von den Ecken dieser Würfel gebildet werden, also als eigentliche Flächen nicht am Krystall auftreten (s. Fig. 152, Flußspat). Die vorhergehende Erklärung

Fig. 152.



für die Entstehung der Krystallskelette wurde geliefert durch O. Lehmann in seiner Arbeit »über das Wachstum der Krystalle« Zeitschr. f. Kryst. 1, 453. Durch Untersuchung zahlreicher Substanzen mit Hilfe des »Krystallisationsmikroskopes« wurde nachgewiesen, daß die Formen um so unregelmäßiger werden nicht nur, je schneller das Wachstum vor sich geht, sondern auch je zäher die Lösung und je schwieriger die Substanz löslich ist, daß aber immer die Richtung intensivsten Wachstums besonders den Stellen stärkster Zuspitzung des Krystalles entspricht, also von der speciellen Ausbildung desselben abhängt.

Dieselben Ursachen, welche die Bildung von Krystallskeletten begünstigen, können auch die Anlagerung der Teilchen eines wachsenden Krystalles derart beeinflussen, daß diese nicht streng parallel stattfindet. Solche und andere, durch Anziehung der Teilchen von benachbarten, anders orientierten Krystallen, überhaupt durch Kräfte, welche keine Beziehung zu der inneren Natur des wachsenden Krystalles haben, hervorgebrachte Störungen des regelmäßigen Wachstums, infolge deren der Krystall aus nicht genau parallel orientierten Teilen aufgebaut und also nicht vollkommen homogen ist, sind eine sehr häufige Erscheinung. Derartige Anomalien, deren Wirkung auf die optischen Eigenschaften bereits S. 51 besprochen wurde, bedingen außerdem auch Knickungen, Krümmungen u. a. Unvollkommenheiten der Flächen, und infolge davon Schwankungen der Flächenwinkel der betreffenden Krystalle. Verhältnismäßig frei von solchen sind gewöhnlich kleinere Krystalle, während bei größeren im längeren Verlaufe ihrer Bildung häufiger Störungen des normalen Wachstums eingetreten sind. Da die durch letztere hervorgebrachten Abweichungen in der Orientierung der einzelnen Teile eines Krystalles durch äußere Ursachen bedingt sind, finden sie im allgemeinen in verschiedenem Sinne statt, so daß der Mittelwert der Messungen der Flächenwinkel an einer größeren Anzahl solcher Krystalle der richtigen Orientierung ihrer Flächen mit genügender Annäherung entspricht. Dies trifft auch für den Fall zu, daß einzelne Flächen zwar vollkommen eben sind, aber infolge nicht paralleler Lage der zugehörigen Teile des Krystalles einander unter etwas andern Winkeln schneiden, als es bei einem vollkommen homogenen Krystalle der Fall wäre. Gewöhnlich weist aber schon die durch Knickung der Flächen bewirkte Zusammensetzung der von ihnen gespiegelten Reflexbilder auf die Ungenauigkeit der am Goniometer (vgl. S. 21 und das Nähere in der III. Abteil.) ausgeführten Messung der Winkel hin.

Fehler der Krystallmessung können übrigens, abgesehen von den Ungenauigkeiten der Einstellung und der Teilung des Instrumentes, auch bedingt werden durch Unvollkommenheiten der Krystallflächen, welche ihre Ursache nicht in Anomalien der inneren Structur haben und daher auch bei ganz homogenen Krystallen vorkommen. Dahin gehört die Streifung, die durch wiederholte, alternierende Ausbildung zweier, meist unter kleinem Winkel gegeneinander geneigter Ebenen hervorgebracht wird[1]) und infolgedessen stets in Beziehung steht zur Symmetrie der betreffenden Fläche, welche somit gleichsam nur eine Scheinfläche von treppenartiger Zusammensetzung ist; ferner die drusige, rauhe oder matte Beschaffenheit, welche entweder durch das Wachstum des Krystalles (wie die der Oktaederflächen in Fig. 152) oder durch nachträgliche Auflösung (Ätzfiguren) bewirkt sein kann. In letzterem Falle ist die Erscheinung gewöhnlich verbunden mit einer Krümmung der Flächen.

Die vorhin erwähnte Knickung der Flächen ist nicht selten eine regelmäßige, indem an Stelle einer einfachen Ebene eine äußerst flache Pyramide tritt, d. h. eine Combination mehrerer, unter sehr kleinen Winkeln zueinander geneigter Flächen, deren Stellung vollkommen der Symmetrie der durch sie vertretenen einfachen Ebene entspricht. Diese Wachstums-

1) Dieselbe wird deshalb zum Unterschiede von der wesentlich davon verschiedenen »Zwillingsstreifung«, wie sie z. B. auf Spaltungsflächen von Kalkspat infolge eingelagerter Zwillingslamellen (s. Fig. 140, S. 246) erscheint, als »Combinationsstreifung« bezeichnet.



erscheinung der Krystalle nannte Scacchi »Polyedrie«, und derartige Flächen werden nach Webskys Vorgang allgemein als »Vicinalflächen« bezeichnet. Dieselben bieten insofern eine gewisse Analogie, nur in reciprokem Sinne, mit der Auflösungserscheinung der Ätzfiguren dar, als letztere auch oft sehr flach sind, d. h. ihre Flächen ebenfalls sehr kleine Winkel miteinander bilden, nur daß ihre Kanten natürlich einspringende sind, während die der Vicinalflächen als Erhöhung bildende ausspringen. Die Erklärung der Entstehung der letzteren ist in verschiedener Weise versucht worden:

Beckenkamp nimmt an, daß für die Bildung der Krystallflächen überhaupt das tangentiale Wachstum nach den in der betreffenden Ebene liegenden Richtungen maximaler Attractions- und Orientierungskraft in erster Linie in Betracht kommt, indem infolge dieser Kräfte sich neue Substanz auf der vorhandenen Fläche in ebenen Schichten auflagert, in deren jeder die Anordnung und Orientierung der Teilchen die gleiche ist. Findet die Anlagerung dann auch über die ganze Fläche hin in gleicher Weise statt, so ist das Wachstum derselben ein normales, reichen jedoch die aufgelagerten Schichten nicht bis zu den Umrißkanten der Fläche, bleiben vielmehr die aufeinander folgenden, unmerkbar dünn zu denkenden Lagen immer weiter zurück, so entstehen flache pyramidale Erhebungen, deren Kanten den Hauptwachstumsrichtungen entsprechend liegen und deren Form daher mit der Symmetrie der wachsenden Krystallfläche in Beziehung stehen muß. Hiernach hängt die Bildung der Vicinalflächen außer von den Krystallisationskräften der Substanz auch von der Art des Zuflusses von Material während des Wachstums ab.

G. Wulff schreibt die Entstehung der Vicinalflächen den sogenannten »Concentrationsströmungen« zu, welche zuerst von Lehmann beobachtet und erklärt wurden. Die Ausscheidung fester Substanz am Krystalle erzeugt um diesen einen »Hof« minder concentrierter und darum specifisch leichterer Lösung, welche nach oben steigt, während concentrierte Lösung an ihre Stelle tritt. Diese von der wachsenden Krystallfläche nach oben gehenden Concentrationsströmungen studierte nun Wulff näher und zeigte, in welcher Weise dieselben das Wachstum des Krystalles beeinflussen; er nimmt an, daß dieselben auch die Bildung der Vicinalflächen bedingen, indem die Kräfte, mit welchen die Teilchen von ihnen fortgezogen werden, sich mit den orientierenden Kräften der Oberfläche des Krystalles zusammensetzen müssen, so daß die resultierende Kraft eine etwas abweichende, aber von der Gestalt der Fläche abhängige Richtung annimmt und so Flächenteile entstehen, welche um einen mehr oder weniger kleinen Winkel aus ihrer normalen Stellung gebracht sind.

Die eingehendsten Untersuchungen über die Vicinalflächen wurden in neuester Zeit von Miers angestellt. Dieser führte mit Hilfe eines eigens dafür construierten Goniometers Messungen derselben an Krystallen von Alaun, Natriumchlorat u. a. Salzen aus, während diese in der Lösung

fortwuchsen, und beobachtete, daß z. B. bei Alaun sich an Stelle einer Oktaederfläche stets eine sehr flache dreiseitige Pyramide befand, deren Neigung gegen die Oktaederfläche 2—30′ betrug und während des Wachstums fortwährend, und zwar sprungweise, sich änderte. Da die Oktaederflächen des Alauns diejenigen mit der kleinsten Oberflächenenergie sind, weil sie am leichtesten entstehen (s. S. 262), so ist anzunehmen, daß in ihnen die Teilchen des Krystalles die dichteste Anordnung besitzen (vgl. S. 294); alsdann entsprechen jene davon sehr wenig abweichenden Ebenen einer Lagerung von sehr geringer Dichte; eine solche kommt aber auch den Alaunpartikeln in der den wachsenden Krystall umgebenden Lösung zu, und daher vermutet Miers, daß dieser Umstand die Ursache der Entstehung der Vicinalflächen bilde, indem die Substanz entsprechend ihrer wenig dichten Verteilung in der Flüssigkeit sich auch nur in Schichten von geringer Dichtigkeit auf dem Krystall niederschlagen kann.

Zwillingsbildung. Für das normale Wachstum, d. h. zur Bildung eines in allen seinen Teilen homogenen Krystalles, ist offenbar erforderlich, daß die aus der Lösung angezogenen Teilchen bei der Anlagerung zugleich in bezug auf die der zuletzt abgelagerten Schicht so orientiert werden, wie diese es in bezug auf die vorhergehenden sind. Es kann aber außer dieser übereinstimmenden Orientierung aufeinander folgender Schichten eine zweite existieren, in welcher ebenfalls ein stabiles Gleichgewicht zwischen den Kräften, mit denen benachbarte Teilchen aufeinander wirken, besteht[1]). Alsdann wird es sich bei den in der Mutterlauge natürlich in allen möglichen Stellungen vorhandenen, von dem wachsenden Krystalle angezogenen Teilchen ebensooft ereignen, daß eines derselben nahezu die der ersten, wie die der zweiten Gleichgewichtslage entsprechende Orientierung besitzt. Da das Teilchen diejenige Orientierung annehmen muß, zu deren Erreichung die geringste Arbeit, d. h. die kleinste Drehung, notwendig ist, so werden daher ebensooft Teilchen in der zweiten der beiden Orientierungen, wie in der ersten, zur Anlagerung gelangen und ihrerseits nun ebenfalls die Ursache der analogen Anlagerung weiterer Teilchen werden. So können unmittelbar nach dem Beginne der Krystallisation zwei verschieden orientierte, sonst aber gleichartige Anordnungen der Teilchen durch Anlagerung neuer fortwachsen und dadurch ein sog. Zwillingskrystall entstehen, dessen beide Teile im allgemeinen von den gleichen Flächen begrenzt werden, da ihre Krystallisationsbedingungen ja im wesentlichen gemeinsame sind. Sobald ein solcher Zwillingskrystall in die Grenzen mikroskopischer Sichtbarkeit eingetreten ist, beobachtet man, daß das Wachstum eines jeden seiner beiden, verschieden orientierten Teile ebenso stattfindet, wie das eines einfachen Krystalles, nur mit denjenigen Unterschieden, welche sich

1) Einen solchen Fall, und zwar mit gleicher Stabilität beider Gleichgewichte, lernten wir bereits kennen bei dem durch Gleitung teilweise umgelagerten Kalkspatrhomboeder S. 250.

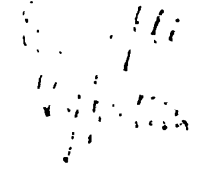


notwendig aus der Gestalt des Zwillings ergeben, z. B. aus dem Vorhandensein einspringender Winkel, wodurch der Verlauf der Diffusions- und Concentrationsströmungen geändert wird. Da durch Verschiedenheit der Zufuhr an Material aus der Mutterlauge gleichwertige Krystallflächen sehr ungleich im Wachstume vorschreiten können, so kann auch die Vergrößerung der beiden Krystalle eines Zwillings sehr ungleichmäßig erfolgen und dadurch eine große Unregelmäßigkeit der Fläche entstehen, mit welcher beide Krystalle einander berühren (der »Verwachsungsfläche«). Die Orientierung des einen Krystalles zum andern, welche man als Zwillingsstellung bezeichnet, muß aber immer eine gesetzmäßige sein, da sie durch die Bedingungen des Gleichgewichtes der inneren Kräfte der Krystalle bestimmt ist. Aus diesem Grunde muß sie in nächster Beziehung zu den Richtungen stehen, in welchen jene Kräfte ihre maximalen Wirkungen ausüben, d. h. zu den Richtungen größter Cohäsion, und dementsprechend beobachtet man stets eine nahe Beziehung zwischen den Gesetzen der Zwillingsbildung und denen der Spaltbarkeit. Ein Krystall spaltet offenbar am vollkommensten nach der Ebene größter tangentieller Cohäsion, d. h. nach derjenigen, in welcher gleichzeitig das absolute Maximum und das diesem am nächsten kommende relative Maximum der Cohäsion liegen, und es ist zu erwarten, daß diese beiden Richtungen stärkster Attraction bei der Anlagerung neuer Teilchen, wenn diese überhaupt regelmäßig erfolgt, eine besonders wichtige Rolle spielen werden, daß namentlich dann stabiles Gleichgewicht eintritt, wenn dieselben parallel orientiert sind. Im allgemeinen gibt es aber zwei Stellungen der Krystalle, bei denen sie zwei derartige Richtungen, also auch die durch beide gehende Ebene, parallel haben, nämlich: 1. diejenige Stellung des zweiten Krystalles, bei welcher auch eine dritte, zu jener Ebene geneigte Richtung der entsprechenden des ersten Krystalles parallel ist; dann gilt das gleiche offenbar auch für jede andere Richtung, und die beiden Krystalle unterscheiden sich in ihrer Stellung überhaupt nicht, — 2. diejenige Stellung des zweiten Krystalles, in welcher eine zu der gemeinsamen Ebene geneigte Richtung desselben zu der entsprechenden Richtung des ersten Krystalles so orientiert ist, daß sie entweder durch eine Drehung um 180° (»Hemitropie«) um die Normale zu der gemeinsamen Ebene oder durch Spiegelung nach dieser Ebene in sie übergeht. Im ersten Falle erhalten wir die Zwillingsstellung, wenn wir den zweiten Krystall aus der mit dem ersten parallelen Stellung um jene Normale, die Zwillingsaxe, um 180° drehen; im zweiten Falle erhalten wir die Orientierung des zweiten Krystalles, wenn wir uns den ersten nach der beiden gemeinsamen Ebene, der Zwillingsebene, gespiegelt denken, d. h. die Orientierungen der beiden Krystalle sind symmetrisch zu dieser Ebene, die Zwillingsebene ist Symmetrieebene des Zwillings. Wenn für jede Gerade im Krystalle die beiden entgegengesetzten Richtungen gleichwertig sind, so liefert die Spiegelung nach einer seiner Ebenen das gleiche Resultat, wie eine halbe Umdrehung um die Normale zu derselben Ebene, also fallen die

beiden eben definierten Zwillingsgesetze alsdann in ein einziges zusammen, und die gegenseitige Stellung der Krystalle des Zwillings kann ebenso durch die Zwillingsaxe, wie durch die Zwillingsebene definiert werden.

Derartige regelmäßige Verwachsungen zweier Krystalle sind sehr häufig, und zu ihnen gehören auch die durch Gleitung erzeugten, S. 246 f. beschriebenen Kalkspatzwillinge, deren Gleitfläche die Zwillingsebene ist; wie aus Fig. 142 zu ersehen, ist das umgelagerte rhomboederförmige Stück zu dem gleich großen, darunter befindlichen symmetrisch in bezug auf die horizontale Gleitfläche geworden; man erhält die gleiche Stellung aber auch, wenn man es aus der ursprünglichen Lage um 180° um die Normale zur Gleitfläche gedreht denkt. Im Kalkspate existieren drei gleichwertige Ebenen größter tangentieller Cohäsion (die drei Rhomboederflächen), der Zwilling hat zwei derselben gemeinsam, und die Zwillingsebene ist gegen diese beiden gleich geneigt. Derartige Zwillinge bilden sich auch beim Wachstume des Calcit, noch häufiger aber solche, bei denen die Zwillingsebene gegen alle drei Rhomboederflächen gleich geneigt ist, die Axe des Rhomboeders (s. S. 64) also die Zwillingsaxe bildet; endlich kommen auch solche vor, in denen eine der drei Rhomboederflächen die Zwillingsebene und deren Normale die Zwillingsaxe ist.

Bei dem letzterwähnten Zwillingsgesetze sind die beiden Cohäsionsmaxima, welche in der Zwillingsebene liegen und den beiden Krystallen gemeinsam sind, gleich groß. Ist dies nicht der Fall, so ist Gleichgewicht zweier Stellungen auch denkbar, wenn nur eine dieser Richtungen, diejenige des absoluten Maximums der Cohäsion, für beide Krystalle zusammenfällt; alsdann erhalten wir die Stellung des zweiten, wenn wir ihn aus der mit dem ersten parallelen Stellung um 180° gedreht denken, wobei die Zwillingsaxe entweder jene Richtung des absoluten Cohäsionsmaximums oder die in der gemeinsamen Ebene liegende Normale zu jener Richtung ist. Ob diese beiden Arten gegenseitiger Orientierung zu dem gleichen oder zu von einander und von den vorhergehenden verschiedenen Zwillingsgesetzen führen, das hängt von den Symmetrieverhältnissen der den Zwilling bildenden Krystalle ab. Besitzen dieselben eine oder mehrere Symmetrieebenen, so ist klar, daß diese keinenfalls Zwillingsebenen sein können, denn die Spiegelung eines Krystalles nach einer solchen Ebene würde einen ihm parallelen erzeugen, und ebenso kann eine Richtung nicht Zwillingsaxe sein, welche für den Einzelkrystall zweizählige Symmetrieaxe ist, d. h. um welche er, um 180° gedreht, mit sich selbst zur Deckung gelangt.



Wiederholt sich eine Zwillingsbildung derart, daß mit dem zweiten Krystalle nach dem gleichen Gesetze ein dritter, mit diesem ein vierter usf. verbunden ist, so bezeichnet man eine derartige Verwachsung als Drilling, Vierling usw. Je nach der Art des Zwillingsgesetzes können hierbei zwei Fälle eintreten: entweder kommt dem dritten Krystalle eine andere Stellung zu als dem ersten, und dann ist naturgemäß die Anzahl der miteinander gesetzmäßig verbundenen Krystalle eine beschränkte — oder der dritte Krystall ist dem ersten parallel, der mit ihm verbundene vierte dem zweiten usf., d. h. es liegt ein Vielling von aufeinander folgenden, abwechselnd entgegengesetzt gegen die gemeinsame Zwillingsebene orientierten Krystallen vor. Bei derartigen Verwachsungen tritt die an Zwillingen über-

haupt gewöhnliche Erscheinung, daß dieselben nach der Zwillingsebene besonders entwickelt sind, meist in so hohem Grade hervor, daß die Einzelkrystalle gewöhnlich die Form dünner Lamellen parallel jener Ebene besitzen. Ein aus solchen Lamellen bestehendes, sog. polysynthetisches Gebilde stellt z. B. ein Kalkspat dar, welcher, wie es S. 246 beschrieben wurde, ganz von Zwillingslamellen durchzogen ist und daher ein von den Flächen 2 und 3 (Fig. 140) und ihren Parallelen gebildetes rhombisches Prisma darstellt, dessen Endfläche aus den treppenförmigen Zwillingsstreifen 1 besteht und daher bei feiner Lamellierung wie eine einzige, zum Prisma senkrechte Ebene erscheint. Was beim Kalkspate durch Druck erzeugt wird, tritt nun sehr häufig beim Wachstume der Krystalle ein, und zwar dann, wenn dieselben eine Ebene großer tangentieller Cohäsion besitzen, in welcher zwei ungefähr zueinander senkrechte oder drei unter ungefähr gleichen Winkeln (etwa 60°) einander schneidende Richtungen von sehr nahe gleicher maximaler Cohäsion existieren. Alsdann ist nämlich offenbar das Gleichgewicht in paralleler Stellung und in derjenigen, in welcher die Richtungen fast gleicher maximaler Cohäsion vertauscht sind, von nahezu gleicher Stabilität, so daß die Bedingungen zur Zwillingsbildung nach einem dementsprechenden Gesetze besonders günstige sein müssen. In der Tat beobachten wir bei der Krystallisation hierher gehöriger Körper, wie zahlreiche Beispiele in der II. Abteilung zeigen werden, fast immer eine wiederholte Zwillingsbildung nach einem derartigen Gesetze, und meist in der Weise, daß zahlreiche, aufeinander folgende, der Ebene vollkommenster Spaltbarkeit parallele Schichten, in fortwährendem Wechsel der Orientierung übereinander liegend, ein Gebilde zusammensetzen, dessen äußere Form um so vollkommener einem einfachen Krystalle gleicht, je feiner und je zahlreicher die einzelnen Lamellen sind. Die optischen Eigenschaften solcher Gebilde sind bereits S. 149—153 eingehend behandelt und gezeigt worden, daß dieselben im Falle submikroskopischer Dimensionen der Lamellen sich wie einfache Krystalle, deren Eigenschaften von der Beschaffenheit und Orientierung der Lamellen abhängen, verhalten müssen, während sie im Falle ungleicher Verteilung und Dicke der Zwillingspartien sog. »optische Anomalien« zeigen (s. S. 153). Der nahen Übereinstimmung mehrerer Cohäsionsmaxima entspricht auch ein nahe gleiches Verhalten der betreffenden Richtungen in bezug auf das Wachstum der Krystalle, und darum zeigen derartige Substanzen, abgesehen von der Zwillingsbildung, im allgemeinen Krystallformen, welche solchen von höherer Symmetrie, d. h. mit wirklicher Gleichwertigkeit jener Richtungen, sehr nahe stehen, daher dieselben als pseudosymmetrische oder »Grenzformen« bezeichnet werden. Durch lamellare Zwillingsbildung werden nun die Abweichungen der Krystallform von der höher symmetrischen um so vollkommener ausgeglichen, je zahlreicher und feiner die Lamellen sind, und im Falle submikroskopischer Feinheit der letzteren ist nicht nur das optische Verhalten, sondern auch die Form des Gebildes die eines einfachen Krystalles von

höherer Symmetrie, als sie den Einzelkrystallen zukommen würde. Da solche Gebilde somit eine andere Form gleichsam nachahmen, nennt man sie mimetische.

Krystallstructur.

Die erste theoretische Vorstellung von der inneren Structur der Krystalle stammt von Hauy und beruht auf deren Eigenschaft, nach bestimmten Ebenen zu spalten. Nach dieser Theorie ist ein Krystall aufgebaut aus gleichgestalteten, unendlich kleinen Partikeln (»molécules intégrantes«), welche lückenlos und parallel aneinandergelegt zu denken sind; ihre Gestalt ist die eines Parallelepipeds, im allgemeinsten Falle mit ungleichen Winkeln und dreierlei Seitenflächen, P, M, T (»Pri-Mi-Tiv = Primitivform«), in dem speciellen Falle der höchsten Symmetrie die eines Parallelepipeds mit rechten Winkeln und gleichen Seiten, d. h. die eines Würfels. Aus Fig. 152 S. 265 ist ersichtlich, in welcher Weise man sich aus solchen (unendlich klein gedachten) Würfeln die Form des regulären Oktaeders aufgebaut denken kann; je nachdem man die folgenden Schichten der Parallelepipede in anderer Weise gegen die vorhergehenden zurücktretend (»Decrescenz« nannte Hauy dieses Zurücktreten) annimmt, erhält man als Begrenzungsflächen des Krystalles Ebenen von anderer Stellung, welche jedoch immer in ganz bestimmter Abhängigkeit von dem inneren Aufbau des Krystalles stehen muß.

Die Eigenschaft der Zusammendrückbarkeit der festen Körper führte später zu der immer mehr sich geltend machenden Anschauung, daß die festen Körper wie die Gase und Flüssigkeiten aus durch Zwischenräume getrennten Molekülen beständen, welche zwar in einer ihrem Wärmeinhalte entsprechenden Bewegung befindlich seien, bei denen aber diese Bewegungen um gewisse mittlere Lagen stattfinden, welche dem Gleichgewichte der zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte entsprechen und von ihnen ohne die Einwirkung äußerer Kräfte nicht dauernd verlassen werden. Abstrahiert man von diesen Bewegungen, d. h. denkt man sich die Moleküle in ihren mittleren Gleichgewichtslagen ruhend, und jedes derselben repräsentiert durch seinen Schwerpunkt, so bilden alsdann diese sämtlichen Schwerpunkte ein System analoger Punkte im Raume, welches, wenn der Körper die Eigenschaften eines homogenen Krystalles besitzen soll, bestimmten Bedingungen genügen muß:

1. Die durch die analogen Punkte repräsentierten Moleküle müssen sämtlich gleichartig sein, denn sonst könnte der Körper nicht an zwei noch so wenig voneinander entfernten Punkten gleiche Beschaffenheit zeigen.

2. Die Entfernung zweier benachbarter Punkte muß gleich groß sein an allen Stellen der durch jene hindurchgehenden Geraden und ebenso an allen Stellen jeder dazu parallelen Geraden, welche durch irgendeinen Punkt des Systems außerhalb der ersten Geraden gelegt wird (dies folgt aus der Gleichheit des Verhaltens eines homogenen Krystalles an allen Stellen und

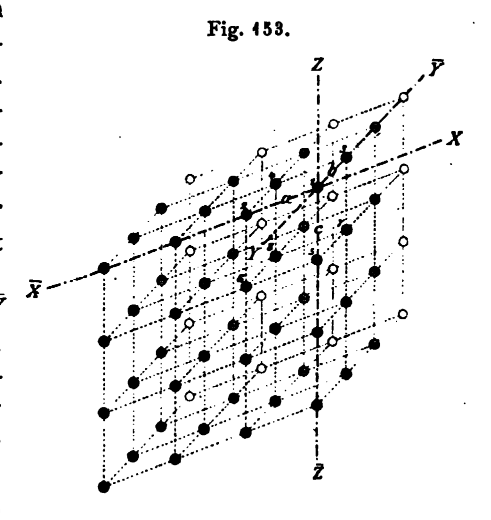
in allen parallelen Geraden). Auf Geraden, welche in anderer Richtung durch irgend zwei Punkte gehen, ist im allgemeinen die Anordnung der Punkte eine andere; jedoch kann sie auch in zwei oder mehr Richtungen übereinstimmen, wenn nämlich diese gleichwertig sind, d. h. ihnen parallel die Moleküle gleiche Kräfte aufeinander ausüben, daher auch die dem Gleichgewichte dieser Kräfte entsprechenden Entfernungen der Moleküle voneinander alsdann gleich groß sind.

3. In parallelen Ebenen, welche je durch irgend drei Punkte des Systems gelegt werden, muß die Anordnung der Punkte die gleiche sein, da sonst nicht parallele Ebenen die gleichen Eigenschaften zeigen könnten, wie es in der Tat bei einem homogenen Krystalle der Fall ist (d. h.: wenn das physikalische Verhalten eines solchen in einer Begrenzungsebene desselben untersucht wird, dann eine Schicht entfernt und die neue Begrenzungsebene der vorigen parallel und in derselben Weise hergestellt wird, so ergeben sich in jeder Richtung derselben genau die gleichen Eigenschaften, wie in der dazu parallelen Richtung vorher).

Wenn für ein System von Punkten, welches die vorstehenden Bedingungen erfüllt, von seiner äußeren Begrenzung abgesehen, dasselbe also unendlich ausgedehnt gedacht wird, so wird offenbar die Anordnung aller seiner analogen Punkte im Raume um jeden derselben die gleiche sein, wie um jeden andern. Eine solche Anordnung nennt man eine regelmäßige, und die allgemeinste Art einer regelmäßigen Anordnung von Punkten erhalten wir in folgender Weise:

Seien 1 und 2 (Fig. 153) irgend zwei benachbarte Punkte, deren Abstand gleich a, so muß nach dem Vorhergehenden auf der durch dieselben bestimmten Geraden $X\overline{X}$ an allen Stellen der Abstand zweier benachbarter Teilchen gleich a sein, d. h. die Gerade $X\overline{X}$ muß eine äquidistant mit Punkten besetzte Punktreihe sein. Sei 3 einer der dieser Punktreihe nächsten, im übrigen aber ebenfalls beliebig gewählter Punkt des Systems, dessen Abstand von 1 gleich b, so muß die Gerade $Y\overline{Y}$ äquidistant mit Punkten besetzt sein, deren benachbarte sämtlich den Abstand b haben. Da die Verteilung der Punkte um den Punkt 2 die gleiche sein muß, wie um den Punkt 1, so muß durch ersteren eine der Geraden 1—3 parallele Punktreihe 2, 4, ... hindurchgehen, welche genau so beschaffen ist, wie die Punktreihe $Y\overline{Y}$. Dasselbe gilt für jeden folgenden Punkt der Reihe $X\overline{X}$, und wenn wir uns durch alle diese Punkte die Gesamtheit der $Y\overline{Y}$ parallelen

Fig. 153.



Punktreihen denken, so erhalten wir ein ebenes Punktgitter mit parallelogrammatischen Maschen, in welchem die Punkte überall gleichartig angeordnet sind, nämlich in den Ecken von Rhomboiden mit den Seiten a und b. Sei nun 5 irgendein beliebiges Teilchen außerhalb dieses ebenen Gitters, für welches nur die Bedingung gelten soll, daß kein jener Gitterebene näheres existiert, so müssen nach der ersten der obigen Bedingungen zu ihm drei andere, 6, 7, 8, genau so liegen, wie 2, 3, 4 zu 1, d. h. es muß durch den Punkt 5, dessen Abstand von 1 gleich c sein soll, ein zur ersten paralleles und genau ebenso beschaffenes ebenes Punktgitter gehen. Da durch 1 und 5 eine neue Punktreihe bestimmt wird, deren Punkte sämtlich den Abstand c haben, und für jeden folgenden das gleiche gilt, wie für 5, so erhalten wir unendlich viele gleichartige und der Ebene 1, 2, 3, 4 parallele ebene Punktgitter. Die Gesamtheit derselben bildet ein räumliches Punktgitter, kurz Raumgitter genannt, bestehend aus den Punkten, welche in den Ecken von Parallelepipeden, deren eines von den acht Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 gebildet wird, liegen. Andere, als die den Ecken dieser Parallelepipeda entsprechenden, Punkte kann das betreffende System nicht enthalten, denn wenn in irgendeinem solchen Parallelepiped ein weiterer Punkt desselben liegen sollte, so müßte, wegen des zugrunde gelegten Principes der Homogenität, auch in dem Parallelepiped 1, ..., 8 ein solcher liegen; dann wären aber die Punkte 5, 6, 7, 8 nicht die nächsten an 1, 2, 3, 4, was a. vor. S. vorausgesetzt wurde. Ebenso würde es den gemachten Voraussetzungen widersprechen, wenn irgendwo auf einer Gitterebene oder in einer Punktreihe noch weitere vorhanden wären, weil diese notwendig einen kleineren Abstand haben müßten, als den kleinstmöglichen. Daraus folgt, daß die Gesamtheit der Punkte ein Raumgitter bilden, d. h. parallelepipedisch gruppiert sein muß.

Ein solches Fig. 153 abgebildetes und unbegrenzt zu denkendes Raumgitter stellt ein System von Punktreihen dar parallel der Geraden $X\overline{X}$, in welchem an jeder Stelle der Abstand zweier benachbarter Teilchen $= a$; ebenso aber auch ein System von Punktreihen parallel $Y\overline{Y}$, in welchem der Abstand der Teilchen $= b$, und ein weiteres System von Punktreihen $Z\overline{Z}$ mit dem constanten Abstande c. Verbinden wir irgendeinen Punkt mit irgendeinem andern, z. B. 1 mit 4, oder mit 8, oder endlich mit einem beliebigen Punkte irgendeines der andern Parallelepipeda, — und verlängern die Verbindungsgerade der beiden Punkte jenseits des einen, so treffen wir in demselben Abstande, wie die Entfernung der beiden gewählten Punkte, auf einen dritten Punkt usf. Das System kann also betrachtet werden als zusammengesetzt aus Punktreihen, parallel irgendeiner beliebigen, durch zwei der Punkte gehenden Geraden, welche sämtlich gleichartig sind, da jede derselben und an jeder Stelle die Punkte gleichartig angeordnet enthält.

Genau ebenso, wie in geradlinigen Punktreihen, können wir uns das System zerlegt denken in gleichartig mit Punkten besetzte Ebenen, z. B.



in solche parallel den beiden Geraden $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$, in denen die Punkte nach Parallelogrammen mit den Seiten ab angeordnet sind, in Ebenen parallel $X\overline{X}$ und ZZ (Parallelogramme mit den Seiten ac) oder parallel $Y\overline{Y}\,Z\overline{Z}$ (Parallelogramme bc), ferner in solche parallel $X\overline{X}$ und der Diagonale des Rhomboides bc (d. h. Ebenen, in welchen die Punkte Ecken von Parallelogrammen bilden, deren eine Seite diese Diagonale, deren andere die Seite a ist, z. B. 1278) usf., — allgemein in Ebenen, welche durch irgend drei Punkte des Systemes gehen; denn legt man durch den dritten dieser beliebig gewählten Punkte eine Gerade parallel der Verbindungslinie der beiden ersten, so muß diese in dem gleichen Abstande, wie die Entfernung des ersten vom zweiten, einen vierten Punkt treffen, d. h. es ergibt sich wieder eine Anordnung nach gleich großen Parallelogrammen, und die gleiche in allen parallelen Ebenen, welche durch irgend drei, jenen drei ersten entsprechende Punkte gehen[1]). Wir können also auch das ganze System auf unendlich viele Arten aufbauen aus ebenen Punktgittern, auf denen die Punkte in den Ecken von Parallelogrammen liegen, welche für alle parallelen Ebenen gleich, für verschieden orientierte Ebenen im allgemeinen verschieden sind.

Gehen wir endlich von irgendeinem solchen Parallelogramme aus und verbinden dessen vier Eckpunkte mit denen eines beliebigen gleichartigen Parallelogrammes der nächsten parallelen Gitterebene, so erhalten wir ein anders gestaltetes und orientiertes Parallelepiped, als das von den nächstliegenden Punkten 1 . . . 8 gebildete[2]). Wir können demnach das System auch auf verschiedene Arten in gleiche und gleich orientierte Parallelepipeda zerlegen, d. h. dasselbe erfüllt auch in der Beziehung die Bedingungen der Homogenität (S. 3), daß beliebig herausgeschnittene, gleiche und ähnliche Teile nicht unterschieden werden können.

Durch die Eigenschaft eines solchen Systemes, Gleichheit der Anordnung der Punkte in parallelen Geraden und Ebenen, dagegen Ungleichheit der Anordnung in Geraden und Ebenen verschiedener Orientierung zu zeigen, ist es namentlich die für die krystallisierten Substanzen charakteristische Eigenschaft der Spaltbarkeit nach gewissen Ebenen, von welchen dasselbe Rechenschaft gibt. Für jedes parallelepipedische Raumgitter gilt nämlich der Satz[3]): »Je dichter eine Gitterebene mit Punkten besetzt ist, desto größer ist ihr Abstand von der nächsten parallelen Gitter-

1) Es ist geeignet, bei diesen Betrachtungen die Vorstellung zu unterstützen durch ein Modell, am einfachsten aus großen Glasperlen, welche auf senkrecht befestigte Stricknadeln geschoben werden, zusammengesetzt.

2) Dieses Parallelepiped hat, durch welche acht Punkte wir es auch legen, das gleiche Volum, wie das Parallelepiped 1 . . . 8, sobald nur auf keiner seiner Seiten ein weiterer Punkt liegt, denn der gesamte Raum wird durch alle derartigen Parallelepipede in gleich viele Teile geteilt.

3) Einen besonders elementaren und anschaulichen Beweis desselben gab Sohncke in der Zeitschr. f. Krystallographie und Mineralogie 1888, **13**, 209.

ebene«. Da nun im allgemeinen vorausgesetzt werden darf, daß die Cohäsion eines Körpers um so größer ist, je kleinere Abstände seine Moleküle besitzen, so ist anzunehmen, daß beim Vorhandensein einer Ebene vollkommenster Spaltbarkeit es diejenige der größten Flächendichtigkeit ist, denn offenbar ist ihr parallel, d. h. in tangentialer Richtung, die Cohäsion am größten, senkrecht dazu am kleinsten; die Vollkommenheit der Spaltbarkeit anderer Ebenen wird abnehmen müssen in dem Maße, als die Dichtigkeit der Besetzung derselben mit Molekülen eine geringere wird.

Das vorstehend beschriebene Raumgitter bietet uns die einfachste und allgemeinste Vorstellung, welche wir uns von dem Aufbau, der »Structur«, eines Krystalles machen können. Wir wollen dasselbe ein »triklines« nennen, weil die drei Systeme von Punktreihen, $X\bar{X}$, $Y\bar{Y}$, $Z\bar{Z}$, aus denen wir es construiert haben, schiefe, und zwar voneinander verschiedene Winkel einschließen. Dieses System entspricht offenbar der Structur eines der Gruppe VII (S. 215 und 223) angehörigen Krystalles, d. h. eines solchen, in welchem, außer den parallelen, keine physikalisch gleichwertigen Richtungen existieren, denn in demselben ist auf keiner Geraden die Anordnung der Punkte die gleiche, wie auf irgendeiner von anderer Richtung, ebensowenig wie auf nicht parallelen Ebenen die gleiche Flächendichtigkeit herrscht. Gehört nun ein Krystall einer der andern Gruppen an, in welchen die Eigenschaften der Cohäsion, Elasticität usw. sich symmetrisch zu gewissen Ebenen ändern, so daß sie in je zwei zu diesen gleich und entgegengesetzt geneigten Richtungen denselben Wert besitzen, so folgt hieraus, daß je zwei solchen Richtungen parallele Punktreihen der Structur des betreffenden Krystalles auch in bezug auf das Gleichgewicht der inneren Kräfte und somit auf den Abstand der Teilchen übereinstimmen müssen. Alsdann müssen auch zwei Ebenen der Structur, welche symmetrisch in bezug auf eine jener Symmetrieebenen liegen, in gleicher Weise mit Molekülen besetzt und dadurch die Möglichkeit geboten sein, daß der Krystall zwei verschieden gestellte, aber gleich vollkommene Spaltungsebenen zeigt. Die verschiedenen Fälle, welche die Krystalle in bezug auf die fundamentale Eigenschaft der Spaltbarkeit (vgl. S. 210f.) darbieten, müssen daher auch verschiedenen Structurarten entsprechen — und es entsteht somit die Frage nach den theoretisch möglichen Arten parallelepipedischer Structur und danach, ob dieselben so beschaffen sind, daß sie in bezug auf die physikalische Gleichwertigkeit gewisser Richtungen mit den bei den Krystallen der verschiedenen Gruppen beobachteten Verhältnissen übereinstimmen. Mit dieser Frage beschäftigte sich zuerst Frankenheim in seinem Werke »Die Lehre von der Cohäsion, 1835«; die vollständige mathematische Herleitung aller möglicher Arten von Raumgittern wurde jedoch von Bravais geliefert in seinem: »Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace, Paris 1848«. Von dieser Schrift erschien eine deutsche Ausgabe von Blasius in Ostwalds Klassikern der exacten Wissenschaften Nr. 90, Leipzig 1897. Eine übersichtlichere und außerordentlich

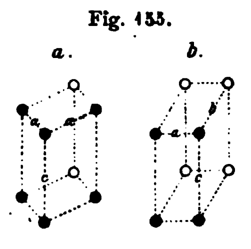
elementare Darstellung der Theorie der Raumgitter lieferte Sohncke in dem Aufsatze: »Die Gruppierung der Moleküle in den Krystallen« usw. Poggendorffs Annalen der Physik 1867, **132**, 75—106. Das Resultat dieser Untersuchungen ist, daß im ganzen nur 14 Arten parallelepipedischer Anordnungen geometrisch möglich sind, von denen sich die andern dreizehn aus dem triklinen Raumgitter als specielle Fälle ableiten lassen. Diese vierzehn Arten von Raumgittern unterscheiden sich durch ihre Symmetrie in sieben Gruppen, wie aus der folgenden Beschreibung derselben hervorgeht.

Die erste Gruppe bildet das bereits betrachtete trikline Raumgitter, welches den allgemeinsten möglichen Fall darstellt und bestimmt ist durch das in Fig. 154 dargestellte, von den 8 nächstliegenden Punkten gebildete Parallelepiped, welches das Elementarparallelepiped heißen möge. Dasselbe hat drei ungleiche Kanten a, b, c, welche die Parameter der entsprechenden Punktreihen genannt werden, und diese schneiden einander unter ungleichen schiefen Winkeln α, β, γ. Diesen sechs Größen kommen natürlich für jede hierher gehörige Substanz andere Werte zu; sie sollen die Elemente der betreffenden Substanz heißen.

Fig. 154.

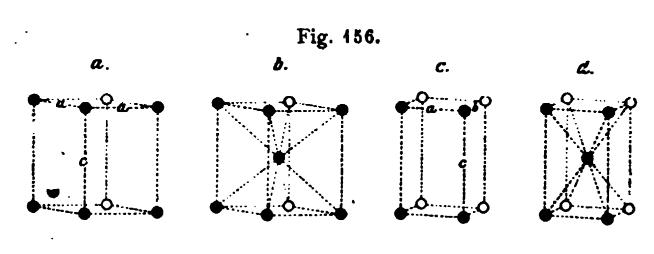
Die zweite Gruppe umfaßt zwei Arten von Raumgittern, deren Elementarparallelepipeda in Fig. 155*a* und *b* abgebildet sind; das eine stellt denjenigen speciellen Fall des allgemeinen Raumgitters dar, in welchem zwei Kanten des Elementarparallelepipeds gleich groß ($b = a$) und gleich geneigt zur dritten sind, daher die Teilchen auf den Eckpunkten eines rhombischen Prismas mit schiefer Basis liegen; das andere ist dadurch von dem triklinen verschieden, daß eine Kante (a) des Elementarparallelepipeds rechte Winkel mit den beiden andern (b und c) bildet, daher dieses die Gestalt eines geraden rhomboidischen Prismas, mit a als Axe, annimmt. Beide Parallelepipeda und somit auch die betreffenden Structurarten, besitzen offenbar eine (und nur eine) Symmetrieebene, welche in den Figuren übereinstimmend orientiert ist; in 155*a* ist es die Ebene durch die vordere und die hintere Kante des Prismas, in 155*b* die durch die Mitten der Kanten a gelegte Ebene, d. i. parallel der Basis des rhomboidischen Prismas. Je zwei gegen diese Ebene gleichgeneigte Netzebenen, z. B. die rechte und linke Prismenfläche in Fig. 155*a* oder die senkrechten, durch die Diagonalen des Rechteckes ab im zweiten Parallelepiped gehenden Ebenen, sind in gleicher Weise mit Punkten besetzt; kommt solchen Ebenen die größte Flächendichtigkeit zu, so muß daher nach beiden gleich vollkommene Spaltbarkeit existieren. Hieraus geht hervor, daß diese beiden Structurarten der Gruppe VI der optisch zweiaxigen Krystalle entsprechen, deren Cohäsionsverhältnisse (S. 214) sich nach einer Ebene symmetrisch ändern.

Fig. 155.



Die dritte Gruppe wird von denjenigen Raumgittern gebildet, welche nach drei aufeinander senkrechten Ebenen symmetrisch sind. Derartige gibt es vier, welche in Fig. 156*a*—*d* abgebildet sind: *a*) rhombisches Prisma mit gerader Basis, *b*) dasselbe mit einem Punkte im Centrum (dieser bildet mit den vier Punkten der horizontalen Basis eine rhombische Pyramide), *c*) rechtwinkeliges Parallelepiped mit drei ungleichen Kanten *abc*, *d*) dasselbe mit einem Punkte im Centrum (der letztere bildet mit den vier Punkten eines der sechs Seitenflächen die Eckpunkte einer rectangulären Pyramide).

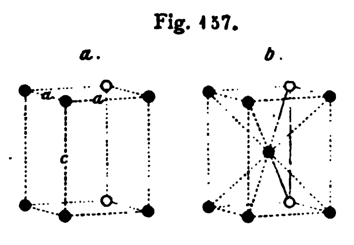
Fig. 156.



Es leuchtet ohne weiteres ein, daß diese Gruppe diejenigen optisch zweiaxigen Krystalle umfassen muß, deren bivectorielle Eigenschaften sämtlich die Symmetrie nach drei zueinander senkrechten Ebenen zeigen, und daß diese Ebenen sind: in Fig. 156*a* und *b* die Basis und die beiden senkrechten, durch die Diagonalen derselben gehenden Ebenen, in Fig. 156*c* und *d* die den drei Paaren von Seitenflächen parallelen Ebenen. Dies müssen folglich die drei optischen Hauptschnitte des Krystalles für alle Farben sein. Je nach den Winkeln und dem Längenverhältnisse der Kanten, welche den Elementarparallelepipeden zukommen, wird das aus ihnen aufgebaute Raumgitter die größte Flächendichtigkeit in einer der drei Symmetrieebenen oder in den Ebenen eines rhombischen Prismas oder endlich in denen einer rhombischen Pyramide besitzen, und so ergeben sich alle für diese Gruppe der Krystalle (V S. 214) aufgezählten Arten von Spaltbarkeit.

Die vierte Gruppe wird charakterisiert durch vier Symmetrieebenen, welche einander in einer Richtung unter gleichen Winkeln (d. i. 45°) schneiden, und eine fünfte, auf jenen senkrechte. Das Elementarparallepiped ist ein gerades quadratisches Prisma (Fig. 157*a*) oder dasselbe mit einem Punkte im Centrum, welcher mit vier Punkten eines horizontalen Quadrates die Ecken einer quadratischen Pyramide bildet. Die vier, in der Figur senkrecht gestellten, Symmetrieebenen erster Art sind parallel den Seiten und den Diagonalebenen des Prismas, die fünfte ist der horizontalen Basis parallel. Da in der letzteren paarweise, zueinander normale, gleichwertige Richtungen gelegen sind, müssen diese Krystalle optisch einaxig sein, und die Axe des Prismas muß der optischen Axe entsprechen. Die größte Flächendichtigkeit kann ein aus derartigen Parallelepipeden aufgebautes Raumgitter haben in der Basis, in den

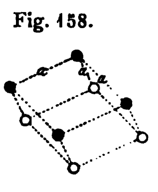
Fig. 157.



Seiten- oder in den Diagonalebenen des Prismas oder endlich in den einer quadratischen Pyramide entsprechenden Gitterebenen. Hieraus ergeben sich diejenigen Fälle der Spaltbarkeit, welche nach S. 213 die Gruppe IV der optisch einaxigen Krystalle charakterisieren.

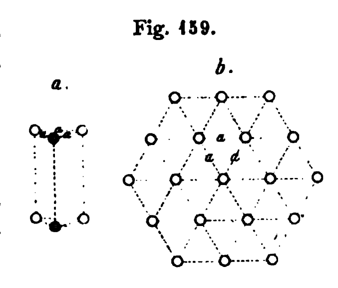
Die fünfte Gruppe enthält nur eine Art von Raumgittern, deren Elementarparallelepiped (Fig. 158) ein Rhomboeder ist; diese besitzen drei Symmetrieebenen, welche einander in einer Richtung, der Hauptaxe des Rhomboeders (in der Figur senkrecht gestellt), unter gleichen Winkeln (d. i. unter 60°) schneiden. Da hier die drei Kanten des Parallelepipeds gleichwertig sind und gleiche (bei jeder Substanz natürlich andere) Winkel miteinander bilden, so müssen derartige Krystalle ebenfalls optisch einaxig und die Hauptaxe des Rhomboeders die optische Axe sein. Die dichteste Besetzung mit Punkten kann in derartigen Raumgittern auf folgenden Ebenen statthaben: 1. auf den Rhomboederflächen selbst, alsdann findet nach diesen die Spaltbarkeit statt; oder 2. auf den zur Hauptaxe senkrechten Gitterebenen, welche die Punkte, z. B. die drei in Fig. 158, deren Abstand von dem obersten $= a$ ist, in triangulärer Anordnung enthalten (basische Spaltbarkeit); endlich 3. in den drei Symmetrieebenen oder den dazu senkrechten, den Winkel derselben halbierenden Ebenen, welche einander ebenfalls in der Hauptaxe schneiden (in beiden Fällen resultiert Spaltbarkeit nach einem hexagonalen Prisma). Dies sind die Cohäsionsverhältnisse der Gruppe III der optisch einaxigen Krystalle (S. 213).

Fig. 158.



Die sechste Gruppe enthält nur eine Art von Raumgittern, nämlich die Anordnung nach geraden, regulär dreiseitigen Prismen (Fig. 159 *a*). Ein derartiges Raumgitter, welches durch Fig. 159 *b* auf die horizontale (zur Prismenaxe normale) Ebene projiciert dargestellt wird, ist symmetrisch nach sechs, in der Axe des Prismas einander schneidenden Ebenen — nämlich den drei zu den Seitenflächen des trigonalen Prismas parallelen Ebenen (in Fig. 159 *b* durch die punktierten Linien bezeichnet) und den dreien, welche den Winkel der letzteren halbieren, also Winkel von 30° mit ihnen einschließen — endlich nach der zur Axe des Prismas senkrechten Ebene (parallel dessen gleichseitig dreieckiger Basis). Aus diesen Symmetrieverhältnissen ergibt sich ebenfalls die optische Einaxigkeit und das Zusammenfallen der optischen Axe mit der Axe des Prismas in den hierher gehörigen Krystallen. Was die Flächendichtigkeit der verschiedenen Netzebenen eines derartigen Raumgitters betrifft, so kann dieselbe am größten sein in der Basis der Prismen oder in der ersten der beiden Arten von je drei gleichwertigen Symmetrieebenen, daher vollkommene Spaltbarkeit nur nach der Basis oder nach einem hexagonalen Prisma stattfinden kann; relativ dicht mit

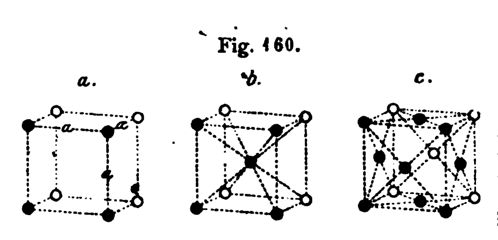
Fig. 159.



Molekülen besetzt, im Vergleiche zu andern Netzebenen, können auch diejenigen sein, welche durch je eine Seite *a* einer trigonalen Basis und den gegenüberliegenden Eckpunkt der andern Basis des Prismas gehen; solcher Ebenen existieren in dem vollständigen Raumgitter sechs, welche eine hexagonale Pyramide bilden; nach dieser Form ist also eine deutliche Spaltbarkeit ebenfalls möglich. Damit ist nachgewiesen, daß diese Structurart den Cohäsionsverhältnissen der Gruppe II (s. S. 212) der einaxigen Krystalle entspricht.

Die siebente Gruppe wird gebildet von denjenigen Raumgittern, welche den höchsten geometrisch möglichen Grad von Symmetrie besitzen; das Elementarparallelepiped ist entweder a) ein Würfel (Fig. 160*a*), oder b) ein Würfel mit einem Punkte im Centrum Fig. 160*b*), oder c) mit einem Punkte in der Mitte jeder Würfelfläche (Fig. 160*c*). Diese Raumgitter können symmetrisch halbiert werden mittels jeder Ebene, welche parallel einer Würfelfläche durch die Mitte oder durch die Seitenfläche eines Würfels gelegt wird, ebenso mittels jeder durch die parallelen Diagonalen zweier gegenüberliegender Würfelflächen gelegten, also den Winkel einer Würfelkante halbierenden Ebene des Rhombendodekaeders (Fig. 121, S. 211). Dieselben neun Symmetrieebenen besitzt nun die Dehnungsfläche (s. S. 220) der einfachbrechenden Krystalle, und die gleiche Symmetrie kommt auch den Cohäsionsverhältnissen dieser zu (vgl. S. 212); es ist nun, besonders leicht mit Hilfe von Modellen dieser Raumgitter, zu sehen, daß die dichteste Besetzung der Netzebenen mit Teilchen bei dem ersten vorhanden ist auf denjenigen des Würfels, bei dem zweiten auf denen des Rhombendodekaeders und bei dem dritten auf den Oktaederebenen, entsprechend den S. 211 unterschiedenen Arten der Spaltbarkeit. Somit gibt diese Structurtheorie vollkommene Rechenschaft davon, daß andere Spaltungsrichtungen, als die genannten, in den einfachbrechenden Krystallen nicht existieren. Da die Normalen der drei, den Würfelflächen parallelen Symmetrieebenen gleichwertig sind, müssen die drei Hauptaxen des irgendeine der bivectoriellen Eigenschaften von höherer Symmetrie repräsentierenden Ellipsoides gleich groß sein, das Ellipsoid also in eine Kugel übergehen.

Fig. 160.



Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, daß die sieben Gruppen der möglichen Raumgitter genau diejenigen Symmetrieverhältnisse zeigen, welche den sieben Gruppen der Krystalle in bezug auf die Cohäsion zukommen, daß dagegen der Unterschied, welchen die Unterabteilungen IIIa und b bzw. IVa und b der optisch einaxigen Krystalle betreffs ihrer Elasticitätsverhältnisse zeigen (vgl. S. 221—222), nicht durch eine verschiedene Krystallstructur zum Ausdrucke gebracht wird. Ebensowenig ist dies der Fall

mit den verschiedenen Unterabteilungen (Symmetrieklassen), in die nach S. 253 die einfachbrechenden Krystalle hinsichtlich ihres Verhaltens bei der Auflösung zerfallen, in bezug auf welches sie, bis auf eine Abteilung, eine geringere Symmetrie besitzen, als diejenige der Raumgitter der letzten Gruppe. Noch weniger kann durch die bisher betrachtete einfachste Theorie der Krystallstructur erklärt werden die Verschiedenheit des Verhaltens eines Krystalles nach zwei entgegengesetzten Richtungen, wie sie sich bei der Auflösung und bei der durch Temperaturänderung bewirkten elektrischen Erregung gewisser Krystalle zeigt, endlich auch nicht die Existenz zweier, in entgegengesetztem Sinne aufgebauter und daher die Polarisationsebene des Lichtes nach rechts bzw. links drehender (s. S. 152) Krystalle. Alle diese Eigenschaften schrieb daher Bravais den durch die Punkte repräsentierten Krystallmolekülen selbst zu, und diese Annahme liefert für gewisse der erwähnten Erscheinungen, besonders für diejenige der polaren Pyroelektricität (s. S. 237), auch eine ausreichende Erklärung. Anders aber ist es mit den übrigen, z. B. mit der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes. Wenn diese in allen Fällen eine Eigenschaft der Moleküle des Körpers sein soll, so müßte stets auch die Lösung desselben, wenigstens eine nicht verdünnte (in welcher also keine Dissociation aller Moleküle stattgefunden hat), eine Drehung der Polarisationsebene bewirken. Dies trifft nun aber in vielen Fällen nicht zu. Z. B. zeigt die Lösung des Natriumchlorats (s. S. 154) kein Drehungsvermögen, sondern nur die Krystalle, und die letzteren besitzen eine Form, welche bei den rechts- und linksdrehenden spiegelbildlich entgegengesetzt ist; löst man nun diejenigen der einen Art auf, so erhält man ebenfalls eine optisch inactive Lösung, und diese liefert beim Verdunsten wieder beide Arten von Krystallen. Hieraus geht unwiderleglich hervor, daß der Gegensatz der rechts- und linksdrehenden Krystalle nur in der Art ihres Aufbaues aus den Molekülen, nicht in der Natur der letzteren begründet sein kann, und daß folglich die Raumgitter die Structurverhältnisse der Krystalle nur unvollständig darstellen, vielmehr mindestens einem Teile der Krystalle eine compliciertere Structur zugeschrieben werden müsse.

In der Tat ist nun bei der Ableitung der möglichen Raumgitter aus dem Principe der »Regelmäßigkeit« von der Ausdehnung der Moleküle abgesehen und sind diese nur als »Punkte« ohne jede Richtung betrachtet worden. Berücksichtigt man jedoch, daß es sich um körperliche Gebilde von einer bestimmten Orientierung handelt, so gelten alle bisherigen Schlüsse nur unter der Voraussetzung, daß alle Moleküle einander parallel gestellt seien. Diese Voraussetzung ist aber keineswegs selbstverständlich, denn nach derselben wäre das stabile Gleichgewicht der innern Kräfte, welches die Anordnung der Moleküle bedingt, nur möglich bei paralleler Orientierung der letzteren. Die Existenz der Gleitflächen lehrt jedoch, daß die Moleküle eines Krystalles zwei verschiedene Gleichgewichtslagen von übereinstimmender Stabilität, aber ungleicher Orientierung, besitzen können

(vgl. S. 250), denn die unmittelbar benachbarten Teilchen, welche in einem teilweise umgelagerten Kalkspate zu beiden Seiten der Gleitfläche liegen, befinden sich zur Hälfte in der zweiten, durch die Schiebung erreichten Gleichgewichtslage ihrer inneren Kräfte, während sie offenbar in bezug auf die Gleitfläche symmetrisch, d. h. umgekehrt orientiert sind. Die Annahme verschiedener, aber gesetzmäßiger gegenseitiger Stellung der Moleküle findet ferner, wie S. 268 auseinandergesetzt wurde, sehr häufig statt, nämlich bei der Bildung der Zwillingskrystalle; derartige Orientierungen müssen daher ebenso einem Gleichgewichte der inneren Kräfte entsprechen, wie der Parallelismus der kleinsten Teile. Dies beweist nun, daß die Annahme, ein Krystall könne nur aus parallel orientierten Molekülen aufgebaut sein, eine unzulässige Beschränkung sei und daher zu einer unvollständigen Theorie der Krystallstructur führen müsse. Um alle denkbaren Structurformen der krystallisierten Körper zu erhalten, ist es also zunächst erforderlich, jene Beschränkung fallen zu lassen und ganz allgemein diejenigen Anordnungen gleichartiger Krystallmoleküle aufzusuchen, welche die Bedingung erfüllen, daß in bezug auf jedes derselben die Anordnung aller übrigen die gleiche ist. Die Gesamtheit ihrer Schwerpunkte stellt alsdann ein Gebilde dar, welches man ein regelmäßiges Punktsystem nennt.

Die Aufgabe, alle überhaupt möglichen regelmäßigen Punktsysteme von allseitig unendlicher Ausdehnung aufzufinden, zu denen selbstverständlich auch die Raumgitter (d. h. diejenigen speciellen Fälle, welche sich bei Annahme des Parallelismus der Krystallmoleküle ergeben) gehören, wurde von Sohncke gelöst in der Schrift: »Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur«, Leipzig 1879[1]). Wenn zu deren Ableitung auch keine höhere Mathematik erforderlich ist, so können jedoch ihres Umfanges wegen hier nur die Methode derselben und einige sich ergebende Resultate zur Aufnahme gelangen.

Was zunächst die erstere betrifft, so beruht sie auf folgender Betrachtung: Man denke sich ein regelmäßiges unendliches Punktsystem starr gemacht und aus seiner Lage herausgerückt; dann bilden die zuvor von Systempunkten besetzt gewesenen Orte des Raumes ein dem Systeme congruentes Punktsystem; dies möge, im Gegensatze zu dem herausgenommenen »beweglichen«, das »feste« heißen. In welchen Systempunkt des festen Systemes man nun einen beliebig gewählten Systempunkt des beweglichen auch legen mag, immer kann man, infolge der Gleichheit der Anordnung um jeden Punkt, es bewirken, daß beide Systeme zur Deckung gelangen. Eine solche Bewegung nun, welche das bewegliche System aus einer Lage der Deckuug mit dem festen in eine andere Lage der Deckung mit ihm überführt, soll eine »Deckbewegung« heißen. Diese Deckbewegungen können dreierlei sein:

1) Dieselbe enthält außerdem eine sehr lehrreiche Übersicht der historischen Entwickelung des Begriffes der Krystallstructur und eine eingehende Vergleichung der Ergebnisse der Theorie mit dem physikalischen Verhalten der Krystalle.



a) Parallelverschiebungen (Schiebungen, Translationen). Besitzt ein regelmäßiges Punktsystem nur Deckbewegungen dieser Art, so läßt sich sehr einfach beweisen (s. a. a. O. S. 63), daß es ein Raumgitter mit parallelepipedischen Gitterebenen ist. Ein solches gelangt nämlich stets mit sich selbst wieder zur Deckung, wenn es in der Richtung der Geraden zwischen zwei Punkten um deren Abstand verschoben wird, z. B. um die Länge des Parameters *a* in der Richtung der mit *a* bezeichneten Kante des Elementarparallelepipeds Fig. 154 (S. 277).

b) Drehungen (Rotationen) um eine Gerade, die Drehungsaxe. Solche »Drehungsaxen« besitzen nun auch die Mehrzahl der Raumgitter; da diese aber nicht die Gesamtheit aller möglicher Punktsysteme darstellen, so ist zur Auffindung der letzteren erforderlich, mittels der Sätze der Geometrie der Bewegung (Kinematik) alle verschiedenen Arten und Richtungen von »Drehungsaxen« zu finden, welche in regelmäßigen unendlichen Punktsystemen existieren können; denn aus diesen folgen die letzteren, wenn irgendein Massenpunkt willkürlich angenommen wird und aus ihm durch Ausführung der Rotation alle übrigen erzeugt werden. Betreffs der Drehungsaxen läßt sich nun beweisen, daß der kleinste, zu einer solchen zugehörige Drehungswinkel stets ein aliquoter Teil einer ganzen Umdrehung sein muß, also der $n$te Teil von 360°, wo n eine ganze Zahl ist; danach wird die Axe als eine »n-zählige« bezeichnet. Ferner kann gezeigt werden, daß die Zahl n nur 2, 3, 4 oder 6 sein kann[1]): es sind daher regelmäßige Punktsysteme mit einer zwei-, drei-, vier- oder sechszähligen Axe möglich. Die Prüfung der Regelmäßigkeit von Punktsystemen mit mehreren Axen ergibt weiter, daß dieselbe nur für gewisse Combinationen von Axen gilt; innerhalb einer solchen Combination können die Axen der einen Art die andern bedingen; so z. B. erfordert das Vorhandensein mehrerer gleicher Axen in gewissen Richtungen die Existenz noch weiterer.

c) Schraubungen, d. h. Lagenänderungen des Systemes, bei welchen alle Punkte eine gleich große und gleichsinnige Drehung um eine Gerade und außerdem eine gleiche Schiebung parallel dieser Geraden erleiden; letztere heißt die »Schraubungsaxe«. Für die Schraubungsaxen gelten die gleichen Sätze, wie für die Drehungsaxen.

Die Sohnckesche Untersuchung aller möglicher Deckbewegungen und Combinationen derselben ergab 65 Arten[2]) als die Gesamtheit aller möglicher regelmäßiger Punktsysteme, welche aus untereinander congruenten (aber nicht notwendig parallel orientierten) Molekülen aufgebaut sind. Dieselben bestehen im allgemeinen aus mehreren congruenten, ineinander

1) Für die Raumgitter, welche Drehungsaxen besitzen, wurde der Beweis hierfür schon von Bravais gegeben.

2) Von den in der citierten Schrift angegebenen 66 Arten von regelmäßigen Punktsystemen haben sich bei späterer Untersuchung zwei als übereinstimmend erwiesen.

gestellten Raumgittern; letztere erhält man aus ihnen als specielle Fälle, wenn man den willkürlich gewählten Punkt, welcher durch Ausführung der Deckbewegungen das System liefert, in bestimmter Lage zu den Axen desselben annimmt; denn, wenn man zuerst nur alle möglichen Schiebungen ausführt, so erhält man ein Raumgitter; hat man den Punkt so gewählt, daß alle Drehungen und Schraubungen dieses Raumgitter in sich selbst zurückführen, so decken sich alle das regelmäßige Punktsystem zusammensetzenden Raumgitter, und das erstere ist mit dem letzteren identisch.

Vergleicht man nun diese 65 Arten regelmäßiger Punktsysteme mit den 14 Arten der Raumgitter, so ergibt sich, daß diejenige Art der ersteren, denen nur Translationen als Deckbewegungen zukommen, die »axenlosen Punktsysteme«, identisch sind mit den *triklinen* Raumgittern (s. S. 277). Hier liefert also die Theorie nichts Neues.

Eine zweite Gruppe umfaßt zwar verschiedene Arten regelmäßiger Punktsysteme, diese besitzen aber sämtlich die Symmetrie der Raumgitter der zweiten Gruppe (S. 277), wie an zwei Beispielen gezeigt werden soll:

a) Denkt man sich das in Fig. 155*b* abgebildete Parallelepiped auf seine Symmetrieebene projiciert, so liefert es vier von den mit 1 bezeichneten Punkten in Fig. 161 (in welcher aber die Orientierung der von ihnen repräsentierten Moleküle angedeutet ist); diese Punkte stellen offenbar die Projectionen aller Moleküle dar, welche auf den vier zur Symmetrieebene senkrechten Punktreihen liegen, und das aus congruenten Rhomboiden 1, 1, 1, 1 bestehende ebene Gitter die Projection des ganzen Raumgitters. Denkt man sich nun ein zweites, damit congruentes und parallel gestelltes Raumgitter, dessen Moleküle 2, 2, 2, 2 zwar in denselben Gitterebenen liegen, aber gegenüber den Molekülen 1 *umgekehrt* orientiert sind, so besitzt das aus diesen beiden, ineinander gestellten Raumgittern bestehende regelmäßige Punktsystem unzählig viele parallele zweizählige Drehungsaxen, nämlich die in der Mitte der Verbindungslinien 1—2 errichteten Normalen (durch halbe Umdrehung um eine dieser, in der Figur durch Punkte angedeuteten Axen gelangen alle Moleküle 1 mit Molekülen 2 zur Deckung); es wird daher von *Sohncke* »zweizähliges Säulensystem« genannt.

Fig. 161.

Fig. 162.

b) Geht man von der gleichen Projection 1, 1, 1, 1 aus und denkt sich die soeben bezeichneten Normalen als zweizählige Schraubungsaxen, so daß mit einer Drehung um 180° eine Schiebung um die halbe Länge *a* (Fig. 155*b*) verbunden ist, so erhält man ein zweites congruentes Raumgitter, dessen Massenpunkte 2, 2, 2, 2 auf Ebenen liegen, welche mitten zwischen die parallelen Gitterebenen des ersten Systemes fallen; da von diesen also keine in der Zeichnungsebene liegen, sind ihre Projectionen auf letztere in Fig. 162

schraffiert bezeichnet. Das aus beiden bestehende Punktsystem heißt das »Zweipunktschraubensystem«.

Vergleicht man diese beiden, aus je zwei ineinander gestellten Raumgittern bestehenden, regelmäßigen Punktsysteme, so sieht man, daß sie die gleiche Symmetrie nach jeder der Projectionsebene parallelen Gitterebene, und nach keiner anders gestellten Ebene, besitzen. Wie die zweite Gruppe der Raumgitter, müssen sie daher der Structur derjenigen Krystalle entsprechen, deren bivectorielle Eigenschaften nach einer Ebene symmetrisch sind. Diese zeigen aber nicht alle die gleiche Symmetrie in ihrem Verhalten bei der Auflösung und dem Wachstume, sowie im elektrischen Verhalten, so daß sie in bezug auf die vectoriellen Eigenschaften noch in Unterabteilungen zerfallen, von deren Unterschieden auch die vorliegende Theorie der Krystallstructur keine Rechenschaft zu geben imstande ist. In dieser Gruppe müßten also, wie nach der einfacheren Raumgittertheorie, jene Unterschiede in der Beschaffenheit der Krystallmoleküle selbst begründet sein.

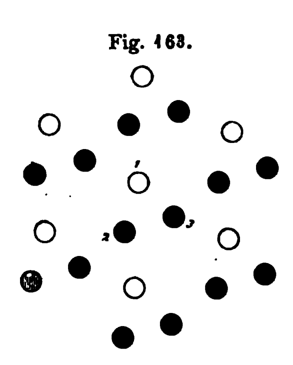
Eine dritte Gruppe bilden diejenigen regelmäßigen Punktsysteme, welche aus ineinander gestellten Raumgittern bestehen, deren jedes für sich nach drei zueinander senkrechten Ebenen symmetrisch ist, aus rhombischen Raumgittern (Fig. 156, S. 278). Den gleichen Grad von Symmetrie besitzt aber (s. V S. 254) in bezug auf Wachstum und Auflösung nur ein Teil der betreffenden Krystalle, während die übrigen in dieser Beziehung noch zwei Unterabteilungen von geringerer Symmetrie bilden. Die Symmetrieverhältnisse einer dieser beiden Abteilungen besitzen nun alle regelmäßigen Punktsysteme dieser Gruppe, wenn der zur Construction derselben gewählte Massenpunkt ganz beliebig angenommen wird; bei einer bestimmten Annahme desselben erhält man jedoch ein Punktsystem mit drei zueinander senkrechten Scharen von Symmetrieebenen, d. h. die Symmetrie der ersten Abteilung dieser Gruppe. Während also die Theorie der Raumgitter nur von einer der drei Symmetrieklassen dieser Gruppe das physikalische Verhalten vollständig zu erklären vermag, ist dies bei der Theorie der regelmäßigen Punktsysteme schon mit zweien derselben der Fall.

Noch vollständiger im Vergleiche mit den Raumgittern wird durch die Combinationen derselben zu regelmäßigen Punktsystemen den physikalischen Eigenschaften der die folgenden drei Gruppen bildenden Krystalle, der optisch einaxigen, und denen der letzten Gruppe, der einfachbrechenden Krystalle, entsprochen. Ohne auf die sich ergebenden Symmetrieklassen im einzelnen einzugehen, mag nur bemerkt werden, daß namentlich die S. 281 gestellte Forderung, von der Art des Aufbaues optisch activer Krystalle Rechenschaft zu geben, für die einaxigen Krystalle von dieser Theorie vollständig erfüllt wird, indem dieselbe regelmäßige Punktsysteme liefert, in welchen die Moleküle schraubenartig, d. h. auf Spirallinien angeordnet sind, so daß zwei spiegelbildlich gleiche Anordnungen, eine rechts und eine links gewundene, möglich sind, und damit die bereits S. 152 erwähnte Tatsache

erklärt wird, daß die rechts und die links drehenden Krystalle einer und derselben Substanz geometrische Formen zeigen, welche nur spiegelbildlich, nicht deckbar gleich sind[1]).

Als Beispiel für eine derartige Anordnung möge dasjenige regelmäßige Punktsystem erläutert werden, welches nach Sohncke am wahrscheinlichsten die Structur des Quarzes darstellt. Man denke sich zunächst drei Raumgitter, in welchen die Punkte nach dem trigonalen Prisma (Fig. 159, S. 279) angeordnet sind, so ineinander gestellt, wie es Fig. 163, auf die Basis des letzteren projiciert, darstellt: Punkt 1 liefert durch eine Drehung von 120° um die in der Mitte des Dreiecks 1 2 3 errichtete Normale, verbunden mit einer gleichzeitigen Schiebung parallel der letzteren, den Punkt 2; dieser liefert durch die gleiche Schraubung den Punkt 3; endlich gibt die Wiederholung derselben Deckbewegung einen vierten Punkt, dessen Projection aber mit 1 zusammenfällt, usf.; jene Normalen sind also dreizählige Schraubungsaxen. Das so erzeugte Punktsystem heißt das »Dreipunktschraubensystem«. Denken wir uns durch die drei Projectionen desselben 1 2 3 einen Kreis gezogen und diesen als Basis eines senkrecht zur Zeichnungsebene stehenden Cylinders, so ist ersichtlich, daß die Teilchen auf dem Mantel desselben in einer Spirale angeordnet sind, welche rechts gewunden ist (wie ein Pfropfenzieher), wenn Punkt 3 doppelt so hoch als 2 über der Ebene von 1 liegt, dagegen links, wenn 3 doppelt so tief als 2 unter der Ebene von 1 liegt. Diesen entgegengesetzten Sinn zeigen beide Spiralen, gleichviel, ob sie von oben oder von unten betrachtet werden; eine rechts- und eine linksgewundene derartige Spirale können nicht zur Deckung gebracht werden; da die eine das Spiegelbild der anderen ist, nennt man sie spiegelbildlich gleich oder enantiomorph (gegensätzlich gestaltet). Das Dreipunktschraubensystem entspricht einer Symmetrie, wie sie bei keinem Raumgitter vorkommt, wie sie sich aber bei gewissen, die Polarisationsebene des Lichtes drehenden Krystallen vorfindet, deren optische Axe polar ist (Natriumperjodat).

Fig. 163.



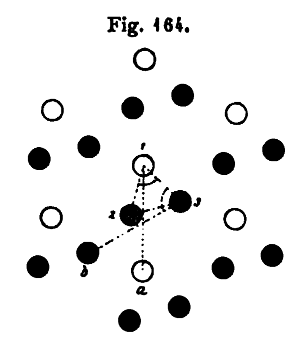
Daß in der Tat die Schraubungsaxe des Dreipunktschraubensystems polar ist, d. h. daß dieses System von den beiden entgegengesetzten Seiten der zur Zeichnungsebene senkrechten dreizähligen Schraubungsaxe aus, also in bezug auf die Zeichnungsebene von oben oder von unten gesehen, eine ganz verschiedene Beschaffenheit besitzt, wird nach Sohncke in folgender Weise bewiesen:

1) Derartige regelmäßige Punktsysteme müssen drei- oder mehrzählige Schraubungsaxen besitzen, da die Existenz zweizähliger Schraubungsaxen, wie in Fig. 162, nur eine Art von Anordnung liefert, gleichgültig, ob die Schraubung im Uhrzeigersinne (rechts) oder im entgegengesetzten Sinne (links) stattfindet.



Das Dreipunktschraubensystem Fig. 164 (= Fig. 163) besteht aus dreierlei, der Projectionsebene parallelen Netzebenen, welche durch die Schraffierung unterschieden sind. Innerhalb einer solchen Ebene liegen die Punkte in den Ecken gleichseitiger Dreiecke, deren Seite die »Maschenseite« heiße. In der Projection aller dreier Schichten bilden je drei Punkte 1 2 3 ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite die »Dreiecksseite« heißen soll. Mit α möge der kleinste Winkel bezeichnet werden, welchen eine Maschenseite mit einer Dreiecksseite in der Projection einschließt.

Fig. 164.



Man betrachte nun das System von oben, und es sei die Ebene mit den weißgelassenen Punkten die oberste, die mit der mittleren Schraffierung die nächstfolgende und die stärkstschraffierte die unterste, so daß in 1 eine Schraube mit der Reihenfolge 1 2 3 beginnt. Man suche in der obersten Ebene unter den zu 1 benachbarten sechs Punkten denjenigen (a), welcher so liegt, daß (in der Projection) der Winkel $a\,1\,2 = \alpha$ sei; dann ist (in der Projection) $\sphericalangle\, a\,1\,3 = 60^\circ - \alpha$.

Nimmt man dagegen die dritte Ebene als Anfangsebene und betrachtet, von ihr als der ersten aus, das ganze System von unten, so wird jene Schraube gebildet aus den Punkten 3 2 1. Sucht man nun in der Ausgangsebene (3) unter den zu dem Punkte 3 benachbarten sechs Punkten denjenigen (b), welcher so liegt, daß in der Projection $\sphericalangle\, b\,3\,2 = \alpha$ sei, so ist (in der Projection) $\sphericalangle\, b\,3\,1 = 60^\circ + \alpha$.

Daraus folgt, daß in dem ersten Falle die beiden Winkel $a\,1\,2$ und $a\,1\,3$ auf den entgegengesetzten Seiten einer durch die Maschenseite $a\,1$ gehenden senkrechten Ebene liegen, im zweiten Falle die genau entsprechenden Winkel $b\,3\,2$ und $b\,3\,1$ auf derselben Seite der durch die Maschenseite $b\,3$ gelegten senkrechten Ebene liegen. Das System bietet somit von oben oder unten gesehen, obgleich der Windungssinn der Schraube in beiden Fällen der gleiche bleibt, einen ganz verschiedenen Anblick dar.

Denken wir uns nun zwei solcher Systeme derart ineinander gestellt, wie es die Projection Fig. 165, S. 288, zeigt, daß die Punkte 4 5 6 des zweiten mit denen des ersten Systemes Gruppen von je zwei, in verschiedener Entfernung von der Projectionsebene, jedoch nicht weit voneinander befindlichen, Punkten bilden (eine solche Gruppe wird durch je zwei einander teilweise deckende Kreise angedeutet), so erhalten wir ein ebenfalls den Bedingungen der Regelmäßigkeit genügendes Punktsystem von anderen Symmetrieverhältnissen, das »abwechselnde Dreipunktschraubensystem«. Dieses besteht aus dreierlei, durch die Schraffierung unterschiedenen Schichten, welche parallel der Zeichnungsebene miteinander abwechseln und von denen jede folgende gegen die vorhergehende um einen Winkel von 120° gedreht ist. Genau so wie bei den Reuschschen Glimmercombinationen Fig. 105 (S. 151) entspricht diese Anordnung einer rechtsgewundenen Wendeltreppe, wenn die Punktgruppe 6 3 doppelt so hoch, als die Gruppe 5 2, über der Schicht liegt, zu welcher die Gruppe 4 1 gehört, — einer linksgewundenen, wenn die Gruppe 6 3 ebensoviel unter der letzteren Schicht liegt. Jede dieser Schichten besitzt eine Symmetrieebene, welche durch je zwei zu einer Gruppe gehörige Punkte geht und zur Projectionsebene senkrecht ist, entspricht also einem Punktsysteme der zweiten Gruppe (S. 284). Da nun der Glimmer der entsprechenden Gruppe von Krystallen angehört, so repräsentiert das abwechselnde

Dreipunktschraubensystem in jeder Beziehung den Aufbau einer Reuschschen Glimmercombination, in welcher die einzelnen Lamellen so dünn sind, daß sie einer der oben beschriebenen Molekularschichten entsprechen. Dem Verhalten einer solchen Combination müssen sich die aus Glimmerlamellen von endlicher Dicke zusammengesetzten Pakete um so mehr nähern, je dünner die einzelnen Lamellen sind. Die von Sohncke nachgewiesene Tatsache, daß eine Reuschsche Glimmercombination um so vollkommener die optischen Eigenschaften eines Quarzkrystalles zeigt, je dünner die sie zusammensetzenden Lamellen sind, führte hiernach notwendig zu dem Schlusse, daß die wahrscheinlichste Structur des Quarzes durch das abwechselnde Dreipunktschraubensystem gegeben sei[1]). Obgleich die einzelnen, die Glimmerlamellen repräsentierenden, Schichten desselben eine Symmetrieebene besitzen, kommt dem ganzen Systeme offenbar eine solche nicht zu; dagegen zeigt es verschiedene Axen, nämlich außer der zur Zeichnungsebene senkrechten dreizähligen Schraubungsaxe noch drei in der Projectionsebene liegende, untereinander gleichwertige, zweizählige Drehungsaxen; es sind dies die durch punktierte Linien angedeuteten Geraden von der Mitte des durch die sechs Projectionen 1—6 gehenden Kreises nach den Mitten der Verbindungslinien zwischen 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6. Diese drei Geraden haben, wie man sieht, einen bestimmten, durch Pfeile angedeuteten, Richtungssinn, es müssen also polare Axen der Structur sein; die beiden entgegengesetzten Seiten dieser Axen wären gleichwertig, wenn die Symmetrieebenen der einzelnen Schichten, z. B. die durch die strichpunktierte Linie in Fig. 165 gehende, zu einer derartigen Axe senkrechte Ebene, auch für das ganze System Symmetrieebenen wären; denkt man sich aber zu allen Punkten dieses Systemes die in bezug auf die genannte Ebene symmetrischen, so erhält man das in Fig. 166 dargestellte abwechselnde Dreipunktschraubensystem, dessen Vergleichung mit dem vorigen zeigt, daß es aus entgegengesetzt gewundenen Dreipunktschrauben zusammengesetzt ist, also in keiner Stellung mit dem ersten zur Deckung gebracht werden kann. Diese somit jedem der beiden Punktsysteme für

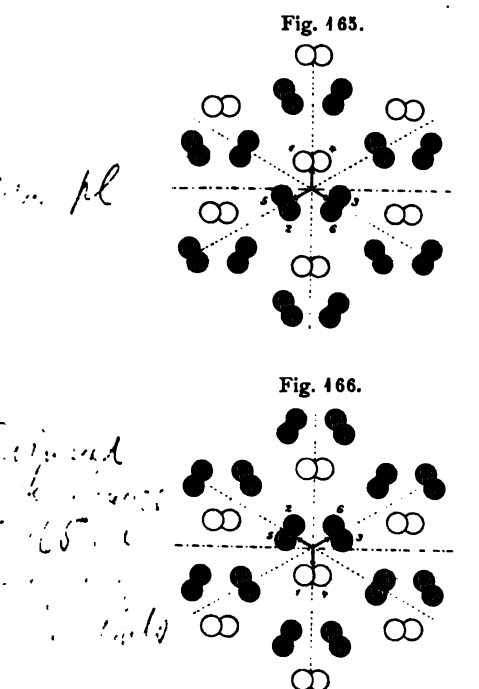

Fig. 165.

Fig. 166.

1) Dann müßten die einzelnen Schichten dieses Aufbaues optisch zweiaxig sein. Nun kennt man in der Tat den Quarz in Form krystallinischer Aggregate (Chalcedon) von außerordentlich kleinen, optisch zweiaxigen Fäserchen, welche man »Quarzin« genannt hat, und Wallerant beobachtete sogar eine regelmäßige Anordnung dieser Fäserchen in drei, um 120° gedrehten Stellungen, wie sie dem oben angenommenen Aufbau entsprechen würden.

sich, aber in entgegengesetztem Sinne, zukommende Polarität nach jeder der drei in der Projectionsebene liegenden Axen zeigt nun in der Tat auch der Quarz, wie besonders aus den Erscheinungen der Pyroelektricität hervorgeht (s. Taf. III, Fig. 6 und 7), während er parallel seiner optischen Axe keine Polarität zeigt; letzterer entspricht nun die dreizählige Schraubungsaxe des Systemes, und diese ist in der Tat nicht polar, da die Drehung von 180° um eine der drei zweizähligen Drehungsaxen das System mit sich selbst zur Deckung bringt, also die dadurch vertauschte obere und untere Seite der dreizähligen Axe gleichwertig sein müssen. Die beiden soeben beschriebenen Arten von regelmäßigen Punktsystemen, welche sich von den trigonal-prismatischen Raumgittern Fig. 159 S. 279 ableiten, zeigen, wie verschiedene Symmetriearten innerhalb der in Rede stehenden Gruppe möglich sind und durch die Sohnckesche Theorie erklärt werden können.

Das gleiche ist der Fall für die letzte Gruppe, die der einfachbrechenden Krystalle, deren Structur, gemäß ihrem Verhalten in bezug auf Cohäsion und Elasticität (s. S. 210 bzw. 220), wie auf alle übrigen physikalischen Eigenschaften, die gleiche sein muß in den drei aufeinander senkrechten Richtungen der Normalen zu den Würfelflächen. Dieser Bedingung entsprechen nun in der Gesamtheit der 65 möglichen regelmäßigen Punktsysteme dreizehn Arten, welche aus mehreren (bis zu 24), ineinander gestellten kubischen Raumgittern (Fig. 160*a*) zusammengesetzt sind und durch besondere Annahmen über die Lage des zu ihrer Construction gewählten Punktes in die drei S. 280 aufgezählten Raumgitter übergehen. Während aber den letzteren neun Symmetrieebenen (parallel den drei Würfel- und den sechs Dodekaederebenen) zukommen, gilt das gleiche nur von vier unter jenen dreizehn Arten regelmäßiger Punktsysteme und auch bei diesen nur unter bestimmten Annahmen für die Lage des Constructionspunktes. Anderenfalls ist das System nur nach den Würfel- oder nur nach den Dodekaederflächen oder auch nach keiner von beiden Arten von Ebenen symmetrisch, — und derartig geringere Grade der Symmetrie sind für alle übrigen hierher gehörigen regelmäßigen Punktsysteme charakteristisch, wie auch der zu ihrer Construction benutzte Punkt gewählt werden möge. Gemeinsam für alle Punktsysteme dieser Gruppe ist die Existenz von mehreren gleichwertigen Drehungs- oder Schraubungsaxen, und zwar sind stets die Normalen der Würfelflächen die Richtungen dreier gleichwertiger, zwei- oder vierzähliger Axen, die Normalen zu den Oktaederflächen die Richtungen von vier untereinander gleichwertigen dreizähligen Axen, welche letztere auch polar sein können. Die verschiedenen, hierdurch sich ergebenden Symmetrieverhältnisse entsprechen nun genau denjenigen der fünf Klassen, in welche nach S. 253 die einfachbrechenden Krystalle hinsichtlich des Wachstumes und der Auflösung, sowie in bezug auf die Polarität jener Axen und die daraus folgenden pyroelektrischen Erscheinungen, zerfallen. Die Theorie der regelmäßigen Punktsysteme vermag also die sämtlichen Unter-

schiede in der Symmetrie der einfachbrechenden Krystalle lediglich aus der Structur derselben zu erklären. Diejenigen unter den hierher gehörigen regelmäßigen Punktsystemen, welche aus ineinander gesteckten gleichartigen, rechten oder linken, Schraubensystemen bestehen, deren Axen die drei Normalen der Würfelflächen sind, geben auch Rechenschaft von der Möglichkeit der Existenz von zweierlei Krystallen der gleichen Substanz, deren Formen »enantiomorph«, d. h. nur spiegelbildlich, nicht deckbar gleich sind. Unter diesen Substanzen gibt es nun solche, wie z. B. Natriumchlorat, deren Krystalle optisch activ sind. Hier läßt sich jedoch die Drehung der Polarisationsebene nach der Theorie von Mallard (s. S. 153) nicht in derselben Weise aus der Structur erklären, wie bei den optisch einaxigen Krystallen (S. 286—288). Beckenkamp hat deshalb für die einfach brechenden und ebenso für die einaxigen Krystalle mit Drehungsvermögen die statische Theorie derselben durch eine kinetische ersetzt, welche sich auf Faradays Beobachtung der elektromagnetischen Drehung der Lichtschwingungen stützt. Die Atome (oder statt deren die »Elektronen«) werden hierbei als in schwingender Bewegung befindliche Bausteine in das Raumgitter eingeführt.

Die Sohnckesche Theorie der regelmäßigen Punktsysteme vermag also nach dem Vorhergehenden im wesentlichen die große Mehrzahl der Unterschiede, welche die Krystalle in bezug auf die Gesamtheit ihrer physikalischen Eigenschaften zeigen, aus ihrer Structur zu erklären, aber es bleiben doch unter den 32 Klassen, in welche nach S. 255 die Gesamtheit der Krystalle zerfällt, mehrere übrig, deren Symmetrieverhältnisse durch die Theorie der regelmäßigen Punktsysteme eine Erklärung nicht finden. Die Lösung auch dieser Aufgabe gelang Sohncke auf Grund folgender Überlegung:

Das allen Betrachtungen über die Structur der Krystalle zugrunde gelegte und direct aus den physikalischen Eigenschaften derselben sich ergebende Princip der Regelmäßigkeit der Anordnung läßt sich auch so ausdrücken: »In einem homogenen Krystalle gibt es unendlich viele Punkte, um deren jeden herum die Massenverteilung nach parallelen Richtungen hin die gleiche ist, wie um jeden anderen; der Abstand zwischen zwei nächsten derartigen, sogenannten homologen Punkten ist unmeßbar klein«. Die Gesamtheit homologer Punkte in einem Krystalle muß nach den früheren Auseinandersetzungen ein parallelepipedisches Punktnetz (Raumgitter) bilden, und die Deckbewegungen eines solchen sind drei, nicht in einer Ebene liegende, Schiebungen. Da nun die 65 regelmäßigen Punktsysteme aus Raumgittern zusammengesetzt sind, so genügen sie dem oben ausgesprochenen Principe, sie stellen aber noch nicht die allgemeinste, aus demselben zu ziehende Folgerung dar. Denn wenn man sich zwei oder mehr solcher regelmäßiger Punktsysteme, welche gleiche Deckschiebungen besitzen, aber aus verschiedenartigen Punkten bestehen, derart ineinander gestellt denkt, daß ihre Deckschiebungen parallel laufen, so erhält man ein

allgemeineres Punktsystem, welches offenbar die in dem oben ausgesprochenen Satze gestellten Bedingungen ebenfalls erfüllt. Dasselbe wäre der Fall, wenn man z. B. aus dem Raumgitter 1 Fig. 161 (S. 284) zwei verschiedene »zweizählige Säulensysteme« mit ungleichem Abstande 1—2 ableitete und diese mit coincidierenden Drehungsaxen, sonst aber beliebig, ineinander stellte. Dies ist in Fig. 167 in der gleichen Projection dargestellt; das eine System ist mit demjenigen in Fig. 161 identisch, das andere (durch kleinere schwarze Scheibchen dargestellt) ist in beliebigem Abstande darüber zu denken, während die durch Punkte angedeuteten zweizähligen Axen beider zusammenfallen. Wie ersichtlich, würden diese alsdann polar sein, d. h. das combinierte System würde zwar noch die zweizähligen Axen, aber nicht mehr die Ebene der Symmetrie (parallel der Projectionsebene) besitzen, welche den Einzelsystemen zukommen. Ein solches Doppelsystem würde nun die Symmetrieverhältnisse einer der Unterabteilungen der zweiten Gruppe der Krystalle zeigen, so daß also deren Unterschied von den übrigen auf diesem Wege erklärt werden könnte, was, wie wir S. 285 sahen, auf Grund der Theorie der regelmäßigen Punktsysteme nicht möglich war. Bei dieser Verallgemeinerung sind demnach die beiden Teilsysteme nicht congruent, und daher ist ein solches Gebilde mechanisch nur dann wahrscheinlich, wenn auch die Massenpunkte beider ungleichartige sind, in welchem Falle die Krystalle aus einer bestimmten Anzahl ineinander gestellter, congruenter Raumgitter bestehen würden, von denen aber die zu einem Punktsysteme gehörigen von Punkten anderer Art gebildet werden, als die zum anderen Systeme gehörigen. Ein derartiges combiniertes System[1]) erhält man, wenn man verfährt, wie bei der Construction eines einzelnen regelmäßigen Punktsystemes (vgl. S. 282), aber statt eines Constructionspunktes deren zwei oder mehr, welche im allgemeinsten Falle verschiedenartigen Molekülen entsprechen, annimmt.

Fig. 167.

Auf Grund der vorstehenden Betrachtungen formulierte Sohncke die erweiterte Theorie der Krystallstructur in der folgenden Definition (Zeitschr. f. Kryst. 1888, **14**, 433):

»Ein Krystall (unendlich ausgedehnt gedacht) besteht aus einer endlichen Anzahl (1, 2, 3, ... n) ineinander gestellter regelmäßiger unendlicher Punktsysteme, welche sämtlich gleich große und gleich gerichtete Deckschiebungen besitzen. Diese ineinander stehenden Teilsysteme sind im allgemeinen nicht congruent, auch sind die Bausteine des einen im allgemeinen andere als die des anderen. Doch ist Congruenz der Bausteine der verschiedenen Teilsysteme nicht ausgeschlossen.«

---

1) Ein solches System ist ein heterogenes, da aber in unmeßbar kleinen Abständen sich Gleichartiges periodisch wiederholt, müssen die physikalischen Eigenschaften eines derartigen Gebildes diejenigen eines homogenen Körpers sein.

Da nun jedes der 65 regelmäßigen Punktsysteme selbst aus einer endlichen Anzahl parallel ineinander gestellter congruenter Raumgitter besteht, so gilt das gleiche auch für das zusammengesetzte System, wenn man nur die Schwerpunkte der Krystallbausteine in Betracht zieht. Faßt man die Bausteine selbst ins Auge, so sind diese nur für je ein Raumgitter notwendig parallel und congruent, während sie für ein (aus mehreren Raumgittern zusammengesetztes) regelmäßiges Punktsystem, welches jetzt als Teilsystem auftritt, notwendig congruent sind.

Diese Theorie erklärt nun sämtliche an den Krystallen vorkommenden und denkbaren Symmetrieverhältnisse, d. h. die Existenz der S. 255 angeführten 32 Klassen, also auch die Möglichkeit solcher, die durch die Theorie der regelmäßigen Punktsysteme nicht erklärt werden können, z. B. diejenigen mit einer polaren zweizähligen Axe, wie es auf S. 291 nachgewiesen wurde. Es genügt hierzu sogar die Annahme zweier ineinander gestellter regelmäßiger Punktsysteme, deren Bausteine sich nur dadurch voneinander unterscheiden, daß die des einen spiegelbildlich gleich (enantiomorph) denen des anderen sind; dies haben von Fedorow und Schönfließ unabhängig voneinander nachgewiesen und auf rein geometrischem Wege gezeigt, daß es alsdann 230 Arten regelmäßiger unendlicher Punkthaufen gibt, unter denen alle Arten der Symmetrie vorkommen, welche den erwähnten 32 Klassen entsprechen, aber keine einzige von diesen verschiedene; die hierbei gemachte Annahme stellt offenbar von der obigen allgemeinen Theorie einen speciellen Fall dar, welcher jedoch nur mathematisches Interesse darbietet, da die Anwendung desselben auf enantiomorphe, optisch active Substanzen keine Übereinstimmung mit den tatsächlich an solchen Krystallen bestehenden Verhältnissen zeigt. Übrigens ist der Nachweis, daß an den Krystallen keine anderen Symmetriearten möglich sind, als diejenigen jener 32 Klassen, auch auf anderem Wege erbracht worden von Barlow, ausgehend von dem Principe dichtester Lagerung der als Kugeln gedachten Wirkungssphären der Atome; dasselbe Princip wandte auch Lord Kelvin (W. Thomson) in seinen Betrachtungen über die molekulare Constitution der Materie an; der sich daraus ergebende allgemeine Begriff einer »homogenen Structur« gestattet die theoretische Ableitung derjenigen Richtungen, welche in bezug auf eine solche Structur gleich angeordnet sind, und ferner ergibt sich, daß die Punkte, von denen aus das Bild der Structur nicht nur das gleiche ist, sondern auch die gleiche Orientierung besitzt, miteinander ein Raumgitter bilden, während zwischen ihnen Punkte von anderer Beschaffenheit liegen können. Somit haben auch diese Betrachtungen zu denselben Schlußfolgerungen geführt, wie die oben angestellten Überlegungen, welche, wie jene, an keine bestimmte Annahme über die Natur der kleinsten Teile der Structur gebunden sind. Sohncke hat allerdings bei der Entwickelung seiner darauf gegründeten erweiterten Theorie der Krystallstructur unter den »Krystallbausteinen« zunächst die »Moleküle« verstanden und gezeigt,

wie man eine sogenannte »Molekularverbindung«, z. B. das krystallisierte Hydrat eines Salzes, als bestehend aus ineinander gestellten Punktsystemen der Moleküle des letzteren und des Krystallwassers betrachten könne, — er hat aber schon hierbei darauf aufmerksam gemacht, daß es nicht nötig sei, die Wassermoleküle mit den Salzmolekülen zu engeren Gruppen, Molekülen des Hydrates, zusammenzufassen. In der Tat ist eine solche Zusammenfassung auch eine willkürliche, genau ebenso, wie bei den regelmäßigen Punktsystemen selbst die Art, wie man eine Anzahl der congruenten Punkte eines solchen zu einer engeren Gruppe zusammenfaßt, ebenfalls eine willkürliche ist.

Die frühere Theorie Sohnckes »setzte in einem Krystalle lauter congruente Bausteine voraus, bestehend entweder aus je einer chemischen Molekel oder aus einem Vielfachen von solchen; doch waren nur die Schwerpunkte der Bausteine in Betracht gezogen, und diese bildeten ein solches System, daß um jeden Punkt die Anordnung der übrigen dieselbe war, wie um jeden anderen. — Faßt man aber in einem solchen Systeme die einzelnen Atome ins Auge, welche die Bausteine zusammensetzen, so ist keineswegs um jedes Atom die Anordnung aller anderen Atome des ganzen Systemes dieselbe, wie um jedes andere. Wohl aber bilden die analogen Atome aller Krystallbausteine für sich ein regelmäßiges unendliches Punktsystem, charakterisiert durch dieselben Deckbewegungen wie das System der Schwerpunkte der Bausteine, ohne daß doch beide Systeme congruent zu sein brauchen. Dies ist nun völlig dasselbe Verhalten, wie es die Teilsysteme eines combinierten Systems der verallgemeinerten Theorie zeigen. Der Unterschied ist nur der, daß die Atome, zu einem Krystallbausteine zusammentretend, eine engere Gruppe bilden, während dies von den verschiedenartigen Bausteinen der ineinander gestellten Teilsysteme nicht vorausgesetzt zu werden braucht, obwohl es natürlich auch nicht ausgeschlossen ist. Sobald man also in der früheren Theorie die ein Krystallelement zusammensetzenden Atome als selbständige Bestandteile des Systemes auffaßt und nicht mehr als Unterbestandteile eines Krystallbausteines, wenn man sie z. B., um dieser Selbständigkeit deutlichen Ausdruck zu geben, weiter auseinander rücken läßt, so ist die frühere Theorie bereits in die verallgemeinerte übergegangen.«

Auf diese Betrachtungen Sohnckes gestützt, können wir nun die allgemeine Theorie der Krystallstructur in der folgenden Definition zusammenfassen:

Ein Krystall (unendlich ausgedehnt gedacht) besteht aus n (1, 2, 3, ...) ineinander gestellten regelmäßigen Punktsystemen, deren jedes von gleichartigen Atomen gebildet wird; jedes dieser Punktsysteme besteht seinerseits wieder aus einer Anzahl ineinander gestellter Raumgitter, deren jedes von parallel gestellten gleichartigen Atomen gebildet wird. Sämtliche Raumgitter des combinierten Systemes sind geometrisch identisch, d. h. ihr Elementarparallelepiped (s. S. 277) ist das gleiche.

In dieser Form ist die Theorie nun in der Tat geeignet, alle an den Krystallen beobachteten Verhältnisse zu erklären, ohne daß es nötig wäre, außer den Kräften, mit denen die Atome aufeinander wirken, noch besondere molekulare Kräfte anzunehmen.

Besteht ein Krystall nur aus einer Art von Atomen, handelt es sich also um ein krystallisiertes Element, so bedarf es nur der Annahme eines regelmäßigen Punktsystemes, dessen Beschaffenheit von den Kräften abhängt, welche die gleichartigen Atome aufeinander ausüben, — handelt es sich aber um eine chemische Verbindung, so müssen ebenso viele regelmäßige Punktsysteme in dem combinierten Systeme enthalten sein, als das chemische Molekül der Verbindung Elemente enthält, und die Anordnung des combinierten Systemes muß dem Gleichgewichte der Kräfte entsprechen, mit welchen gleichartige und ungleichartige Atome aufeinander wirken.

Beim Auflösen, Schmelzen oder Verdampfen des Krystalles zerfällt das combinierte System in getrennte und für sich bewegliche Moleküle, daher die Ineinanderstellung der aus verschiedenartigen Atomen bestehenden Punktsysteme so angenommen werden muß, wie sie der Anordnung der Atome im chemischen Moleküle entspricht. Der Unterschied des krystallisierten und des amorphen Zustandes besteht somit darin, daß die Moleküle nur im letzteren eine voneinander unabhängige Existenz besitzen, in den Krystallen dagegen der Begriff des »Moleküls« eine ganz andere Bedeutung hat, nämlich die einer Zusammenfassung von Atomen, welche verschiedenen, ineinandergestellten Punktsystemen angehören, zu einer Gruppe. Eine solche Zusammenfassung kann unter Umständen eine willkürliche sein, denn wenn z. B. die Structur des krystallisierten Chlornatriums (um die denkbar einfachste Annahme zu machen) nur aus einem kubischen Raumgitter von Natriumatomen und einem ebensolchen von Chloratomen, welche die Mittelpunkte der von den Natriumatomen gebildeten Würfel einnehmen, bestehen würde, so wäre es offenbar ganz willkürlich, in welcher Weise man ein Chloratom mit irgendeinem der nächsten Natriumatome zu einem »Molekül $NaCl$« vereinigt denkt, d. h. ein solches Molekül würde erst dann zu existieren beginnen, wenn es durch den Übergang in den amorphen Zustand von den übrigen Atomen getrennt worden ist. Dieselbe Betrachtung gilt natürlich auch, wenn statt zweier einfacher Raumgitter zwei regelmäßige Punktsysteme, aus Chlor- und Natriumatomen bestehend, combiniert gedacht werden.

Nach S. 262—263 entstehen bei der Bildung eines Krystalles am leichtesten diejenigen Flächen, deren Oberflächenenergie am kleinsten ist. Dies müssen die mit den Teilchen des Körpers am dichtesten besetzten Ebenen sein, weil für die inneren Kräfte, welche die Oberfläche noch weiter zu verkleinern streben, die geringste Arbeit zu leisten übrigbleibt. Ferner sind nach S. 276 die Ebenen der Spaltbarkeit diejenigen, in welchen große tangentiale Cohäsion, verbunden mit großem Abstande benachbarter, gleichartig besetzter Ebenen, vorhanden ist. Bei den einfachen Raumgittern fallen nun

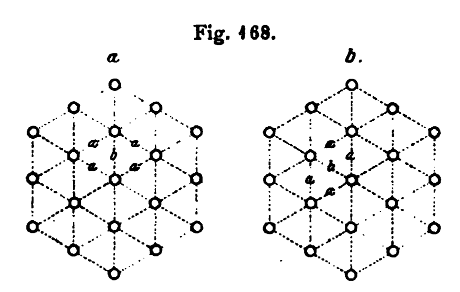
die beiden letzteren Bedingungen zusammen (s. S. 275), daher die Ebenen vollkommenster Spaltbarkeit bei der Krystallisation eines Körpers, dessen Krystallstructur diejenige eines einfachen Raumgitters wäre, sich stets auch am leichtesten bilden müßten. Daß dies nicht immer der Fall ist, erklärt sich daraus, daß bei einem aus mehreren Raumgittern zusammengesetzten regelmäßigen Punktsysteme nicht mehr beide obigen Bedingungen notwendig gleichzeitig erfüllt sind, wie Sohncke nachgewiesen hat. In einem solchen Systeme sind vielmehr innerhalb einer Schar paralleler, mit Punkten parallelogrammatisch besetzter Ebenen (Sohnckes »Netzebenen«) im allgemeinen nicht alle einzelnen Ebenen gleich dicht mit Punkten besetzt, und sie folgen im allgemeinen nicht in gleichem Abstande aufeinander, sondern Flächendichtigkeit und Abstände paralleler Netzebenen wechseln periodisch (natürlich in unmeßbar kleinen Abständen). Alsdann bilden zwei oder mehrere solcher Netzebenen Schichten von dicht gedrängten Punkten, d. h. mit großer tangentialer Cohäsion, und diese Schichten folgen in größeren Abständen aufeinander, welche aber nicht notwendig die größten sein müssen für Schichten größter Dichtigkeit. Die gleiche Betrachtung muß offenbar ebenso für die nach der erweiterten Theorie combinierten Systeme gelten, nur daß hier die Schichten aus Punkten der verschiedenen Teilsysteme bestehen.

Wie alsdann an Stelle der Gitterebenen der einfachen Raumgitter Schichten treten, welche sich mit gleicher Beschaffenheit periodisch wiederholen, so treten an Stelle der einzelnen Punktreihen in den combinierten Systemen der allgemeinen Theorie unmeßbar dünne Bündel paralleler Punktreihen, welche aus verschiedenartigen Atomen bestehen, und deren gegenseitige Entfernung ungleich sein kann, welche sich aber in gewissen Abständen periodisch wiederholen; da diese aber natürlich noch immer unmeßbar klein sind, so muß der Krystall sich notwendig in allen parallelen Richtungen physikalisch gleich verhalten. Diejenige Richtung, in welcher das dem combinierten Systeme zugrunde liegende Raumgitter die größte Dichtigkeit besitzt, muß auch im combinierten Systeme die Richtung größter Cohäsion sein. Besitzt das Raumgitter zwei oder mehr gleichwertige Richtungen, so sind auch die ihnen parallelen Bündel von Punktreihen im combinierten Systeme notwendig gleichartig, d. h. der Krystall verhält sich dann nach ihnen übereinstimmend in bezug auf alle seine Eigenschaften. Sind mehrere Richtungen des Raumgitters nahe äquidistant mit Punkten besetzt, so muß auch das combinierte System nach diesen Richtungen nahe gleich bebeschaffen sein, und falls diese Richtungen solche maximaler Cohäsion sind, muß dann der Fall eintreten, welcher nach S. 269 besonders günstige Bedingungen für die Bildung von Zwillings- bzw. Drillingskrystallen darbietet.

Denken wir uns z. B. einen Körper, dessen Krystallstructur einem Raumgitter entspricht, in welchem die Punkte nach einem rhombischen Prisma mit gerader Basis (Fig. 156*a* S. 278) angeordnet sind, und sei der Winkel, unter welchem die Prismenflächen einander schneiden, sehr

nahe 60°. Alsdann ist die Projection des Raumgitters auf die Basis, Fig. 168*a*, fast identisch mit der des trigonal-prismatischen Raumgitters Fig. 159*b* (hier anders gestellt), nur sind die mit *b* bezeichneten Richtungen nicht mehr gleichwertig mit den beiden mit *a* bezeichneten, welche letztere den Flächen des rhombischen Prismas entsprechen; das Raumgitter ist nur nach den beiden durch die kurze (*b*) und die lange Diagonale der Rhomben *aaaa* gehenden, senkrechten Ebenen und nach der Basis symmetrisch und entspricht also nicht, wie Fig. 159*b*, der Structur eines optisch einaxigen, sondern der eines optisch zweiaxigen Krystalles der dritten Gruppe (vgl. S. 278). Da die durch *a* gehenden, zur Basis senkrechten Prismenflächen nicht mehr Symmetrieebenen des Systemes sind, so erhalten wir, wenn wir dasselbe um eine der Basis parallele, senkrecht zu einer Seite *a* durch einen beliebigen Punkt (z. B. den mittelsten der Fig. 168*a*) gelegte Axe um 180° drehen, ein System Fig. 168*b*, in welchem zwar die Basis und dasjenige Paar paralleler Prismenflächen, zu welchem die Drehungsaxe senkrecht steht, die gleiche Orientierung besitzen, wie im ersten, dagegen das andere Paar von Prismenflächen nahezu die Lage der durch *b* gehenden senkrechten Gitterebene des ersten Systemes, und umgekehrt, angenommen hat. Da aber beide Raumgitter sehr nahe übereinstimmen (wegen der Ähnlichkeit des Winkels *ab* mit 60°), so ist zu erwarten, daß eine Verbindung beider während der Krystallisation fast ebenso leicht zum Gleichgewichte der inneren Kräfte führen werde, wie wenn beide gleiche Orientierung besäßen, und so ein Gebilde entstehen könne, in welchem zwei verschieden orientierte Krystalle derselben Substanz vereinigt sind. In der Tat zeigt sich nun in allen Fällen, in welchen die Formen der Krystalle auf eine Structur der angegebenen Art hinweisen, d. h. bei allen pseudosymmetrischen (s. S. 271) Krystallen mit hexagonaler Pseudosymmetrie, das häufige Auftreten einer Zwillingsbildung, und zwar meist in der Weise wiederholt, daß die Verwachsung noch Partien in einer dritten Orientierung enthält, welche durch Drehung um die Normale zu dem zweiten Paare von Prismenflächen resultiert und die sich offenbar genau so zur ersten verhält, wie die zweite: ferner sind derartige Drillinge gewöhnlich in vielfacher Wiederholung aus dünnen Lamellen in den drei Stellungen aufgebaut zu einem mimetischen Gebilde (S. 272) von anscheinend hexagonaler Form.

Fig. 168.



Das Verhalten eines Krystalles, dessen Structur nach der auf den vorhergehenden Seiten skizzierten Theorie einem combinierten Systeme entspricht, beruht daher im wesentlichen auf der Art des der Structur zugrunde liegenden Raumgitters. Wenn wir die einem chemischen Moleküle entsprechenden Atome des Systemes zu einer engeren Gruppe zusammenfassen und an deren Stelle nur ihren Schwerpunkt ins Auge fassen, so bilden diese Schwerpunkte das gleiche, für die krystallisierte Substanz charakteristische Raumgitter. Die Bestimmung dieses Raumgitters bildet also die erste und wichtigste Aufgabe für die Erforschung der Krystallstructur einer Substanz. Der Weg zur Lösung derselben, welcher bereits durch die Betrachtungen über die größere oder geringere Leichtigkeit der Bildung der Krystallflächen (S. 294) angedeutet ist, wird im nächsten Abschnitte noch näher erörtert und in der II. Abteilung durch zahlreiche Beispiele erläutert werden. In des Verfassers »Einleitung in die chemische Krystallographie« wird ferner gezeigt, wie aus der auf dem angegebenen

Wege eruierten Structur sogar Schlüsse auf die räumliche Anordnung der Atome im chemischen Moleküle, d. h. auf die Art der Ineinanderstellung der regelmäßigen Punktsysteme, gezogen werden können.

Rationalitäts- und Zonengesetz.

Rationalitätsgesetz. Aus der im vorigen Abschnitte entwickelten Theorie der Krystallstructur folgt nun, wie Sohncke gezeigt hat[1]), dasjenige Gesetz, welches die gegenseitige Stellung aller möglicher Flächen eines Krystalles bestimmt.

Eine physikalische Bedeutung kann einer Ebene an einem Krystalle offenbar nur dann zukommen, wenn sie mit Massenteilchen in ihrer ganzen Ausdehnung gleichmäßig besetzt ist, d. h. wenn sie, durch ein unendliches regelmäßiges Punktsystem gelegt gedacht, unendlich viele Systempunkte enthält. Da nun ein regelmäßiges Punktsystem nur eine endliche Zahl von Raumgittern enthält, so müssen einer solchen Ebene auch unendlich viele Punkte eines und desselben Raumgitters angehören. Da ferner jede durch irgend drei Punkte dieses Raumgitters gelegte Ebene mit unendlich vielen Raumgitterpunkten besetzt ist, so ist jede Netzebene eines der ineinander gestellten Raumgitter als Krystallfläche möglich. Nun sind nach unserer Annahme (S. 291 f.) die Deckschiebungen der die Krystallstructur zusammensetzenden Punktsysteme die gleichen, d. h. die gesamte Structur entspricht einem Systeme von Punkten, welches aus lauter gleichen, parallel ineinander gestellten Raumgittern besteht, daher die Netzebenen des einen Raumgitters parallel denen jedes anderen sind. Daraus folgt direct:

Jede Netzebene des für eine krystallisierte Substanz charakteristischen Raumgitters ist eine mögliche Krystallfläche desselben.

Da man nun auf unendlich viele Arten je drei Punkte des unbegrenzt gedachten Raumgitters verbinden kann und in jedem dieser Fälle eine andere Netzebene desselben erhält, so sind an einem krystallisierten Körper unendlich viele Krystallflächen möglich. Diese unterscheiden sich aber durch die Dichtigkeit ihrer Besetzung mit Punkten des Gitters, und aus den Betrachtungen S. 262—263 bzw. 294 geht hervor, daß die Wahrscheinlichkeit des Zustandekommens einer Fläche an einem wachsenden Krystalle im allgemeinen geringer werden muß, wenn ihre Flächendichtigkeit abnimmt, daß also das Auftreten einer jeden derselben abhängt von der Structur des Krystalles, in zweiter Linie aber auch beeinflußt wird von den Verhältnissen, unter denen die Substanz krystallisiert. Ferner kann nach obigem Satze, wenn auch die Zahl der möglichen Flächen eine unendliche ist, doch nicht jede Ebene von beliebiger Stellung als Krystallfläche der Substanz

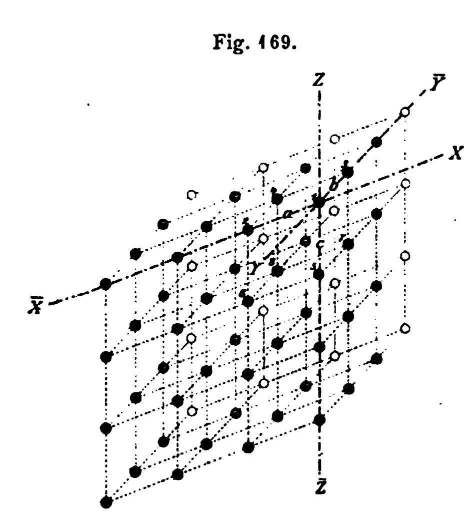
1) L. Sohncke, Ableitung des Grundgesetzes der Krystallographie aus der Theorie der Krystallstructur. Verhandl. d. naturwiss. Ver. Karlsruhe 1882 Nr. 9, und Wiedemanns Annalen d. Physik, **16**, 489 (Ausz. Zeitschr. f. Kryst. **7**, 315).



auftreten, sondern nur diejenigen, welche als Netzebenen durch die Structur gegeben sind, also nur Ebenen, welche einander unter ganz bestimmten Winkeln durchschneiden, deren Größe in einer gesetzmäßigen Beziehung zueinander stehen muß.

Denken wir uns in dem Fig. 169 dargestellten allgemeinsten Falle eines Raumgitters von einem beliebigen Gitterpunkte aus in der Richtung $X\bar{X}$ die Länge a, in $Y\bar{Y}$ die Strecke b, endlich in $Z\bar{Z}$ die Strecke c durchlaufen, so gelangen wir zu drei weiteren Gitterpunkten; legen wir durch diese drei eine Ebene, so erhalten wir eine Netzebene des Raumgitters, also eine mögliche Krystallfläche des Körpers, welche in bezug auf jene bestimmten Richtungen durch die drei Längen a, b, c unzweideutig bestimmt ist. Irgendeine andere mögliche Krystallfläche wird gelegt werden können 1) durch den m-ten Gitterpunkt in der Richtung $X\bar{X}$, 2) durch den n-ten in $Y\bar{Y}$, 3) durch den o-ten Punkt in der Richtung $Z\bar{Z}$, — immer von demselben Ausgangspunkte an gezählt, wie vorher. Diese neue Ebene wird also bestimmt sein durch die drei Längen ma, nb, oc in den betreffenden Richtungen. Da nun m, n, o ganze Zahlen sind, so muß ein rationales Verhältnis bestehen zwischen den Verhältnissen der drei Längen $ma:nb:oc$ und den Verhältnissen $a:b:c$, welche die Lage der ersten Fläche bestimmen; d. h.: wenn wir die Verhältnisse $a:b:c$ kennen, so sind diejenigen aller möglicher Flächen gegeben durch den Ausdruck $ma:nb:oc$, in welchem m, n, o beliebige ganze Zahlen sind.

Fig. 169.



Nun können wir aber das Raumgitter, außer in das Parallelepiped 1, 2, 3 ... 8, noch auf unendlich viele Arten in gleiche Parallelepipede zerlegen (s. S. 275). Bezeichnen wir die Seiten irgendeines solchen, d. h. die Abstände nächster Punkte auf drei beliebigen Punktreihen des Raumgitters, mit A, B, C, so gilt die gleiche Beziehung, daß nur solche Gitterebenen möglich sind, welche durch die Längenverhältnisse $mA:nB:oC$ mit rationalen m, n, o bestimmt sind.

Dieses Gesetz, nach welchem also alle an den Krystallen einer Substanz auftretenden Flächen durch rationale Zahlen von einer derselben abgeleitet werden können, wurde von Hauy erkannt, und die Entdeckung desselben bildete den Ausgangspunkt der Entwickelung der geometrischen Krystallographie, als deren Grundgesetz es bezeichnet wird.

Dasselbe läßt sich allgemein so ausdrücken: Legt man durch irgendeinen Punkt des Krystalles drei Gerade parallel drei beliebigen Kanten des-

selben (d. i. drei beliebigen Punktreihen des seiner Structur zugrunde liegenden Raumgitters), und bestimmt die Stellung aller möglicher Flächen des Krystalles durch die Verhältnisse der Längen, welche diese Ebenen auf jenen drei Geraden abschneiden, so bilden diese Verhältnisse für eine beliebige Fläche des Krystalles ein rationales Vielfaches von den Verhältnissen einer beliebigen anderen Fläche, oder, da an den Verhältnissen $ma : nb : oc$ nichts geändert wird, wenn man sie mit einer beliebigen Zahl, z. B. mit mno, dividiert und dadurch in

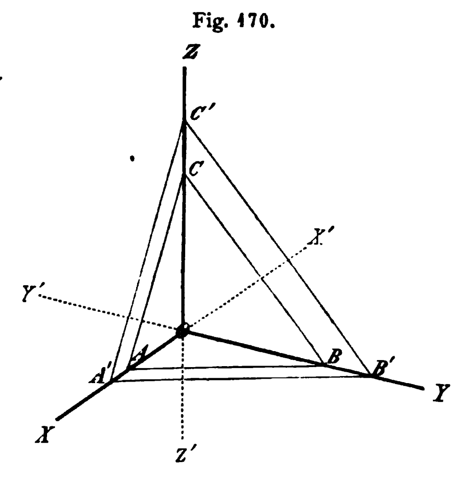
$$\frac{a}{no} : \frac{b}{mo} : \frac{c}{mn}$$

umwandelt, einen rationalen Teil jener.

Die letztere Ausdrucksweise des Gesetzes ist nun die übliche, und dieser entsprechend soll dasselbe im folgenden näher erläutert werden:

Seien die Ebenen XOY, XOZ und YOZ (Fig. 170) parallel drei beliebigen Flächen eines Krystalles, welche einander in drei, den Geraden OX, OY und OZ parallelen Kanten schneiden. OX, OY, OZ sollen die Axen des Krystalles, die Ebenen XOY, XOZ, YOZ die Axenebenen, und die Kantenwinkel, welche OX mit OY, OX mit OZ, OY mit OZ bilden, die Axenwinkel desselben genannt werden. Die drei Axenebenen teilen offenbar den ganzen Raum in acht Oktanten, welche im Punkte O zusammenstoßen; zwei durch eine Axenebene getrennte Oktanten sollen anliegende, zwei, welche einander nur in einer Axe berühren, gegenüberliegende, und zwei nur im Punkte O zusammenstoßende entgegengesetzte heißen.

Fig. 170.



Schneide nun irgendeine vierte Fläche des Krystalles die drei Axen in den Punkten A, B und C, so mögen OA, OB und OC die Parameter dieser Fläche heißen, deren Durchschnittsfigur mit den Axenebenen das Dreieck ABC ist. Von dieser Fläche liegen, da sie die drei Axenebenen durchschneidet, Teile auch in den benachbarten Oktanten; man sagt nun von einer Fläche, daß sie in demjenigen Oktanten liege, welchen sie in einer geschlossenen Durchschnittsfigur, wie das Dreieck ABC im oberen rechten vorderen Oktanten in Fig. 170 es ist, schneidet. Zur Bestimmung der Stellung einer Fläche gehört demnach außer der Länge der Parameter (von O als Nullpunkt aus gerechnet) auch noch die Angabe desjenigen Oktanten, in welchem sie liegt, da acht Flächen mit gleichen Parametern möglich sind. Um die letztere Angabe zu ermöglichen, bezeichnet man

solche Parameter, welche sich auf die Richtungen OX', OY', OZ' beziehen, als negative und versieht sie mit dem —Zeichen.

Multipliciert man die Parameter einer Fläche, z. B. OA, OB, OC, mit einer beliebigen positiven Zahl x, so erhält man die Parameter einer der ersten parallelen Fläche des gleichen Oktanten, z. B. OA', OB', OC' Fig. 170, denn

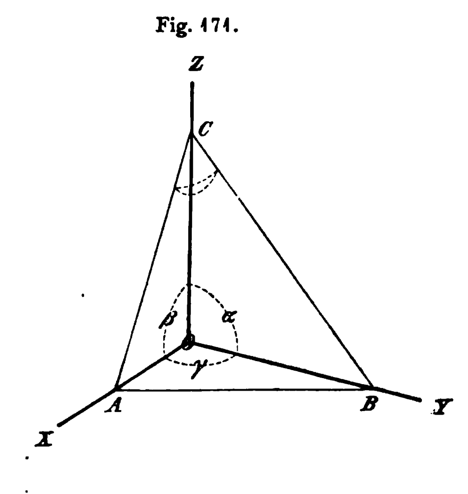
$$\frac{OA'}{OA} = x, \quad \frac{OB'}{OB} = x, \quad \frac{OC'}{OC} = x$$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC},$$

folglich ist Dreieck OAB ähnlich Dreieck $OA'B'$, ebenso OAC ähnlich $OA'C'$; demnach $A'B' \parallel AB$, $A'C' \parallel AC$, also sind auch die Ebenen ABC und $A'B'C'$ einander parallel. Da diese Ebenen der gleichen Wachstumsrichtung entsprechen, d. h. mit den übrigen Flächen die gleichen Winkel bilden, und da die letzteren allein eine Krystallfläche charakterisieren, so ergibt sich hieraus, daß die Parameter einer Fläche mit jeder beliebigen positiven Zahl multipliciert werden können, ohne daß dadurch an der krystallographischen Bedeutung der Fläche etwas geändert wird. Man kann daher der beliebigen Zahl x auch einen solchen Wert geben, daß einer der drei Parameter gleich 1 wird, woraus ersichtlich ist, daß die Stellung einer Krystallfläche in bezug auf die Axen schon durch zwei voneinander unabhängige Größen bestimmt ist.

Die Ebene ABC soll die Grundform (»Primärform« oder »Einheitsfläche«) und ihre Parameter OA, OB, OC sollen die Axenlängen des Krystalles heißen; die letzteren werden gewöhnlich abgekürzt mit a, b, c bezeichnet und eine derselben gleich 1 gesetzt. Durch die alsdann sich ergebende Größe der beiden andern, d. h. durch die Verhältnisse der drei Axenlängen $a:b:c$, sowie durch die Größe der drei Axenwinkel, $\alpha = YOZ$, $\beta = XOZ$, $\gamma = XOY$, ist offenbar die Stellung der Grundform in bezug auf die Axenebenen vollständig bestimmt. Diese fünf Größen nennt man die Elemente des Krystalles und die vier Ebenen, mittels derer sie bestimmt werden, seine Elementarflächen.

Fig. 171.

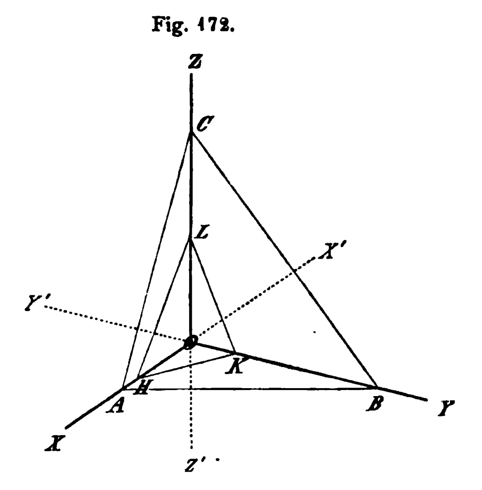


Um die Elemente eines Krystalles zu bestimmen, bedarf es fünf voneinander unabhängiger Gleichungen, und hierzu dienen die Messungen von fünf Winkeln, nämlich derjenigen drei, unter welchen die Axenebenen einander schneiden, und der beiden Neigungen der Grundform ABC gegen zwei der Axenebenen, z. B. gegen XOZ und YOZ. Diese fünf Winkel werden die Fundamentalwinkel genannt. Denkt man sich um O als Mittelpunkt eine Kugelfläche gelegt, so schneiden die drei Axenebenen auf dieser ein sphärisches Dreieck,

ab, welches in Fig. 171 punktiert bezeichnet ist, dessen Winkel gleich denjenigen sind, unter welchen je zwei Axenebenen einander schneiden, und dessen Seiten die Bögen α, β, γ sind. Die drei Winkel dieses sphärischen Dreiecks A, B und C sind durch die Messung gegeben, denn A ist der Winkel zwischen den Axenebenen XOZ und XOY, B derjenige zwischen YOX und YOZ, C derjenige zwischen ZOX und ZOY. Berechnet man aus diesen nach der betreffenden Formel der sphärischen Trigonometrie die drei Seiten, so hat man damit die drei gesuchten Axenwinkel α, β, γ gefunden. Denkt man sich nun weiter um den Punkt C als Centrum eine Kugeloberfläche construiert, so schneiden die Grundform ABC und die beiden Axenebenen XOZ und YOZ aus jener ein ebenfalls in der Figur punktiert bezeichnetes sphärisches Dreieck aus, dessen drei Winkel bekannt sind; es ist dies 1) der Winkel C der beiden Axenebenen XOZ und YOZ, 2) und 3) die Winkel zwischen diesen beiden und der Ebene ABC; es können also auch hier die drei Kreisbögen, welche die Seiten bilden, berechnet werden. Einer dieser ist gleich dem Winkel OCB; wenn wir diesen kennen, so sind in dem Dreiecke OCB alle Winkel bekannt, da $BOC = \alpha$, also ist auch das Verhältnis $OC:OB = c:b$ bestimmt. Ganz ebenso liefert der Winkel OCA, welcher ebenfalls einer Seite des sphärischen Dreiecks gleich ist, die Kenntnis des Dreiecks AOC, da Winkel $AOC = \beta$, und somit das Verhältnis der beiden Axenlängen $OA:OC = a:c$. Durch diese Rechnung sind also die Verhältnisse der drei Axenlängen, und, wenn eine derselben $= 1$ gesetzt wird, diese selbst bestimmt; es sind demnach mit den vorher berechneten Axenwinkeln nunmehr sämtliche fünf Elemente des Krystalles gefunden.

Die auf dem angegebenen Wege berechneten Größen sind nur so genau anzugeben, als es der Genauigkeit der fünf ihnen zugrunde liegenden Winkelmessungen entspricht. Sind z. B. die letzteren nur auf $1'$ sicher, so sind die beiden Werte a und c (auf $b = 1$ bezogen) höchstens auf vier Decimalen und die drei Winkel α, β, γ nur auf ganze Minuten zuverlässig. Außerdem variieren die zur Berechnung benutzten Winkel im allgemeinen mit der Temperatur des Krystalles während der Messung, denn nach S. 182 bis 189 sind die gegenseitigen Neigungen verschieden orientierter Ebenen an allen Krystallen, mit Ausnahme der einfachbrechenden, Functionen der Temperatur, und da wir von fünf Winkeln zwischen vier beliebigen Flächen ausgegangen sind, so kann die Änderung dieser fünf Winkel auch für jeden derselben eine andere sein. Daraus folgt, daß die Elemente eines Krystalles im allgemeinen, wenn seine Temperatur zu- oder abnimmt, sich stetig, wenn auch sehr wenig, ändern, so daß dieselben nur für eine bestimmte Temperatur, und auch für diese nur mit einer der Genauigkeit der Messungen entsprechenden Annäherung, angegeben werden können.

Fig. 172.



Gehen wir nun zu irgendeiner anderen, an dem Krystalle beobachteten Fläche HKL (Fig. 172) über und messen die Winkel, welche diese mit

zweien der bisher als Axenebenen bezeichneten Flächen einschließt, so können wir die drei Parameter OH, OK, OL dieser fünften Krystallfläche ebenfalls in der auf vor. S. angegebenen Weise berechnen. Ebenso wie durch diese drei Längen, bzw. deren Verhältnisse, die Stellung der Ebene HKL unzweifelhaft bestimmt wird, so ist das gleiche auch der Fall, wenn wir angeben, der wievielste Teil ihre Parameter sind von den entsprechenden (je auf dieselbe Axe bezogenen) der vorher betrachteten Fläche ABC.

Sei z. B. OH der h-te Teil von OA, OK der k-te Teil von OB, OL der l-te Teil von OC, so ist

$$OH = \frac{OA}{h}, \quad OK = \frac{OB}{k}, \quad OL = \frac{OC}{l},$$

und

$$h = \frac{OA}{OH}, \quad k = \frac{OB}{OK}, \quad l = \frac{OC}{OL}.$$

Diese drei Größen h, k, l bestimmen die Fläche HKL vollkommen, wenn die Parameter OA, OB, OC, d. h. die Elemente des Krystalles, bekannt sind. Multiplicieren wir h, k, l mit einer beliebigen (positiven) Zahl x, so ist dies gleichbedeutend mit einer Multiplication von OA, OB und OC mit x; diese ändert an der Stellung der Fläche ABC nichts, sondern entspricht nur einer Parallelverschiebung; wir können also auch die die Fläche HKL bestimmenden Größen h, k, l mit irgendeiner beliebigen Zahl multiplicieren, ohne dadurch an dem Verhältnisse beider, d. h. der Stellung derselben, etwas zu ändern. Man kann daher auch immer eine der drei Zahlen h, k, l gleich 1 oder gleich einer beliebigen Zahl setzen.

In derselben Weise kann nun jede andere Krystallfläche $H'K'L'$ durch die drei Größen

$$h' = \frac{OA}{OH'}, \quad k' = \frac{OB}{OK'}, \quad l' = \frac{OC}{OL'}$$

bestimmt werden, so daß also alle an einem Krystalle auftretenden Ebenen durch die Parameter einer einzigen (beliebig gewählten) Fläche, der Grundform, und durch die Verhältniszahlen ihrer Parameter zu denen jener einzigen Fläche bestimmt werden können. Diese Verhältniszahlen h, k, l; h', k', l' usw. nennt man daher die Indices der Krystallflächen und bezeichnet letztere durch diese Zahlen, indem man sie in () setzt; (hkl) ist also das Symbol[1]) einer Krystallfläche, welche durch die Indices h, k, l auf die Elementarflächen des Krystalles bezogen und dadurch vollkommen ihrer Stellung nach bestimmt ist, wenn zugleich angegeben wird, in welchem der acht Oktanten zwischen den Axenebenen (s. S. 299) die Fläche liegt. Das letztere geschieht dadurch, daß über diejenige Indexzahl, welche sich auf einen Parameter auf der negativen Seite der betreffenden Axe bezieht, das Minuszeichen gesetzt wird. Hiernach ist $(h\,k\,l)$ das Symbol einer im

1) Diese Bezeichnung einer Krystallfläche durch ihre Indices wurde zuerst von Whewell vorgeschlagen und namentlich durch Miller in die Wissenschaft eingeführt, daher sie auch gewöhnlich die Millersche Bezeichnung genannt wird.

vorderen oberen rechten Oktanten liegenden Fläche HKL (Fig. 172), $(h\bar{k}l)$ dasjenige einer Fläche mit denselben Parametern im links anliegenden Oktanten usf. Da die Multiplication aller drei Indices mit -1 gleichbedeutend mit derselben Multiplication der Parameter ist, so gehören die Symbole (hkl) und $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ oder die Symbole $(h\bar{k}l)$ und $(\bar{h}k\bar{l})$ usw. jedesmal zwei *entgegengesetzten parallelen* Krystallflächen an.

Berechnet man nun in der angegebenen Weise, nach Feststellung der Elemente eines Krystalles, die Symbole aller übriger, an demselben beobachteter Flächen, so findet man, daß die drei Größen h, k, l in jedem Falle sich sehr nahe wie rationale Zahlen verhalten, und zwar ergeben sich die Abweichungen ihrer Verhältnisse von (meist sehr einfachen) rationalen Zahlenverhältnissen um so geringer, je genauer die der Berechnung zugrunde gelegten Winkelmessungen sind. Je mehr sich also die beobachtete Stellung der Krystallflächen der wahren nähert, desto mehr nähern sich die berechneten Verhältnisse der Indices jenen rationalen Zahlen. Daraus folgt nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit, daß die *rationalen* Werte selbst die *wahren* Werte der Verhältnisse der drei Indices einer Krystallfläche sind, und so lehrt die Erfahrung das gleiche Gesetz, welches sich nach S. 298 als notwendige Folge der vorher entwickelten Anschauung über die innere Structur der Krystalle ergab. Da die Indices einer Fläche mit jeder beliebigen Zahl multipliciert werden können, ohne daß dadurch die Stellung der Fläche geändert wird, so ist es immer möglich, sie durch drei ganze Zahlen auszudrücken[1]). Alsdann lautet jenes Gesetz:

»*Die Indices jeder Krystallfläche sind drei rationale Zahlen.*«

Dieses Gesetz, *dasjenige der Rationalität der Indices* oder kurz »*Rationalitätsgesetz*« genannt, gilt nun in der Tat für jede krystallisierte Substanz und stellt daher ganz allgemein die Beziehung dar, welche zwischen den Ebenen eines beliebigen Krystalles besteht. Nach demselben erhalten wir also die Gesamtheit aller an den Krystallen irgendeiner Substanz *möglicher* Flächen, wenn wir durch vier an denselben beobachtete Ebenen die »Elemente«[2]) der krystallisierten Substanz

1) Da die Berechnung diese nur angenähert ergibt, so hat man für den gefundenen Wert immer die nächstliegende einfache rationale Zahl als *wahren* Wert einzusetzen, aber stets zu bestimmen, welche Differenz der zur Rechnung benutzten Krystallwinkel dem Unterschiede zwischen dem gefundenen und dem angenommenen Werte entspricht, und zu sehen, ob diese Differenz noch als Ungenauigkeit der Messung betrachtet werden kann. Ist letzteres nicht der Fall, so hat man einen dem gefundenen Werte der Indices näher liegenden, dann natürlich weniger einfachen, welcher jene Bedingung erfüllt, als wahren Wert einzusetzen. Fände man z. B. das Verhältnis zweier Indices $= 1 : 1{,}79$, so kann dies $= 1 : 2$ nur in dem Falle sein, daß die zugrunde gelegten Messungen wegen unvollkommener Flächenbeschaffenheit der Krystalle höchst ungenau seien; trifft dies nicht zu, so muß der viel weniger einfache Wert $1 : 1{,}75 = 4 : 7$ das wahre Verhältnis der Indices angeben.

2) Die »Elemente« eines Krystalles sind daher (abgesehen von ihren kleinen Änderungen durch die Temperatur) constante Größen, welche den Krystall geometrisch vollständig bestimmen.

bestimmen, dann für *h*, *k*, *l* alle möglichen, positiven und negativen, rationalen Zahlen einsetzen und die Stellung der je drei derselben entsprechenden Flächen berechnen. Die Erfahrung lehrt nun, daß von diesen möglichen Flächen, deren Anzahl selbst bei Beschränkung der Indices auf die einfachsten ganzen Zahlen eine sehr große ist, meist nur einige wenige die Begrenzung der Krystalle der betreffenden Substanz bilden. Diese sind stets die gleichen und auch ungefähr von derselben relativen Ausdehnung und von gleicher Beschaffenheit, wenn die Krystalle sich unter denselben äußeren Bedingungen gebildet haben. Findet dagegen die Krystallisation unter abweichenden Verhältnissen, aus einem anderen Lösungsmittel, bei anderer Temperatur usw., statt, so beobachten wir im allgemeinen andere von jenen möglichen Flächen oder dieselben, aber in anderer Größenentwickelung oder Oberflächenbeschaffenheit, eine Erscheinung, für welche bereits S. 261 f. eine Erklärung aus physikalischen Ursachen gegeben wurde. Vergleichen wir nun die Krystallisationen einer Substanz, welche unter möglichst mannigfachen Verhältnissen entstanden sind, miteinander, so finden wir meist, daß gewisse Flächen in allen wiederkehren, während andere in den meisten Krystallisationen beobachtet werden, noch andere endlich nur selten und in geringer Größe auftreten, so daß die Gesamtheit der möglichen Krystallflächen der betreffenden Substanz in eine Reihe geordnet werden kann nach der Wichtigkeit, welche den einzelnen Flächen für das Wachstum der Krystalle zukommt. Hierbei zeigt sich nun, daß die Ebenen der Spaltbarkeit, die Gleitflächen und diejenigen Ebenen, nach welchen eine Zwillingsbildung (s. S. 269) eine häufige Erscheinung ist, stets zu den für das Wachstum wichtigsten, d. h. zu denjenigen Krystallflächen gehören, deren Ausbildung am wenigsten abhängig ist von den äußeren Umständen während der Krystallisation. Da nun den erwähnten Ebenen eine besondere Bedeutung hinsichtlich der inneren Kräfte der Krystalle zukommt, und von letzteren das Wachstum in erster Linie abhängt, so müssen diese in der angegebenen Weise aus der Beobachtung als die wichtigsten sich ergebenden Ebenen diejenigen sein, welche für die Wirkung jener Kräfte maßgebend sind, also namentlich diejenigen, in welchen die kleinsten Teilchen der Krystalle am dichtesten gelagert sind.

Welche Symbole die verschiedenen an einer Substanz beobachteten Krystallflächen erhalten, hängt natürlich von der Wahl der vier Elementarflächen ab; je nach dieser Wahl bestehen die Symbole aus einfacheren oder weniger einfachen rationalen Zahlen. Wählt man nun aber als Axenebenen und Grundform zur Herleitung der Elemente diejenigen Flächen, welche nach den vorher angeführten Kriterien sich als die wichtigsten in bezug auf das Wachstum ergaben, und berechnet dann die Symbole aller übriger, in verschiedenen Krystallisationen des Körpers beobachteter Flächen, so findet man nicht nur überhaupt einfachere Zahlenwerte der Indices, als bei einer andern Wahl, sondern es zeigt sich, daß alsdann diejenigen Flächen, welchen die größte Wichtigkeit für das Wachstum zukommt, auch die

einfachsten Indices erhalten, während compliciertere Symbole sich im allgemeinen nur für Krystallflächen ergeben, die nur selten und untergeordnet auftreten. Diese Erfahrung stimmt aber vollkommen überein mit den Schlußfolgerungen, zu welchen die Theorie der Krystallstructur geführt hat (s. S. 294), denn wenn wir bei der Bestimmung der Elemente von den am dichtesten mit Teilchen besetzten Ebenen des der Structur zugrunde liegenden Raumgitters ausgehen, so müssen Ebenen von anderer Stellung um so weniger dicht mit Punkten besetzt sein, ihnen also eine um so geringere Wahrscheinlichkeit der Ausbildung zukommen, in je weniger einfachem Verhältnisse ihre Parameter zu denjenigen des Elementarparallelepipedes stehen.

Gegenüber einer beliebigen Wahl der Elementarflächen, welche zwar immer rationale Werte der Indices liefert, denen aber die angegebene Bedeutung fehlt, kann also die Beobachtung der Krystallformen einer unter möglichst verschiedenen Umständen krystallisierten Substanz, zusammen mit der Kenntnis ihrer physikalischen Eigenschaften (Cohäsion usw.) zur Bestimmung des der Structur des Krystalles zugrunde liegenden Raumgitters, d. h. zu einer rationellen, in der Krystallstructur begründeten Wahl der Elementarebenen führen und dadurch zu einer solchen Bestimmung der Symbole aller an der Substanz vorkommender Flächen, daß die Zahlenwerte der Indices je nach ihrer größeren oder geringeren Einfachheit zugleich die krystallographische Bedeutung der Flächen, d. h. ihre Wichtigkeit in bezug auf die inneren Kräfte, zum Ausdrucke bringen. Wo diese rationelle Wahl auf Grund eingehenden Studiums der Krystallisationsverhältnisse mit genügender Wahrscheinlichkeit getroffen werden kann, ergibt sich z. B., daß dieselbe für chemisch analog zusammengesetzte (isomorphe) Körper übereinstimmt, wie auch nach der analogen atomistischen Constitution derselben zu erwarten ist.

Was die Symbole der Elementarebenen selbst betrifft, so müssen von den Parametern einer beliebigen Fläche, nämlich

$$OH = \frac{OA}{h} \qquad OK = \frac{OB}{k} \qquad OL = \frac{OC}{l},$$

in dem Falle, daß eine Axenebene ihr parallel angenommen wird, zwei unendlich groß werden, weil die Fläche alsdann zweien der Axen parallel geht; dies ist aber nur der Fall, wenn die zugehörigen beiden Indices = 0 gesetzt werden; den dritten Index kann man gleich jeder beliebigen Zahl, also auch gleich 1 setzen. Geschieht dies, so erhält man für diejenige Krystallfläche, welche die X-Axe in dem (beliebigen) Abstande 1 auf der positiven Seite (vorn) schneidet und den beiden andern Axen parallel ist, das Symbol (100), für die entgegengesetzte Fläche an der Rückseite des Krystalles ($\bar{1}00$); ebenso erhält man für die beiden, der zweiten Axenebene parallelen Krystallflächen die Symbole (010) und ($0\bar{1}0$); endlich für die der dritten Axenebene parallelen (001) und ($00\bar{1}$). Da die Parameter der Grundform OA, OB, OC sind, so müssen ihre Indices gleich 1 gesetzt

werden, daher der Name »Einheitsfläche« (S. 300); das Symbol der zur vierten Elementarebene gewählten Krystallfläche ist also (111), wenn sie im rechten oberen Oktanten vorn, ($1\bar{1}1$), wenn sie im linken oberen vorderen Oktanten liegt, usf. Ist eine Krystallfläche einer Axe parallel, so wird der dieser entsprechende Index $= 0$, z. B. ist ($0\bar{1}1$) das Symbol einer Fläche mit den Parametern ∞, $-OB$, OC.

Wir können nach den vorhergehenden Betrachtungen das Gesetz der Rationalität der Indices daher auch folgendermaßen ausdrücken: Bei geeigneter Wahl der Elementarebenen bestehen die Symbole der Flächen eines Krystalles aus den (positiven oder negativen) Zahlen 0, 1, 2, 3, . . ., und zwar sind die in bezug auf Structur und Wachstum wichtigsten Flächen diejenigen, in deren Symbolen nur die Zahlen 0 und 1 vorkommen, während diejenigen mit größeren Werten der Indices von um so untergeordneterer Bedeutung sind, je größer diese Zahlen sind. Die meisten krystallisierten Substanzen zeigen nur Krystallflächen mit den Indices 0, 1, 2, und schon die letzteren weniger häufig.

An die Stelle von Krystallflächen mit einfachen Indices treten nun aber sehr häufig sog. Vicinalflächen, d. h. Ebenen, welche nur um kleine Winkel von jenen abweichen. Da nun diese Winkel zuweilen an den Krystallen einer Substanz zwar verschiedene, jedoch anscheinend in regelmäßigen Intervallen liegende Werte zeigen, so hat man vielfach auch für solche Flächen eine Reihe von Symbolen mit rationalen Indices, aber mit sehr großen Zahlenwerten der letzteren, angenommen. Der Widerspruch, in welchem derartige Symbole mit den vorhergehenden Auseinandersetzungen stehen, würde natürlich nur ein scheinbarer sein, wenn die Vicinalflächen, wie S. 267 erwähnt, ihre Entstehung nur den Concentrationsströmungen verdanken und daher als Störungen der regelmäßigen Ausbildung der wahren Krystallflächen, d. h. derjenigen mit einfachen Indices, zu betrachten sind. Andererseits hat Miers (Zeitschr. f. Kryst. 1904, **39**, 274 f.) auch die Möglichkeit einer anderen Erklärung angedeutet: Krystallflächen mit so complicierten Symbolen, wie sie den Vicinalflächen zukommen würden, entsprechen einer sehr geringen Dichtigkeit der Anordnung der Teilchen innerhalb solcher Ebenen, und eine so wenig dichte Verteilung ist auch vorhanden in der den wachsenden Krystall umgebenden Lösung, welche nach den Versuchen des Genannten (s. S. 267—268) nur wenig übersättigt ist; die krystallisierende Substanz schlägt sich daher auf dem wachsenden Krystalle in einem Schauer nieder, welcher nicht sehr dicht ist, und man könnte sich hierin den Grund denken, warum das Wachstum des Krystalles nach Vicinalflächen und nicht nach Flächen mit einfachen Indices, d. h. mit großer Flächendichtigkeit, stattfindet.

Während die Elemente eines Krystalles nach S. 301 mit der Temperatur variieren, und daher die Axenverhältnisse einer Substanz, d. h. die Längenverhältnisse der drei Parameter der Grundform, im allgemeinen nicht durch rationale Zahlen dargestellt werden können, sind die Indices von der

Temperatur vollkommen unabhängige Größen, wie folgende Betrachtung lehrt:

Seien die linearen Ausdehnungscoefficienten (s. S. 181) des Krystalles in den Richtungen der drei Axen ξ_a, ξ_b und ξ_c, so sind bei einer um 1° höheren Temperatur die Parameter der Grundform

$$OA\,(1+\xi_a) \qquad OB\,(1+\xi_b) \qquad OC\,(1+\xi_c).$$

Die Parameter einer beliebigen Fläche $(h\,k\,l)$, welche bei der Ausgangstemperatur $\frac{OA}{h}$, $\frac{OB}{k}$ und $\frac{OC}{l}$ waren, werden alsdann:

$$\frac{OA}{h}(1+\xi_a) \qquad \frac{OB}{k}(1+\xi_b) \qquad \frac{OC}{l}(1+\xi_c).$$

Diese Größen sind aber wieder der h-te, k-te, l-te Teil der Parameter der Grundform bei der nun in Betracht kommenden Temperatur. Wie also auch die Richtungen und die Längen der drei zu Axen gewählten Kanten des Krystalles sich geändert haben, immer sind die Indices einer beliebigen Fläche, auf die neuen Axen bezogen, dieselben Zahlen, wie vorher.

Es folgt dies auch unmittelbar aus der Definition der homogenen Deformationen (S. 205) — und eine solche ist ja die thermische Ausdehnung —; denn wenn parallele Gerade im Krystall auch nach der Deformation noch Gerade und parallel sind, so kann das Verhältnis, in welchem ihre Längen zueinander stehen, nicht geändert worden sein, und dieses Verhältnis ist es, welches durch die Indices ausgedrückt wird. Bei jeder homogenen Deformation bleibt also die Rationalität der Indices erhalten, und ebenso alle diejenigen Verhältnisse, welche nur von den Zahlenwerten der Indices abhängen. Hierzu gehören vor allem, wie nunmehr gezeigt werden soll, die Bedingungen des Parallelismus der Kanten, in welchen verschiedene Flächen einander schneiden. Die Kenntnis dieser Bedingungen bildet die hauptsächlich durch Weiss und F. Neumann begründete »Zonenlehre«.

Zonengesetz. Die Gesamtheit derjenigen Flächen eines Krystalles, welche einander in parallelen Kanten durchschneiden, nennt man eine Zone, die derselben angehörigen Flächen tautozonal (cozonal) und die gemeinsame Richtung der Kanten die Zonenaxe. Diese ist offenbar durch die gegenseitige Stellung zweier beliebiger Flächen der Zone gegeben.

Um die Bedingungen des Parallelismus von Kanten, d. h. der Existenz von Zonen an einem Krystalle, festzustellen, ist daher zunächst die Richtung der Kanten zweier beliebiger Flächen aus deren Parametern abzuleiten. Seien deren Indices (efg) und (hkl), so sind ihre Parameter, wenn a, b, c diejenigen der Grundform sind:

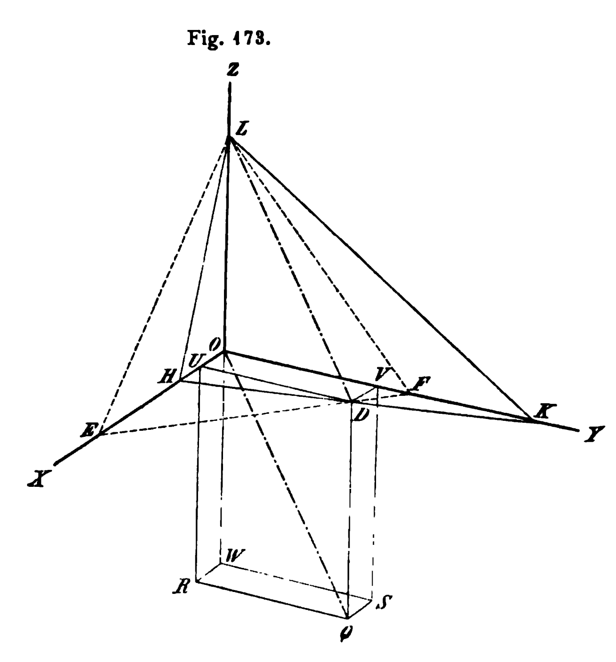
$$\frac{a}{e},\ \frac{b}{f},\ \frac{c}{g} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{h},\ \frac{b}{k},\ \frac{c}{l},$$

welche durch Multiplication mit g bzw. l folgenden Ausdruck annehmen:

$$\frac{ag}{e},\ \frac{bg}{f},\ c \quad \text{bzw.} \quad \frac{al}{h},\ \frac{bl}{k},\ c.$$

Diese Multiplication entspricht einer Parallelverschiebung beider Flächen, durch die einer ihrer Parameter die gleiche Länge (c) erhält, d. h. nach welcher die beiden Ebenen durch einen und denselben Punkt auf der Z-Axe gehen, wie es in Fig. 173 durch die beiden Ebenen HKL und EFL dargestellt ist. Die Kante, in welcher die beiden Ebenen einander schneiden, ist dann die Gerade LD, welche offenbar durch die Parameter OE, OH, OF, OK und OL vollständig bestimmt ist. Zieht man durch D die Parallelen zur X- und Y-Axe, welche auf diesen die Längen OU und OV abschneiden, und macht $OW = OL$, so ist die Richtung jener Kante auch gegeben durch die Diagonale OQ des in der Figur gezeichneten Parallelepipeds mit den Seiten OU, OV und OW.

Fig. 173.



Diese drei Größen lassen sich, wie eine einfache Rechnung lehrt, durch die obigen Parameter der beiden Flächen in folgender Weise ausdrücken:

$$OU = \frac{fl - gk}{bc} \qquad OV = \frac{gh - el}{ac} \qquad OW = \frac{ek - fh}{ab},$$

wofür abgekürzt gesetzt werden möge:

$$OU = \frac{u}{bc} \qquad OV = \frac{v}{ac} \qquad OW = \frac{w}{ab}.$$

Multipliciert man diese Größen mit dem Producte abc, wodurch ja die Richtung der Diagonale des Parallelepipeds nicht geändert wird, so verwandeln sie sich in

$$au, \; bv, \; cw,$$

welche Größen als Seiten eines Parallelepipeds dessen Diagonale, d. h. die Durchschnittsrichtung der Flächen (efg) und (hkl) durch die Axenlängen und die Indices derselben bestimmen. Die nur von den Indices abhängigen Größen u, v, w erhält man mittels eines sehr leicht dem Gedächtnisse einzuprägenden Schemas aus jenen, indem man nämlich die Indices der einen Fläche zweimal und darunter die der anderen ebensooft schreibt und nach Weglassung der ersten und letzten Kolonne je zwei Zahlen kreuzweise multipliciert und die beiden Producte voneinander abzieht:

$$\begin{array}{c|cccc|c} e & f & g & e & f & g \\ & & \times & \times & \times & \\ h & k & l & h & k & l \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} fl-gk, & gh-el, & ek-fh \\ =u & =v & =w. \end{array}$$

Da die Indices stets rationale Zahlen sind, so müssen auch die Größen u, v, w solche sein. Man nennt sie die Indices und $[uvw]$ das Symbol der Kante.

Soll nun eine dritte Fläche R tautozonal sein mit den beiden ersten, die wir mit P und Q bezeichnen wollen, so müssen ihre Indices einer bestimmten Bedingung genügen, welche nunmehr aufzusuchen ist. P, Q, R, deren Symbole bzw. sind

$$P(efg), \quad Q(hkl), \quad R(pqr),$$

werden in einer Zone liegen, wenn die Durchschnittslinie von P und Q parallel derjenigen von Q und R ist, d. h. wenn die Diagonalen der beiden Parallelepipeda, welche wir für den ersteren, wie für den zweiten Durchschnitt in derselben Weise construieren, wie a. S. 308 (s. Fig. 173), zusammenfallen; denn jene sind die Durchschnittsrichtungen, die eine von P und Q, die andere von Q und R, und sind deshalb parallel; legen wir sie also durch denselben Punkt, den Axenmittelpunkt, so müssen sie einander decken. Die Diagonalen jener beiden Parallelepipeda können aber nur dann in dieselbe Richtung fallen, wenn das Verhältnis der drei Seiten in beiden Parallelepipeden das gleiche (das eine dem andern ähnlich ist), d. h. wenn die Seiten des ersten sich nur durch einen constanten Factor von denen des zweiten Parallelepipedes unterscheiden.

Die Durchschnittsrichtung der Flächen P und Q, kurz mit $[P, Q]$ bezeichnet, ist bestimmt durch das Parallelepiped, dessen Seiten:

$$au = a(fl-gk), \quad bv = b(gh-el), \quad cw = c(ek-fh);$$

die Durchschnittsrichtung $[Q, R]$ durch die Parallelepipedseiten:

$$au' = a(kr-lq), \quad bv' = b(lp-hr), \quad cw' = c(hq-kp).$$

Sollen P, Q, R tautozonal sein, so müssen die entsprechenden Seiten jener beiden Parallelepipede sich zueinander verhalten wie derselbe constante Factor, z. B. C, folglich[1])

$$\begin{aligned} fl-gk &= C(kr-lq) && (1) \\ gh-el &= C(lp-hr) && (2) \\ ek-fh &= C(hq-kp) && (3) \end{aligned}$$

Multipliciert man (1) mit p, (2) mit q, (3) mit r, und addiert alle drei Gleichungen, so wird die ganze rechte Seite der resultierenden Gleichung Null, also ist:

$$p(fl-gk) + q(gh-el) + r(ek-fh) = 0.$$

1) In diesen Gleichungen heben sich die Axenlängen a, b, c auf, weil stets eine derselben als Factor beider Seiten der Gleichung erscheint.

Bezeichnen wir wieder die in ( ) stehenden Differenzen, welche den auf S. 308 gefundenen entsprechen, abgekürzt mit u, v, w, so ist die Bedingung der Tautozonalität der Fläche (pqr) mit den Flächen (hkl) und (efg) gegeben durch die Gleichung:

$$up + vq + wr = 0.$$

Daraus ersieht man, daß die Bedingung, unter welcher drei Flächen in eine Zone fallen, nur abhängt von den Indices dieser Flächen, dagegen von den Elementen des Krystalles vollkommen unabhängig ist. Daß letztere sich bei den meisten Krystallen mit der Temperatur ändern, kann daher auf die Tautozonalität keinen Einfluß ausüben. Denn da die Indices, von denen allein jene Bedingung abhängt, für jede Temperatur des Krystalles ihre rationalen Werte constant beibehalten, so behält auch jene Bedingungsgleichung für alle Temperaturen ihre Gültigkeit. Drei Krystallflächen, welche bei irgendeiner Temperatur eine Zone bilden, schneiden einander auch bei jeder andern Temperatur in parallelen Kanten. Da nun bei jeder homogenen Deformation parallele Geraden parallel bleiben, so müssen tautozonale Flächen eines Krystalles auch nach einer derartigen Deformation, sei es, daß dieselbe durch gleichmäßige Temperaturänderung, durch allseitig gleichen Druck oder durch eine Schiebung nach Gleitflächen bewirkt werde, nach wie vor tautozonal bleiben (Gesetz der Erhaltung der Zonen).

Die rationalen Zahlen u, v, w heißen die Indices der Zone, $[uvw]$ ihr Symbol[1]), welches, als Symbol der Kante irgend zweier Flächen P und Q unter den einander in parallelen Kanten schneidenden Ebenen des Krystalles, d. h. als Symbol der »Zonenaxe«, sich aus den Indices von P und Q ergibt; jede beliebige andere Fläche (pqr) der Zone $[P, Q]$ (welche man auch mit $[hkl, efg]$ oder mit $[uvw]$ bezeichnen kann) muß in bezug auf ihre Indices der obigen Bedingungsgleichung genügen.

Man kann diese Gleichung folglich dazu benutzen, die Richtigkeit der Indices einer Fläche zu prüfen, welche man auf anderem Wege bestimmt hat, und welche in einer Zone liegt[2]) mit zwei bekannten Flächen.

Sind diese z. B. (101) und $(1\bar{1}\bar{1})$, so ist das Symbol der Zone $(12\bar{1})$, d. h. $u = 1$, $v = 2$, $w = -1$, und es gehört die Fläche $(3\bar{2}\bar{1})$ in diese Zone, denn deren Indices, in die obige Gleichung eingesetzt, erfüllen dieselbe.

Das Symbol $[uvw]$ einer Zone gibt uns die Gesamtheit aller möglicher Flächen derselben, indem wir für q und r nach und nach alle einfachen

1) In demselben werden die negativen Werte, wie bei den Symbolen der Flächen, durch Striche über den betreffenden Indices bezeichnet.

2) Die Zugehörigkeit einer Fläche zu einer Zone mit Bestimmtheit zu constatieren, bedarf es des Reflexionsgoniometers, auf welchem die beiden bekannten Flächen justiert werden (s. S. 21); ist dies geschehen, so steht die Zonenaxe normal zum Kreise, und alsdann sind auch alle übrigen Flächen der Zone justiert. Auf diesem Wege kann die Zugehörigkeit einer Fläche zu der betreffenden Zone auch dann erkannt werden, wenn dieselbe nicht mit andern Flächen der Zone zum Durchschnitte gelangt, also nicht von zwei der Zonenaxe parallelen Kant begrenzt ist.



rationalen Zahlen 0, 1, 2, . . . setzen und jedesmal das zugehörige p aus der Bedingungsgleichung (S. 310 oben) berechnen.

Wenn (efg) und (hkl) die Indices zweier beliebiger Flächen sind, so sind $(e+h, f+k, g+l)$ diejenigen einer zwischenliegenden Fläche derselben Zone, wie sich ohne weiteres durch Einsetzung dieser Werte in die Zonengleichung ergibt (in dem speciellen Falle, daß (efg) und (hkl) zwei gleichwertige Flächen sind, bildet die dritte Fläche gleiche Winkel mit den beiden ersteren). Geht man nun, statt von zwei beliebigen Flächen, von zwei Fundamentalebenen des Krystalles aus, z. B. von (100) und (010), so erhält man durch Addition der Indices in erster Ableitung die wichtigste intermediäre Fläche (110); die zweite Ableitung gibt in dem Zonenstücke (100) . . . (110) die zwischenliegende Fläche (210), in dem Zonenstücke (110) . . . (010) die Fläche (120); die dritte Ableitung liefert zwischen (100) und (210) die Fläche (310) usf. Da die so gefundenen Flächen erster, zweiter, dritter . . . Periode nur dann in ihrer Reihenfolge der Wichtigkeit entsprechen können, welche ihnen für das Wachstum der Krystalle zukommt, wenn die gewählten Elementarflächen der Structur entsprechen (s. S. 304—305), so kann bei flächenreichen Krystallen die mit steigender Periode abnehmende Häufigkeit des Auftretens der Flächen als Kriterium der richtigen Wahl der Elementarflächen dienen.

Da eine Ebene durch zwei derselben parallele Geraden gegeben ist, so ist eine Krystallfläche, welche zugleich in zwei Zonen liegt, also sowohl der Zonenaxe der ersten, als derjenigen der zweiten parallel geht, dadurch vollkommen bestimmt. Sind die Symbole der beiden Zonen

$$[uvw] \text{ und } [u'v'w'],$$

so müssen die Indices pqr der in beiden Zonen liegenden Fläche sowohl in bezug auf u, v, w, als in bezug auf u', v', w' jener Bedingungsgleichung genügen, folglich:

$$up + vq + wr = 0$$
$$u'p + v'q + w'r = 0.$$

Daraus findet man leicht

$$p = r\frac{vw' - wv'}{uv' - vu'}$$
$$q = r\frac{wu' - uw'}{uv' - vu'}.$$

Da man einen von den drei Indices jeder beliebigen Zahl gleich setzen kann, z. B.

$$r = uv' - vu',$$

so folgt:

$$p = vw' - wv'$$
$$q = wu' - uw'$$
$$r = uv' - vu'$$

als die drei Indices derjenigen Fläche, welche in den beiden Zonen $[uvw]$ und $[u'v'w']$ liegt.

Diese drei Werte folgen nun aus den Indices der beiden Zonen nach genau demselben Schema, wie diese selbst aus den Indices der Flächen, nämlich:

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
u & v & w & u & v & w \\
 & & \times & \times & \times & \\
u' & v' & w' & u' & v' & w' \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
vw' - wv', & wu' - uw', & uv' - vu' \\
= p & = q & = r.
\end{array}
$$

Z. B. sei diejenige Fläche gesucht, welche einerseits in der Zone der beiden Flächen (100) und (110) liegt, andererseits auch mit (101) und ($1\bar{1}\bar{1}$) parallele Kanten bildet; das Symbol der ersteren Zone ist (001), das der zweiten ($12\bar{1}$); daraus folgt die gesuchte Fläche ($2\bar{1}0$).

Da die nach dem angegebenen Verfahren berechneten Werte p, q, r stets rationale Zahlen sein müssen (weil u, v, w und u', v', w' solche sind), so ergibt sich der Satz:

»Eine Ebene, welche zwei Zonen eines Krystalles angehört, ist stets eine mögliche Fläche desselben.«

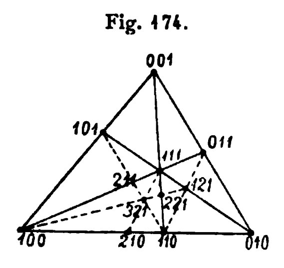
Die vier Elementarflächen (Fig. 171 S. 300), bzw. die sechs, von je zwei derselben gebildeten Kanten, bestimmen hiernach drei weitere, als Krystallflächen mögliche Ebenen, nämlich die durch AB und parallel OZ, die durch BC und parallel OX und die durch AC und parallel OY gelegte Ebene, denn jede derselben liegt in zweien von den sechs, durch die Elementarflächen gegebenen Zonen. Diese drei neuen Ebenen schneiden einander in drei Kanten, durch welche drei weitere Zonen am Krystalle bestimmt sind; in einer dieser Zonen und in einer der ersten sechs liegt je eine weitere mögliche Fläche des Krystalles; die so erhaltenen Flächen bestimmen wieder neue Zonen usw. In dieser Weise kann man aus irgend vier Flächen des Krystalles, von denen nicht drei in einer Zone liegen, alle übrigen möglichen geometrisch ableiten. Da auf diesem Wege ebenso der vollständige »Krystallflächencomplex« der betreffenden Substanz, d. h. die Gesamtheit der möglichen Flächen, erhalten werden kann, wie durch Einsetzung aller möglicher rationaler Zahlen für die Indices (nach S. 303), so kann man die Beziehung zwischen den Flächen eines Krystalles statt durch das Gesetz der Rationalität der Indices, auch ausdrücken durch das Gesetz der Zonen, welches aussagt, daß alle Ebenen eines vollständigen Krystallflächencomplexes miteinander im Zonenverbande stehen. Beides ist gleichbedeutend, denn, wie letzteres Gesetz aus demjenigen der Rationalität der Indices folgt, so kann man auch umgekehrt das Gesetz der Zonen als Erfahrungsgesetz[1]) zugrunde legen und das Gesetz der Rationalität der Indices daraus ableiten.

---

1) Die Beobachtungen, durch welche dasselbe gewonnen wird, bestehen in dem Nachweise der Tautozonalität von Krystallflächen nach der auf S. 310 Anmerk. angegebenen Methode und unterliegen denselben Schwankungen, wie die Messungen der Winkel. Da wir auch bei diesem Verfahren die Bedingungen der Zugehörigkeit einer Fläche zu einer Zone um so näher erfüllt finden, je vollkommener der Krystall beschaffen ist, d. h. je ge-

Die Ableitung des gesamten Complexes der Krystallflächen einer Substanz von der Elementarfläche kann auch, wie die der Flächen einer Zone (s. S. 311), in der Reihenfolge abnehmender Einfachheit ihrer Symbole erfolgen und durch die Übereinstimmung dieser Reihenfolge mit derjenigen ihrer Wichtigkeit für das Krystallwachstum die richtige Wahl der Elementarflächen controlliert werden (vgl. S. 304). Seien in Fig. 174 die Ebenen (001), (100) und (010) durch die Eckpunkte eines Dreieckes, die Zonen [001, 100] usw. durch dessen Seiten repräsentiert, so ergibt die Addition der Indices aller drei Elementarflächen das Symbol der wichtigsten intermediären Fläche (111); verbindet man den diese Fläche darstellenden Punkt mit den drei Eckpunkten des Dreieckes, so wird durch die den betreffenden Zonen entsprechenden Geraden das Dreieck (001) (100) (010) in sechs Dreiecke zerlegt, in deren jedem die gleiche Operation wiederholt werden kann; z. B. erhält man durch Addition der Indices von (111), (100) und (110) das Symbol der wichtigsten intermediären Fläche (321), usf.

Fig. 174.



Eine dritte Art, das Grundgesetz der geometrischen Krystallographie auszudrücken, ist das sog. »Gesetz der rationalen Doppelverhältnisse«. Seien a, b, c, d vier in einer Zone liegende Krystallflächen, so ist das Doppelverhältnis der Sinus der zwischen denselben liegenden Winkel

$$\frac{\sin(a:c)}{\sin(b:c)} : \frac{\sin(a:d)}{\sin(b:d)}$$

eine rationale Zahl, welche sich durch die Indices der vier Flächen ausdrücken läßt. Infolgedessen können zwar drei Flächen mit beliebigen Winkeln stets in einer krystallographischen Zone existieren, aber nicht mehr; denn eine vierte Fläche derselben Zone mit beliebigen Winkeln zu jenen würde im allgemeinen einen irrationalen Wert für jenes Verhältnis liefern. Durch drei Flächen einer Zone ist also die Gesamtheit aller in derselben möglicher Krystallflächen bestimmt, denn es können ihr nur solche angehören, deren Doppelverhältnis mit jenen drei rational ist. Die Formel für das Doppelverhältnis von vier Flächen einer Zone gestattet, aus den Indices derselben und den Winkeln dreier die Winkel der vierten zu jenen oder aus den Indices dreier und den Winkeln, welche die vier Flächen miteinander bilden, die Indices der vierten zu berechnen, ohne die Elemente des Krystalles zu kennen (das Nähere hierüber, bzw. die hierzu erforderlichen Formeln s. in der III. Abteil.).

---

nauer die betreffende Zone auf dem Goniometer justiert werden kann, so gelten auch hier die S. 303 Anm. angestellten Betrachtungen. Aus der Tatsache, daß von den möglichen Flächen eines Krystalles meist nur eine geringe Anzahl an demselben auftritt, folgt ferner, daß auch Flächen vorkommen können, welche in keiner der am Krystalle ausgebildeten Zonen liegen, daß die Beobachtung also das Zonengesetz nur mehr oder weniger unvollständig zu liefern imstande ist.



Im Raume können **vier** Krystallflächen, von denen nicht drei in einer Zone liegen, vollkommen beliebige Stellung zueinander haben; alle übrigen Flächen des Krystalles müssen aus ihnen ableitbar sein. Die zwischen diesen vier Flächen und einer beliebigen, krystallographisch möglichen fünften Fläche bestehenden Relationen lassen sich durch folgenden Satz ausdrücken:

»Die Verhältnisse der drei Quotienten der Sinus derjenigen Winkel, welche zwei beliebige krystallographisch mögliche Flächen mit drei beliebigen krystallographisch möglichen Kanten bilden, sind constante rationale Zahlen.«

Von diesem »Gesetze der Rationalität des dreifachen Verhältnisses von fünf Krystallflächen oder -kanten« ist dasjenige der rationalen Doppelverhältnisse der specielle Fall, welcher sich auf die Flächen einer Zone bezieht. Wie man letzteres zur Berechnung solcher Flächen benutzen kann, ohne die Elemente des Krystalles zu kennen, so kann das erstere Gesetz dazu dienen, ebenso die Stellung jeder beliebigen Krystallfläche zu berechnen, wenn die Indices derselben gegeben sind.

Zur Orientierung über die Zonenverhältnisse eines Krystalles dient die projectivische Darstellung der Flächen desselben durch Punkte in einer Ebene. Auf voriger Seite, Fig. 174, wurde bereits eine derartige Projectionsart, die sog. gnomonische, benutzt; diese erhält man, wenn man aus dem Mittelpunkte des Krystalles zu allen Ebenen desselben Normalen zieht und diese verlängert, bis sie die Projectionsebene treffen; auf letzterer sind dann die Krystallflächen durch Punkte, die Zonen durch Gerade repräsentiert.

In vielen Beziehungen noch geeigneter für die Übersicht über die Zonenverhältnisse eines Krystalles ist die sog. **stereographische Projection,** deren wesentliche Eigenschaften deshalb hier erläutert werden mögen[1]).

Denkt man sich um einen Punkt des Krystalles als Centrum eine Kugelfläche von beliebigem Radius und dann von deren Mittelpunkte aus auf alle Krystallflächen Normalen gefällt, welche man verlängert, bis sie die Kugelfläche treffen, so erhält man für jede Krystallfläche einen Punkt auf der Kugelfläche, welcher der Wachstumsrichtung (s. S. 260) der Krystallfläche entspricht und daher die letztere vollkommen bestimmt. Diesen Punkt nennen wir den Pol der Fläche. Die so erhaltene Projection aller Krystallflächen auf eine Kugel heißt eine sphärische Projection. Da die Normalen aller Flächen einer Zone in der zur Zonenaxe senkrechten Ebene liegen, eine durch den Mittelpunkt gehende Ebene aber die Kugelfläche in einem größten Kreise schneidet, so müssen in der sphärischen Projection die Pole aller tautozonaler Flächen auf einem größten Kreise

1) Betreffs der Beweise für die im folgenden benutzten Sätze sei verwiesen auf die vortreffliche Darstellung in: E. Reusch, Die stereographische Projection. Leipzig (Teubner), 1881. 32 S. u. 8 Tafeln.

liegen und die zwischen ihnen liegenden Bögen dieses Kreises gleich den gemessenen Winkeln zwischen den zugehörigen Flächen, den sog. Flächenwinkeln, sein. Ferner muß der Winkel zwischen zwei Zonenkreisen gleich sein dem Winkel der beiden Zonenaxen, d. h. der beiden Kanten, welche je eine Fläche der einen und der anderen Zone mit der beiden Zonen gemeinschaftlichen Fläche bildet, dem sog. Kantenwinkel. Die Zonenkreise teilen daher die Kugelfläche in sphärische Dreiecke, deren Seiten den Flächenwinkeln, deren Winkel den Kantenwinkeln am Krystalle entsprechen.

Von der Kugeloberfläche mit den darauf befindlichen Flächenpolen haben wir nun durch die stereographische Projection ein Bild in der Ebene zu entwerfen. Dies geschieht auf folgende Weise: Man wählt zur Projectionsebene eine durch den Mittelpunkt gehende Ebene, welche senkrecht zur Axe einer besonders wichtigen Zone des Krystalles steht. Der größte Kreis, in welchem diese Ebene die Kugel schneidet, und in dem alsdann die Pole aller Flächen jener Zone liegen, wird der Grundkreis genannt. Die eine der beiden durch den Grundkreis getrennten Hälften der Kugel wird so auf dessen Ebene projiciert, daß man sich das Auge in den am weitesten entfernten Punkt der anderen Hälfte, welcher von allen Punkten des Grundkreises um 90° absteht, versetzt denkt. Wenn man sich also von hier aus Gerade nach allen Flächenpolen der ersten Hälfte gezogen denkt, so sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ebene des Grundkreises die Projectionen der Flächenpole. Ebenso kann man die zweite Hälfte der Kugel auf die gleiche Ebene projicieren, indem man von dem Punkte der Kugeloberfläche, welcher dem ersten Augenpunkte entgegengesetzt ist, Gerade nach den Flächenpolen der zweiten Kugelhälfte zieht.

Eine derartige Projection hat die Eigenschaft, daß in derselben die größten Kreise der Kugel sich als Kreisbögen projicieren, welche einander unter denselben Winkeln schneiden, wie die größten Kreise auf der Kugel.

Die Herstellung einer stereographischen Projection soll im folgenden durch ein Beispiel erläutert werden.

Es seien die Winkel des in Fig. 175 a. f. S. abgebildeten Krystalles gemessen worden. Als Axenebenen desselben mögen gewählt werden die drei Flächen *a*, *b*, *c*, welche dementsprechend die Symbole (100) bzw. (010) und (001) erhalten, während zur Grundform die Fläche *o* genommen werden soll, der, ihrer Stellung am Krystalle entsprechend, alsdann das Symbol $(1\bar{1}\bar{1})$ zukommt. Wählen wir nun für die stereographische Projection, welche in Fig. 176 dargestellt ist, zur Ebene des Grundkreises die in Fig. 175 horizontal gedachte Ebene, welche zu der *c*-Axe, d. h. der Kante $a : b$, senkrecht steht, so liegen in dieser Ebene die Normalen aller der Zone [100, 010] = [001] angehöriger Krystallflächen, nämlich die Normalen von $a =$ (100), $m =$ (110), $b =$ (010), $a' = (\bar{1}00)$, $b' = (0\bar{1}0)$, $n = (1\bar{1}0)$, $l = (2\bar{1}0)$. Um die Pole dieser Flächen zu erhalten, braucht man also nur die Flächenwinkel $a : m$, $m : b$ usf. auf dem Grundkreise aufzutragen. Der Pol irgendeiner Fläche der oberen Hälfte des Krystalles ist nun offenbar durch seine Winkel zu *a* (100) und *b* (010) bestimmt, und aus diesen Winkeln kann die Projection desselben nach einer in der III. Abteilung beschriebenen Constructionsmethode gefunden werden. In dieser Weise ist z. B. in Fig. 176 die Projection des Poles $c =$ (001)

mittels der Flächenwinkel *c* : *a* und *c* : *b* eingezeichnet worden. Der auf der Kugeloberfläche durch die Pole *c* und *a* gehende größte Kreis, welcher die Pole aller der Kante *a* : *c* parallelen, d. h. der Zone [100, 001] = [010] angehöriger Krystallflächen enthält, projiciert sich auf die Ebene des Grundkreises in einem Kreisbogen, welcher nach bekanntem Verfahren unmittelbar construiert werden kann, da drei Punkte desselben, nämlich *a*, *c* und *a'* (der Pol der zu *a* entgegengesetzten Fläche, welche als parallel zu *a* natürlich derselben Zone angehören muß), bekannt sind. Aus Fig. 175 ersieht man, daß von den Flächen der oberen Hälfte des Krystalles in der Zone *a* : *c* die folgenden liegen: $d = (101)$, $e' = (\bar{1}02)$ und $f' = (\bar{1}01)$; deren Pole sind nun in Fig. 176 auf jenem durch *a* und *c* gehenden Kreisbogen, nach Maßgabe ihrer Winkel zu *a* bzw. *c*, eingetragen. Jeder Pol dieser Zone bestimmt ferner mit den Polen *b* und *b'* je eine neue Zone. Eine solche ist z. B. die durch die Flächen *b*, *c*, *b'* gegebene, denn ihre Zonenaxe ist die Krystallaxe *a*, ihr Symbol also, wie sich unmittelbar aus den Indices von *c* und *b* ergibt, = [100]; diese Zone enthält in der oberen Hälfte des

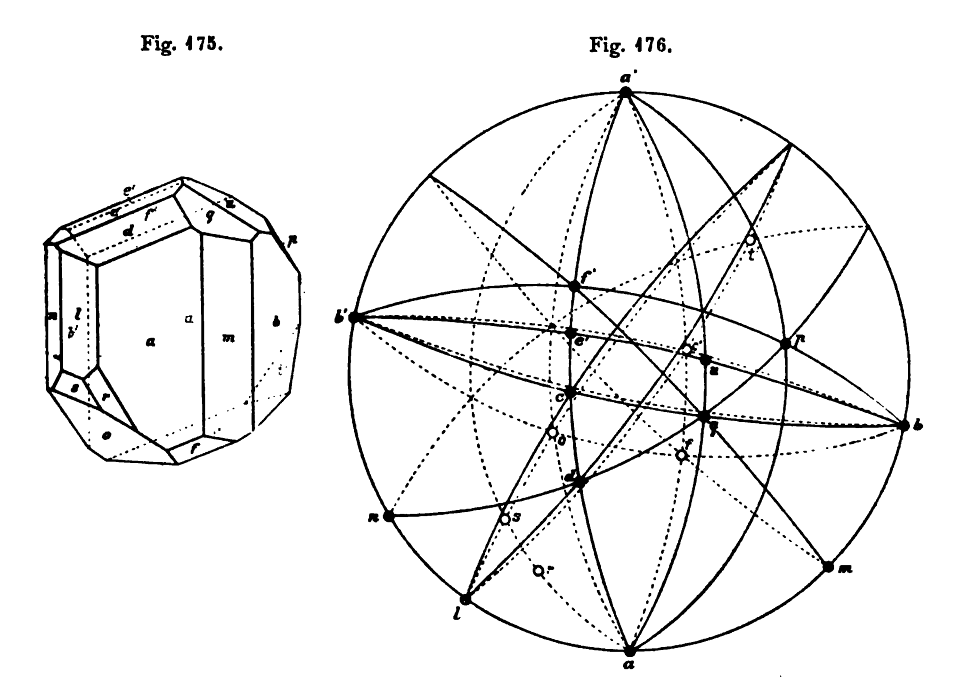


Fig. 175. Fig. 176.

Krystalles noch eine Fläche, nämlich $q = (011)$, aus deren Indices hervorgeht, daß sie auch in der Zone $n : d = [1\bar{1}0, 101]$ liegt; wenn man also in der Projection durch *b'*, *c*, *b* einen Kreisbogen und einen zweiten durch *n*, *d* und den *n* gegenüber auf dem Grundkreise liegenden Punkt, d. h. den Ort des Poles der nicht ausgebildeten, aber möglichen Fläche $n' = (\bar{1}10)$, construiert, so ist der Schnittpunkt beider die Projection des Poles von *q*. Dieser bestimmt seinerseits wieder mit *a* und *a'* eine Zone, in welche die Fläche $u = (\bar{1}22)$ fällt; da letztere aber gleichzeitig der Zone *b' e' b* angehört, so ist ihr Pol in der Projection unmittelbar als Schnittpunkt der beiden, diese Zonen repräsentierenden Kreisbögen gegeben. Endlich liegt in der Zone *b' f' b* die Fläche $p = (\bar{1}21)$, deren Indices aber auch der Bedingung für die Zugehörigkeit zur Zone *n d q* genügen, welche daher in der Projection durch die Schnittpunkte der beiden entsprechenden Zonenkreise dargestellt wird. Damit sind sämtliche Flächen der oberen Hälfte des Krystalles in die Projection Fig. 176 eingetragen, und durch die sie verbindenden Kreisbögen ihre Zonenverhältnisse leicht zu übersehen.

Um auch für die Flächen der unteren Hälfte des Krystalles die Zugehörigkeit zu den

durch die oberen Flächen bestimmten Zonen zur Anschauung zu bringen, ist zu jedem, die obere Hälfte einer Zone darstellenden, ausgezogenen Kreisbogen auch derjenige, welcher die untere Hälfte derselben Zone repräsentiert, in Fig. 176 punktiert eingetragen, und zwar so, wie es oben (S. 315) angegeben wurde, daß der Augenpunkt für die Projection der unteren Hälfte der entgegengesetzte von demjenigen ist, welcher als Augenpunkt für die Projection der oberen Hälfte diente. Um diese Projection zu erhalten, hat man zu erwägen, daß jeder Kreisbogen, welcher die Projection eines größten Kreises der Kugel darstellt, durch zwei gegenüberliegende Punkte des Grundkreises gehen muß (weil entgegengesetzte, d. h. parallele Flächen derselben Zone angehören), und daß diese beiden Punkte der oberen und unteren Hälfte eines Zonenkreises gemeinsam sind. Ferner müssen die Pole zweier entgegengesetzter Flächen, von welchen die eine der oberen, die andere der unteren Hälfte angehört, so zum Mittelpunkte der Projection liegen, daß dieser in die Mitte der jene verbindenden Geraden fällt. Daraus folgt, daß stets die Projection der unteren Hälfte eines größten Kreises zu der Projection der oberen umgekehrt liegt in bezug auf den Durchmesser des Grundkreises, welcher die beiden ihnen gemeinsamen Pole verbindet. So wird z. B. die Fortsetzung der Zone $a\,d\,c\,e'\,f'\,a'$ auf der unteren Hälfte durch den punktierten Kreisbogen dargestellt, auf welchem sich die Projectionen der beiden zu c bzw. f' parallelen Flächen $c' = (00\bar{1})$ und $f = (10\bar{1})$ befinden, deren Pole unmittelbar durch Verlängerung der Geraden von c bzw. f' nach dem Mittelpunkte der Projection um den gleichen Betrag jenseits des letzteren gefunden werden. Durch den Pol c und die beiden Pole $b\,b'$ ist der dem oberen Zonenkreisbogen $b\,q\,c\,b'$ entsprechende untere bestimmt, auf welchem weitere Pole nicht liegen. Dagegen enthält die Zone $a\,q\,u\,a'$ auf der Unterseite des Krystalles eine Fläche, nämlich $o = (1\bar{1}\bar{1})$, deren Pol demzufolge auf dem punktierten Kreisbogen liegt, welcher die Fortsetzung der Zone $a\,q\,u\,a'$ nach unten darstellt; wie aus den Indices dieser Fläche hervorgeht, gehört sie auch der Zone $b\,p\,f'\,b'$ an, ihr Pol muß also da liegen, wo der entsprechende punktierte Kreisbogen $b\,f\,b'$ den vorher erwähnten schneidet. Durch den Pol o wird ferner die untere Fortsetzung des Zonenkreises $d\,l$ bestimmt, welcher zwischen l und o noch den Pol von $s = (3\bar{2}\bar{1})$ enthält, entsprechend dem Parallelismus der Kanten von d, l, s, o (Fig. 175). Die Fläche s liegt aber außerdem noch in einer zweiten Zone, nämlich in der durch a und p bestimmten, in welche außer ihr noch die Fläche $r = (5\bar{2}\bar{1})$ gehört, wie sich leicht aus den Indices beider nachweisen läßt; dementsprechend liegen ihre Projectionen auf dem punktierten Zonenkreise, welcher zu dem ausgezogenen $a\,p\,a'$ umgekehrt liegt in bezug auf den Durchmesser aa', und zwar s auf dem Schnittpunkte desselben mit dem Zonenkreise $l\,o$, während der Pol r nur mit Hilfe des Winkels $a:r$ eingetragen werden konnte, da für diese Fläche nur eine Zone am Krystalle nachgewiesen war. Dagegen ist die Projection der letzten noch fehlenden Fläche der unteren Hälfte des Krystalles, $t' = (\bar{2}1\bar{1})$, unmittelbar gegeben als Schnittpunkt der beiden Kreisbögen, welche den Fortsetzungen der Zonenkreise $c\,l$ und $n\,d\,q\,p$ nach unten entsprechen, wie sich ebenfalls durch Einsetzen der Indices von t' in die aus den Indices dieser beiden Zonen nach S. 311 sich ergebenden Bedingungsgleichungen leicht beweisen läßt.

Die soeben beschriebene Projection bildet nun eine in die Ebene übertragene Darstellung eines Netzes von sphärischen Dreiecken, deren Eckpunkte die Pole je dreier möglicher Krystallflächen sind; jede Seite eines solchen Dreiecks entspricht dem Flächenwinkel der beiden Ebenen am Krystalle, deren Pole die Endpunkte der Seite bilden; ein Winkel eines dieser sphärischen Dreiecke ist gleich dem Kantenwinkel, welchen in der Ebene der durch den Scheitelpunkt des Winkels dargestellten Krystallfläche die Kanten desselben mit den beiden anderen Flächen bilden. Von den sechs Stücken eines sphärischen Dreieckes können bekanntlich aus dreien die übrigen berechnet werden; hat man daher von den in der

Projection enthaltenen Kreisbögen, d. h. Flächenwinkeln des Krystalles, eine genügende Anzahl gemessen, um alle sphärischen Dreiecke berechnen zu können, so ist es gleichgültig, von welchen Winkelmessungen bei der Berechnung der Elemente des Krystalles ausgegangen wird, denn aus der Projection ist dann sofort zu ersehen, wie man aus irgendwelchen Flächenwinkeln diejenigen Bögen oder Winkel ableiten kann, welche direct die Elemente bestimmen. Dadurch ist es möglich, die letzteren auch dann mit der erforderlichen Genauigkeit festzustellen, wenn die Elementarflächen (100) oder ($\bar{1}$00), (010) oder (0$\bar{1}$0), (001) oder (00$\bar{1}$), (111) oder ($\bar{1}$11) usw. selbst nicht oder nicht gut meßbar ausgebildet sind, indem auch in solchen Fällen ihr Ort durch die Zonen anderer Flächen bestimmt und genau berechnet werden kann. Hierdurch erweist sich die stereographische Projection als das wesentlichste Hilfsmittel bei der Berechnung der Krystalle, wie in dem betreffenden Abschnitte der III. Abteilung ausführlich gezeigt werden wird. Zu diesem Zwecke genügt es sogar vollkommen, dieselbe nur aus freier Hand annähernd richtig zu skizzieren. Wird sie jedoch genau nach den beobachteten Winkeln ausgeführt, so kann man aus derselben alle übrigen Winkel ableiten, sie also zur graphischen Berechnung der Krystalle benutzen. Hierüber wird das Nähere in der III. Abteilung angegeben werden.

Außer dieser praktischen Bedeutung und derjenigen, welche in der Erleichterung des Einblickes in die Zonenverhältnisse eines Krystalles begründet ist, eignet sich die beschriebene Projection noch in hohem Grade dazu, das Verständnis der geometrischen Symmetrieverhältnisse der Krystalle, welche den Gegenstand des nächsten Abschnittes bilden, zu erleichtern.

Symmetrie.

Der in Fig. 175 S. 316 abgebildete Krystall stellt den allgemeinsten Fall eines krystallographischen Polyeders dar, nämlich eines solchen, dessen ebene Begrenzungsflächen keine anderen Beziehungen zueinander zeigen, als diejenigen, welche durch das Gesetz der Rationalität der Indices, bzw. das Zonengesetz, bestimmt sind. Ein derartiges krystallographisches Polyeder soll ein asymmetrisches (unsymmetrisches) genannt werden; dasselbe entspricht einer inneren Structur des Krystalles, in welcher gleichwertige Richtungen nicht vorhanden sind.

Existieren dagegen in einem Krystalle zu irgendeiner Richtung eine oder mehrere gleichwertige, d. h. solche, in welchen die Structur die gleiche ist und infolgedessen der Wert jeder Eigenschaft übereinstimmt, so müssen die infolge des Wachstumes nach solchen Richtungen entstehenden Krystallflächen auch gleichartigen Bedingungen für ihre Bildung unterworfen sein. Solche Krystallflächen sollen daher ebenfalls als »gleichwertige« bezeichnet werden, und als Symmetrie einer Krystallform

diejenige Regelmäßigkeit, welche durch die Existenz gleichwertiger Flächen an derselben bedingt wird. Die Symmetrie eines Krystalles wird durch eine Temperaturänderung desselben nicht verändert, weil durch eine solche in allen gleichwertigen Richtungen die gleiche Deformation hervorgebracht wird.

Es soll nun im folgenden gezeigt werden, daß bei krystallographischen Polyedern, d. h. solchen, für welche das Rationalitäts- bzw. das Zonengesetz gilt, nur gewisse Arten der Symmetrie möglich sind.

Um diese zu erhalten, denken wir uns die je zweien gleichwertigen Wachstumsrichtungen entsprechenden Flächen genau den gleichen Wachstumsbedingungen unterworfen, wie es angenähert durch die S. 260 erwähnten rotierenden Krystallisationsgefäße erreicht werden kann, d. h. wir denken uns die beiden Flächen gleich weit von dem Ursprunge jener beiden Richtungen (etwa so, wie wir uns in einer Strahlenfläche die Fronten zweier sich gleich schnell fortpflanzender Lichtstrahlen an den Endpunkten gleich langer Frontnormalen dachten); alsdann werden offenbar, wenn durch irgendeine Operation die eine der beiden Wachstumsrichtungen mit der andern so zur Deckung gebracht wird, daß ihre Anfangspunkte und ihre Richtungen coincidieren, auch die beiden gleichwertigen Ebenen zusammenfallen. Die Operationen, durch welche dies geschieht, können nun dreierlei sein:

a) Eine Drehung um eine Axe. Ein Polyëder, in welchem jede Richtung und jede Fläche durch eine bestimmte (von 360° verschiedene) Drehung in eine gleichwertige Richtung bzw. gleichwertige Fläche übergeführt wird, welches also nach dieser Drehung mit sich selbst wieder zur Deckung gelangt ist, nennt man »symmetrisch nach einer Axe« und die Drehungsrichtung »Symmetrieaxe«. Die Symmetrieaxe wird eine zweizählige genannt, wenn der Drehungswinkel 180° beträgt, d. h., das Polyeder bei einer ganzen Umdrehung zweimal in sich selbst übergeht, eine dreizählige, wenn dies dreimal stattfindet, usf.

b) Eine Spiegelung nach einer Ebene. Dies ist der Fall, wenn das in jener Ebene gesehene Spiegelbild jeder Richtung und jeder Fläche eine gleichwertige Richtung bzw. Fläche darstellt. Alsdann wird das Polyeder durch jene Ebene, wenn wir sie durch dessen Mittelpunkt legen, in zwei gleiche und entgegengesetzte Hälften geteilt, so daß eine Gerade, welche von irgendeinem Punkte der einen Seite des Polyeders normal zu jener Ebene gezogen und jenseits derselben um die gleiche Strecke verlängert wird, an ihrem Ende stets einen gleichartigen Punkt der andern Seite trifft. Ein derartiges Polyeder heißt »symmetrisch nach einer Ebene« und diese Ebene eine Symmetrieebene desselben.

c) Eine Drehung um eine Axe, verbunden mit einer Spiegelung nach einer dazu senkrechten Ebene. Diese Combination der beiden ersten Operationen heißt »Drehspiegelung«, und von einem Polyeder, welches

durch Drehspiegelung mit sich selbst zur Deckung gebracht wird, sagt man, es besitze eine Axe und Ebene der zusammengesetzten Symmetrie.

Im Gegensatze zu der letzteren könnte man die beiden ersten Fälle auch als »einfache Symmetrie nach einer Axe bzw. Ebene« bezeichnen.

a.

Für die Symmetrieaxen krystallographischer Polyeder gelten folgende Sätze:

1. Eine Symmetrieaxe ist senkrecht zu einer möglichen Fläche des Krystalles.

Beweis: α) Für gerad- (zwei-, vier-, sechs- usf.) zählige Axen. Durch Drehung von 180° um eine solche Axe wird eine beliebige Fläche in eine ihr gleichwertige und zur Axe gleichgeneigte übergeführt; beide Flächen schneiden einander in einer zur Axe senkrechten Kante; zu einer beliebigen andern Fläche gehört in derselben Weise eine ihr gleichwertige, welche sie in einer zur Axe senkrechten Kante schneidet; die zur Symmetrieaxe senkrechte Ebene enthält also zwei mögliche Kanten des Krystalles, gehört also zweien Zonen desselben an und ist folglich nach S. 312 eine mögliche Fläche des Krystalles. β) Für eine ungeradzählige, z. B. eine dreizählige Axe folgt obiger Satz aus der gleichen Anordnung der Punkte auf gleichwertigen Geraden der Structur des Krystalles. Durch Drehung um 120° wird eine beliebig zur dreizähligen Axe geneigte Ebene in eine zweite, durch Drehung von $2 \times 120°$ in eine dritte übergeführt; diese drei gleichwertigen Flächen schneiden einander in drei zur Axe gleichgeneigten Kanten, und da sie nach S. 297 Netzebenen des der Structur des Krystalles zugrunde liegenden Raumgitters sein müssen, so sind die Richtungen ihrer drei Kanten diejenigen dreier gleichwertiger Punktreihen des Raumgitters; legt man drei solcher Punktreihen durch einen Punkt und verbindet, von hier aus gezählt, den $n$ten Punkt der einen mit dem $n$ten Punkte der zweiten und dem $n$ten Punkte der dritten, so erhält man eine Netzebene, also nach S. 312 eine mögliche Krystallfläche, und diese schneidet notwendig gleiche Längen auf den drei Kanten ab, steht also zur dreizähligen Symmetrieaxe senkrecht.

2. Eine Symmetrieaxe ist stets eine mögliche Kante des Krystalles.

Beweis: α) Für eine geradzählige Axe. Durch eine Drehung von 180° um eine solche wird eine beliebige Kante in eine ihr gleichwertige übergeführt; die durch beide Kanten gehende Ebene, welche auch die Axe (als Halbierende des Winkels zwischen den beiden Kanten) enthält, ist eine mögliche Krystallfläche, weil sie in zwei Zonen des Krystalles liegt; in derselben Weise bestimmt eine andere Kante mit einer ihr gleichwertigen eine zweite, die Symmetrieaxe enthaltende Ebene, welche ebenfalls eine mögliche Fläche ist; da die Symmetrieaxe somit eine, zweien möglichen Flächen des Krystalles gemeinsame Richtung darstellt, ist sie selbst eine mögliche Kante desselben. β) Für eine dreizählige Axe wurde oben nachgewiesen, daß senkrecht zu ihr eine mögliche Ebene des Krystalles existiere; diese bildet die Basis einer aus irgend drei gleichwertigen Flächen bestehenden dreiseitigen Pyramide, deren Pol in der Symmetrieaxe liegt, und deren Basiskanten ein gleichseitiges Dreieck bilden; durch jede dieser drei Kanten können andere mögliche Flächen gelegt werden; deren je drei gleichwertige eine zweite dreiseitige Pyramide mit steileren oder flacheren Polkanten, als die erste bilden. Je eine Polkante dieser beiden Pyramiden bestimmen eine krystallographisch mögliche Ebene, und die drei Ebenen, welche durch die entsprechenden Polkanten beider Pyramiden gehen, schneiden einander in der dreizähligen Axe; diese ist also eine dreien möglichen Flächen des Krystalles gemeinsame Richtung und demnach eine mögliche Kante.

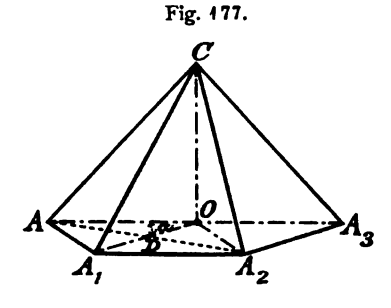
3. Es gibt nur **zweizählige** (binäre oder digonale), **dreizählige** (ternäre oder trigonale), **vierzählige** (quaternäre oder tetragonale) und **sechszählige** (senäre oder hexagonale) **Symmetrieaxen.**

Dieser Satz, welcher dem S. 283 bei Besprechung der regelmäßigen Punktsysteme angeführten entspricht, kann auf folgendem Wege bewiesen werden.

Durch die Bezeichnung einer Symmetrieaxe als einer »n-zähligen« (wo n eine ganze Zahl bedeutet) wird dieselbe charakterisiert mittels des kleinsten Winkels der Drehung, nach deren Ausführung das krystallographische Polyeder mit sich selbst zur Deckung gelangt; bezeichnet man diesen mit α, so ist offenbar $n\alpha = 360^\circ$, da das Polyeder nach einer ganzen Umdrehung in seine ursprüngliche Orientierung zurückgelangt ist, nachdem $n$mal, nämlich jedesmal nach einer Drehung um α°, die Coincidenz stattgefunden hat.

Sei OC Fig. 177 eine n-zählige Symmetrieaxe und OA eine in der zu OC senkrechten Ebene gelegene Kante des Krystalles. Durch Drehung um OC um den Winkel α wird OA in OA_1, durch Drehung um 2α in OA_2 usf. übergeführt. Werden nun die Kanten OA OA_1 und OC zu Axen des Krystalles gewählt, so geht die Fläche (111), d. i. AA_1C, durch Drehung um α in die gleichwertige Fläche A_1A_2C, durch Drehung um 2α in A_2A_3C über usf. Die mit (111) gleichwertigen Flächen bilden eine n-seitige Pyramide, deren Basis ein reguläres n-Eck (mit gleichen Winkeln) bildet. Nun ist die durch die beiden Kanten AC und A_2C gehende Ebene AA_2C, weil sie in zwei Zonen des Krystalles liegt, ebenfalls eine mögliche Fläche desselben, muß also, bezogen auf die Axen OA, OA_1 und OC, rationale Indices erhalten; da ihre Parameter OA, OD und OC sind, so ist dies nur möglich, wenn $OD : OA_1$ eine rationale Zahl ist. Nun ist $OD : OA_1 = OD : OA$, und da $AD \perp OA_1$, so ist $OD : OA = \cos\alpha$.

Fig. 177.



Das Verhältnis $OD : OA_1$ ist also nur dann rational, wenn $\cos\alpha$ einen rationalen Wert besitzt, und dies ist der Fall für $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 120 = -\frac{1}{2}$, $\cos 180^\circ = -1$, während alle andern Winkel α, deren cos ein rationales Verhältnis, z. B. $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$, darstellt, nicht mit einer ganzen Zahl in 360° aufgehen; ebenso sind größere Winkel, als 180°, ausgeschlossen, weil dann immer ein kleinerer Winkel existiert, welcher zur Coincidenz des Polyeders mit sich selbst führt.

Daraus folgt: Wenn ein Krystall eine n-zählige Symmetrieaxe besitzt, so nimmt irgendeine gegen diese Axe geneigte Fläche bei n gleichen Drehungen um den charakteristischen Winkel α nach und nach die Positionen einer regelmäßigen Pyramide mit dem Centralwinkel α an, wo α nur die folgenden Werte haben kann: 60°, dann ist die Pyramide hexagonal; 90°, dann ist sie tetragonal; 120°, dann ist sie trigonal; 180°, die Pyramide ist »digonal«, d. h. sie besteht nur aus zwei Flächen, welche sich in einer zur Symmetrieaxe senkrechten Kante schneiden (eine derartige Form pflegt man in der Krystallographie ein Sphenoid zu nennen). Folglich kann es nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Symmetrieaxen in krystallographischen Polyedern geben.

Somit sind folgende vier Klassen von Krystallen, welche eine (und nur eine) Symmetrieaxe besitzen, möglich:

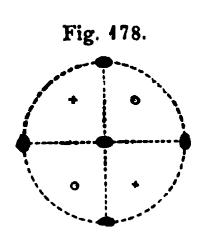
Krystalle mit einer zweizähligen Symmetrieaxe.
Krystalle mit einer dreizähligen Symmetrieaxe.
Krystalle mit einer vierzähligen Symmetrieaxe.
Krystalle mit einer sechszähligen Symmetrieaxe.

In den stereographischen Projectionen, welche zur Veranschaulichung derartiger Symmetrieverhältnisse dienen, sollen stets die Schnittpunkte der zwei-, drei-, vier- und sechszähligen Symmetrieaxen mit der Kugeloberfläche durch die Symbole ⬬ ▲ ■ ⬣ bezeichnet werden.

Krystallographische Polyeder können nun auch gleichzeitig mehrere Axen der Symmetrie besitzen, aber nur in bestimmter Weise combiniert. Betrachten wir zunächst die Combinationen von **nur** zweizähligen Axen, so läßt sich mittels einer stereographischen Projection leicht zeigen, daß deren nur eine einzige möglich ist.

Sei in Fig. 178 die Ebene des Grundkreises diejenige einer Krystallfläche, in welcher zwei, und **nur** zwei, zweizählige Symmetrieaxen liegen, so ist dies nur möglich, wenn dieselben einen rechten Winkel miteinander bilden, wie die beiden punktierten Durchmesser in der Figur; denn wären diese beiden Symmetrieaxen schief zueinander geneigt, so würde eine halbe Umdrehung um die eine derselben die andere mit einer ihr gleichwertigen Richtung in derselben Ebene zur Deckung bringen; die letztere Richtung wäre dann ebenfalls eine zweizählige Symmetrieaxe, und die ersteren beiden wären nicht die einzigen Symmetrieaxen in der Ebene des Grundkreises. Sei nun der mit einem × bezeichnete Ort in dem rechten unteren Quadranten des Grundkreises die Projection des Poles einer beliebigen Krystallfläche (hkl) auf der **oberen** Hälfte der Kugel, so nimmt diese den Ort einer gleichwertigen Fläche ein, wenn wir den Krystall um 180° um eine der beiden Symmetrieaxen, z. B. um die in der Figur senkrecht gestellte, drehen, und der Pol dieser neuen Fläche liegt auf der Kugel natürlich genau so viel unter der Ebene des Grundkreises, als der erste darüber; seine Projection, in dem links anliegenden Quadranten gelegen, ist deshalb durch ein o bezeichnet. Diese beiden gleichwertigen Pole liefern nun durch eine halbe Umdrehung des Krystalles um die in der Figur horizontale Symmetrieaxe zwei weitere damit gleichwertige, der obere einen unteren und umgekehrt, welche dementsprechend bezeichnet in die obere Hälfte der Figur eingetragen sind. Die vier durch diese Punkte in der Projection bestimmten Krystallflächen bilden die Gesamtheit der am Krystalle infolge seiner Symmetrie nach den beiden zweizähligen Axen gleichwertigen Flächen; das aus diesen vier Flächen bestehende Gebilde besitzt aber nun noch eine dritte zweizählige Symmetrieaxe, nämlich die in der Mitte des Grundkreises errichtete Normale; denn bei der Drehung desselben um 180° um diese Axe fällt stets ein Pol mit einem gleichwertigen zusammen. Daraus folgt, daß es keine krystallographischen Polyeder gibt, welchen nur zwei zweizählige Symmetrieaxen zukommen, sondern die Existenz zweier zugleich diejenige einer dritten notwendig erfordert, so daß alle drei zueinander senkrecht sind. An die Krystalle mit einer zweizähligen Axe würden sich somit als möglich anschließen:

Fig. 178.



Krystalle mit einer zweizähligen Symmetrieaxe, welche in der dazu senkrechten Ebene zwei weitere zweizählige Axen (unter 90° einander schneidend) besitzen.

Ebenso schließen sich an die drei andern, a. vor. S. angeführten Klassen mit einer (und nur einer) drei-, vier- bzw. sechszähligen Axe je eine weitere an, in welcher außerdem eine zweizählige, nach dem Obigen notwendigerweise zu der ersteren senkrechte, Symmetrieaxe vorhanden ist; diese letztere Richtung wird aber durch eine Drehung von 120° um die dreizählige, von 90° um die vierzählige und von 60° um die sechszählige Axe jedesmal in

eine gleichwertige Richtung übergeführt; dadurch ergeben sich die folgenden Symmetrieverhältnisse:

Krystalle mit einer dreizähligen Symmetrieaxe, welche in der dazu senkrechten Ebene drei weitere, einander unter gleichen Winkeln schneidende, zweizählige Symmetrieaxen besitzen;

Krystalle mit einer vierzähligen Symmetrieaxe, welche in der dazu senkrechten Ebene vier weitere, einander unter gleichen Winkeln schneidende, zweizählige Symmetrieaxen besitzen;

Krystalle mit einer sechszähligen Symmetrieaxe, welche in der dazu senkrechten Ebene sechs weitere, einander unter gleichen Winkeln schneidende, zweizählige Symmetrieaxen besitzen.

In dem vorletzten Falle sind also, wie in dem Fig. 178 dargestellten, drei zueinander senkrechte zweizählige Symmetrieaxen vorhanden, aber zwei derselben sind gleichwertig (dies bedingt die Vierzähligkeit der dritten und das Vorhandensein zweier weiterer). Bei der Existenz von drei zueinander senkrechten zweizähligen Axen kann noch der weitere specielle Fall eintreten, daß alle drei einander gleichwertig sind. Da sie alsdann auch physikalisch gleichwertig sein müssen, so ist dies nur möglich, wenn sie den drei Kanten, d. i. den drei Flächennormalen des Würfels an einem einfachbrechenden Krystalle entsprechen; sind diese Richtungen also zweizählige Symmetrieaxen, so müssen die vier Hauptdiagonalen des Würfels, d. h. die Normalen zu den Oktaederflächen, dreizählige Symmetrieaxen sein, weil ein regulärer Würfel durch Drehung von 120° um eine seiner Hauptdiagonalen mit sich selbst zur Deckung gelangt, wobei je eine Würfelkante an die Stelle einer zweiten tritt. Sind die drei gleichwertigen Würfelkanten aber vierzählige Symmetrieaxen, so ergibt sich daraus (wie bei der Betrachtung der betreffenden Klasse gezeigt werden wird), daß die sechs Richtungen, welche den Winkel je zweier halbieren, d. h. die Normalen der Dodekaederflächen, zweizählige Symmetrieaxen sein müssen. Zu den vorstehend aufgezählten Combinationen von Symmetrieaxen treten also noch zwei weitere hinzu:

Krystalle mit drei, zueinander senkrechten, zweizähligen und vier, einander unter gleichen Winkeln schneidenden, dreizähligen Symmetrieaxen;

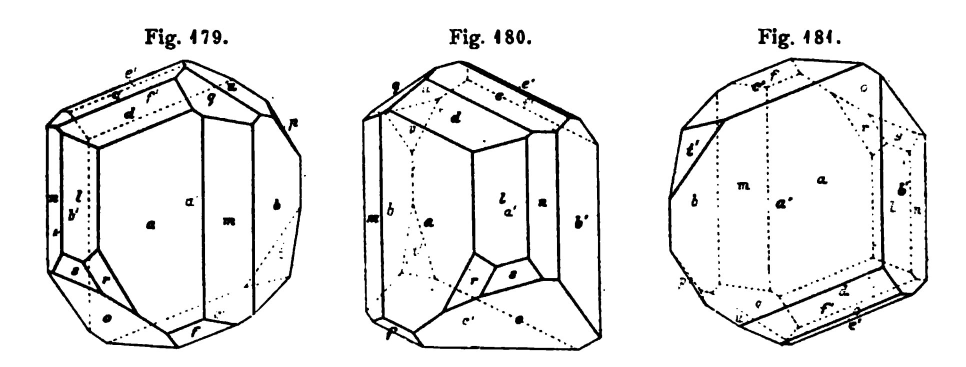
Krystalle mit drei, zueinander senkrechten, vierzähligen, vier dreizähligen (wie vorher) und sechs zweizähligen Symmetrieaxen.

Weitere Combinationen von Symmetrieaxen führen stets auf eine höhere Zähligkeit als sechs für einzelne derselben, sind also krystallographisch unmöglich.

Im ganzen sind daher vier Klassen mit je einer und sechs Klassen mit mehreren Symmetrieaxen möglich. Mit Einschluß der asymmetrischen Krystalle (S. 318) gibt es daher elf Klassen von Krystallen, welche sich durch ihre Symmetrie unterscheiden und denen gemeinsam ist, daß sie keine Ebene, weder der einfachen, noch der zusammengesetzten Symmetrie besitzen. Aus einem derartigen Polyeder entsteht durch Spiegelung nach einer Ebene ein mit ihm symmetrisch gleiches Polyeder, welches dieselben Winkel besitzt, aber in keiner Stellung mit dem ersten zur Deckung gebracht werden kann (sich also zu ihm verhält, wie die rechte zur linken Hand). Zwei solche »symmetrisch gleiche«, aber nicht »deckbar gleiche« Polyeder nennt man enantiomorph.

Die Beziehungen zweier enantiomorpher Krystallformen lassen sich ganz allgemein an einem der asymmetrischen Klasse angehörigen Beispiele, wie an dem bereits S. 315 f. betrachteten Krystalle, dessen Abbildung in Fig. 179 wiederholt ist, feststellen. Denken wir uns dessen Spiegelbild in bezug auf irgendeine Ebene (in der Figur ist hierzu die Fläche $b = (010)$ gewählt worden), so erhalten wir die in Fig. 180 in genau der gleichen perspectivischen Ansicht abgebildete Krystallform, an welcher alle Krystallflächen genau ebenso bezeichnet sind, wie ihre Spiegelbilder in Fig. 179. Die Elemente dieses zweiten Krystalles sind offenbar nicht vollkommen identisch mit denen des ersten, denn z. B. ist der Axenwinkel α (der Winkel zwischen

Fig. 179. Fig. 180. Fig. 181.



den Axen b und c rechts oben) ein stumpfer, während α in Fig. 179 das spitze Supplement jenes ist usf. Wir können aber den zweiten Krystall auf genau dieselben Elemente, wie den ersten, beziehen, wenn wir ihn um 180° gedreht denken um die Normale der Fläche b, welche vorher als Spiegelungsebene diente; derselbe bietet alsdann den Anblick dar, welcher in Fig. 181 zur Darstellung gebracht ist. Die Fläche a ist jetzt parallel der Fläche a' von Fig. 179 geworden, liegt aber entgegengesetzt (hinten), hat also nun die Indices $(\bar{1}00)$, ebenso ist b parallel, aber entgegengesetzt b von Fig. 179, ist also $(0\bar{1}0)$ geworden, endlich c parallel und entgegengesetzt c in Fig. 179, d. h. $(00\bar{1})$; es sind also die Axenwinkel α, β, γ beider Krystalle jetzt die gleichen. Ebenso sind aber auch die Axenlängen a, b, c

dieselben, denn die Fläche *o*, welche deren Verhältnis bestimmt, ist der Fläche *o* in Fig. 179 parallel und hat, da sie entgegengesetzt liegt, die Indices ($\bar{1}11$). Die zweite Krystallform unterscheidet sich von der ersten nur dadurch, daß an Stelle einer jeden Fläche der ersten die parallele und entgegengesetzte getreten ist, deren Indices man erhält, wenn man die Indices jener mit —1 multipliciert. Da das gewählte Beispiel den allgemeinsten Fall eines krystallographischen Polyeders ohne Symmetrieebene darstellt, so folgt hieraus der Satz:

Zwei Krystallformen, welche keine Ebene der (einfachen oder zusammengesetzten) Symmetrie besitzen, sind enantiomorph, wenn ihre Elemente die gleichen sind, und die eine von denjenigen Flächen gebildet wird, welche zu sämtlichen Flächen der andern parallel, aber entgegengesetzt sind.

Es gibt nun eine Reihe von Substanzen, deren chemisches Molekül so beschaffen ist, daß zwei spiegelbildlich gleiche, aber entgegengesetzte Arten der Anordnung der Atome in demselben möglich sind, und welche daher in zwei »physikalisch isomeren« Modificationen auftreten können, die sich chemisch und in vielen Beziehungen auch physikalisch gleich verhalten, deren Lösung aber die Polarisationsebene des Lichtes in entgegengesetztem Sinne dreht (optisch active Substanzen). Die Erfahrung lehrt nun, daß die Krystallformen solcher Körper, wie z. B. der Rechts- und Linksweinsäure mit allen ihren Salzen u. a., stets einer jener elf Klassen angehören, welche einer Ebene der Symmetrie entbehren, und daß die eine Modification Formen zeigt, welche das Spiegelbild jener der unter gleichen Verhältnissen krystallisierten andern Modification darstellen. Es besteht also das Gesetz: Die Krystallformen zweier entgegengesetzter optisch activer Substanzen sind enantiomorph.

In solchen Fällen ist somit schon eine Enantiomorphie der chemischen Moleküle vorhanden, und es leuchtet ein, daß diese auch eine solche im Aufbau des Krystalles hervorzubringen imstande ist. In der Tat haben wir S. 285 f. gesehen, daß die Theorie der regelmäßigen Punktsysteme die Möglichkeit von Krystallstructuren ergibt, in welchen die Anordnung eine schraubenartige, entweder rechte oder linke, ist, und daß dadurch die entgegengesetzte Drehung der Polarisationsebene des Lichtes auch für feste krystallisierte Körper begreiflich wird. Eine solche Structur kann nun entweder durch die Aneinanderlagerung von Molekülen entstehen, welche selbst schon enantiomorph sind, und in diesem Falle (welcher z. B. für das schwefelsaure Strychnin gilt) sind sowohl die Lösungen, als auch die Krystalle des Körpers optisch activ, — oder die Enantiomorphie kommt nur den Punktsystemen, nicht den chemischen Molekülen zu (wie es z. B. beim Natriumchlorat der Fall ist); dann ist die Lösung inactiv, aber die Krystalle drehen die Polarisationsebene des Lichtes rechts oder links. Endlich gibt es aber auch regelmäßige Punktsysteme, welche die Symmetrieverhältnisse einer der elf in Rede stehenden Klassen, aber keine so beschaffenen

Schraubungsaxen besitzen, daß bei Ausführung einer Rechts- bzw. Linksschraubung als Deckbewegung zweierlei, spiegelbildlich entgegengesetzte Structuren resultieren; alsdann fehlt eine Ursache für die Existenz zweier entgegengesetzt drehender Modificationen, und in der Tat gibt es Substanzen (z. B. Baryumnitrat), deren Krystalle einer der erwähnten elf Klassen angehören und die Polarisationsebene des Lichtes nicht drehen, obgleich sie einfachbrechend sind und daher die Beobachtung des Drehungsvermögens gestatten würden. Hieraus geht hervor, daß das oben angegebene Gesetz nicht umgekehrt gilt, d. h. nicht alle enantiomorphen Krystalle optisch activen Substanzen angehören.

b.

Für die Ebenen der Symmetrie gelten folgende Sätze:

1. Jede Symmetrieebene eines Krystalles ist eine mögliche Fläche desselben.

Beweis: Irgend zwei gleichwertige Flächen des nach einer Ebene symmetrischen Krystalles bilden mit der letzteren die gleichen Winkel, aber nach der entgegengesetzten Seite, d. h. sie schneiden einander in einer, der Symmetriebene parallelen Kante, deren Winkel von jener halbiert wird. In gleicher Weise liegt die Symmetrieebene in der Zone, welche durch irgendein anderes Paar gleichwertiger Flächen bestimmt wird, also muß sie (nach S. 312) eine mögliche Fläche des Krystallflächencomplexes sein, welchem die genannten beiden Paare von Flächen angehören.

2. Die Normale zu einer Symmetrieebene ist eine mögliche Kante des Krystalles.

Beweis: Zwei gleichwertige Kanten des Krystalles bestimmen eine Ebene, welche senkrecht zur Symmetrieebene steht, zwei andere ebenfalls eine zur Symmetrieebene senkrechte Ebene, folglich ist die Durchschnittsrichtung beider Ebenen, d. i. die Senkrechte zur Symmetrieebene, eine mögliche Kante des Krystalles.

Unter den Symmetrieklassen der Krystalle, welche außer den elf unter *a* aufgezählten möglich sind, stellt den einfachsten Fall diejenige dar, welche die Krystalle mit einer Symmetrieebene umfaßt.

Ebenso, wie ein krystallographisches Polyeder mehrere Symmetrieaxen haben kann, sind auch bestimmte Combinationen mehrerer Symmetrieebenen möglich. Existieren deren nur zwei, so müssen sie aufeinander senkrecht stehen, was sich aus einer ganz analogen Betrachtung ergibt, wie sie S. 322 für zwei Axen der Symmetrie angestellt wurde.

Fig. 182.

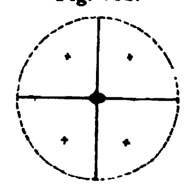


Fig. 182 möge die stereographische Projection eines Krystalles mit nur zwei Symmetrieebenen darstellen, deren Durchschnitte mit der zu beiden senkrechten Ebene des Grundkreises durch ausgezogene Geraden bezeichnet sind, und der Pol irgendeiner der oberen Hälfte des Krystalles angehörigen Fläche (hkl) sei durch ein × markiert; alsdann liefert die Spiegelung nach einer der beiden Symmetrieebenen in gleichem Abstande auf der andern Seite des betreffenden Durchmessers den Pol einer gleichwertigen, ebenfalls oberen Fläche, und die Spiegelung nach der andern Symmetrieebene zwei weitere, zu den beiden ersten in bezug auf den zweiten Durchmesser symmetrische, also ebenfalls obere Pole, und diese vier Flächen bilden die Gesamtheit aller infolge der Existenz der beiden Symmetrieebenen gleichwertiger

Flächen des Krystalles. Das aus denselben bestehende Gebilde besitzt aber, wie unmittelbar aus der Projection zu ersehen, noch eine zweizählige Symmetrieaxe, nämlich die Schnittrichtung der beiden Symmetrieebenen, welche notwendigerweise eine mögliche Krystallkante ist.

Hieraus ergibt sich, daß eine Combination mehrerer Symmetrieebenen das gleichzeitige Vorhandensein von Axen der Symmetrie bedingt.

Einfacher noch, als die eben betrachtete Combination, wäre diejenige einer Symmetrieebene mit einer Symmetrieaxe. Diese ist aber nur dann möglich, wenn beide zueinander senkrecht stehen, denn wenn die Symmetrieaxe der Symmetrieebene parallel wäre, so würde die erstere mehrere gleichwertige Ebenen der Symmetrie bedingen (z. B. liefert die Annahme der zweizähligen Axe und einer Ebene der Symmetrie in Fig. 182 dasselbe Gebilde, also auch die zweite Symmetrieebene), und wenn die Axe mit der Ebene der Symmetrie einen schiefen Winkel einschlösse, so würde die letztere die Existenz einer zweiten entgegengesetzt zu ihr geneigten und gleichwertigen Richtung, also einer zweiten Symmetrieaxe, erfordern. Da nun eine Axe der Symmetrie zwei-, drei-, vier- oder sechszählig sein kann, so sind hiermit vier weitere, durch ihre Symmetrie unterschiedene Klassen als möglich erkannt, nämlich:

Krystalle mit einer zweizähligen Symmetrieaxe
Krystalle mit einer dreizähligen Symmetrieaxe
Krystalle mit einer vierzähligen Symmetrieaxe
Krystalle mit einer sechszähligen Symmetrieaxe
} und einer dazu senkrechten Symmetrieebene.

Die durch Fig. 182 erläuterte Combination einer zweizähligen Axe mit zwei in derselben einander schneidenden Ebenen der Symmetrie ist nur ein specieller Fall derjenigen einer Symmetrieaxe mit so viel Symmetrieebenen, als der Zähligkeit der Axe entsprechen, so daß hierdurch wieder vier Klassen gegeben sind:

Krystalle mit einer zweizähligen Symmetrieaxe und zwei Symmetrieebenen, welche einander in jener unter 90° schneiden (Fig. 182);

Krystalle mit einer dreizähligen Symmetrieaxe und drei Symmetrieebenen, welche einander in jener unter 60° schneiden;

Krystalle mit einer vierzähligen Symmetrieaxe und vier Symmetrieebenen, welche einander in jener unter 45° schneiden;

Krystalle mit einer sechszähligen Symmetrieaxe und sechs Symmetrieebenen, welche einander in jener unter 30° schneiden.

Aus den beiden ersten dieser vier Klassen ergeben sich zwei weitere, mögliche Arten der Symmetrie durch Hinzufügung von zwei, bzw. drei zweizähligen Axen, welche zu der ersten senkrecht stehen und den Winkel der zwei, bzw. drei Symmetrieebenen halbieren.

Andererseits entsprechen den aufgezählten vier Klassen von Krystallen mit je einer Symmetrieaxe und zwei, drei, vier, sechs ihr parallelen Symmetrieebenen fernere vier Klassen, in welchen die zur zwei-, drei-,

vier- oder sechszähligen Axe senkrechte Ebene ebenfalls eine solche der Symmetrie ist; jede dieser Klassen stellt also die Combination der Symmetrieverhältnisse einer Klasse aus der ebenerwähnten Gruppe mit denjenigen der entsprechenden Klasse aus der vorhergehenden Gruppe dar. Wie sich aus den später mitgeteilten Projectionen zur Erläuterung dieser combinierten Symmetrieverhältnisse ergibt, sind alsdann alle übrigen Schnittrichtungen je zweier Symmetrieebenen zugleich zweizählige Symmetrieaxen.

In dem speciellen Falle, daß drei zueinander senkrechte zweizählige Symmetrieaxen gleichwertig sind, müssen sie, wie bereits erwähnt, die drei Würfelnormalen eines einfachbrechenden Krystalles sein; alsdann sind Combinationen dieser Axen mit Ebenen der Symmetrie in zweierlei Weise möglich: entweder sind die drei Würfelflächen Symmetrieebenen oder die sechs Dodekaederebenen; in beiden Fällen sind die vier Oktaedernormalen dreizählige Symmetrieaxen. Endlich können beide Arten von Ebenen, die des Würfels und die des Dodekaeders, Symmetrieebenen sein; alsdann sind die drei Würfelnormalen vierzählige, die vier Oktaedernormalen dreizählige und die sechs Normalen des Dodekaeders zweizählige Symmetrieaxen, der höchste mögliche Grad der Symmetrie eines krystallographischen Polyeders.

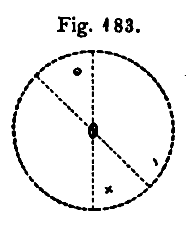
Im ganzen ist also die Zahl der krystallographisch möglichen Symmetriearten, in welchen Axen mit Ebenen der Symmetrie combiniert sind, siebenzehn, die Gesamtzahl der Klassen von Krystallen mit einer oder mehreren Symmetrieebenen achtzehn.

c.

Während vier Arten von Krystallen mit einer Axe der einfachen Symmetrie möglich sind, reduciert sich diese Zahl im Falle einer Axe und Ebene der zusammengesetzten Symmetrie auf drei, da die erstere, wie sogleich gezeigt werden soll, nur eine zwei-, vier- oder sechszählige sein kann.

In der ersten hierher gehörigen Klasse kann die Ebene der zusammengesetzten Symmetrie eine beliebige Fläche des Krystalles, die zweizählige Axe derselben also die Normale einer beliebigen Krystallfläche sein.

Fig. 183.



Sei in Fig. 183 die Ebene des Grundkreises parallel derjenigen Krystallfläche, welche zur Ebene der zusammengesetzten Symmetrie gewählt sei (dies wird durch die stärkere Punktierung des Grundkreises hervorgehoben), so ist der Mittelpunkt des Grundkreises die Projection des Poles der zweizähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie, welcher durch das Zeichen 0 markiert wird. Sei nun × der Pol irgendeiner andern, der oberen Hälfte des Krystalles angehörigen Fläche (hkl), so gelangt dieser mit dem einer gleichwertigen Fläche zur Deckung durch eine halbe Umdrehung um die bezeichnete Axe und gleichzeitige Spiegelung nach der Ebene des Grundkreises. Der so erhaltene Pol o kehrt durch Wiederholung der gleichen doppelten Operation in den ersten zurück; beide Pole entsprechen also

der Gesamtheit der gleichwertigen Flächen am Krystalle, und aus ihrer Lage in der Projection geht hervor, daß die betreffenden Flächen parallel und entgegengesetzt sind. Die Folge dieser Art der Symmetrie ist somit die Gleichwertigkeit je zweier entgegengesetzter Flächen des Krystalles.

Von einem derartigen Krystalle sagt man auch, er habe ein Centrum der Symmetrie, und definiert dieses folgendermaßen: »Jede durch das Symmetriecentrum gelegte Gerade trifft zu beiden Seiten in gleichem Abstande vom Centrum gleichwertige Punkte des Krystalles«, oder: »Das Symmetriecentrum bildet den Mittelpunkt jeder durch dasselbe gelegten und von dem krystallographischen Polyeder begrenzten Geraden«. Ein solches Symmetriecentrum ist aber nicht notwendig mit der zusammengesetzten Symmetrie verbunden, wie aus dem weiter unten zu betrachtenden Falle einer vierzähligen Axe dieser Symmetrie hervorgeht, in welchem ein solches sich nicht ergibt. Andererseits ist dasselbe bei vielen der im vorhergehenden abgeleiteten Symmetriearten vorhanden. Das »Symmetriecentrum« ist also kein besonderes Symmetrieelement der Krystalle, sondern ein specieller Fall der einfachen oder zusammengesetzten Symmetrie nach einer Ebene, was Fedorow zuerst klar hervorgehoben hat.

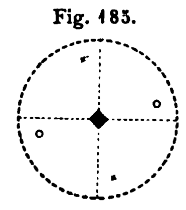
Daß eine dreizählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie an und für sich nicht existieren kann, ist leicht aus der Projection Fig. 184 zu ersehen. Geht man von irgendeinem beliebigen Pole × einer oberen Fläche (hkl) aus, so würde infolge einer derartigen Symmetrie, wenn die Normale im Mittelpunkte der Projection die dreizählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie wäre, jener Pol nach einer Drehung von 120° um dieselbe und durch Spiegelung nach der Ebene des Grundkreises einen untern Pol o erzeugen, dieser nach abermaliger Drehung von 120° und Spiegelung einen oberen × , letzterer aber bei Wiederholung derselben Operation in gleichem Sinne einen unteren o, dessen Projection offenbar mit der des ersten zusammenfällt, was durch die Verbindung der beiden Zeichen × und o ausgedrückt wird; dreht man jetzt abermals um 120° in demselben Sinne und spiegelt, so entsteht ein oberer Pol, welcher mit dem zweiten zusammenfällt, und endlich liefert die nochmalige gleiche Operation einen sechsten Pol, dessen Projection an derselben Stelle liegt, wie die des dritten. Eine weitere Fortsetzung dieses Verfahrens liefert keine neuen Flächen mehr, so daß die Gesamtheit der gleichwertigen Flächen durch jene sechs Pole gegeben ist. Das aus diesen Krystallflächen bestehende geometrische Gebilde hat aber nun, wie aus der Figur hervorgeht, eine dreizählige Axe der einfachen Symmetrie und eine dazu senkrechte Ebene der einfachen Symmetrie, stellt also einen der bereits S. 327 aufgezählten Fälle dar. Eine dreizählige Axe, welche nur eine solche der zusammengesetzten Symmetrie wäre, ist also nicht möglich.

Fig. 184.

Dagegen kann ein krystallographisches Polyeder eine vierzählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie besitzen.

Deren Pol sei die Mitte der Projection Fig. 185, die Ebene des Grundkreises also die Spiegelungsebene; alsdann wird der Pol × einer beliebigen oberen Fläche (hkl) nach einer Drehung von 90° um die Axe und durch Spiegelung nach der Grundkreisebene einen unteren o gleichwertigen erzeugen, die Wiederholung dieser doppelten Operation einen dem ersten gegenüberliegenden oberen ×, die Fortsetzung derselben einen dem zweiten gegenüberliegenden unteren o, während die vierte Wiederholung zu dem ersten Pole zurückführt. Das aus den sämtlichen gleichwertigen Flächen bestehende Gebilde geht nun offenbar schon durch einfache Drehung um die Axe in sich selbst über, aber erst dann, wenn diese Drehung 180° beträgt. Daraus folgt, daß die vierzählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie zugleich eine zweizählige der einfachen Symmetrie ist, was durch die Verbindung der beiden Symbole für derartige Axen in der Projection ausgedrückt wird. Das hier abgeleitete

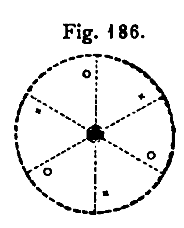
Fig. 185.



geometrische Gebilde ist aber ein anderes, als das S. 321 angeführte mit einer zweizähligen Symmetrieaxe, denn letzteres besitzt nur je zwei gleichwertige Richtungen, während, wenn die zweizählige Axe der einfachen Symmetrie zugleich eine vierzählige der zusammengesetzten Symmetrie ist, je vier, paarweise in zwei aufeinander senkrechten Ebenen gelegene, Richtungen gleichwertig sind.

Eine weitere Klasse von Krystallen ergibt sich durch das Vorhandensein einer sechszähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie.

Fig. 186.



Dies ist aus der, der vorigen analogen Projection Fig. 186 zu ersehen; durch wiederholte Drehung von 60° um jene Axe und Spiegelung nach der dazu senkrechten Ebene des Grundkreises ergeben sich sechs gleichwertige Pole, abwechselnd der oberen und unteren Hälfte des Krystalles angehörend. Hiernach ist die sechszählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie zugleich eine dreizählige der einfachen Symmetrie, bedingt aber einen höheren Grad von Regelmäßigkeit, als die Existenz einer einfachen dreizähligen Axe, nämlich die Gleichwertigkeit von je sechs Richtungen, statt nur dreier.

Dagegen führen die Combinationen von mehreren Axen und Ebenen der zusammengesetzten Symmetrie, soweit sie sich überhaupt als möglich erweisen, auf bereits früher hergeleitete Arten der einfachen Symmetrie.

Nach dem Vorhergehenden beträgt die Gesamtzahl der möglichen Symmetriearten krystallographischer Polyeder 31, und demgemäß, mit Hinzurechnung der asymmetrischen Krystalle (S. 318), die Anzahl der Klassen von Krystallen, welche sich durch ihre Symmetrie unterscheiden, zweiunddreißig.

Die erste Ableitung sämtlicher an krystallographischen Polyedern möglicher Arten der Symmetrie gab Hessel 1830 in dem Artikel »Krystall« in Gehlers physikal. Wörterbuche (1831 apart erschienen u. d. T. »Krystallometrie«; von neuem herausgeg. 1897 von Hess in Ostwalds Klassikern der exacten Wissensch. Nr. 88 u. 89). Die 1848 von Bravais (Abh. ü. symmetr. Polyeder, deutsch in Ostwalds Klassikern Nr. 17) gegebene, nicht ganz vollständige Herleitung derselben wurde später von Curie ergänzt. Ebenfalls unabhängig davon ist die Behandlung des Gegenstandes von Gadolin in seinem: Mémoire sur la déduction d'un seul principe de tous les systèmes cristallographiques 1867 (Acta Soc. scient. Fennicae, **9**, Helsingf. 1871; deutsch in Ostwalds Klassikern Nr. 75). Auf die letztere Abhandlung sei besonders verwiesen betreffs des vollständigen Beweises dafür, daß keine andern Symmetrieverhältnisse, als die oben angeführten, mit dem Rationalitätsgesetze verträglich sind[1].

Die aufgezählten 32 Symmetrieklassen sind nun genau die gleichen, welche sich aus dem Verhalten der Krystalle beim Wachstum oder bei der Auflösung (s. S. 253) und aus der Theorie der Krystallstructur (s. S. 292) ergeben. Wenn das Rationalitätsgesetz, ohne Rücksicht auf irgendeine Anschauung über die Structur der Krystalle, als Erfahrungsgesetz (s. S. 303) angenommen wird, so folgen nach obigem dieselben Klassen aus diesem Gesetze, unabhängig von irgendeiner Theorie. Wie nach dieser Überein-

1) Wie aus dem Rationalitätsgesetze, so können natürlich die möglichen Symmetriearten auch aus dem Zonengesetze abgeleitet werden, wie dies z. B. in ebenfalls elementarer Weise von Tschermak geschehen ist (Einheitliche Ableitung der Krystallisations- und Zwillingsgesetze. Zeitschr. f. Krystallogr. u. Min. 1904, **39**, 433).



stimmung zu erwarten ist, hat auch die Erfahrung niemals eine Krystallform kennen gelehrt, welche nicht einer dieser Klassen in bezug auf ihre Symmetrie entsprochen hätte.

Nach S. 324 f. zerfallen die Symmetrieklassen der Krystalle in zwei Gruppen, deren eine die Klasse der symmetrielosen Krystalle und diejenigen zehn Klassen umfaßt, welche nur Symmetrieaxen besitzen, d. h. alle der Enantiomorphie fähigen Krystalle — während die zweite Gruppe aus den achtzehn Klassen mit Ebenen der einfachen Symmetrie und den drei Klassen mit einer Axe und Ebene der zusammengesetzten Symmetrie besteht und somit alle Krystallformen enthält, deren Spiegelbilder mit ihnen zur Deckung gebracht werden können. Außerdem können aber diese 32 Klassen noch in anderer Weise in Gruppen zusammengefaßt werden, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Die Gesamtheit der gleichwertigen Flächen eines Krystalles (deren Anzahl natürlich von dem Grade seiner Symmetrie abhängt und mit letzterem steigt) soll als eine »einfache Form« bezeichnet werden. Alsdann ist klar, daß an einem Krystalle auch die Flächen mehrerer einfacher Formen auftreten können, sobald denselben nur rationale Indices zukommen. Eine derartige, von ungleichwertigen, aber krystallographisch möglichen Flächen begrenzte Krystallform nennt man eine Combination (wenn, wie in Fig. 179, alle Flächen ungleichwertig sind, ist der Krystall eine Combination von ebensoviel »Formen«, als er Flächen besitzt). Die Kante zweier ungleichwertiger Flächen bezeichnet man als »Combinationskante« der beiden Formen, denen jene Flächen angehören.

Für jede »einfache Form« ist es nun möglich (wie in der II. Abt. gezeigt wird), die Axen des Krystalles so zu wählen, daß alle gleichwertigen Flächen gleiche Indiceszahlen erhalten. Hierdurch ist man nun in den Stand gesetzt, durch die Indices einer Fläche die vollständige einfache Form zu bezeichnen, indem durch eine besondere Gestalt der die drei Indiceszahlen umgebenden Klammer angedeutet wird, daß nicht die einzelne Fläche (hkl), sondern die Gesamtheit aller damit gleichwertiger, die gleichen Indiceszahlen besitzender Flächen gemeint sein soll. Dies geschieht durch das Symbol $\{hkl\}$.

In gewissen Klassen der Krystalle mit höherer Symmetrie umfaßt die Gesamtheit der gleichwertigen Flächen zugleich die Gesamtheit aller Krystallflächen mit den gleichen Zahlenwerten der Indices; bei geringerem Grade der Symmetrie ist die Anzahl der gleichwertigen Flächen eine geringere, nämlich nur die Hälfte oder der vierte oder endlich nur der achte Teil der letzteren. Unter allen Klassen, denen überhaupt eine Symmetrie zukommt, besitzt den niedrigsten Grad offenbar diejenige mit einer zweizähligen Axe und Ebene der zusammengesetzten Symmetrie (Fig. 183), denn hier sind nur parallele Flächen gleichwertig; in dieser Klasse besteht also die vollständige einfache Form $\{hkl\}$ aus den beiden Flächen (hkl) und $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, während noch sechs andere Flächen mit denselben Indiceszahlen,

$(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}k\bar{l})$ usf., existieren, welche jedoch drei andern einfachen Formen angehören. In der Klasse der asymmetrischen Krystalle endlich ist die einzelne Fläche (hkl) zugleich die vollständige einfache Form $\{hkl\}$, es existieren also acht verschiedene einfache Formen mit den gleichen Zahlenwerten der Indices, nämlich $\{hkl\}$, $\{h\bar{k}l\}$, $\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\}$ usf.

Trifft man nun in allen 32 Klassen der Krystalle die Wahl der Axen so, daß jedesmal gleichwertige Flächen gleiche Indiceszahlen erhalten, so zeigt sich, daß diese Wahl für eine Anzahl jener Klassen in gleicher Weise getroffen werden muß, um die genannte Bedingung zu erfüllen. Die geometrischen Formen solcher Klassen stehen demnach untereinander insofern in einer näheren Beziehung, als sie auf ein gleichartiges Axensystem zu beziehen sind, und können demnach naturgemäß zu einer Gruppe zusammengefaßt werden. Eine derartige Gruppe nennt man ein Krystallsystem. Die Gesamtheit der 32 Symmetrieklassen der Krystalle zerfällt in sieben Krystallsysteme, wie folgt:

I. Das trikline Krystallsystem: drei schiefwinkelige ungleichwertige Axen (umfaßt 2 Klassen).

II. Das monokline Krystallsystem: drei ungleichwertige Axen, deren zwei einen schiefen Winkel einschließen, während die dritte zu beiden senkrecht steht (3 Klassen).

III. Das rhombische Krystallsystem: drei zueinander senkrechte ungleichwertige Axen (3 Klassen).

IV. Das trigonale Krystallsystem, mit drei zueinander gleich geneigten, gleichwertigen Axen, umfaßt alle Krystalle mit einer dreizähligen Symmetrieaxe (7 Klassen).

V. Das tetragonale Krystallsystem, mit drei zueinander senkrechten Axen, von denen zwei gleichwertig sind, umfaßt alle Krystalle mit einer vierzähligen Symmetrieaxe (7 Klassen).

VI. Das hexagonale Krystallsystem: drei in einer Ebene liegende, einander unter 60° schneidende gleichwertige Axen (von denen nur zwei als Krystallaxen in Betracht kommen) und zu diesen senkrecht eine mit ihnen nicht gleichwertige; alsdann ist die letztere eine sechszählige Symmetrieaxe (5 Klassen).

VII. Das kubische Krystallsystem, mit drei zueinander senkrechten gleichwertigen Axen, welche den Kanten des regulären Würfels (Kubus) entsprechen, umfaßt die 5 Klassen von Krystallen mit drei zueinander senkrechten zwei- oder vierzähligen und vier dreizähligen Symmetrieaxen.

Da die Symmetrie der geometrischen Form der Krystalle nach früherem nur eine Manifestation der Symmetrie ihrer physikalischen Natur sein kann, so müssen die zu einem Krystallsysteme gehörigen Klassen offenbar auch in bezug auf die physikalischen Eigenschaften durch gewisse Gesetzmäßigkeiten, welche ihnen gemeinsam sind und sie von denen anderer Krystallsysteme unterscheiden, verbunden sein. Während die Beziehungen der

physikalischen Eigenschaften zu der Symmetrie der Krystallform, wie sie sich aus der letzteren ergeben, für jede der 32 Klassen bei deren Betrachtung im einzelnen später dargelegt werden soll, möge an dieser Stelle nur eine Übersicht über jene allgemeineren Gesetzmäßigkeiten, welche für die Krystallsysteme in physikalischer Hinsicht gelten, Platz finden.

I. Das trikline System umfaßt die asymmetrischen Krystalle und diejenigen, in welchen parallele und entgegengesetzte Flächen gleichwertig sind (S. 328, Fig. 183), d. h. alle Krystalle, in welchen nur gleiche oder entgegengesetzte Richtungen gleichwertig sind. Dies entspricht nun dem Verhalten der S. 137 als der ersten Gruppe angehörig bezeichneten, optisch zweiaxigen Krystalle, welche in je zwei Richtungen, die einen von 0° und 180° verschiedenen Winkel miteinander bilden, stets verschiedenes Verhalten in bezug auf alle Eigenschaften zeigen.

II. Die monoklinen Krystalle besitzen eine Axe oder eine Ebene der einfachen Symmetrie oder beides; zu einer beliebigen Richtung gehört daher immer eine zweite, in welcher alle bivectoriellen Eigenschaften die gleichen sein müssen. Dies ist nur möglich, wenn sie die 2. Gruppe der optisch zweiaxigen Krystalle nach S. 137 bilden, welche für alle Farben einen gemeinsamen optischen Hauptschnitt haben, sowie die Gruppe derjenigen Krystalle, in welchen sich Cohäsion und Elasticität nach einer Ebene symmetrisch mit der Richtung ändern (vgl. S. 214 und 223).

III. Das rhombische System, zu welchem die Krystalle gehören, deren Symmetrieverhältnisse in den Figuren 178 und 182 dargestellt sind, umfaßt alle optisch zweiaxigen Krystalle, deren optische Eigenschaften, Cohäsion, Elasticität usw. symmetrisch sind zu drei aufeinander senkrechten Ebenen (vgl. S. 214 und 223).

Das trikline, das monokline und das rhombische Krystallsystem umfassen also die Gesamtheit der optisch zweiaxigen Krystalle und sie entsprechen genau den drei Gruppen, in welche die letzteren in bezug auf die bivectoriellen Eigenschaften zerfallen.

IV. Die trigonalen Krystalle besitzen drei, zur singulären dreizähligen Axe gleich geneigte, gleichwertige Richtungen; diese können optisch nur dann gleichwertig sein, wenn die Indexfläche ein Rotationsellipsoid und die dreizählige Symmetrieaxe die optische Axe ist. Aus S. 213 geht ferner hervor, daß die Krystalle dieses Systemes nach einem Rhomboeder oder einem hexagonalen Prisma oder nach der zur dreizähligen Axe senkrechten Ebene spalten, sowie aus S. 222, daß die Dreizähligkeit dieser Richtung auch in den Elasticitätsverhältnissen hervortritt.

V. Die tetragonalen Krystalle besitzen vier, zur singulären vierzähligen Axe gleich geneigte, gleichwertige Richtungen, müssen daher ebenfalls optisch einaxig sein, und ihre optische Axe muß der vierzähligen Axe parallel sein; ihre Cohäsions- und Elasticitätsverhältnisse (S. 213 und

S. 222 IVa und b) entsprechen ebenfalls der Symmetrie nach einer vierzähligen Axe.

VI. Die hexagonalen Krystalle zeigen das gleiche Verhältnis in je sechs zur singulären sechszähligen Symmetrieaxe gleich geneigten Richtungen, daher jene Axe ebenfalls einzige optische Axe sein muß, während die Spaltbarkeit (s. S. 212) nur nach einer hexagonalen Doppelpyramide, ebensolchem Prisma oder nach der Basis gehen kann, und die Dehnungsfläche die Gestalt einer Rotationsfläche (s. S. 221) mit der sechszähligen Axe als Rotationsaxe besitzt.

Das trigonale, das tetragonale und das hexagonale Krystallsystem umfassen demnach die Gesamtheit der optisch einaxigen Krystalle.

VII. Die kubischen Krystalle sind nach drei zueinander senkrechten Richtungen gleichwertig, repräsentieren also den Fall, in welchem die drei Axen des optischen Indexellipsoids gleich groß sind, d. h.:

Das kubische Krystallsystem umfaßt die einfachbrechenden Krystalle.

Wie aus dieser Zusammenstellung hervorgeht, ist die Einteilung der Krystalle in sieben Krystallsysteme identisch mit derjenigen nach ihren Cohäsionsverhältnissen, in bezug auf welche sie in die S. 210—216 (in anderer Reihenfolge) behandelten sieben Gruppen zerfallen. Ebenso sind diese Gruppen identisch mit denjenigen der Raumgitter der Krystallstructur (S. 277 f.).

Im folgenden ist nun eine Übersicht der sämtlichen 32 Symmetrieklassen, nach den Krystallsystemen so geordnet, wie sie in der II. Abteilung im einzelnen beschrieben werden sollen, gegeben. Der Name, mit welchem jede Klasse bezeichnet ist, bezieht sich auf denjenigen der allgemeinsten, in der betreffenden Klasse möglichen, einfachen Form und wird in der speciellen Behandlung derselben seine Erläuterung finden. Will man nun die Zugehörigkeit eines Krystalles zu irgendeiner der hier aufgezählten Klassen angeben, so kann man dies durch Verbindung des Namens derselben mit dem Namen des Systemes, z. B. ist ein »rhombisch pyramidaler« Krystall ein solcher der 7., ein »tetragonal pyramidaler« ein solcher der 10. Klasse usf. Endlich muß noch bemerkt werden, daß für die drei Systeme der optisch einaxigen Krystalle eine andere Reihenfolge gewählt ist, als im vorhergehenden, weil die erste Klasse der tetragonalen Krystalle sich durch das Vorhandensein einer zweizähligen Symmetrieaxe näher an diejenigen der drei ersten Systeme anschließt, andererseits aber die trigonalen Krystalle den hexagonalen so nahe verwandt sind, daß sie (wenn auch weniger naturgemäß) auf das gleiche Axensystem bezogen werden können und daher vielfach mit ihnen zu einem einzigen Krystallsysteme zusammengefaßt werden; die Trennung dieses in ein trigonales und ein hexagonales ist sogar mit einer gewissen Willkür verbunden, weil die Krystalle mit einer sechszähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie,

welche nach S. 329 zugleich eine dreizählige der einfachen Symmetrie ist, deshalb mit gleichem Rechte zum hexagonalen, wie zum trigonalen Systeme gerechnet werden können. Aus diesen Gründen empfiehlt es sich, das tetragonale Krystallsystem voranzuschicken und das trigonale und hexagonale unmittelbar aufeinander folgen zu lassen.

I. Triklines Krystallsystem.

1. Asymmetrische Klasse. Keine Symmetrie.
2. Pinakoidale Klasse. Eine zweizählige Axe und dazu senkrechte Ebene der zusammengesetzten Symmetrie.

II. Monoklines Krystallsystem.

3. Sphenoidische Klasse. Eine zweizählige Symmetrieaxe.
4. Domatische Klasse. Eine Symmetrieebene.
5. Prismatische Klasse. Eine Symmetrieebene und eine dazu senkrechte zweizählige Symmetrieaxe.

III. Rhombisches Krystallsystem.

6. Bisphenoidische Klasse. Drei zueinander senkrechte zweizählige Symmetrieaxen.
7. Pyramidale Klasse. Eine zweizählige Axe und zwei ihr parallele, einander unter 90° schneidende Ebenen der Symmetrie.
8. Bipyramidale Klasse. Drei zueinander senkrechte Symmetrieebenen und drei zueinander senkrechte zweizählige Symmetrieaxen.

IV. Tetragonales Krystallsystem.

9. Bisphenoidische Klasse. Eine vierzählige Axe und dazu senkrechte Ebene der zusammengesetzten Symmetrie.
10. Pyramidale Klasse. Eine vierzählige Axe der einfachen Symmetrie.
11. Skalenodrische Klasse. Eine vierzählige Axe und dazu senkrechte Ebene der zusammengesetzten Symmetrie; zwei in der letzteren gelegene, zueinander senkrechte, zweizählige Symmetrieaxen; zwei Symmetrieebenen, welche einander in der vierzähligen Axe schneiden und die Winkel der zweizähligen Axen halbieren.
12. Trapezoedrische Klasse. Eine vierzählige Symmetrieaxe und vier zweizählige in der zu jener senkrechten Ebene.
13. Bipyramidale Klasse. Eine vierzählige Axe und eine dazu senkrechte Ebene der einfachen Symmetrie.
14. Ditetragonal-pyramidale Klasse. Eine vierzählige Symmetrieaxe und vier in derselben einander schneidende Symmetrieebenen.
15. Ditetragonal-bipyramidale Klasse. Außer den vorigen eine Symmetrieebene und vier zweizählige Symmetrieaxen, sämtlich senkrecht zur vierzähligen Axe.

V. Trigonales Krystallsystem.

16. Pyramidale Klasse. Eine dreizählige Symmetrieaxe.
17. Rhomboedrische Klasse. Eine dreizählige Axe der einfachen, welche zugleich sechszählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie ist.
18. Trapezoedrische Klasse. Eine dreizählige Symmetrieaxe und drei zweizählige in der zu jener senkrechten Ebene.
19. Bipyramidale Klasse. Eine dreizählige Axe und eine dazu senkrechte Ebene der einfachen Symmetrie.
20. Ditrigonal-pyramidale Klasse. Eine dreizählige Symmetrieaxe und drei in derselben einander schneidende Symmetrieebenen.
21. Ditrigonal-skalenoedrische Klasse. Außer den vorigen drei zweizählige Symmetrieaxen in der zur dreizähligen senkrechten Ebene.
22. Ditrigonal-bipyramidale Klasse. Außer den Symmetrieelementen der 20. Klasse noch eine Symmetrieebene und drei zweizählige Symmetrieaxen, sämtlich senkrecht zur dreizähligen Axe.

VI. Hexagonales Krystallsystem.

23. Pyramidale Klasse. Eine sechszählige Symmetrieaxe.
24. Trapezoedrische Klasse. Eine sechszählige Symmetrieaxe und sechs zweizählige in der zu jener senkrechten Ebene.
25. Bipyramidale Klasse. Eine sechszählige Axe und eine dazu senkrechte Ebene der einfachen Symmetrie.
26. Dihexagonal-pyramidale Klasse. Eine sechszählige Symmetrieaxe und sechs in derselben einander schneidende Symmetrieebenen.
27. Dihexagonal-bipyramidale Klasse. Außer den vorigen eine Symmetrieebene und sechs zweizählige Symmetrieaxen, sämtlich senkrecht zur sechszähligen Axe.

VII. Kubisches Krystallsystem.

28. Tetraedrisch-pentagondodekaedrische Klasse. Drei gleichwertige, zueinander senkrechte zweizählige Symmetrieaxen, und vier, ebenfalls gleichwertige, dreizählige, gegen jene gleich geneigt.
29. Pentagon-ikositetraedrische Klasse. Drei gleichwertige, zueinander senkrechte vierzählige Symmetrieaxen, vier dreizählige wie vorher, endlich sechs zweizählige, welche den Winkel zweier vierzähliger halbieren.
30. Dyakisdodekaedrische Klasse. Außer den Symmetrieelementen der Klasse 28 noch drei Symmetrieebenen, senkrecht zu den zweizähligen Axen.

31. Hexakistetraedrische Klasse. Außer den Symmetrieelementen der Klasse 28 noch sechs Symmetrieebenen, welche die Winkel der Symmetrieebenen der vorigen Klasse halbieren.
32. Hexakisoktaedrische Klasse. Drei zueinander senkrechte vierzählige, gleichwertige Symmetrieaxen, vier dreizählige und sechs zweizählige, wie vorher; außerdem sämtliche Symmetrieebenen der Klassen 30 und 31.

Anmerkung. Daß die letzte Klasse den höchsten, an einem krystallographischen Polyeder möglichen, Grad der Symmetrie repräsentiert, folgt daraus, daß durch Hinzufügung irgendeiner weiteren Axe oder Ebene der Symmetrie die vorhandenen Symmetrieaxen sich in mehr als sechszählige verwandeln würden, wie leicht an der Hand der entsprechenden Projection einzusehen ist.

II.

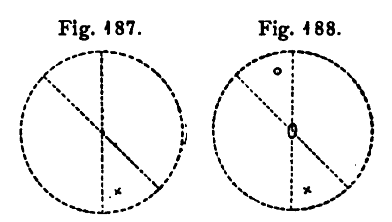
Specielle physikalische Krystallographie.

Systematische Beschreibung der Krystalle.

I. Triklines Krystallsystem.

Das trikline Krystallsystem umfaßt die asymmetrischen Krystalle (s. S. 318) und diejenigen mit einer zweizähligen Axe und dazu senkrechter Ebene der zusammengesetzten Symmetrie (s. S. 328). Projiciert man einen Krystall der ersten Klasse auf eine beliebige seiner Flächen als Ebene des Grundkreises und bezeichnet zwei beliebige Kanten in dieser Ebene durch punktierte Gerade, so erhält man die Projection Fig. 187. Wählt man die beiden eben bezeichneten Kanten als krystallographische Axen *a* und *b* (die Ebene des Grundkreises also zur Axenebene (001)), ferner zwei beliebige Krystallflächen aus der Zone der ersten und der zweiten Kante als Axenebenen (100) und (010), so wird die zur Projectionsebene schiefe Durchschnittsrichtung der beiden letzteren zur Axe *c*, und das Zeichen × deutet den Pol einer beliebigen Krystallfläche (hkl) an. Nach S. 332 ist diese zugleich die vollständige Form $\{hkl\}$. Gehört der Krystall jedoch der zweiten Klasse an, so entspricht nach S. 331 der Fläche (hkl) noch eine zweite gleichwertige $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, in Fig. 188 mit ∘ bezeichnet, welche mit ihr die einfache Form $\{hkl\}$ bildet. Im ersteren Falle existiert zu der durch einen Pol auf der Kugel bestimmten Richtung keine mit ihr gleichwertige im Krystalle, im zweiten Falle ist nur die ihr entgegengesetzte mit ihr gleichwertig, keine andere. Hiernach können die Krystalle dieser beiden Klassen sich nur durch vectorielle Eigenschaften unterscheiden, nämlich durch die Härte, polare Pyroelektricität, Auflösung (Ätzfiguren auf zwei entgegengesetzten parallelen Flächen) usw., während sie in allen bivectoriellen Eigenschaften übereinstimmen müssen. Ihr Verhalten in bezug auf die letzteren folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß in einem Krystalle dieses Systemes zwei Richtungen, welche einen andern Winkel miteinander bilden, als 0° oder 180°, niemals gleichwertig sind.

Fig. 187. Fig. 188.



Dies gilt nun in optischer Beziehung nur für diejenigen zweiaxigen Krystalle, in welchen sämtliche drei Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes für die verschiedenen Farben eine ungleiche Orientierung besitzen; denn schon bei der Coincidenz nur einer derselben für alle Farben würden, wie aus S. 121f. hervorgeht, je zwei Richtungen, deren Winkel von der gemeinschaftlichen Hauptschwingungsrichtung halbiert wird, optisch gleich-

wertig sein; der Krystall würde dann unendlich viele, paarweise gleichwertige Richtungen besitzen, welche alle möglichen Winkel miteinander einschließen. Somit müssen die triklinen Krystalle den S. 126—127 betrachteten Fall darstellen, in welchem die Dispersion der optischen Axen eine vollständig unsymmetrische ist, und durch diese Eigenschaft allein kann daher ein Krystall als unzweifelhaft zu diesem Systeme gehörig erkannt werden. Wie die Hauptschwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben eine voneinander unabhängige Orientierung besitzen, so besteht auch keine allgemeine gesetzmäßige Abhängigkeit derselben von der Stellung der Krystallflächen (mit Ausnahme der S. 215 erwähnten, häufig erkennbaren Beziehung zu den Spaltungsflächen), und ihre Orientierung ist für jeden einzelnen Fall besonders zu bestimmen. Dies kann entweder geschehen durch Beobachtung der Interferenzerscheinungen im convergenten polarisierten Lichte nach S. 127 oder durch die Messung der Schwingungsrichtungen des aus verschiedenen Flächen des Krystalles austretenden parallelen Lichtes, aus welchen man, wenn dieselben für eine genügende Zahl verschieden orientierter Platten des Krystalles bestimmt sind, die Winkel berechnen kann, welche die drei Hauptschwingungsrichtungen mit den Krystallflächen, denen die Platten parallel sind, bilden. Diese Bestimmung ist natürlich für jede Farbe besonders auszuführen, da, wie aus S. 110 hervorgeht, eine von zwei parallelen Krystallflächen gebildete Platte im vorliegenden Falle je nach ihrer Orientierung nicht nur verschiedene Schiefe der Schwingungsrichtungen in bezug auf die die Platte begrenzenden Kanten, sondern auch verschiedene Dispersion der Schwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben zeigen muß. Die letztere Erscheinung im parallelen Lichte kann daher ebenso, wie die unsymmetrische Dispersion der Axenbilder im convergenten Lichte, dazu dienen, einen triklinen Krystall als solchen zu erkennen. Das Nähere über diese verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen in einem triklinen Krystalle siehe in der III. Abteilung.

Die thermischen Verhältnisse der triklinen Krystalle entsprechen, wie schon aus den betreffenden Abschnitten der I. Abteilung hervorgeht, vollkommen den optischen. Was zunächst die Wärmeleitungsfähigkeit betrifft, so folgt die unsymmetrische Lage der Axen des Wärmeleitungsellipsoides aus dem Umstande, daß die große und kleine Axe der isothermen Fläche, welche durch den Sénarmontschen Versuch auf irgendeiner Krystallfläche erhalten wird, auf jeder derselben eine andere Schiefe gegen die sie begrenzenden Kanten besitzt, wobei es natürlich nicht ausgeschlossen ist, daß der Winkel dieser Schiefe auch einen sehr kleinen Wert annehmen kann (s. weiterhin unter »Kupfervitriol«). Da ebenso die Richtungen der größten, mittleren und kleinsten Ausdehnung durch die Wärme in keiner allgemeinen gesetzmäßigen Beziehung zur Krystallform stehen, so ist deren Orientierung für jeden triklinen Krystall und, wie aus S. 189 hervorgeht, für jedes Temperaturintervall besonders zu bestimmen. Da nun die

Elemente eines triklinen Krystalles aus den Winkeln zwischen je vier Flächen berechnet werden können, deren Stellung in bezug auf die thermischen Axen desselben, je nach der Wahl der vier Elementarflächen, eine mehr oder weniger verschiedene ist, so müssen die Änderungen, welche die Elemente: $a:b$, $b:c$, α, β, γ durch eine Änderung der Temperatur erfahren, für jede dieser fünf Größen andere sein, und da gesetzmäßig keine Fläche eines triklinen Krystalles einer thermischen Axe oder einem thermischen Hauptschnitte parallel ist, so müssen überhaupt alle Winkel eines triklinen Krystalles mit der Temperatur variieren, und zwar jeder in anderer Weise, je nach der Stellung der ihn einschließenden Krystallflächen zu den thermischen Axen des Krystalles[1]), während natürlich, wie bei jeder homogenen Deformation, die Indices und alle von diesen abhängigen Verhältnisse erhalten bleiben (s. S. 310). Wählt man daher zu Axen des Krystalles zwei seiner Kanten, welche sehr nahe 90° miteinander bilden, so wird es immer eine Temperatur geben, bei welcher (falls der Krystall bei derselben existenzfähig ist) jener Winkel genau 90° beträgt, ohne daß diesem speziellen Werte eine besondere geometrische oder physikalische Bedeutung zukäme. Hieraus geht hervor, daß die S. 332 gegebene Definition des triklinen Krystallsystemes so zu verstehen ist, daß zu ihm alle Krystalle mit drei »im allgemeinen schiefwinkeligen und ungleichen Axen« gehören. Aus den thermischen Ausdehnungsverhältnissen der triklinen Krystalle folgt ferner, daß auch die Lage aller drei Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes mit der Temperatur variiert (vgl. S. 195).

In bezug auf das Verhalten gegenüber mechanischen Kräften stellen die triklinen Krystalle ebenso, wie in bezug auf die bisher betrachteten physikalischen Eigenschaften, den allgemeinsten möglichen Fall dar, welcher betreffs der Elasticitätsverhältnisse S. 223 VII, betreffs der Cohäsion S. 215 behandelt wurde, wonach diese Krystalle nur singuläre Minima der Cohäsion besitzen und daher niemals nach mehreren Flächen gleich vollkommen spalten. Die Eigenschaft der Spaltbarkeit ist nun von besonderer Wichtigkeit deshalb, weil die Structur der triklinen Krystalle auch nach der Theorie der regelmäßigen Punktsysteme (s. S. 284) sich auf diejenige nach einfachen Raumgittern (und zwar solchen, welche den allgemeinen S. 273 entwickelten Fall repräsentieren) reduciert und daher hier eine besonders nahe Beziehung zur Spaltbarkeit zu erwarten ist. Aus der S. 275 bis 276 angestellten Betrachtung würde daher folgen, daß in einem triklinen Krystalle die Ebene der vollkommensten Spaltbarkeit parallel den am dichtesten mit Punkten besetzten Netzebenen des Elementarparallelepipedes (s. S. 277) ist, und wenn mehrere Minima der Cohäsion zu beobachten sind, daß die Ebene der zweiten, weniger vollkommenen Spaltbarkeit denjenigen

[1]) Daß Richtung und Größe der thermischen Axen aus der Messung der Änderung einer größeren Anzahl von Winkeln berechnet werden können, wurde bereits S. 189 erwähnt.



Netzebenen des Elementarparallelepipedes entspricht, in welchen die Flächendichtigkeit geringer als in der vorigen, aber größer als in allen übrigen ist, usf. Nach der S. 293 definierten allgemeinen Theorie der Krystallstructur besteht ein trikliner Krystall aus so vielen, geometrisch identischen, ineinander gestellten, triklinen Raumgittern, als das chemische Molekül des Körpers Atome enthält; die Art der Ineinanderstellung dieser Raumgitter entspricht der gegenseitigen Stellung der Atome in den chemischen Molekülen des Körpers, durch deren parallele Aneinanderlagerung der Krystall entsteht. Besitzt nun eine der Netzebenen des Elementarparallelepipedes eine weit größere Flächendichtigkeit, als alle andern, so müssen auch die ihr entsprechenden Schichten der Krystallstructur (s. S. 295) die größte Dichtigkeit, also die größte tangentiale Cohäsion und im allgemeinen auch den größten Abstand voneinander besitzen; diese Ebene müßte also diejenige der vollkommensten Spaltbarkeit und nach S. 294 im allgemeinen zugleich diejenige sein, welche sich am leichtesten als Krystallfläche bildet. Dieser Schluß wird nun durch die Beobachtung vollständig bestätigt, denn, wie aus der weiterhin folgenden Beschreibung triklin krystallisierender Substanzen, welche besonders ausgezeichnete Minima der Cohäsion besitzen, hervorgeht, ist die Ebene einer sehr vollkommenen Spaltbarkeit stets eine groß ausgebildete und selbst unter verschiedenen Krystallisationsbedingungen meist die weitaus vorherrschende Krystallfläche.

Der Unterschied, welchen die beiden Klassen der triklinen Krystalle insofern darbieten, als die der einen in zwei entgegengesetzten Richtungen sich verschieden, die der andern dagegen gleich verhalten, muß nach der hier adoptierten Erklärung ihrer Structur auf der Art der Ineinanderstellung der Raumgitter, d. h. auf der Configuration des chemischen Moleküls, beruhen. Ist diese so beschaffen, daß die periodisch sich wiederholenden Schichten, aus denen der Krystall aufgebaut ist, nach ihren beiden entgegengesetzten Seiten gleiche Kräfte ausüben, so werden die beiden, ihnen parallelen, entgegengesetzten Krystallflächen sich nicht nur unter allen Umständen gleich leicht bilden, sondern auch in jeder Beziehung gleiches Verhalten zeigen. Ist eine solche Gleichwertigkeit beider Seiten der Schichten der Krystallstructur nicht vorhanden, so werden zwar diejenigen beiden entgegengesetzten Krystallflächen, welche den Schichten größter Dichtigkeit parallel sind, bei der Bildung des Krystalles in der gleichen Weise begünstigt sein, daher im allgemeinen am Krystalle in gleicher Größe als vorherrschende Flächen auftreten, sie müssen sich aber voneinander durch ihre Wachstumsgeschwindigkeit, Auflösung (Ätzfiguren) u. a. vectorielle Eigenschaften unterschieden. Der zweite Fall liegt nun notwendig vor, wenn schon das chemische Molekül eine asymmetrische Structur besitzt und die Lösung des Körpers daher die Polarisationsebene des Lichtes dreht. Infolgedessen gehören notwendig diejenigen optisch activen Substanzen (wie die weinsauren Salze), welche triklin krystallisieren, der asymmetrischen Klasse an und existieren in zwei enantiomorphen

Modifikationen (s. S. 325). Doch ist natürlich auch bei andern Körpern eine asymmetrische Krystallstructur nicht ausgeschlossen.

Bei der Zwillingsbildung trikliner Krystalle kann, da weder eine Ebene noch eine Axe der einfachen Symmetrie existiert, nach S. 270 jede beliebige Krystallfläche Zwillingsebene und ebenso die Normale zu jeder beliebigen Fläche Zwillingsaxe sein. Sind die Krystalle asymmetrisch, so entsprechen einer und derselben Fläche zwei verschiedene Zwillingsgesetze: a) ist die Krystallfläche Zwillingsebene, so ist in bezug auf dieselbe der eine Krystall das Spiegelbild des andern, es resultiert also ein Zwilling zweier enantiomorpher Krystalle, eines rechten und eines linken; b) ist dagegen die Normale zu der Krystallfläche Zwillingsaxe, so sind zwei congruente (zwei rechte oder zwei linke) Krystalle so miteinander verwachsen, daß die Stellung des einen durch eine Drehung von 180° um die Normale zu der beiden gemeinsamen Krystallfläche erhalten wird. Gehören die Krystalle der pinakoidalen Klasse an, so tritt der S. 270 oben erwähnte Fall ein, daß jene beiden Zwillingsgesetze identisch sind, weil dann die Spiegelung nach einer Krystallfläche und die Drehung von 180° um ihre Normale zu dem gleichen Resultate führen. Außer diesen sind jedoch noch andere Zwillingsgesetze möglich, bei denen ebenfalls die beiden Krystalle eine ihrer Flächen gemeinsam haben und der eine durch eine Drehung um 180° in die Stellung des andern übergeht; die Zwillingsaxe ist alsdann entweder c) eine in der gemeinsamen Krystallfläche liegende Kante oder d) die in der gemeinsamen Krystallfläche liegende Senkrechte zu jener Kante. Je nach dem einen oder andern dieser Zwillingsgesetze erhält man bei triklinen Krystallen zwei verschiedene gegenseitige Orientierungen der Krystalle, aber in beiden Fällen haben die beiden Krystalle außer einer Ebene auch eine in derselben liegende Kante gemeinsam. Ebenso wie die gemeinsame Krystallfläche, so kann auch die gemeinsame Kante in derselben eine beliebige sein, aber nach den S. 269—270 angestellten Betrachtungen sind die Bedingungen zur Zwillingsbildung am günstigsten, wenn nicht nur die gemeinsame Krystallfläche die Ebene der vollkommensten Spaltbarkeit, sondern auch die gemeinsame Kante die Richtung der größten Cohäsion, d. h. im Falle einer zweiten guten Spaltbarkeit die Durchschnittsrichtung beider Spaltungsebenen, ist.

In der Tat zeigen nun diejenigen triklinen Krystalle, welche eine sehr vollkommene Spaltbarkeit besitzen, solche Zwillingsbildungen, bei denen die betreffende Krystallfläche Zwillingsebene oder wenigstens beiden gemeinsam ist (Beispiel: Borsäure), und die Krystalle mit einer zweiten deutlichen Spaltbarkeit bilden Zwillinge, welche die Kante der beiden Spaltungsebenen gemeinsam haben (Beispiele: Disthen, Feldspat).

Durch die Eigenschaften der Cohäsion und der Zwillingsbildung, sowie durch die regelmäßige Wiederkehr gewisser Flächen unter verschiedenen Krystallisationsbedingungen kann nach S. 304—305 auf das der Structur



eines krystallisierten Körpers zugrunde liegende Raumgitter geschlossen werden. Nach diesem Principe sind die Elemente der als Beispiele der einzelnen Symmetrieklassen im folgenden aufgeführten Substanzen so gewählt worden, daß die Ebenen, welchen auf Grund der bisherigen Beobachtungen die größte Flächendichtigkeit als die wahrscheinlichste zuzuschreiben ist, als Ebenen des Elementarparallelepipedes betrachtet und als Axenebenen genommen wurden.

1. Asymmetrische Klasse.

(Triklin-hemiedrische, hemipinakoidale[1]) oder pediale Klasse.)

Jede einzelne Fläche des Krystalles stellt eine vollständige »einfache Form« dar, welche daher, wenn man sie in analoger Weise, wie diejenigen der übrigen Klassen, mit einem dem Griechischen entnommenen Namen belegen will, als »Pedion« (*το πεδίον*, die Ebene) bezeichnet werden muß.

Wenn für einen Krystall dieser Klasse die Wahl der Axen und Grundform, wobei die S. 304f. angegebenen Principien zu berücksichtigen sind, getroffen ist, so können nunmehr alle an demselben beobachteten Formen nicht nur durch ihre Indices bezeichnet, sondern auch benannt werden, was in der einfachsten und consequentesten Weise nach einem im wesentlichen von E. von Fedorow vorgeschlagenen Principe so geschieht, daß die den drei Axenebenen parallelen Formen als 1., 2., 3. Form der entsprechenden Klasse, die einer Axe parallelen als solche 1., 2., 3. Art und die keiner Axe parallelen als Formen 4. Art bezeichnet werden. Für die Formen der asymmetrischen Krystalle ergeben sich dann folgende Benennungen:

$\{100\}$ ist das erste positive, $\{\bar{1}00\}$ ist das erste negative Pedion
$\{010\}$ ist das zweite positive, $\{0\bar{1}0\}$ das zweite negative Pedion
$\{001\}$ ist das dritte positive, $\{00\bar{1}\}$ das dritte negative Pedion
$\{0kl\}$ ist ein Pedion erster Art
$\{h0l\}$ ist ein Pedion zweiter Art
$\{hk0\}$ ist ein Pedion dritter Art
$\{hkl\}$ ist ein Pedion vierter Art[2]).

Ebenso wie $\{\bar{1}00\}$, $\{0\bar{1}0\}$ und $\{00\bar{1}\}$ von den entsprechenden positiven Formen völlig unabhängig sind, — welche freilich gewöhnlich mit ihnen zusammen an den Krystallen auftreten, weil sie in analoger Weise bei der Bildung des Krystalles begünstigt sind (vgl. S. 344), — so ist auch die zu irgendeinem Pedion 1., 2., 3. oder 4. Art parallele und entgegengesetzte Fläche eine von ihr unabhängige Form, nur daß die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Auftretens beider um so geringer wird, je weniger einfach

1) Betreffs dieser Bezeichnungen s. den Anhang zur II. Abteilung.

2) Besitzt eine derartige Form die Indices $\{111\}$ oder $\{\bar{1}11\}$ usf., so kann man sie als ein primäres Pedion 4. Art bezeichnen, ebenso $\{011\}$ als ein primäres Pedion 1. Art usf.

die Werte der Indices derselben sind. Dieses Verhältnis der entgegengesetzten Flächen bestätigt sich an den im folgenden angeführten Beispielen und tritt besonders hervor an dem in Fig. 175 abgebildeten Krystalle, welcher die Gesamtheit aller an dem betreffenden Salze beobachteter Formen darstellt. Die Folge desselben ist, daß trikline Krystalle, welche fast nur aus den einfachen Combinationen der den Flächen des Elementarparallelepipedes parallelen Formen bestehen, gewöhnlich die entgegengesetzten Flächen in ungefähr gleicher Entwickelung zeigen und daher, solange nicht Differenzen derselben in der Oberflächenbeschaffenheit, Art des Wachstums und der Auflösung (Ätzfiguren) und andern Eigenschaften sicher nachgewiesen sind, für solche der zweiten Klasse, in welcher die entgegengesetzten Flächen gleichwertig sind, gehalten werden. Es dürften daher, abgesehen von den optisch activen, noch manche Substanzen, welche man bisher der 2. Klasse der Krystalle zugezählt hat, zu den hier betrachteten gehören.

Beispiele.

Optisch inactive Körper.

Thioschwefelsaures (unterschwefligsaures) Calcium $S_2O_3Ca.6H_2O$. $a:b:c = 0{,}7847:1:1{,}5179$; $\alpha = 72^\circ 24'$, $\beta = 98^\circ 32'$, $\gamma = 92^\circ 40'$[1])

Fig. 189.

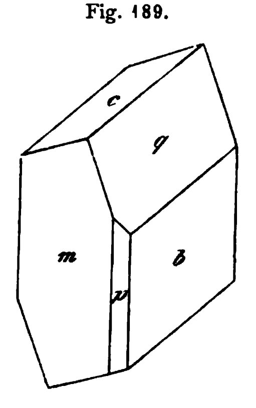
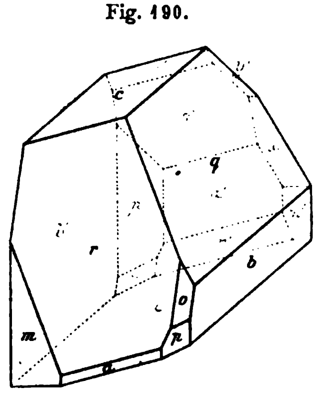


Fig. 190.



(G. Wulff). Die Krystalle der einfachen Combination Fig. 189, aus mit Alkohol versetzter Lösung erhalten, mit den Formen $m = \{1\bar{1}0\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $q = \{011\}$, $c = \{001\}$, ferner $\{00\bar{1}\}$, $\{0\bar{1}\bar{1}\}$ und $\{0\bar{1}0\}$, sind gewöhnlich an der Rückseite nicht ausgebildet; aus reiner wässeriger Lösung flächenreichere Krystalle der Combination Fig. 190: $b' = \{0\bar{1}0\}$, $c' = \{00\bar{1}\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $c = \{001\}$, $t' = \{\bar{1}02\}$, $s' = \{\bar{1}01\}$, $a' = \{\bar{1}00\}$, $r' = \{\bar{1}0\bar{1}\}$, $m = \{1\bar{1}0\}$, $p' = \{\bar{1}\bar{1}0\}$, $m' = \{\bar{1}10\}$, $p = \{110\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$, $x' = \{\bar{1}11\}$, $y' = \{\bar{1}12\}$, $a = \{100\}$. G. Wulff beobachtete noch $\{10\bar{1}\}$, $\{10\bar{2}\}$ und $\{012\}$, aber niemals $\{0\bar{1}\bar{2}\}$ und $\{1\bar{1}\bar{2}\}$. Nähere Untersuchungen über die Ungleichwertigkeit entgegengesetzter Flächen, z. B. ihrer Ätzfiguren, liegen nicht vor. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen. Optisch ist nur bekannt, daß die Schwingungsrichtungen der wichtigsten Flächen schief zu deren Kanten liegen.

1) Die Axenwinkel beziehen sich stets auf den rechten oberen vorderen Oktanten.

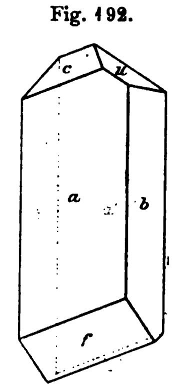
Essig-salpetersaures Strontium $[C_2H_3O_2]_2Sr.[NO_3]_2Sr.3H_2O$.
$a : b : c = 0{,}5200 : 1 : 1{,}1697$; $\alpha = 96^\circ 39'$, $\beta = 76^\circ 43'$, $\gamma = 91^\circ 41'$ (V. von Zepharovich). Combination (Fig. 191): $c = \{001\}$, c' (in der Figur nicht bezeichnet) $= \{00\bar{1}\}$, $a = \{100\}$, $a' = \{\bar{1}00\}$, $r = \{01\bar{1}\}$, $r' = \{0\bar{1}1\}$, $b' = \{0\bar{1}0\}$, $q = \{011\}$, $m = \{1\bar{1}0\}$, $m' = \{\bar{1}10\}$. Vollkommen spaltbar nach $\{001\}$, weniger vollkommen nach $\{010\}$.

Fig. 191.

Optisch active Körper.

Saures rechtsweinsaures Strontium $[C_4H_4O_6H]_2Sr.4H_2O$ (nach Traube). $a:b:c = 1{,}2136:1:0{,}9630$; $\alpha = 66^\circ 53'$, $\beta = 102^\circ 48'$, $\gamma = 105^\circ 40'$ (A. Scacchi). Combination (Fig. 192): $a = \{100\}$, $a' = \{\bar{1}00\}$, $b = \{010\}$ mit gerundeten Erhöhungen, $b' = \{0\bar{1}0\}$ fein gestreift nach der Kante $b : f$, $f = \{10\bar{1}\}$, $c = \{001\}$, $u = \{\bar{1}22\}$, $c' = \{00\bar{1}\}$. Verschiedene andere Combinationen beobachtete Scacchi, welcher fand, daß die immer vorherrschenden Flächen a und a' bei recht regelmäßigen Krystallen zwar keinen Unterschied ihrer Beschaffenheit zeigen, auf $a\{100\}$ jedoch leicht beim Fortwachsen divergentschalige Auflagerungen entstehen, welche sich niemals auf $a'\{\bar{1}00\}$ bilden, auch wenn diese Fläche genau in die gleiche Situation gebracht wird. Sämtliche von Scacchi an verschiedenen Krystallisationen dieses Salzes beobachteten Formen sind in Fig. 175 S. 316 vereinigt und diese Combination als Beispiel des allgemeinsten Falles eines krystallographischen Polyeders ausführlich behandelt (vgl. auch S. 324—325). Spaltbarkeit nach $\{100\}$ vollkommen. Durch dieselbe Fläche beide Axen im Konoskope am Rande des Gesichtsfeldes sichtbar; ihre Mittellinie wenig geneigt gegen die Normale zu $\{100\}$; die der Ebene der Axen entsprechende Schwingungsrichtung auf a geht nahe der Kante ac parallel und bildet mit Kante ab etwa 67° (Groth). Die Flächen (100), $(00\bar{1})$ und $(1\bar{1}0)$ zeigen, nach der Kundtschen Methode (s. S. 238) untersucht, positive, die Flächen $(\bar{1}00)$, (001) und (110) negative Elektricität (Traube).

Fig. 192.



2. Pinakoidale Klasse.

(Triklin-holoedrische Klasse.)

Wie aus Fig. 188 (S. 341) hervorgeht, bedingt die Existenz einer zweizähligen Axe und dazu senkrechten Ebene der zusammengesetzten Symmetrie, in welchem Falle die letztere irgendeine beliebige Krystallfläche sein kann, die Gleichwertigkeit je zweier entgegengesetzter Flächen. Die »einfache Form« dieser Klasse ist also ein Paar paralleler Flächen, ein sogenanntes »Pinakoid«, daher die Klasse als »pinakoidale« zu bezeichnen ist. Die Benennung der einzelnen Formen nach getroffener Wahl der Axen erfolgt nun nach demselben Principe, wie in der 1. Klasse, nur daß hier der Gegensatz

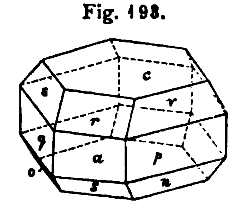
positiver und negativer Flächen fortfällt. Es ergeben sich daher folgende Benennungen:

{100} erstes Pinakoid
{010} zweites Pinakoid
{001} drittes Pinakoid
{0kl} Pinakoid erster Art
{h0l} Pinakoid zweiter Art
{hk0} Pinakoid dritter Art
{hkl} Pinakoid vierter Art

Beispiele.

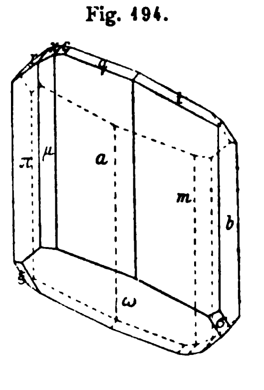
Borsäure $B[OH]_3$. $a:b:c = 1,7329:1:0,9228$; $\alpha = 92°30'$, $\beta = 104°25'$, $\gamma = 89°49'$ (Haushofer). Die ausgezeichnet pseudohexagonalen Krystalle (Fig. 193) zeigen folgende Formen: $c = \{001\}$, $a = \{100\}$, $p = \{110\}$, $q = \{1\bar{1}0\}$, $\nu = \{111\}$, $\varepsilon = \{1\bar{1}1\}$, $r = \{101\}$, $o = \{1\bar{1}\bar{1}\}$, $s = \{10\bar{1}\}$, $n = \{11\bar{1}\}$. Zwillingsbildung nach (001) häufig (s. S. 271). Spaltbarkeit sehr vollkommen nach {001}. Erste Mittellinie und Ebene der optischen Axen fast genau senkrecht zur Spaltungsebene und zur Kante cr, $2E = 10° - 12°$ circa, Dispersion unmerklich. Hiernach stehen die Krystalle auch in optischer Beziehung den hexagonalen sehr nahe (vgl. auch S. 215). Doppelbrechung negativ.

Fig. 193.



Schwefelsaures Kupfer (Kupfervitriol) $= SO_4Cu.5H_2O$. $a:b:c = 0,5721:1:0,5554$; $\alpha = 82°5'$, $\beta = 107°8'$, $\gamma = 102°41'$ (nach unveröff. Beob. von Barker ber.). Combination (Fig. 194): $m = \{110\}$, $\mu = \{1\bar{1}0\}$, $\pi = \{1\bar{3}0\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $\varkappa = \{0\bar{1}1\}$, $t = \{021\}$, $\tau = \{0\bar{2}1\}$, $\omega = \{1\bar{1}\bar{1}\}$, $\sigma = \{12\bar{1}\}$, $\xi = \{1\bar{2}\bar{1}\}$. Spaltbar sehr unvollkommen nach m und μ. Durch Bestimmung der Winkel der optischen Axen mit mehreren Krystallflächen ergibt sich, daß die erste Mittellinie im vorderen rechten oberen Oktanten liegt und die zu derselben (für mittlere Farben) normale Ebene mit $\{\bar{1}11\}$ 72°53′, mit $\{1\bar{1}0\}$ 81°31′ und mit {110} 43°41′ einschließt: $2V = 56°2'$, $2E = 93°6'$; Dispersion $\varrho < v$, deutlich; Doppelbrechung —. Hauptbrechungsindices für die D-Linie:

Fig. 194.



$$\alpha = 1,5140, \quad \beta = 1,5368, \quad \gamma = 1,5433 \text{ (Kohlrausch).}$$

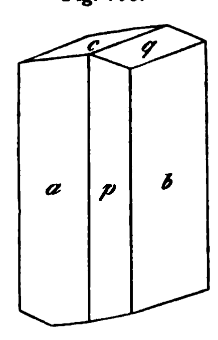
Nach den Beobachtungen von Pape ist das Verhältnis der Axen des Wärmeleitungsellipsoides $= 0,939 : 0,860 : 1$, und da die letzte nahe parallel der Krystallaxe c, so sind auf den verticalen Flächen die Sénarmontschen Figuren am meisten gestreckte Ellipsen; die von demselben Autor beobachteten, scheinbar elliptischen Verwitterungsfiguren von ähnlicher Orientierung

sind nach Blasius unvollkommene und daher gerundete Zersetzungsfiguren (s. S. 251).

Isomorph mit Kupfervitriol, mit ganz ähnlichen Winkeln und übereinstimmendem Habitus, ist der Manganvitriol $SO_4Mn.5H_2O$.

Dichromsaures Kalium $= Cr_2O_7K_2$. $a:b:c = 0{,}5575:1:0{,}5511$; $\alpha = 82^\circ 0'$, $\beta = 90^\circ 51'$, $\gamma = 83^\circ 47'$ (Schabus). Combination (Fig. 195): $b = \{010\}$, $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $p = \{110\}$. Spaltbarkeit $\{010\}$ sehr vollkommen, $\{100\}$ und $\{001\}$ deutlich. Die Ebene der optischen Axen ist fast senkrecht zu (001) und fällt zwischen die Ebenen (100) und $(0\bar{1}0)$; nach den Messungen von Dufet bildet der Pol der 1. Mittellinie mit dem von (100) $77^\circ 5'$, $(0\bar{1}0)$ $23^\circ 5'$, $(00\bar{1})$ $76^\circ 21'$, der Pol der 2. Mittellinie bzw. (100) $86^\circ 27'$, $(0\bar{1}0)$ $68^\circ 6'$, (001) $13^\circ 43'$; $\alpha = 1{,}7202$, $\beta = 1{,}7380$, $\gamma = 1{,}8197$, $2E = 98^\circ 58'$ (alles für die Linie D); Dispersion des Winkels der Axen $\varrho > v$, für beide etwa gleich, aber die Axenebenen stark dispergiert. Durch die Spaltungsflächen $\{010\}$ ist eine Axe fast in der Mitte des Gesichtsfeldes sichtbar, daher Spaltungsplatten dieses Salzes besonders geeignet sind zur Beobachtung des Lichtringes der konischen Refraction (s. S. 109 Anm.) Doppelbrechung +.

Fig. 195.

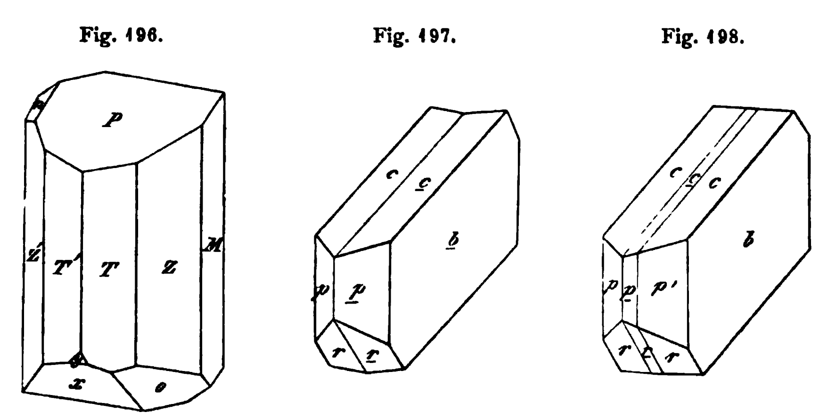


Disthen (Cyanit) $= SiO_5Al_2$. $a:b:c = 0{,}8994:1:0{,}7090$; $\alpha = 90^\circ 5\frac{1}{2}'$, $\beta = 101^\circ 2'$, $\gamma = 105^\circ 44\frac{1}{2}'$ (G. vom Rath). Prismatische Krystalle der Combination: $\{100\}$, $\{010\}$, $\{110\}$, $\{210\}$, $\{1\bar{1}0\}$, am Ende gewöhnlich nur $\{001\}$ matt. Interessant durch seine mannigfaltigen Zwillingsbildungen: am häufigsten symmetrische Verwachsungen nach (100), d. h. Zwillingsebene (100) oder (was dasselbe ist) Zwillingsaxe die Normale zu (100) — ferner nach derselben Fläche verwachsene Zwillinge, deren Zwillingsaxe entweder die Krystallaxe c oder die in (100) liegende Normale zu derselben (im ersteren Falle sind die Flächen der Zone $[001]$ beider Krystalle parallel, im zweiten nicht). Hier sind also sämtliche Arten von Zwillingsgesetzen zu beobachten, welche S. 345 als an triklinen Krystallen möglich erkannt wurden, und zwar sind die Cohäsionsverhältnisse der Disthenkrystalle genau diejenigen, welche für das Zustandekommen solcher maßgebend sein müssen, denn die vollkommenste Spaltbarkeit ist die in allen Zwillingsverwachsungen parallele Fläche (100), eine weniger vollkommene $\parallel (010)$, während nach den Endflächen nur Spuren von Spaltbarkeit wahrzunehmen sind (das 3. Pinakoid (001) scheint Gleitfläche zu sein); hiernach ist das Maximum der Cohäsion parallel der Krystallaxe c. Sehr große Verschiedenheit der Härte beim Ritzen auf (100). Optische Axenebene etwa 30° zur Verticalaxe geneigt; 1. Mittellinie nahe senkrecht zu $\{100\}$ (vgl. S. 215); Axenwinkel sehr groß (in Öl etwa 100°); Doppelbrechung —.

Albit (Natronfeldspat) $= Si_3O_8AlNa$. $a:b:c = 0{,}6333:1:0{,}5575$; $\alpha = 94^\circ 4'$, $\beta = 116^\circ 28'$, $\gamma = 88^\circ 8'$ (Des Cloizeaux). Combination

(Fig. 196): $P = \{001\}$, $M = \{010\}$, $T = \{110\}$, $T' = \{1\bar{1}0\}$, $z = \{130\}$, $z' = \{1\bar{3}0\}$, $x = \{10\bar{1}\}$, $y = \{20\bar{1}\}$, $n = \{0\bar{2}1\}$, $o = \{11\bar{1}\}$. Gewöhnlich Zwillinge nach $\{010\}$, s. Fig. 197, worin $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $p' = \{110\}$ (in der Figur auf der Rückseite), $p = \{1\bar{1}0\}$, $r = \{10\bar{1}\}$; da der Winkel bc ungefähr $= 86^\circ$, so bilden die Flächen $c\underline{c}$ oben einen ein-, unten einen ausspringenden Winkel von 8°; ebenso ist der Winkel $r\underline{r}$ oben an der Rückseite einspringend, unten vorn ausspringend. Häufig kommt an solchen Krystallen eine Wiederholung der Zwillingsbildung vor, indem sich, wie in Fig. 198, an den zweiten Krystall ein dritter in Zwillingsstellung anlegt, oder, da dieser dem ersten parallel sein muß, indem eine Zwillingslamelle eingelagert erscheint. Folgt auf den dritten ein vierter, parallel dem zweiten, auf diesen ein fünfter Krystall, parallel dem ersten und dritten usf., so entsteht eine polysynthetische Verwachsung (s. S. 271), welche man aber auch betrachten kann als einen Krystall, in welchen eine große Zahl untereinander paralleler, also demselben Krystalle angehöriger Lamellen in

Fig. 196. Fig. 197. Fig. 198.



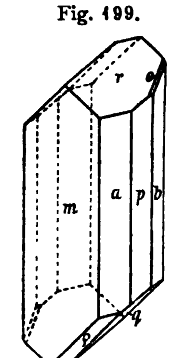
Zwillingsstellung eingewachsen sind. Eine Spaltungsfläche von Natronfeldspat nach $c = \{001\}$ zeigt alsdann eine Streifung, parallel der Kante $c:b$, hervorgebracht durch das Alternieren der nach der einen und der andern Seite geneigten Flächen c und $\underline{c}$. Diese Art der Zwillingsbildung zeigt stets der isomorphe Kalifeldspat (Mikroklin), und zwar häufig mit so geringer Dicke der Lamellen, daß diese sich selbst der mikroskopischen Beobachtung entziehen. Ist letzteres in gleichmäßiger Weise im ganzen Krystalle der Fall, so entsteht ein mimetischer (s. S. 272), scheinbar homogen monokliner Krystall mit sehr ähnlichen Winkeln, entsprechend der pseudosymmetrischen (s. S. 271), einer monoklinen sehr nahe stehenden Form des zugrunde liegenden einfachen Krystalles. Solche Varietäten des Kalifeldspates (Adular, Sanidin) werden daher als »monokliner Feldspat (Orthoklas)« bezeichnet und in der monoklin prismatischen Klasse behandelt. Ebenfalls sehr häufig sind bei den triklinen Feldspäten Zwillinge nach einem zweiten Gesetze: die Ebene der vollkommensten Spaltbarkeit (001) beider Krystalle ist parallel, Zwillingsaxe die krystallographische Axe b;

die Zone [010] der Flächen Px (Fig. 196), welche an derartigen Zwillingen gewöhnlich vorherrschen, fällt dann in beiden Krystallen zusammen.

Spaltbarkeit nach {001} vollkommen, {010} etwas weniger vollkommen. Die Ebene der optischen Axen des Albit schneidet {010} in einer Geraden, welche 20° mit der Krystallaxe a, 96½° mit der Verticalen macht; eine Fläche, normal zur ersten Mittellinie, ist auf die schärfere Kante (001):(010) aufgesetzt und bildet mit {001} 78½°, mit {010} 15°, mit {110} 55°. Für D: $\alpha = 1{,}5292$, $\beta = 1{,}5331$, $\gamma = 1{,}5393$; $2V = 76°36'$ (nach Viola, doch schwanken die optischen Eigenschaften der Albitkrystalle infolge stets vorhandener Beimengungen). Starke geneigte Dispersion, eine andere nicht deutlich erkennbar.

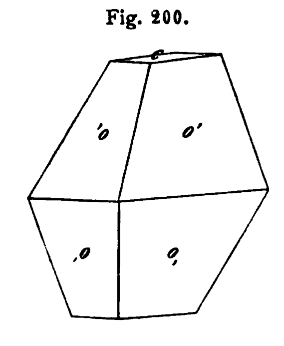
Traubensäure $= C_4H_6O_6 . 2H_2O$. $a:b:c = 0{,}8065:1:0{,}4790$; $\alpha = 76°2'$, $\beta = 96°58'$, $\gamma = 120°8'$ (Geipel). Combination (Fig. 199): $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $m = \{1\bar{1}0\}$, $r = \{101\}$, $o = \{111\}$, $\varrho = \{10\bar{1}\}$, $q = \{01\bar{1}\}$. Spaltbarkeit nach b(010). Optische Axenebene fast genau parallel p; die erste Mittellinie, also nahe in dieser Ebene, bildet (für mittlere Farben) mit der Verticalen 47° im unteren linken Oktanten vorn. Für mittlere Farben ist: $2V = 67°10'$, $2E = 115°10'$, $\beta = 1{,}526$; geringe Dispersion der Axen $\varrho > v$; von derjenigen der Mittellinien die geneigte zu erkennen (Groth).

Fig. 199.



Bibromparanitrophenol $= C_6H_2 . \overset{1}{NO_2} . \overset{3.5}{Br_2} . \overset{4}{OH}$. $a:b:c = 0{,}6114:1:1{,}8241$; $\alpha = 82°36'$, $\beta = 90°45'$, $\gamma = 89°21'$ (Arzruni). Die Combination (Fig. 200): $c = \{001\}$, $'o = \{1\bar{1}1\}$, $o' = \{111\}$, $,o = \{1\bar{1}\bar{1}\}$, $o, = \{11\bar{1}\}$, ist pseudosymmetrisch, und zwar sehr ähnlich einer monoklinen, in welcher die Ebene der Axen b und c Symmetrieebene ist, und auch in optischer Beziehung ist dieselbe Ähnlichkeit vorhanden; die Ebene der optischen Axen steht nämlich fast genau senkrecht zu {100}, und die erste Mittellinie fällt nahe in dieselbe Ebene; letztere ist fast normal auf dem Pinakoid $\{0\bar{2}1\}$, nach welchem die Krystalle sehr vollkommen spalten[1]), außerdem Spaltbarkeit nach c (001).

Fig. 200.



$2E = 46°40'$ Li-Linie
50 57 Na- -
55 0 Tl- -

1) Jedenfalls wäre es richtiger, diese Ebene, nach welcher auch Zwillingsbildung stattfindet, als {100} zu nehmen, aber dann würden die vorherrschenden Formen weniger einfache Symbole erhalten. Ob die letzteren unter verschiedenen Krystallisationsbedingungen nicht durch andere ersetzt werden, müßte durch weitere Untersuchungen entschieden werden.

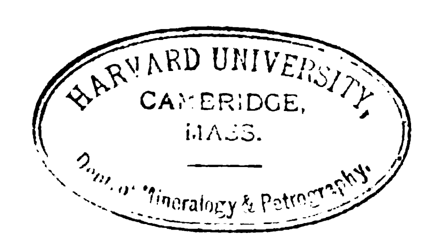
Außer dieser starken Dispersion der Axen ist noch eine gekreuzte Dispersion der Mittellinien deutlich wahrzunehmen (Arzruni).

Bijodparanitrophenol $= C_6H_2 \cdot \overset{1}{NO_2} \cdot \overset{3.5}{J_2} \cdot \overset{4}{OH}$. $a:b:c = 0{,}6155:1:1{,}6825$; $\alpha = 86^\circ 43'$, $\beta = 90^\circ 29'$, $\gamma = 92^\circ 47'$ (Arzruni). Combination gleich dem vorigen, nur statt $,o$ und o' häufiger flachere Pinakoide 4. Art, z. B. {112}, {113}. Spaltbarkeit {010} vollkommen. Die erste Mittellinie, für die verschiedenen Farben bis $1\frac{1}{2}^\circ$ verschieden, steht nahe senkrecht zu jener Spaltungsfläche; dagegen divergieren die zweiten Mittellinien für die verschiedenen Wellenlängen außerordentlich; die Axenebene bildet nämlich mit der Krystallaxe a

$45\frac{1}{2}^\circ$	für die Li-Linie	$(2E = 59\frac{1}{2}^\circ)$
37	- - Na- -	(- $= 55\frac{1}{2}$)
23	- - Tl- -	(- $= 52$).

Danach würden die Axenebenen für das äußerste Rot und das äußerste Violett des Spectrums um etwa 70° gegeneinander gedreht sein, die stärkste bisher beobachtete Dispersion der Axenebenen. Dieselbe bewirkt folgende Erscheinung: Bringt man eine Spaltungsplatte, welche also nahe senkrecht zur ersten Mittellinie ist, in paralleles polarisiertes Licht, so erscheint sie bei keiner Drehung dunkel; denn wenn ihre Hauptschwingungsrichtungen für Rot den gekreuzten Nicols parallel sind, so bilden diejenigen der andern Farben so große Winkel mit jenen, daß sie zum Teil im Maximum ihrer Intensität sind; es erscheint also stets eine Interferenzfarbe, welche gerade so wechselt, wie die Farbe einer Quarzplatte beim Drehen des Analysators (vgl. S. 111).

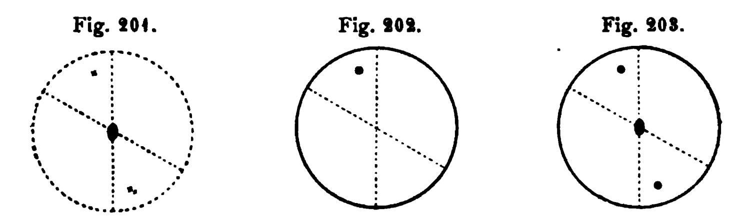
Anmerk. Ein weiteres Beispiel dieser Klasse, das zúr Mineralgruppe der triklinen Pyroxene gehörige Mangansilikat SiO_3Mn (Rhodonit) wird in der III. Abteilung als Beispiel der graphischen Berechnung der Elemente eines triklinen Krystalles aus seinen Fundamentalwinkeln ausführlich behandelt werden.





II. Monoklines Krystallsystem.

Das monokline System umfaßt drei Klassen von Krystallen, nämlich diejenigen mit einer zweizähligen Symmetrieaxe, die mit einer Symmetrieebene und die Krystalle, welchen beide genannten Symmetrieelemente gleichzeitig zukommen. Im ersten Falle kann, da die Symmetrieaxe stets normal zu einer möglichen Krystallfläche ist, letztere für die Projection Fig. 201 als Ebene des Grundkreises und als Axenebene, zwei ihr parallele Kanten (die beiden punktierten Durchmesser) als Axen, z. B. die verticale als *c*-Axe, die andere als *a*-Axe, endlich die Symmetrieaxe, welche ja stets eine mögliche Kante des Krystalles ist, als dritte krystallographische Axe (*b*) genommen werden; bei dieser (der üblichen) Wahl der Axen ist also die Projectionsebene der Fig. 201 (ebenso der Figg. 202 u. 203) die verticale


Fig. 201. Fig. 202. Fig. 203.

Krystallfläche (010). Alsdann bezeichnet × den Pol einer beliebigen Fläche (*hkl*), welcher durch eine Drehung von 180° um die zweizählige Axe *b* in den Pol einer gleichwertigen, auf derselben Seite von (010) gelegenen Fläche übergeht. Die Krystalle der zweiten hierher gehörigen Klasse besitzen eine Ebene der Symmetrie, welche stets eine mögliche Krystallfläche ist; nehmen wir diese wieder als Projections- und Axenebene (010) (Fig. 202), also zwei in derselben liegende Kanten als *c*- und *a*-Axe, so ist auch die zu beiden senkrechte Normale der Symmetrieebene eine mögliche Kante des Krystalles, kann also zur *b*-Axe genommen werden; eine beliebige Fläche liefert dann durch Spiegelung nach der Symmetrieebene eine gleichwertige, aber nun auf der entgegengesetzten Seite von (010) gelegene Fläche; die beiden Pole derselben fallen in der Projection zusammen, daher die Zeichen × und o zu vereinigen sind. Im dritten Falle, dem der Coexistenz einer zweizähligen Symmetrieaxe und einer, notwendig dazu senkrechten, Symmetrieebene, möge wieder die letztere als Axenebene *ac* und die Symmetrieaxe als *b*-Axe genommen werden; eine beliebige Fläche (*hkl*), deren Pol in Fig. 203 mit × bezeichnet ist, liefert dann

wie im ersten Falle eine gleichwertige auf derselben Seite (010) durch Drehung um die Symmetrieaxe, und jede dieser beiden Flächen wie im zweiten Falle durch Spiegelung nach der Symmetrieebene eine gleichwertige auf der andern Seite, so daß die Gesamtheit der gleichwertigen Flächen in dieser Klasse die Zahl vier erreicht. Aus den Projectionen a. vor. S. ist unmittelbar zu ersehen, daß stets den gleichwertigen Flächen, auf jene Axen bezogen, gleiche Indices zukommen, daß aber parallele entgegengesetzte Flächen nur in der letzten Klasse zu derselben einfachen Form (welche hier aus zwei Paaren paralleler Flächen besteht) gehören. Bei der im vorhergehenden getroffenen Wahl der Axen steht also in allen drei Fällen die Axe b senkrecht auf a und c, folglich sind die beiden Axenwinkel α und $\gamma = 90^\circ$, und nur ein Axenwinkel, β, ist schief, auf welches Verhältnis sich der Name dieses Krystallsystemes bezieht. Die Elemente eines monoklinen Krystalles enthalten demnach nur drei zu bestimmende Größen, die Verhältnisse $a:b$, $b:c$ und den Axenwinkel β. Betrachtet man die in den drei Projectionen eingetragenen Pole als solche beliebiger Richtungen im Krystalle, so geht aus der Vergleichung jener unmittelbar hervor, daß in den beiden ersten Arten von Krystallen die zu einer Richtung entgegengesetzte nicht mit ihr gleichwertig ist, während in der letzten Klasse jeder Richtung stets eine gleichwertige entgegengesetzte entspricht. Daraus folgt, daß die Krystalle der beiden ersten Klassen sich von denen der dritten durch ihre vectoriellen Eigenschaften, z. B. Pyroelektricität, Wachstum und Auflösung entgegengesetzter paralleler Flächen usf., unterscheiden müssen.

Was die bivectoriellen Eigenschaften betrifft, so läßt sich leicht zeigen, daß dieselben in allen drei Klassen des monoklinen Systemes den gleichen Gesetzmäßigkeiten unterliegen müssen. Denkt man sich durch die beiden gleichwertigen Pole in Fig. 201 zwei gegen die Symmetrieaxe gleich geneigte Gerade bestimmt, so muß ein Krystall der betreffenden Klasse parallel beiden gleiche Lichtgeschwindigkeit, gleiche Wärmeleitungsfähigkeit, gleiche Cohäsion usw. zeigen. Diese beiden Geraden liegen aber offenbar auch symmetrisch zueinander in bezug auf die zur Symmetrieaxe senkrechte Ebene des Grundkreises, d. h. man erhält die eine aus der andern auch durch Spiegelung nach der letzteren Ebene. Da dies nun für alle Paare einander entsprechender Geraden gilt, so muß für alle hierher gehörigen physikalischen Eigenschaften die zur Symmetrieaxe senkrechte Ebene Symmetrieebene sein. In den beiden andern Klassen ist die Ebene des Grundkreises auch in bezug auf die geometrische Form Symmetrieebene, d. h. zwei zu ihr symmetrisch liegende Gerade sind in allen Beziehungen gleichwertig. Daraus geht hervor, daß sämtliche monokline Krystalle in bezug auf die in Betracht kommenden Eigenschaften vollkommene Symmetrie nach der Ebene zeigen müssen, welche a. vor. S. zur Projectionsebene gewählt wurde.

Für die optischen Eigenschaften folgt aus dem Vorhergehenden unmittelbar, daß jene Ebene ein gemeinsamer optischer Hauptschnitt für alle

Farben ist, infolgedessen die oben zur *b*-Axe gewählte Kante eines monoklinen Krystalles stets eine der drei Axen der optischen Indexfläche ist, die beiden andern daher in die Axenebene *ac*, d. h. in die Krystallfläche (010), fallen müssen. Die optische Orientierung eines monoklinen Krystalles erfordert demnach nur die Bestimmung des Winkels, welchen eine der beiden letzteren Hauptschwingungsrichtungen mit einer in (010) liegenden Kante bildet, da hierdurch die zweite, dazu senkrechte, ebenfalls gegeben ist. Übereinstimmend damit, daß die Symmetrie des Krystalles für die Orientierung dieser beiden Richtungen innerhalb der Ebene (010) keine Gesetzmäßigkeit erfordert[1]), ist dieselbe für die verschiedenen Farben verschieden, es liegt also hier der S. 121—126 behandelte Fall der Dispersion zweier Hauptschwingungsrichtungen vor. Ist die Normale zu (010) die Schwingungsrichtung derjenigen Strahlen, welche die mittlere Lichtgeschwindigkeit besitzen, so ist (010) die Ebene der optischen Axen für alle Farben, und der Krystall zeigt im convergenten polarisierten Lichte die geneigte Dispersion (s. Fig. 84, in welcher die Gerade *SS* der Ebene (010) parallel ist); entspricht dagegen die Normale zu (010) als Schwingungsrichtung der größten oder kleinsten Lichtgeschwindigkeit, so liegen die Ebenen der optischen Axen senkrecht zu (010) und sind für die verschiedenen Farben dispergiert; je nachdem die erste Mittellinie parallel oder normal zu (010), beobachtet man in einer zu ihr senkrechten Platte horizontale oder gekreuzte Dispersion (Fig. 85, in welcher *SS* die Trace der Ebene (010), bzw. Fig. 86, in welcher *C* der Normale zu (010) entspricht). — Die Schwingungsrichtungen, welche im parallelen polarisierten Lichte ein monokliner Krystall auf den Flächen {010} zeigt, sind offenbar identisch mit den beiden in diese Ebene fallenden Hauptschwingungsrichtungen und dementsprechend dispergiert; diejenigen einer Krystallplatte, deren Ebene senkrecht zu (010) ist, müssen parallel und senkrecht zu der letzteren Ebene sein, und da diese gemeinsamer Hauptschnitt für alle Farben ist, können sie auch keine Dispersion zeigen. Geht man von einer Krystallfläche der zuletzt erwähnten Art aus, in welcher eine Schwingungsrichtung der Combinationskante mit (010) parallel ist, und betrachtet die entsprechende Schwingungsrichtung in allen Flächen der durch jene Kante gegebenen Zone, so zeigt diese eine wachsende Schiefe zur Zonenaxe mit steigendem Winkel der betreffenden Fläche zu der Ausgangsebene; diese Schiefe kann aber für einen bestimmten Winkel ein Maximum erreichen und dann wieder abnehmen bis zu dem Werte auf (010), welcher durch eine Drehung von 90° um die Zonenaxe erreicht wird. Die den einzelnen Flächen eines monoklinen Krystalles zukommenden Winkel der Auslöschungsschiefe sind, wenn der Winkel der optischen Axen desselben bekannt ist, leicht graphisch zu erhalten mittels des S. 107 beschriebenen Verfahrens. Für eine Anzahl Mineralien, welche

1) Abgesehen von der S. 216 erwähnten, häufig zu beobachtenden Abhängigkeit von der Cohäsion, für welche in diesem Systeme namentlich der Glimmer ein ausgezeichnetes Beispiel liefert.



als Bestandteile von Gesteinen häufig Gegenstand mikroskopisch-optischer Beobachtung sind, hat Michel-Lévy die Auslöschungsschiefe der wichtigsten Zonen berechnet und durch Curven dargestellt. Daß je zwei, gleich und entgegengesetzt zu (010) geneigte, Flächen einer jeden derartigen Zone genau gleiche und entgegengesetzte Schiefe der Schwingungsrichtungen und symmetrische Dispersion derselben für die verschiedenen Farben besitzen müssen, geht direct aus den optischen Symmetrieverhältnissen der monoklinen Krystalle hervor. Es kann daher aus der symmetrisch gleichen Orientierung der Schwingungsrichtungen zweier Krystallflächen in bezug auf die Ebene, welche den Flächenwinkel derselben halbiert, auf den Charakter der letzteren als Ebene der optischen Symmetrie und auf die Zugehörigkeit des Krystalles zum monoklinen Systeme ebenso sicher geschlossen werden, wie aus den vorher erwähnten Interferenzerscheinungen im convergenten Lichte.

Entsprechend der Dispersion der Schwingungsrichtungen in (010) für Schwingungen von verschiedener Wellenlänge weicht die »Auslöschungsschiefe für elektrische Wellen«, d. h. die Schwingungsrichtung für Strahlen mit sehr großer Wellenlänge, beträchtlich von der Auslöschungsschiefe für die Strahlen des sichtbaren Spectrums ab. Für den Gyps beträgt diese Abweichung nach Righi 39°. Ebenso kann die Ebene der Axen für elektrische Wellen senkrecht zu derjenigen der optischen Axen sein, immer bleibt aber die Symmetrie nach (010) gewahrt, wie Borel durch Bestimmung der Dielektricitätsconstanten an einer Reihe monoklin krystallisierender Substanzen nachgewiesen hat.

Die thermischen Verhältnisse sind in ganz entsprechender Weise nach derselben Ebene symmetrisch, welche Ebene der Symmetrie für das optische Verhalten ist. Die Normale der letzteren ist also eine der drei Axen des Wärmeleitungsellipsoides, während die Lage der beiden andern in jener Ebene durch Hervorrufung der Sénarmontschen Schmelzfigur auf einer Platte || (010) zu bestimmen ist; auf Krystallflächen ⊥ (010) muß offenbar die isothermische Curve so orientiert sein, daß eine ihrer beiden Axen parallel der Combinationskante der betreffenden Fläche mit (010), auf andern Flächen der durch diese Kante bestimmten Zone so, daß die Axen schief stehen, und zwar gleich viel auf zwei gleich zu (010) geneigten Flächen. Ebenso wie die Schwingungsrichtungen in einem durchsichtigen Krystalle, kann daher die Orientierung der Schmelzfigur auf den Flächen eines undurchsichtigen Krystalles über die Symmetrieverhältnisse desselben Aufschluß geben. — Für das Verhalten der monoklinen Krystalle in bezug auf die Ausdehnung durch die Wärme ist maßgebend, daß die Ebene (010) stets ein thermischer Hauptschnitt ist, in derselben also zwei thermische Dilatationsaxen gelegen sind; da aber für deren Orientierung innerhalb dieser Ebene ebensowenig eine allgemeine Gesetzmäßigkeit existiert, wie für die Lage der Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes in (010), so ist dieselbe für jede monoklin krystallisierende Substanz und für ein gegebenes Temperaturintervall besonders zu bestimmen, z. B. durch die Änderungen der Winkel

während einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung. Da die Krystallaxen *a* und *c* zwei beliebige, in der Ebene (010) liegende Kanten sind, so erfahren diese, ebenso wie der zwischen ihnen liegende Winkel β, hierbei eine Änderung, welche für jene beiden Richtungen eine ungleiche ist, und eine noch andere die zu beiden senkrechte Axe *b*, die dritte thermische Hauptaxe. Es sind also auch in diesem Systeme die Elemente des Krystalles, nämlich $a:b$, $b:c$ und β, Funktionen der Temperatur[1]), nicht aber die beiden Axenwinkel α und γ, welche für alle Temperaturen den Wert 90° behalten müssen. Es folgt dies unmittelbar aus der Symmetrie der thermischen Erscheinungen nach der Ebene (010), ebenso wie sich aus derselben ergibt, daß je zwei Flächen, die bei einer Temperatur den gleichen Winkel mit (010) bilden, auch bei einer andern Temperatur den gleichen Winkel, dessen Wert aber ein anderer geworden ist, mit ihr einschließen. Die Symmetrie eines monoklinen Krystalles kann demnach durch eine gleichmäßige Temperaturerhöhung, wie überhaupt durch eine homogene Deformation, nicht alteriert werden, und ebenso spielen sich die Änderungen, welche die optischen Eigenschaften durch jene erfahren, stets innerhalb des Rahmens der Symmetrie nach der Ebene (010) ab (vgl. S. 196).

In bezug auf die Cohäsion geht aus S. 215 hervor, daß die Spaltbarkeit eines monoklinen Krystalles entweder stattfindet parallel (010) oder nach einer oder mehreren dazu senkrechten Ebenen, welche aber nicht gleichwertig sein können, oder endlich nach zwei schief geneigten Ebenen, deren Flächenwinkel von (010) halbiert wird, im letzteren Falle aber nach beiden gleich vollkommen. Diesen Symmetrieverhältnissen entsprechen auch die Härtecurven der monoklinen Krystalle, wie sie von Exner z. B. für Gyps, rotes Blutlaugensalz, Rohrzucker usw. bestimmt worden sind; dieselben sind nämlich auf (010) unsymmetrisch, während sie auf einer dazu senkrechten Fläche nach der Trace von (010) symmetrisch sind.

Das der Structur eines monoklinen Krystalles zugrunde liegende Raumgitter kann nur eines der beiden in Fig. 155 (S. 277) abgebildeten sein; je nach dem Verhältnisse, in welchem die Abstände *a* und *c*, bzw. *a* und *b* im einzelnen Falle stehen, ergeben sich dann die Ebenen größter Flächendichtigkeit als parallel, senkrecht oder schief zur Symmetrieebene des Raumgitters. Nach S. 284 können nun mehrere solcher Raumgitter, aus gleichen, aber verschieden orientierten Atomen bestehend, zu einem regelmäßigen Punktsysteme verbunden sein, und nach der allgemeinsten Theorie der Krystallstructur besteht ein monokliner Krystall aus so vielen derartigen Punktsystemen, als das chemische Molekül Arten von Atomen enthält, und nur vermittelst der letzteren Theorie ist es, wie S. 291 an dem Beispiele Fig. 167 gezeigt wurde, möglich, die Unterschiede der drei Klassen mono-

1) Wählt man zwei Kanten, welche sehr nahe einen rechten Winkel einschließen, als Axen *a* und *c*, so wird es eine Temperatur geben, bei welcher derselbe = 90°, ohne daß diesem Werte eine besondere Bedeutung zukäme. Monokline Krystalle sind daher solche, von deren Axenwinkeln einer »im allgemeinen« schief ist.



kliner Krystalle aus der Structur zu erklären. Da die aus gleichartigen Atomen bestehenden regelmäßigen Punktsysteme mit monoklinen Raumgittern stets, wie die letzteren, nach einer Ebene und einer zweizähligen Axe symmetrisch sind, also die Symmetrie der dritten, höchstsymmetrischen Klasse dieses Krystallsystemes besitzen, so könnte nach der hier adoptierten Theorie ein Element nur in Formen der letzten Klasse des monoklinen Systemes krystallisieren, wie es in der Tat der Fall ist.

Wie bei den triklinen Krystallen, müßten auch bei den monoklinen den Ebenen größter Flächendichtigkeit des Elementarparallelepipeds Schichten der Krystallstructur von größter Dichtigkeit entsprechen, nach welchen die Krystalle Spaltbarkeit zeigen und welche bei ihrer Bildung besonders begünstigt sind, also zu den gewöhnlich vorherrschend auftretenden Flächen des Krystalles gehören. Zu den Ebenen besonders großer (sehr oft der größten) Flächendichtigkeit gehört stets die Fläche (010), die Symmetrieebene der einzelnen Raumgitter; ist die Structur des Krystalles nun so beschaffen, daß die Schichten parallel (010), aus denen derselbe aufgebaut ist, nach beiden Seiten gleiche Kräfte ausüben, so werden die beiden Krystallflächen (010) und $(0\bar{1}0)$ sich nicht nur unter allen Umständen gleich leicht bilden, sondern auch in jeder andern Beziehung gleiches Verhalten zeigen, d. h. der Krystall gehört einer der beiden Klassen an, in welchen (010) Symmetrieebene ist. Ist dagegen eine solche Gleichwertigkeit der beiden Seiten der Schichten nach (010) nicht vorhanden, so können die parallelen Krystallflächen (010) und $(0\bar{1}0)$ zwar gleich leicht am Krystalle sich bilden (wegen der großen Flächendichtigkeit der ihnen parallelen Schichten der Krystallstructur), unterscheiden sich aber durch ihre Wachstumsgeschwindigkeit, Auflösung, Pyroelektricität usw., d. h. die Krystalle besitzen keine Ebene der Symmetrie. Dies ist nun notwendig der Fall bei den optisch activen, monoklin krystallisierenden Körpern, deren Krystalle daher sämtlich der ersten Klasse dieses Systemes angehören und wahrscheinlich ausnahmslos die Polarisationsebene des Lichtes drehen. Nachgewiesen ist das Drehungsvermögen erst an sehr wenigen derselben, wobei sich ergeben hat, daß die Drehung in den beiden optischen Axen nur dann gleich groß ist, wenn die Axenebene senkrecht zu (010) steht, dagegen verschieden, wenn die Axen in (010) liegen. Dies entspricht genau den allgemeinen optischen Symmetrieverhältnissen der monoklinen Krystalle.

Betreffs der Zwillingsbildung ist zu bemerken, daß die bei den triklinen Krystallen zu unterscheidenden Arten von Zwillingsgesetzen hier unter Umständen zu dem gleichen Resultate führen, weil vermöge der Symmetrieverhältnisse des monoklinen Krystallsystemes in gewissen Fällen die in einer möglichen Krystallfläche liegende Normale einer möglichen Kante selbst eine mögliche Kante des Krystalles sein kann. Dies gilt z. B. für die beiden zur *b*- bzw. *c*-Axe gewählten Kanten in der Ebene (100), so daß die beiden letzten S. 345 unter c) und d) angeführten Zwillingsgesetze in diesem Falle gleichbedeutend sind; ausgenommen, der Krystall

gehöre der ersten (enantiomorphen) Klasse an, sind beide Gesetze dann sogar identisch mit den beiden ersten a) und b) (S. 345), denn die nach jenen erfolgte Drehung um eine in (010) liegende Kante führt zu der gleichen Zwillingsstellung, wie eine Spiegelung nach der durch dieselbe Kante, senkrecht zu (010), gelegten Ebene oder eine halbe Umdrehung um die Normale zur letzteren Ebene. Zwillingsebene kann in der ersten Klasse des monoklinen Systemes jede Krystallfläche sein, in der zweiten und dritten jede Fläche mit Ausnahme von (010), weil diese hier Symmetrieebene ist, die Spiegelung nach ihr also lediglich einen parallelen Krystall liefern würde. Zwillingsaxe kann die Normale zu jeder beliebigen Fläche eines monoklinen Krystalles sein, mit Ausnahme der Normale zu (010) in der ersten und zweiten Klasse, weil diese Richtung hier zweizählige Symmetrieaxe ist, also eine Drehung von 180° um dieselbe den Krystall in sich selbst zurückführen würde.

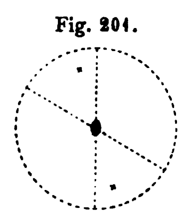
Da die Zwillingsbildungen, bei welchen die gemeinsame Ebene eine solche größter tangentialer Cohäsion, d. h. parallel den Richtungen maximaler Cohäsion ist, notwendig am meisten begünstigt sein müssen, so kann auch aus ihnen, wie aus der Spaltbarkeit und der Häufigkeit des Auftretens bestimmter Flächen auf das der Structur des Krystalles zugrunde liegende Raumgitter geschlossen und dadurch die wahrscheinlichste Wahl der Elemente getroffen werden.

3. Sphenoidische Klasse.

(Monoklin-hemimorphe Klasse.)

In der nebenstehend wiederholten Projection Fig. 201 sei nach S. 354 der verticale Durchmesser die c-Axe, der andere die a-Axe des Krystalles, die Ebene des Grundkreises somit (010); alsdann sind die Symbole der beiden, durch ihre Pole markierten, gleichwertigen Flächen, da dieselben auf der gleichen Seite der b-Axe liegen, (hkl) und $(\bar{h}k\bar{l})$. Die aus beiden zusammengesetzte, vollständige »einfache Form« $\{hkl\}$ dieser Klasse besteht somit im allgemeinsten Falle aus zwei schief gegeneinander geneigten Krystallflächen, welche einander in einer der Ebene (010) parallel verlaufenden Kante schneiden und zu der auf dieser Kante senkrechten b-Axe gleich geneigt sind. Diese »keilartige« Form soll nach dem griechischen σφήν (Keil) als »Sphenoid« und danach die ganze Klasse als »sphenoidische« oder »sphenoidale« bezeichnet werden.

Fig. 201.



Liegen die beiden gleichwertigen Flächen eines Sphenoides so, daß ihre Kante der a- oder c-Axe parallel ist, so wird der erste bzw. dritte Index Null, und das nach dem früheren Principe der Benennung (s. S. 346) als 4. Art zu bezeichnende Sphenoid wird ein solches 1. bzw. 3. Art. Weitere specielle Fälle ergeben sich dadurch, daß die Flächen desselben der Axe b parallel sind, ihre Pole also in den Grundkreis fallen; dann

entsprechen dieselben, wie ein Blick auf die Projection lehrt, zwei parallelen Flächen, bilden also ein Pinakoid. Unter den verschiedenen möglichen Pinakoiden befinden sich zwei, welche außer der b-Axe auch noch einer der beiden andern parallel sind, deren Pole also in einem Abstande von je 90° von dem entsprechenden Durchmesser auf dem Grundkreise liegen. Irgendein Pinakoid ist gewissermaßen die Grenzform einer Zone von Sphenoiden, welche sich jenem um so mehr nähern, je weiter die den beiden gleichwertigen Flächen entsprechenden Pole auseinander rücken, denn der größte mögliche Abstand derselben, 180°, führt zu den beiden entgegengesetzten Flächen jener Grenzform. Das andere Grenzglied einer derartigen Reihe ist offenbar diejenige Form, welcher sich die Sphenoide um so mehr nähern, je kleiner der Abstand der beiden gleichwertigen Pole in der Projection wird; der kleinstmögliche Abstand derselben, Null, entspricht dem Zusammenfallen beider Pole mit demjenigen der Symmetrieaxe, die entstehende Grenzform ist also eine einzige Fläche, welche, je nachdem man von einem Sphenoid der vorderen oder der hinteren Hälfte der Projection ausgeht, das Symbol $\{010\}$ oder $\{0\bar{1}0\}$ erhält. Dieses Pedion ist zugleich die gemeinsame Grenzform aller eben erwähnter Zonen von Sphenoiden, deren Zonenkreise sich sämtlich in der Mitte der Projection schneiden. Hiernach ergeben sich die Benennungen der verschiedenen möglichen Formen dieser Klasse folgendermaßen:

$\{100\}$ erstes Pinakoid,
$\{010\}$ zweites rechtes Pedion; $\{0\bar{1}0\}$ zweites linkes Pedion[1]),
$\{001\}$ drittes Pinakoid,
$\{0kl\}$ Sphenoid erster Art,
$\{h0l\}$ Pinakoid zweiter Art,
$\{hk0\}$ Sphenoid dritter Art,
$\{hkl\}$ Sphenoid vierter Art.

Im speciellen pflegt man auch hier die Formen $\{111\}$, $\{1\bar{1}1\}$, $\{\bar{1}11\}$ und $\{\bar{1}\bar{1}1\}$ als die primären Sphenoide 4. Art, $\{011\}$ und $\{0\bar{1}1\}$ als die primären Sphenoide 1. Art, $\{110\}$ und $\{1\bar{1}0\}$ als die primären Sphenoide 3. Art, endlich $\{101\}$ und $\{\bar{1}01\}$ als primäre Pinakoide 2. Art zu bezeichnen.

Die Polarität der Symmetrieaxe tritt in physikalischer Beziehung besonders dadurch hervor, daß alle daraufhin untersuchten Krystalle dieser Klasse infolge einer Temperaturänderung an den beiden Enden derselben eine starke, entgegengesetzt elektrische Spannung annehmen, d. h. polar pyroelektrisch sind mit einer zu (010) normalen elektrischen Axe. Durch diese Eigenschaft, welche mit einer Symmetrie nach der Ebene (010) unvereinbar ist, kann natürlich ein Krystall als zu dieser Klasse gehörig

1) Diese Unterscheidung bezieht sich auf die übliche Aufstellung der monoklinen Krystalle, bei welcher das positive Ende der b-Axe rechts, das negative links vom Beobachter liegt; ebensogut könnte man die beiden Formen als »positive« und »negative« unterscheiden.

ebenso erkannt werden, wie durch ungleiches Wachstum oder verschiedene Auflösung (Ätzfiguren) auf den entgegengesetzten Seiten der b-Axe angehörigen Flächen, oder durch den Mangel einer Symmetrie nach (010), welchen die Ätzfiguren auf einem der Axe b parallelen Pinakoide zeigen.

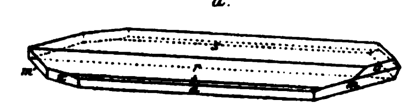
Beispiele.

Optisch inactive Körper.

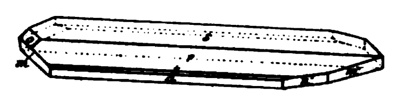
Lithiumsulfat, $SO_4Li_2.H_2O$. $a:b:c = 1,6102:1:0,5643$; $\beta = 92°31'$ (Scacchi). Aus einer wässerigen Lösung dieses Salzes setzen sich in gleicher Menge Krystalle der beiden in Fig. 204 a und b abgebildeten, enantiomorphen

Fig. 204.

a.



b.



Combinationen ab. a) $r = \{101\}$, $s = \{\bar{1}01\}$, $a = \{100\}$, $t = \{301\}$, $m = \{110\}$, $o = \{121\}$, $m' = \{1\bar{1}0\}$, $n' = \{2\bar{1}0\}$; b) $r = \{101\}$, $s = \{\bar{1}01\}$, $a = \{100\}$, $t = \{301\}$, $m = \{1\bar{1}0\}$, $o = \{1\bar{2}1\}$, $m' = \{110\}$, $n' = \{210\}$. Spaltbarkeit deutlich nach $\{100\}$, weniger deutlich nach $\{110\}$. Zwillinge nach r (daher diese Fläche wohl besser als (001) zu nehmen wäre, statt der hier adoptierten Wahl Scacchis, welcher übrigens c dreimal so groß annahm und daher noch compliciertere Symbole erhielt). Der analoge Pol der elektrischen Axe liegt stets an demjenigen Ende der b-Axe, an welchem die Flächen n auftreten.

Isobenzil (Dibenzoyldioxystilben) $= C_{28}H_{20}O_4$. $a:b:c = 0,9682:1:0,8409$; $\beta = 100°34\frac{1}{2}'$ (Bowman). Combination (Fig. 205): $a = \{100\}$, $c = \{001\}$,

Fig. 205.

Fig. 206.

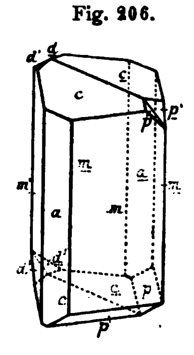
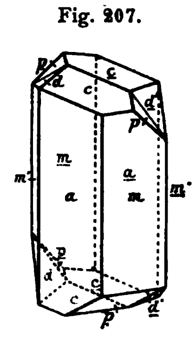


Fig. 207.



$m = \{110\}$, $m' = \{1\bar{1}0\}$, $d = \{011\}$, $d' = \{0\bar{1}1\}$, $p = \{11\bar{1}\}$ (an andern Krystallen erscheint dafür $p' = \{1\bar{1}\bar{1}\}$ links). Spaltbarkeit nach $\{100\}$ und $\{001\}$ vollkommen. Zwillinge kommen nach zwei verschiedenen Gesetzen vor, welche sich nur bei enantiomorphen Krystallen unterscheiden: a) Zwillingsebene a (100) Fig. 206; der eine Krystall ist ein rechter mit p ($\bar{1}11$), der andere ein linker mit p' ($\bar{1}\bar{1}1$); b) Zwillingsaxe die Normale zu a(100),

s. Fig. 207, in welcher ein Zwilling zweier rechter Krystalle (mit p {11$\bar{1}$}) abgebildet ist. In beiden Fällen ist die Richtung der größten Cohäsion, die Symmetrieaxe, sowie die Ebene der vollkommensten Spaltbarkeit (100) beiden Krystallen gemeinsam und letztere auch die Verwachsungsfläche der Zwillinge. Doppelbrechung +, Ebene der optischen Axen ist senkrecht zu (010) und bildet mit (100) 54½° im stumpfen Winkel β; 1. Mittellinie Axe b; $2V = 85°58'$, $\alpha = 1{,}604$, $\beta = 1{,}654$, $\gamma = 1{,}718$ (Na-Licht). Ätzfiguren auf c {001} unsymmetrisch. Stark polar pyroelektrisch nach der Symmetrieaxe, deren analoger Pol derjenige mit den p-Flächen ist.

Optisch active Körper.

Rechtsweinsäure $= C_4H_6O_6$. $a : b : c = 1{,}2747 : 1 : 1{,}0266$; $\beta = 100°17'$ (De la Provostaye). Combination (Fig. 208): $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r = \{101\}$, $\varrho = \{10\bar{1}\}$, $p' = \{1\bar{1}0\}$, $p = \{110\}$, $q = \{011\}$. Spaltbarkeit nach {100} deutlich. Ebene der optischen Axen senkrecht zu (010), Doppelbrechung +; die erste Mittellinie für Rot liegt im spitzen Winkel der Krystallaxen a und c und bildet mit letzterer 71° 18', für Blau ebenda 72° 10'; $2V = 78°20'$ für Gelb (Des Cloizeaux). Drehungsvermögen (links, in beiden Axen gleich groß) für 1 mm: 8,5° Li, 11,4° Na, 14,2° Tl (Dufet). Brechungsindices für Natriumlicht (D): $\alpha = 1{,}4961$, $\beta = 1{,}5359$, $\gamma = 1{,}6055$ (Cornu). W. Kohlrausch bestimmte zur Prüfung der Fresnelschen Theorie (wozu sich die Weinsäure wegen ihrer sehr starken Doppelbrechung besonders eignet) mit dem Totalrefractometer, außer den drei angeführten Hauptbrechungsindices, noch die Geschwindigkeit des Na-Lichtes in zahlreichen andern Richtungen, besonders innerhalb der drei optischen Hauptschnitte, und fand die Werte derselben in vollkommener Übereinstimmung mit jener Theorie (vgl. S. 105). Um gegenüber den stark übertriebenen Figuren 64 (S. 93) u. f. eine Vorstellung von der wirklichen Gestalt der Wellenfläche eines derartigen zweiaxigen Krystalles mit schon recht starker Doppelbrechung

Fig. 208.

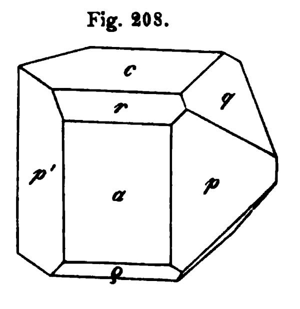
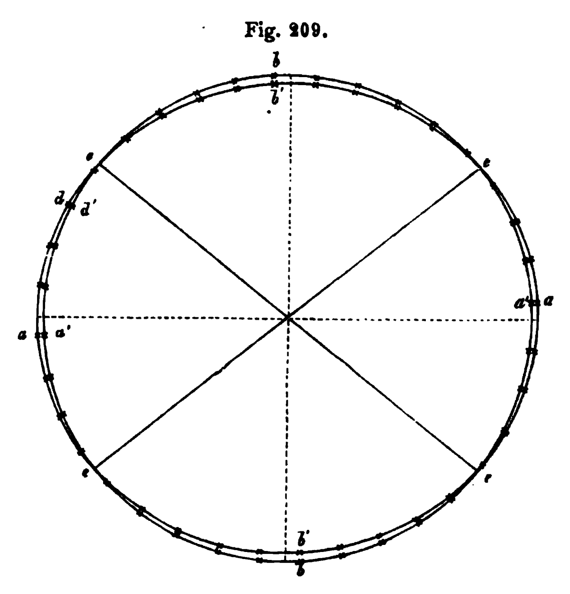


Fig. 209.



zu erhalten, ist in Fig. 209 der Durchschnitt derselben mit der Ebene der optischen Axen nach den Beobachtungen von W. Kohlrausch wiedergegeben. Der analoge Pol der elektrischen Axe liegt an demjenigen (linken) Ende der b-Axe, an welchem die Flächen p', $(1\bar{1}0)$ und $(\bar{1}\bar{1}0)$, auftreten; Fig. 1 auf Taf. III zeigt die Verteilung des Schwefel- und Mennigepulvers auf einem sich abkühlenden Krystalle, nach der Methode von Kundt (s. S. 238) erhalten.

Linksweinsäure: enantiomorph mit vorlger (s. Taf. III, Fig. 2, welche zugleich die entgegengesetzte Orientierung der elektrischen Pole erkennen läßt). Combination: $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r = \{101\}$, $\varrho = \{10\bar{1}\}$, $p' = \{110\}$, $p = \{1\bar{1}0\}$, $q = \{0\bar{1}1\}$. In den übrigen physikalischen Eigenschaften identisch mit Rechtsweinsäure.

Rechtsweinsaures Kalium $= C_4H_4O_6K_2$. $a:b:c = 1,0280:1:1,3114$; $\beta = 90°49'$ (v. Kraatz). Combination (Fig. 210): $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r = \{10\bar{1}\}$, $\varrho = \{101\}$, $o = \{131\}$, $b' = \{0\bar{1}0\}$. Spaltbar nach a und c. Ätzfiguren auf (100), durch Wasser erhalten, Fig. 211. Ebene der optischen Axen $\perp$ (010), 1. Mittellinie 21° gegen die Normale zu r geneigt; $2E = 102°16'$ Rot, $104°24'$ Grün; deutliche horizontale Dispersion (Des Cloizeaux). Der analoge Pol ist das linke Ende der Axe b.

Fig. 210.

Fig. 211.



Rechtsweinsaures Ammonium $= C_4H_4O_6(NH_4)_2$. $a:b:c = 1,1435:1:1,4299$; $\beta = 92°15'$ (v. Kraatz). Beob. Formen (Fig. 212): $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r = \{10\bar{1}\}$, $\varrho = \{101\}$, $q = \{011\}$, $o = \{1\bar{1}1\}$, $\omega = \{1\bar{1}\bar{1}\}$;

Fig. 212.

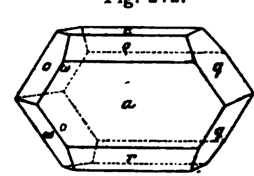
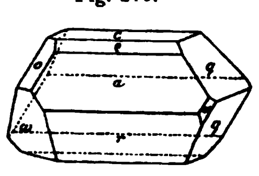


Fig. 213.



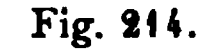
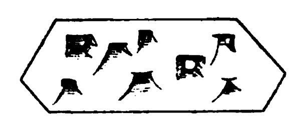


Fig. 214.



doch treten auch die rechten primären Sphenoide $\{111\}$ und $\{11\bar{1}\}$, sowie das linke $\{0\bar{1}1\}$ auf (überhaupt wechselt die Ausbildung leicht mit den Verhältnissen der Krystallisation; einen derartigen Habitus zeigt Fig. 213). Ätzfiguren auf (100) Fig. 214. Ebene der optischen Axen (010), 1. Mittellinie 16° gegen die Normale zu (001) geneigt im stumpfen Winkel β; $2E = 64°33'$ Rot, $64°46'$ Gelb; Brechungsindex $\beta = 1,581$ Gelb (Des Cloizeaux). Pyroelektricität gleich dem vorigen. Das entsprechende linksweinsaure Salz ist nach Pasteur enantiomorph krystallisiert und entgegengesetzt polarelektrisch, in den übrigen physikalischen Eigenschaften aber identisch mit dem rechtsweinsauren.

Rechtsweinsaures Strontium $= C_4H_4O_6Sr.3H_2O$. $a:b:c = 0,7428 : 1 : 0,6393$; $\beta = 102°0'$ (Marignac). Beobachtete Formen (Fig. 215): $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r = \{101\}$, $\varrho = \{10\bar{1}\}$, $b = \{010\}$, $m = \{110\}$, $o = \{1\bar{1}1\}$, $\omega = \{1\bar{1}\bar{1}\}$, $b' = \{0\bar{1}0\}$. Spaltbar nach $\{100\}$ vollkommen. Ätzfiguren auf $\{100\}$ nach v. Kraatz rechts und links von verschiedenen Sphenoiden 3. Art gebildet (Fig. 216). Der analoge Pol der elektrischen Axe links.

Fig. 215.

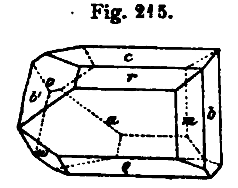
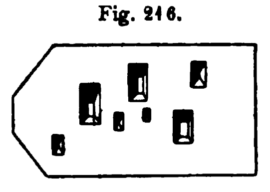
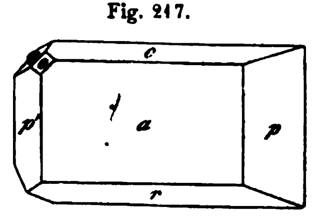


Fig. 216.



Rohrzucker $= C_{12}H_{22}O_{11}$. $a:b:c = 1,2595 : 1 : 0,8782$; $\beta = 103°30'$ (Wolff). Combination (Fig. 217): $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r = \{10\bar{1}\}$, $p = \{110\}$, $p' = \{1\bar{1}0\}$, $o = \{1\bar{1}1\}$, $q = \{0\bar{1}1\}$. Zwillinge nach der Normale zu 100) als Zwillingsaxe, Spaltbarkeit nach derselben Ebene deutlich. Ätzfiguren auf p und p' verschieden. Ebene der optischen Axen (010), erste Mittellinie (für verschiedene Farben sehr wenig dispergiert) im stumpfen Winkel der Krystallaxen a und c, mit letzterer $67\frac{1}{4}°$ bildend. Drehungsvermögen s. S. 161. Brechungsindices und Axenwinkel nach Calderon:

Fig. 217.

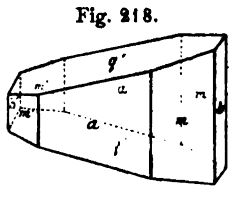


	α	β	γ	$2V$
Li:	1,5379	1,5638	1,5693	47°56'
Na:	1,5397	1,5667	1,5716	48 0
Tl:	1,5422	1,5685	1,5734	48 8

Merkliche Änderung des Axenwinkels und der Orientierung der Mittellinien durch die Wärme (Des Cloizeaux). Der analoge Pol der elektrischen Axe entspricht dem rechten Ende der b-Axe, d. h. der Kante $(110):(\bar{1}10)$ (Hankel). Die Lösung ist rechtsdrehend.

Milchzucker (Lactose) $= C_{12}H_{22}O_{11}.H_2O$. $a:b:c = 0,3677 : 1 : 0,2143$; $\beta = 109°47'$ (Traube). Combination (Fig. 218): $a = \{100\}$, $q' = \{0\bar{1}1\}$, $m = \{110\}$, $b = \{010\}$, $m' = \{1\bar{1}0\}$, $b' = \{0\bar{1}0\}$. Spaltbarkeit nach $\{010\}$, $\{100\}$ und einer zu beiden nahe senkrechten Ebene. Durch Spaltungsplatten nach letzterer beide optische Axen in einer zu (010) senkrechten Ebene sichtbar, welche mit der Krystallaxe c 10°—11° im stumpfen Winkel β bildet; $2E = 33°35'$ Na, $\varrho < v$. Doppelbrechung —. Deutliche Pyroelektricität; der analoge Pol liegt in $(0\bar{1}0)$, der antiloge in (010). Die Lösung ist rechtsdrehend.

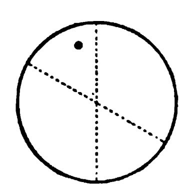
Fig. 218.



4. Domatische Klasse.

(Monoklin-hemiedrische Klasse.)

Diese Klasse umfaßt die Krystalle mit einer Ebene der Symmetrie, in der nebenstehend wiederholten Projection Fig. 202 diejenige des Grundkreises, welcher deshalb nicht punktiert, sondern ausgezogen ist. Seien nach S. 354 diese Ebene (010) und die beiden punktierten Durchmesser wieder die Krystallaxen a und c, so sind die Symbole der beiden durch ihre Pole markierten gleichwertigen Flächen, da sie auf verschiedenen Seiten der b-Axe liegen, (hkl) und $(h\bar{k}l)$. Die den allgemeinsten Fall repräsentierende einfache Form $\{hkl\}$ besteht also, wie in der vorigen Klasse, aus zwei Flächen, welche einander unter schiefem Winkel in einer der Ebene (010) parallelen Kante schneiden, ist also in rein geometrischer Beziehung mit dem Sphenoid übereinstimmend. Während aber das letztere eine Symmetrieaxe besitzt, wird hier der Winkel zwischen den beiden gleichwertigen Flächen von einer Symmetrieebene des Krystalles halbiert, und dieser verschiedenen krystallographischen Bedeutung wegen empfiehlt es sich, die hier in Betracht kommende Form mit dem besonderen Namen »Doma« zu belegen, welcher für »dachartige« Formen in der Krystallographie gebraucht wird. Danach ist die vorliegende Klasse als die »domatische« zu bezeichnen.



Die allgemeine Form $\{hkl\}$, welche nach dem bisherigen Principe der Benennung ein Doma 4. Art wäre, verwandelt sich in ein solches 1. oder 3. Art, wenn seine Flächen der a- oder der c-Axe parallel sind. Alle Domen, deren erster und dritter Index in dem gleichen Verhältnisse stehen, bilden eine Zone, welcher in der Projection ein Durchmesser entspricht; jeder derartigen Zone gehört eine Fläche an, deren Pol auf dem Grundkreise gelegen ist. Da letzteres für beide gleichwertige Flächen gilt, so muß sich in diesem speciellen Falle das Doma in ein Pedion verwandeln, welches je nach dem Verhältnisse des ersten und dritten Index die jedesmalige Grenzform einer Reihe entsprechender Domen darstellt. Die andere Grenzform, welcher sich die Domen um so mehr nähern, je größer der Abstand der beiden gleichwertigen Pole vom Grundkreise wird, ist für alle Reihen die gleiche, denn dieser größte Abstand entspricht der Lage der Pole in der Mitte des Grundkreises; alsdann wird die Orientierung der beiden gleichwertigen Flächen die denkbar verschiedenste, das Doma verwandelt sich in ein Pinakoid, dessen Flächen der Symmetrieebene (010) parallel gehen. Wir erhalten also folgende Übersicht:

$\{100\}$ erstes positives (vorderes) Pedion; $\{\bar{1}00\}$ erstes negatives (hint.) Pedion
$\{010\}$ zweites Pinakoid
$\{001\}$ drittes positives (ob.) Pedion; $\{00\bar{1}\}$ drittes negatives (unt.) Pedion
$\{0kl\}$ Doma erster Art
$\{h0l\}$ Pedion zweiter Art

$\{hk0\}$ Doma dritter Art
$\{hkl\}$ Doma vierter Art.
In dieser Klasse gibt es somit zwei primäre Domen 1. Art $\{011\}$ und $\{01\bar{1}\}$, zwei primäre Domen 3. Art $\{110\}$ und $\{\bar{1}10\}$ und vier primäre Domen 4. Art, nämlich $\{111\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{11\bar{1}\}$, $\{\bar{1}1\bar{1}\}$; ein primäres Pedion 2. Art endlich kann, je nach seiner Stellung, eine der vier Formen $\{101\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{10\bar{1}\}$ und $\{\bar{1}0\bar{1}\}$ sein. Für einen monoklinen Krystall, welcher z. B. die (natürlich sehr häufige) Combination der beiden primären Domen 3. Art $\{110\}$ und $\{\bar{1}10\}$ als ein scheinbares Prisma von rhombischem Querschnitte zeigt oder nach einem solchen spaltbar ist, kann die Zugehörigkeit zu dieser Klasse erwiesen werden durch Verschiedenheit der Ätzfiguren auf den beiden vorderen Flächen (110) und $(1\bar{1}0)$, auf welchen sie natürlich spiegelbildlich gleich sein müssen, von denen der beiden hinteren Flächen $(\bar{1}10)$ und $(\bar{1}\bar{1}0)$, oder durch ungleiches pyroelektrisches Verhalten der vorderen und hinteren Prismenkante. Da hier keine Symmetrieaxe vorhanden ist, so findet, wie im triklinen Krystallsysteme, auch keine gesetzmäßige Orientierung der in der Symmetrieebene liegenden elektrischen Axen, falls solche vorhanden sind, statt. Die Zahl der in diese Klasse gehörigen Körper, namentlich unter den organischen Substanzen, ist wahrscheinlich nicht gering, weil bei älteren krystallographischen Bestimmungen auf eine eventuelle Ungleichwertigkeit der beiden, scheinbar ein Prisma bildenden Domen nicht geachtet und daher alle monoklin krystallisierenden Substanzen der folgenden, der prismatischen Klasse, zugerechnet wurden.

Beispiele.

Tetrathionsaures Kalium $= S_4O_6K_2$. $a:b:c = 0{,}9302:1:1{,}2666$; $\beta = 104°16'$ (Fock). Combination (Fig. 219): $a = \{100\}$, $m = \{110\}$, a' und m' (in der Figur nicht bezeichnet) $= \{\bar{1}00\}$ bzw. $\{\bar{1}10\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $o = \{11\bar{1}\}$, $v = \{13\bar{3}\}$, $p = \{\bar{1}1\bar{1}\}$. Spaltbarkeit nach $a\,\{100\}$ ziemlich vollkommen. Ebene der optischen Axen (010); durch (100) das Interferenzbild einer Axe sichtbar.

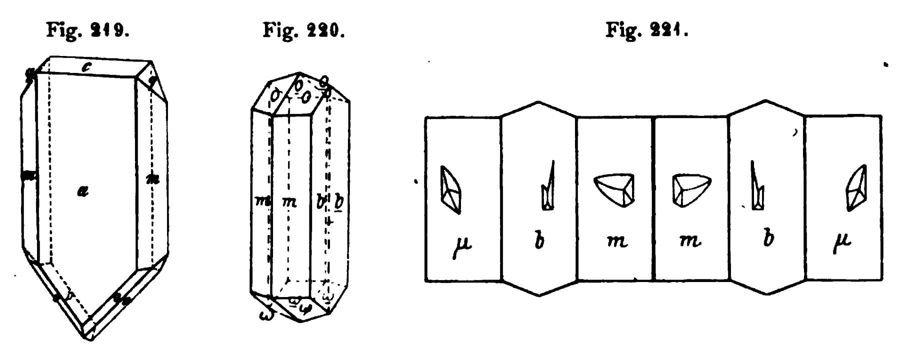
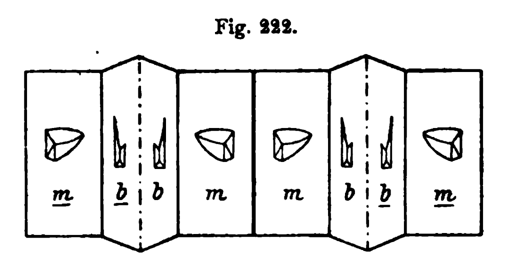


Fig. 219. Fig. 220. Fig. 221.

Skolezit $= Si_3O_{10}Al_2Ca.3H_2O$. $a:b:c = 0{,}9764:1:0{,}3434$; $\beta = 90°42'$ (Flink). Langprismatische Combinationen von $b\{010\}$, $m\{110\}$, $\mu\{\bar{1}10\}$ mit den Endflächen $o\{111\}$, $\omega\{11\bar{1}\}$, meist Zwillinge nach (100), wie Fig. 220,

aber stets nur am oberen Ende ausgebildet. Spaltbarkeit nach {110} ziemlich vollkommen. Ätzfiguren auf *m*, *b* und *μ* eines einfachen Krystalles s. Fig. 221, welche die Flächen der Zone [001] nebeneinander darstellt, und Fig. 222, welche in derselben Darstellung einem Zwillinge entspricht. Stark polar pyroelektrisch; beim Abkühlen werden die Kanten *m* : *m* positiv, die Kanten *μ* : *μ* negativ elektrisch; an den Zwillingen Fig. 220 werden natürlich die vorderen und die hinteren Prismenkanten positiv, und auf *b* erscheint an der Zwillingsnaht eine negative Zone (Rinne).

Fig. 222.



Paratoluidoisobuttersäureester $= C_{13}H_{19}NO_2$. $a:b:c = 0{,}8106:1:0{,}6796$; $\beta = 100^\circ 30'$ (Doss). Combinationen: $c' = \{00\bar{1}\}$, $c = \{001\}$, $a = \{100\}$, $e = \{\bar{1}01\}$, $a' = \{\bar{1}00\}$, $e' = \{10\bar{1}\}$, $b = \{010\}$, $f = \{011\}$, $p = \{130\}$, $q = \{210\}$ (Fig. 223, in welcher jedoch links die beiden Buchstaben *p* und *q* verwechselt sind); $e = \{\bar{1}01\}$, $a = \{100\}$, $e' = \{10\bar{1}\}$,

Fig. 223.

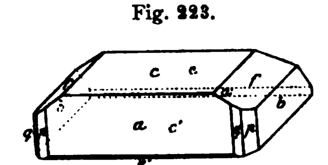


Fig. 224.

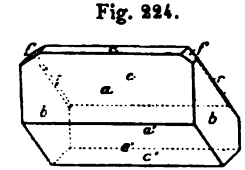
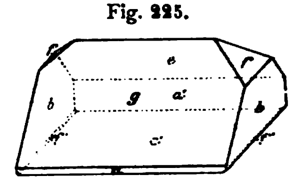


Fig. 225.



$c' = \{00\bar{1}\}$, $a' = \{\bar{1}00\}$, $c = \{001\}$, $b = \{010\}$, $r = \{\bar{1}21\}$, $f = \{011\}$ (Fig. 224); $g = \{405\}$, $c' = \{00\bar{1}\}$, $e = \{\bar{1}01\}$, $a' = \{\bar{1}00\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $f = \{011\}$, $f' = \{01\bar{1}\}$ (Fig. 225); von diesen Combinationen ist die erste die häufigste. — Spaltbarkeit unvollkommen nach *c* (001) und *b* (010). Ebene der optischen Axen (010); durch (001) das Interferenzbild einer Axe im Gesichtsfelde; eine Schwingungsrichtung von (010) bildet 31° mit der *c*-Axe.

5. Prismatische Klasse.

(Monoklin-holoedrische Klasse.)

Die Symmetrie nach einer Ebene und einer dazu senkrechten zweizähligen Axe, welche die letzte Klasse des monoklinen Krystallsystemes charakterisiert, bedingt im allgemeinsten Falle die Gleichwertigkeit von je vier Flächen (s. S. 355). Analog den beiden vorhergehenden Klassen wird wieder die Symmetrieebene als (010), bzw. die Symmetrieaxe als *b*-Axe angenommen; in der nebenstehend wiederholten Fig. 203 sind, wenn die punktierten Durchmesser die beiden andern Krystallaxen darstellen, die Pole der vier gleichwertigen Flächen der allgemeinen Form $\{hkl\}$, nämlich die von (hkl), $(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ und $(\bar{h}k\bar{l})$,

eingetragen. Wie die Symmetrie dieser Klasse gleichsam die Combination der Symmetrieverhältnisse der beiden vorhergehenden darstellt, so treten hier die beiden Sphenoide $\{hkl\}$ und $\{h\bar{k}l\}$, bzw. die beiden Domen $\{hkl\}$ und $\{\bar{h}k\bar{l}\}$ zu derselben, aus vier gleichwertigen Flächen gebildeten Form zusammen. Diese ist, wie aus der Projection sofort zu ersehen, ein aus zwei Paaren paralleler Flächen bestehendes Prisma, welches im allgemeinen einen rhombischen Querschnitt hat, dessen längere oder kürzere Diagonale in der Symmetrieebene gelegen ist, je nachdem letztere den stumpfen oder den spitzen Flächenwinkel des Prismas halbiert. Nach dieser Form ist die Klasse benannt.

Gehen die vier Kanten des Prismas der Axe a oder c parallel, so ist es nach dem bisherigen Principe der Benennung ein solches 1. bzw. 3. Art, andernfalls 4. Art. Alle Prismen, in welchen der erste und dritte Index in dem gleichen Verhältnisse stehen, bilden eine Zone, welche in der Projection einem Durchmesser des Grundkreises entspricht; je näher ihre Pole dem letzteren liegen, desto kleiner ist der von der Symmetrieebene halbierte Flächenwinkel des Prismas; wenn derselbe seinen kleinsten Wert Null erreicht, fallen die Pole in den Grundkreis, und das Prisma verwandelt sich in ein Pinakoid, welches als erstes, drittes oder als solches 2. Art zu bezeichnen ist, je nachdem es die Grenzform einer Reihe von Prismen 1., 3. oder 4. Art bildet. Andererseits haben alle diese Reihen von Prismen eine gemeinsame Grenzform für den speciellen Fall, daß die Pole den größtmöglichen Abstand 90° vom Grundkreise besitzen; dann fallen nämlich die Pole der beiden an der gleichen Seite der Symmetrieebene gelegenen Fläche paarweise zusammen, und es entsteht das der letzteren Ebene parallele Pinakoid. Hieraus ergeben sich folgende Formen dieser Klasse:

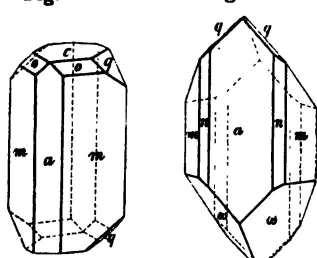
$\{100\}$ erstes Pinakoid
$\{010\}$ zweites Pinakoid
$\{001\}$ drittes Pinakoid
$\{0kl\}$ Prisma erster Art
$\{h0l\}$ Pinakoid zweiter Art
$\{hk0\}$ Prisma dritter Art
$\{hkl\}$ Prisma vierter Art.

Die Formen $\{011\}$ und $\{110\}$ können als »primäres Prisma« 1. bzw. 3. Art bezeichnet werden, deren nur je eines existiert, während es je zwei »primäre« Pinakoide 2. Art $\{101\}$ und $\{\bar{1}01\}$, und »primäre Prismen 4. Art«, $\{111\}$ und $\{\bar{1}11\}$, gibt.

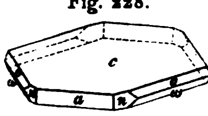
Daß in einem Krystalle dieser Klasse alle diejenigen Flächen gleichwertig sind, welche in einem monoklinen Raumgitter (Fig. 155, S. 277) mit Massenpunkten gleichartig besetzten Ebenen entsprechen (ohne eine Verschiedenheit entgegengesetzter Richtungen), geht bereits aus S. 359 hervor; in der Tat können aus Fig. 155 a oder b alle oben angeführten Formen ohne weiteres hergeleitet werden.

Beispiele.

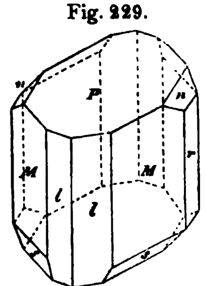
Schwefel (aus dem geschmolzenen Zustande erstarrt)[1]. $a:b:c = 0,9958:1:0,9998$; $\beta = 95°46'$ (Mitscherlich). Combination (Fig. 226): $m = \{110\}$, $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $q = \{011\}$. Aus Schwefelammonium erhielt Muthmann die Combination (Fig. 227): $a = \{100\}$, $m = \{110\}$, $n = \{210\}$, $\omega = \{11\bar{1}\}$, $q = \{011\}$.


Fig. 226. Fig. 227.

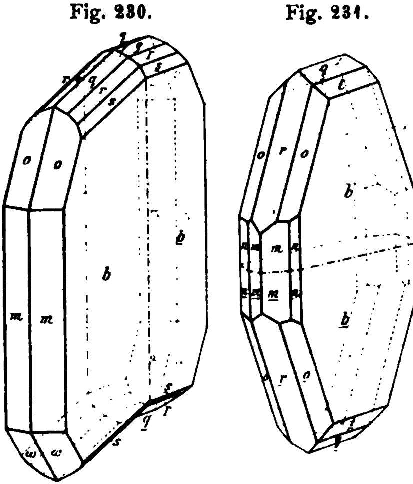
Selen (gewöhnliche nicht-metallische Modification)[2]. $a:b:c = 1,6349:1:1,6095$; $\beta = 104°2'$ (Muthmann). Combination (Fig. 228): $c = \{001\}$, $a = \{100\}$, $o = \{111\}$, $\omega = \{11\bar{1}\}$, $n = \{210\}$. Orangerot. Diese Modification entspricht nicht der im Vorhergehenden beschriebenen, sondern einer andern Form des Schwefels, mit welcher sie isomorphe Mischungen bildet.


Fig. 228.

Arsensulfür (nat. Realgar) $= AsS$. $a:b:c = 1,4403:1:0,9729$; $\beta = 113°55'$ (Marignac). Combination (Fig. 229): $M = \{110\}$, $l = \{210\}$, $P = \{001\}$, $n = \{011\}$, $r = \{010\}$, $s = \{11\bar{1}\}$. Spaltbar nach $\{010\}$. Ebene der optischen Axen (010); die erste Mittellinie liegt im stumpfen Winkel der Krystallaxen a und c und bildet mit ersterer 103°, mit letzterer 11°; Doppelbrechung —, stark; $2H = 96°20'$ rot, $92°58'$ gelb, also starke Dispersion; die der Mittellinien (geneigte) ebenfalls stark (Des Cloizeaux).


Fig. 229.

Arsentrioxyd (arsenige Säure, Claudetit) $= As_2O_3$ (dimorph, die gewöhnliche Modification krystallisiert kubisch). $a:b:c = 0,4040:1:0,3445$, $\beta = 93°57'$ (A. Schmidt). Beobachtete Formen: $b = \{010\}$, $m = \{110\}$, $o = \{111\}$, $\omega = \{11\bar{1}\}$, $q = \{011\}$, $r = \{021\}$, $s = \{041\}$. Meist Zwillinge nach a (100) Fig. 230. Spaltbar nach (010) höchst vollkommen. Ebene der optischen Axen (010), Axenwinkel sehr groß; eine Schwingungsrichtung auf (010) 5° zur Verticalaxe c geneigt.


Fig. 230. Fig. 231.

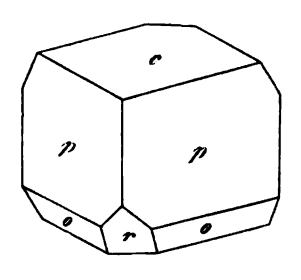
Chlorbaryum $= BaCl_2 \cdot 2H_2O$. $a:b:c = 0,6177:1:0,6549$; $\beta = 91°5'$

1) Der Schwefel ist polymorph; die aus Lösungen sich abscheidende und bei gewöhnlicher Temperatur stabile Modification desselben krystallisiert rhombisch-bipyramidal (8. Klasse).
2) Das metallische Selen krystallisiert trigonal (s. 21. Klasse).

(Wyrouboff). Beob. Formen: $b = \{010\}$, $r = \{101\}$, $\varrho = \{\bar{1}01\}$, $o = \{111\}$, $\omega = \{\bar{1}11\}$, $q = \{011\}$, $t = \{021\}$, $m = \{110\}$, $n = \{130\}$. Gewöhnlich Zwillinge nach (001) Fig. 231, häufig auch nach (100). Gleitflächen parallel a {100} und c {001}; nach jeder dieser beiden Ebenen entstehen Zwillingslamellen durch Druck noch leichter als beim Kalkspat (S. 248f.); findet die Schiebung nach (100) statt, so ist (001) zweite Kreisschnittebene des Deformationsellipsoides und umgekehrt (Mügge). Ebene der optischen Axen (010), 1. Mittellinie 7°—8° im stumpfen Winkel β zur c-Axe geneigt. Brechungsindices für Rot: $\alpha = 1{,}628$, $\beta = 1{,}641$, $\gamma = 1{,}657$; für Gelb: $\alpha = 1{,}635$, $\beta = 1{,}646$, $\gamma = 1{,}660$. $2V$ ber. 84°50′ rot, 83°46′ gelb (Des Cloizeaux).

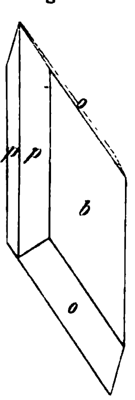
Ferrocyankalium (gelbes Blutlaugensalz) $= Fe(CN)_6K_4.3H_2O$. $a:b:c = 0{,}3962 : 1 : 0{,}4008$; $\beta = 90°33'$ (Wyrouboff). Dicke Tafeln nach {010}, begrenzt von {110} und {011}; da die Kanten dieser beiden Formen einander fast rechtwinkelig schneiden, und ihre Neigung zu {010} fast gleich ist, so erscheint die Combination wie die einer spitzen tetragonalen Bipyramide mit vorherrschender Basis. Spaltbar {010} vollkommen. Die gewöhnlichen Krystalle bestehen aus zahlreichen Lamellen nach {010} mit gekreuzten Axenebenen, zeigen daher die in Fig. 104 S. 148 abgebildete Erscheinung oder das Interferenzbild einaxiger Krystalle. Ihre Form ist eine mimetische des tetragonalen Systems (s. dieses). Aus warmer Lösung von chromsaurem Kalium erhält man homogene, d. h. einfache monokline Krystalle (Wyrouboff).

Fig. 232.



Ferricyankalium (rotes Blutlaugensalz) $= Fe(CN)_6K_3$. $a : b : c = 1{,}2876 : 1 : 0{,}8011$; $\beta = 90°6'$ (Marignac). Combination: {110} vorherrschend, um Ende {111} oder {111}, $\{\bar{1}11\}$. Meist pseudorhombische Zwillinge nach {100}. Ebene der optischen Axen {010}, 1. Mittellinie 4° gegen die c-Axe geneigt. $2E = 71°20'$ Rot, 75°52′ Gelb (Des Cloizeaux).

Fig. 233.



Kaliumchlorat (chlorsaures Kalium) $= ClO_3K$. $a : b : c = 0{,}8256 : 1 : 1{,}2236$; $\beta = 109°56'$ (Rammelsberg). Combination (Fig. 232): $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $o = \{11\bar{1}\}$, $r = \{10\bar{1}\}$. Häufig Zwillinge nach {001} und mit derselben Fläche verwachsen. Spaltbarkeit nach {110}. Ebenen der optischen Axen ⊥ {010}; $2E = 28°$ ungefähr.

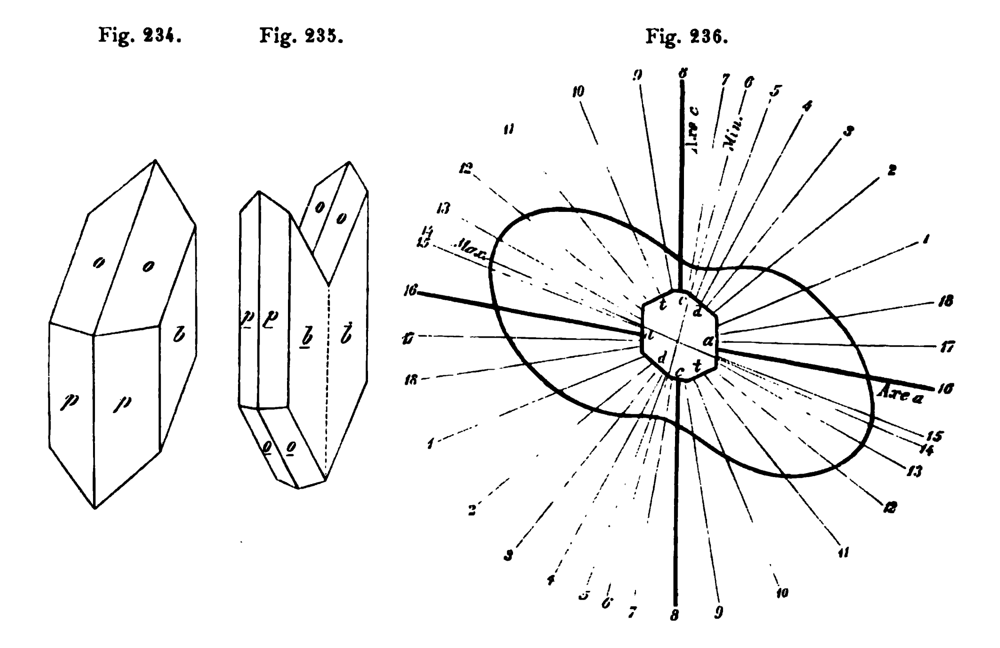
Kohlensaures Natrium (Soda) $= CO_3Na_2 \cdot 10H_2O$. $a : b : c = 1{,}4186 : 1 : 1{,}4828$; $\beta = 122°20'$ (Mohs). Combination (Fig. 233): $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $o = \{11\bar{1}\}$. Spaltbarkeit nach {100}. Die Ebene der optischen Axen für mittlere Farben, senkrecht zur Symmetrieebene, liegt im stumpfen Winkel β und bildet mit

a 22°, mit c 100°; Axe b ist erste Mittellinie, Doppelbrechung —; $2E =$ 69° ungefähr; schwache gekreuzte Dispersion.

Schwefelsaures Natrium (Glaubersalz) $= SO_4Na_2 . 10 H_2O$. $a : b : c = 1,1161 : 1 : 1,2382$; $\beta = 107°45'$ (Haidinger). Combination: {100}, {001}, {$\bar{1}$01}, {011}, {111}, {$\bar{1}$11} u. a. Oft sehr flächenreiche Krystalle. Spaltbar {100} vollkommen. Ebenen der optischen Axen senkrecht zu {010}, Axe b 1. Mittellinie; 2. Mittellinie bildet mit Axe c 31° für Rot, 26½° für Blau; $2E = 122°48'$ rot, $122°42'$ blau (Des Cloizeaux).

Schwefelsaures Calcium (Gyps) $= SO_4Ca . 2H_2O$. $a : b : c = 0,6895 : 1 : 0,4132$; $\beta = 98°58'$ (Beckenkamp). Combination (Fig. 234): $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $o = \{111\}$. Nicht selten Zwillinge nach {100}, s. Fig. 235. Spaltbarkeit {010} sehr vollkommen, {11$\bar{1}$} deutlich, {100} unvollkommen. Sehr große Verschiedenheit der Elasticität innerhalb der

Fig. 234. Fig. 235. Fig. 236.



Symmetrieebene, wie aus Fig. 236 hervorgeht, in welcher nach Coromilas die Curve dargestellt ist, deren Radien proportional der Biegung eines entsprechenden Stabes; es bedeutet: 1 ‖ t die Richtung [101], d. h. die des sog. Faserbruches, gebildet von den beiden Spaltungsflächen ($\bar{1}$11) und ($\bar{1}\bar{1}$1); 2 die Richtung der ersten Mittellinie der optischen Axen, 3 die Normale zu d {101}, 7 die Normale zu c {001}, 10 die Normale zu t {$\bar{1}$01}, 11 die Richtung der zweiten optischen Mittellinie, 17 die Normale zu a {100}, 18 die Richtung der bei der Körnerprobe (S. 245) entstehenden Gleitfläche β {$\bar{5}$09}.

Brechungsindices bei 16,8° C. nach T. von Lang:

	α	β	γ
Linie C	1,5183	1,5204	1,5281
- D	1,5207	1,5228	1,5305
- E	1,5237	1,5258	1,5335
- F	1,5263	1,5284	1,5361

Der Winkel der optischen Axen hat für D ein Maximum und auch die Dispersion der Hauptschwingungsrichtungen ist anormal. Die Ebene der optischen Axen ist bei gewöhnlicher Temperatur parallel der Symmetrieebene, mit starker geneigter Dispersion (s. Fig. 6 und 7 Taf. II); bei 9° C. liegt die erste Mittellinie im stumpfen Winkel der Axen und bildet mit a 23° 43′, dabei ist $2V = 61° 24'$. Beim Erwärmen nähert sich diejenige Axe, welche weitere Ringe und an der Hyperbel (s. Fig. 6 Taf. II) außen Violett, innen Blau hat, weit schneller der Mitte des Gesichtsfeldes, als die andere, deren Hyperbelsäume außen rot, innen blaugrün sind. Des Cloizeaux fand für rotes Licht

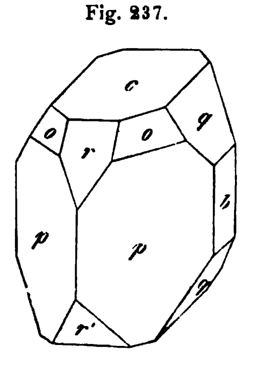
$2E =$ 75° 58′	bei	47°	Cels.
59 19	-	71,5	-
39 1	-	95,5	-
0	-	116	-

Bei letzterer Temperatur sind die Axen für Blau schon merklich getrennt in der zu {010} normalen Ebene; bei etwas höherer Erwärmung liegen alle Axen in Ebenen, senkrecht zur Symmetrieebene, ihre horizontale Dispersion ist jedoch gering. Zwischen 20° und 95° dreht sich eine Axe (für Rot) nach der Mitte zu um 33° 55′, die andere um 22° 38′, folglich ändert die Mittellinie ihre Lage um 5° 38′. Doppelbrechung +. Die thermische Ausdehnung des Gypses ist mit der Richtung beträchtlich verschieden, daher die Winkeländerungen beim Erwärmen nicht unbedeutend; nach Beckenkamps Messungen sind die Elemente:

bei 0° C. $a:b:c =$	0,689724 : 1 : 0,413411,	$\beta =$ 98° 56′ 18″
50° - - - -	0,689301 : 1 : 0,413072,	98 59 59
100 - - - -	0,688596 : 1 : 0,412661,	99 3 26

Danach ist die Symmetrieaxe Richtung der größten thermischen Ausdehnung; die der kleinsten liegt im stumpfen Axenwinkel β und bildet mit der Verticalaxe 45°—46°.

Fig. 237.



Schwefelsaures Eisen (Eisenvitriol) $= SO_4Fe \cdot 7H_2O$. $a:b:c = 1,1828 : 1 : 1,5427$; $\beta = 104° 15\frac{1}{2}$ (von Zepharovich). Combination (Fig. 237): $p =$ {110}, $c =$ {001} (manchmal nur diese beiden, eine rhomboederähnliche Form bildend), $r =$ {101}, $r' =$ {10$\bar{1}$}, $o =$ {111}, $q =$ {011}, $b =$ {010}. Spaltbarkeit {001} vollkommen, {110} unvollkommen. Ebene der

optischen Axen {010}, Doppelbrechung +; erste Mittellinie im spitzen Axenwinkel bildet mit c 62° 28′ und divergiert für verschiedene Farben nur einige Minuten. Hauptbrechungsindices:

	α	β	γ
für *Li*-Linie:	1,4681	1,4748	1,4824
- *Na* - :	1,4713	1,4782	1,4856
Blaues Glas:	1,4794	1,4861	1,4928

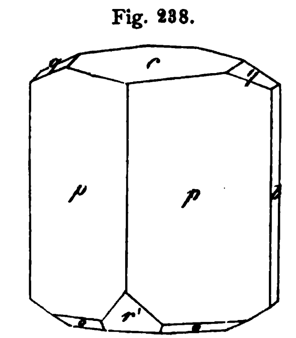
Direct bestimmt durch Messung des spitzen und stumpfen Winkels der optischen Axen in Öl (s. S. 135):

Rot:	$2V = 85°31'$
Gelb:	85 27
Grün:	85 23

(Erofejeff, sehr ähnliche Werte fand Des Cloizeaux).

Schwefelsaures Kalium-Magnesium $= (SO_4)_2 MgK_2 . 6 H_2O$. $a : b : c = 0,7413 : 1 : 0,4993$; $\beta = 104°48'$ (Tutton). Combination (Fig. 238): $p = \{110\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $o = \{11\bar{1}\}$, $r' = \{20\bar{1}\}$, $b = \{010\}$. Ebene der optischen Axen {010}, Doppelbrechung +, schwach; die erste Mittellinie im stumpfen Axenwinkel von a nur etwa 1° abweichend (für Rot weniger als für Blau). Hauptbrechungsindices:

Fig. 238.



	α	β	γ
Li:	1,4581	1,4603	1,4727
Na:	1,4607	1,4629	1,4755
Tl:	1,4631	1,4652	1,4778

Wahre und scheinbare Axenwinkel (erstere berechnet nach S. 135):

Li:	$2V = 48°\ 0'$	$2E = 72°43'$	
Na:	47 54	72 47	
Tl:	47 48	72 50	(Tutton).

Die Richtung der größten dielektrischen Polarisation ist die Axe b, die der kleinsten bildet 80° mit der Axe c im stumpfen Winkel β; die Axenebenen für große Wellen sind also ⊥ (010) (Borel).

Schwefelsaures Ammonium-Magnesium $= (SO_4)_2 Mg(NH_4)_2 . 6 H_2O$. $a : b : c = 0,7376 : 1 : 0,4891$; $\beta = 107°6'$ (Murmann). Combination gleich der vorigen. Ebene der optischen Axen {010}, Doppelbrechung +, schwach; erste Mittellinie im stumpfen Axenwinkel, bildet mit a 5°.

$\beta = 1,4677$	$2V = 50°27'$	rot
1,4737	50 14	gelb
1,4787	49 47	grün
1,4846	48 54	violett

(Heusser, Murmann und Rotter). Die Ebene der elektrischen Axen, wie beim vorigen Salze, senkrecht zu derjenigen der optischen (Borel). Die analog zusammengesetzten Salze:

$$(SO_4)_2Mn(NH_4)_2 \cdot 6H_2O$$
$$(SO_4)_2FeK_2 \cdot 6H_2O$$
$$(SO_4)_2Fe(NH_4)_2 \cdot 6H_2O$$ [1]
$$(SO_4)_2NiK_2 \cdot 6H_2O$$
$$(SO_4)_2Ni(NH_4)_2 \cdot 6H_2O$$
$$(SO_4)_2CoK_2 \cdot 6H_2O$$
$$(SO_4)_2Co(NH_4)_2 \cdot 6H_2O$$
$$(SO_4)_2ZnK_2 \cdot 6H_2O$$
$$(SO_4)_2Zn(NH_4)_2 \cdot 6H_2O$$
$$(SO_4)_2CuK_2 \cdot 6H_2O$$
$$(SO_4)_2Cu(NH_4)_2 \cdot 6H_2O$$

besitzen sämtlich die gleiche Krystallform und sehr ähnliche optische Eigenschaften.

Phosphorsaures Ammonium-Natrium (Phosphorsalz) = $PO_4(NH_4)NaH.4H_2O$. $a:b:c = 2,8828:1:1,8616$; $\beta = 99°18'$ (Mitscherlich). Combination (Fig. 239): $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $-r = \{101\}$, $-r' = \{201\}$, $r = \{10\bar{1}\}$, $r' = \{20\bar{1}\}$.

Fig. 239.

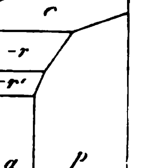
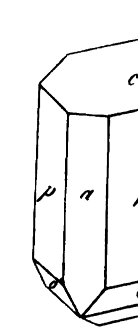


Fig. 240.



Borax $= B_4O_7Na_2.10H_2O$. $a:b:c = 1,0997:1:0,5394$; $\beta = 106°35'$ (Rammelsberg). Combination (Fig. 240): $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $o = \{11\bar{1}\}$, $o' = \{22\bar{1}\}$. Ebenen der optischen Axen normal zu (010), Doppelbrechung —, Symmetrieaxe ist erste Mittellinie, die zweite liegt im spitzen Winkel der Axen und bildet mit c 55°33' für Rot, 54°45' für Grün, daher die sehr deutliche gekreuzte Dispersion, welche in Fig. 10 und 11 der Taf. II dargestellt ist; die zweite Mittellinie und somit die Axenebene für jede Farbe dreht sich beim Erwärmen von 21° auf 86° C. um 3½°. Optische Constanten nach Tschermak:

	α	β	γ	$2V$ ber.	$2E$ beob.
Für *Li*-Linie:	1,4442	1,4657	1,4686	39°52′	59°53′
- *Na*- - :	1,4468	1,4686	1,4715	39 36	59 23
- blaues Glas:	1,4535	1,4756	1,4785	39 22	—

1) Von diesem, dem sog. Mohrschen Salze, wurde die Wachstumsgeschwindigkeit verschiedenartiger Flächen durch G. Wulff gemessen (s. S. 260).



Epidot $= Si_3O_{13}Al_3Ca_2H$. $a:b:c = 1{,}5807:1:1{,}8057$; $\beta = 115^\circ 24'$ (von Kokscharow). Combination (Fig. 241): $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r = \{10\bar{1}\}$, $p = \{110\}$, $o = \{11\bar{1}\}$; stets nach der Symmetrieaxe prismatisch verlängert und gewöhnlich nur an einem Ende ausgebildet. Häufig Zwillinge nach a $\{100\}$, s. Fig. 242 a—c (gerade Projectionen auf die Symmetrieebene); Fig. 242 a stellt einen einfachen Krystall dar, an dessen Ende o $\{\bar{1}11\}$ vorherrscht; in dem symmetrischen Zwillinge Fig. 242 b bilden die beiden oberen Flächen $o\underline{o}$ einen einspringenden, die unteren $o\underline{o}$ einen ausspringenden Winkel; sind die letzteren so groß, daß sie allein die Endigung des nach der Symmetrieaxe prismatischen Zwillinges bilden, so erscheint derselbe wie ein einfacher monokliner Krystall, dessen Symmetrieebene a ist; sehr häufig ist der in Zwillingsstellung

Fig. 241.

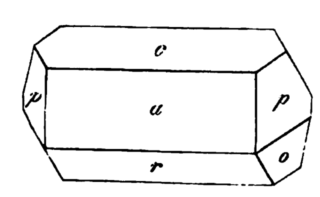
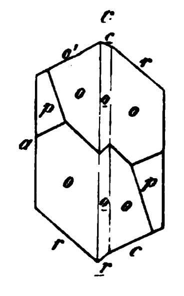


Fig. 242.



befindliche zweite Krystall dem ersten nur als dünne Lamelle eingelagert, wie Fig. 242 c zeigt. Spaltbarkeit $\{001\}$ vollkommen, $\{100\}$ deutlich. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, Doppelbrechung —; erste Mittellinie, bei der gewählten Stellung fast vertical, liegt im spitzen Winkel und bildet mit c $2^\circ 56'$ für Rot, $2^\circ 26'$ für Grün, daher deutliche geneigte Dispersion;

$2V =$	$\beta =$	
$73^\circ 36'$	1,7541	Rot
73 26	1,7570	Gelb
73 13	1,7621	Grün

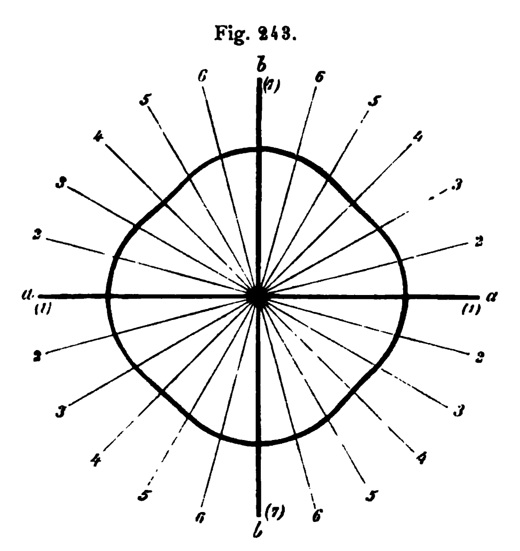
$\alpha = 1{,}7305$, $\gamma = 1{,}7677$ Rot (Klein).

Der Axenwinkel ändert sich wenig mit der Temperatur. Pleochroismus s. S. 171.

Glimmer $= (SiO_4)_3Al_3KH_2$. $a:b:c = 0{,}578:1:3{,}276$; $\beta = 90^\circ 0'$, G. vom Rath). Ausgezeichnet pseudohexagonal. Sechsseitige Tafeln nach $\{001\}$, selten mit gut ausgebildeten Randflächen. Zwillinge und Drillinge nach $\{110\}$, deren Verwachsungsfläche aber stets $\{001\}$ ist (Tschermak); es liegt also hier der Fall vor, daß die Krystalle die Ebenen größter Cohäsion gemein haben und nur die drei fast gleichwertigen, in dieser Ebene liegenden Richtungen maximaler Cohäsion vertauscht sind (vgl. auch S. 296). Durch lamellare Wiederholung dieser Drillingsbildung können

also mimetisch hexagonale Krystalle entstehen. Höchst vollkommene Spaltbarkeit nach $\{001\}$ (über die Verwendung dünner Glimmerplatten zu optischen Zwecken s. S. 139 f.); durch Eintreiben einer scharfen Spitze in eine Spaltungslamelle erhält man als Schlagfigur einen sechsstrahligen Stern, bestehend aus Sprüngen nach $\{010\}$ und $\{\bar{1}11\}$, durch Druck mit einer stumpfen Spitze Knickungen nach drei Richtungen, welche die Winkel der Schlagfigur halbieren (Reusch, Bauer, Tschermak). Die Elasticität für Richtungen innerhalb der Spaltungsfläche wird nach den Messungen von Coromilas dargestellt durch die Curve Fig. 243, deren Radien vect. proportional sind der elastischen Biegung; *1* ist die Richtung der Symmetrieaxe (Maximum der Biegung, daher Minimum der Elasticität); 3, 3, 7 sind den Radien der Schlagfigur, 1, 5, 5 denen der Druckfigur parallel. Ebenen der optischen Axen senkrecht zur Symmetrieebene, 1. Mittellinie $\frac{1}{2}^\circ$—2° gegen Axe c nach hinten geneigt (da infolge dieser Orientierung eine Spaltungsplatte die optischen Axen fast genau symmetrisch zur Normale der Platte zeigt, so wurde der Glimmer lange Zeit für rhombisch gehalten, bis Hintze und Tschermak die erwähnte Abweichung nachwiesen). $2E = 60^\circ$—70°, $\varrho > v$. Doppelbrechung —. Hauptbrechungsindices nach Bauer:

Fig. 243.



$$\alpha = 1{,}537 \text{ für rotes Glas}$$
$$\beta = 1{,}541 \quad - \quad - \quad -$$
$$\gamma = 1{,}574 \quad - \quad - \quad -$$

Die angegebenen Werte gelten für den Kaliglimmer oder Muscovit, während die andern Glimmerarten (isomorphe Mischungen) große Verschiedenheiten in der Lage der optischen Axen zeigen.

Fig. 244.

Augit = Mischung von $(SiO_3)_2Ca(Mg,Fe)$ und SiO_6Al_2Mg. $a:b:c = 1{,}058 : 1 : 0{,}594$; $\beta = 90^\circ22'$ (von Kokscharow). Combination (Fig. 244): $a = \{100\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o = \{122\}$. Optische Axen in der Symmetrieebene, Doppelbrechung +, stark. Bei den verschiedenen Mischungen, welche die Varietäten dieses Minerales bilden, macht die erste Mittellinie (im stumpfen Axenwinkel) mit c Winkel von 39° bis 54°; der

wahre Axenwinkel $2V = 61^\circ$—68°; $\beta = 1{,}70$ ungefähr. Meist dunkelbraun durchsichtig mit mäßigem Pleochroismus.

Der mit Augit vollkommen isomorphe Diopsid $= (SiO_3)_2Ca(Mg,Fe)$ besitzt eine ausgezeichnete Gleitfläche, welche, wenn man dem Prisma o das Symbol $\{\bar{1}11\}$ gibt, das einfache Zeichen $\{001\}$ erhält; die zweite Kreisschnittebene des Deformationsellipsoides bei der Schiebung ist a (100).

Hornblende (chemische Zusammensetzung gleich Augit). $a:b:c = 0{,}5318:1:0{,}2936$; $\beta = 104^\circ 58'$ (Des Cloizeaux). Combination (Fig. 245): $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $o = \{11\bar{1}\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, Doppelbrechung —; erste Mittellinie im spitzen Axenwinkel β macht mit c 1°—18°; $2V = 80^\circ$—85°; $\beta = 1{,}64$ ungefähr. Starker Pleochroismus; meist ist die Körperfarbe für die Schwingungsrichtung größter Lichtgeschwindigkeit grün, die parallel der kleinsten braun; doch gibt es Varietäten, deren drei Axenfarben den größten überhaupt vorkommenden Unterschied zeigen, sie sind nämlich: dunkelblau, violett und gelbgrün.

Fig. 245.

Essigsaures Natrium $= C_2H_3O_2Na.3H_2O$. $a:b:c = 1{,}1852:1:0{,}9964$; $\beta = 111^\circ 44'$ (Brooke). Combination (Fig. 246): $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $o = \{11\bar{1}\}$, $r' = \{20\bar{1}\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$ und $\{001\}$. Ebenen der optischen Axen senkrecht zu $\{010\}$, erste Mittellinien im spitzen Axenwinkel β bilden mit c 55°; $2E = 99^\circ 11'$ rot, $101^\circ 50'$ violett; horizontale Dispersion kaum bemerkbar (Des Cloizeaux).

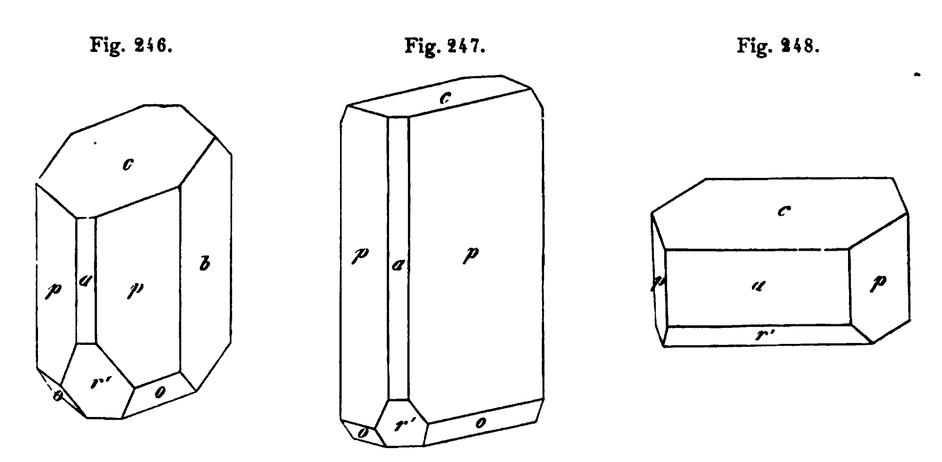


Fig. 246. Fig. 247. Fig. 248.

Essigsaures Kupfer (Grünspan) $= (C_2H_3O_2)_2Cu.H_2O$. $a:b:c = 1{,}5320:1:0{,}8108$; $\beta = 116^\circ 26'$ (Schabus). Combination Fig. 247): $p = \{110\}$, $c = \{001\}$, $a = \{100\}$, $o = \{11\bar{1}\}$, $r' = \{20\bar{1}\}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ und $\{110\}$. Starker Pleochroismus (spangrün bis dunkelblau).

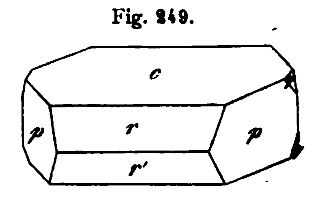
Essigsaures Blei (Bleizucker) $= (C_2H_3O_2)_2Pb.3H_2O$. $a:b:c = 2{,}1791 : 1 : 2{,}4790$; $\beta = 109°48'$ (Rammelsberg). Combination (Fig. 248): $a = \{100\}$, $c = \{001\}$, $r' = \{10\bar{1}\}$, $p = \{110\}$; häufig dünn tafelförmig nach $\{001\}$. Spaltbarkeit nach $\{100\}$ und $\{001\}$. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, Doppelbrechung +; erste Mittellinie (für die verschiedenen Farben nur wenige Min. abweichend) im stumpfen Winkel β, bildet mit c 55° 18'.

$2V =$		$\beta =$	
	83° 27'	1,570	rot
	83 55	1,576	gelb
	87 24	1,584	blau

(Des Cloizeaux).

Oxalsäure $= C_2O_4H_2.2H_2O$. $a:b:c = 1{,}6949 : 1 : 3{,}3360$; $\beta = 106°12'$ (De la Provostaye). Combination (Fig. 249): $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $r' = \{10\bar{1}\}$, $q = \{011\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$. Ebenen der optischen Axen normal zu $\{010\}$ und fast genau senkrecht zu $\{001\}$; erste Mittellinie $\parallel b$, zweite Mittellinien im stumpfen Winkel gegen c 14° 43' (rot), 14° 56' (blau) geneigt;

Fig. 249.

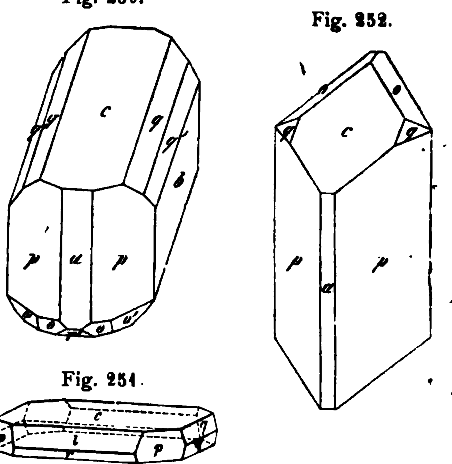


$$2E = 117°16' \text{ rot}, \; 118°33' \text{ blau (Des Cloizeaux).}$$

Saures oxalsaures Kalium (Kleesalz) $= C_2O_4KH$. $a:b:c = 0{,}3360 : 1 : 0{,}8011$; $\beta = 133°29'$ (Marignac). Combination (Fig. 250): $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $q' = \{021\}$, $r' = \{10\bar{2}\}$, $o = \{11\bar{1}\}$, $o' = \{12\bar{1}\}$. Spaltbarkeit nach $\{100\}$ vollkommen, $\{010\}$ deutlich.

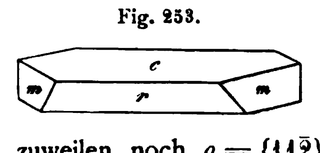
Benzoesäure $= C_7H_6O_2$. $a:b:c = 1{,}0508 : 1 : 4{,}2084$; $\beta = 97°5'$ (Bodewig). Combination (Fig. 251): $c = \{001\}$, $l = \{101\}$, $r = \{10\bar{1}\}$, $p = \{110\}$, $q = \{011\}$. Ebene der optischen Axen $\{010\}$; eine optische Axe steht ungefähr senkrecht zu c $\{001\}$.

Fig. 250. Fig. 252. Fig. 251.



Salicylsäure $= C_7H_6O_3$. $a:b:c = 1{,}0298 : 1 : 0{,}4344$; $\beta = 91°22'$ (Marignac). Combination (Fig. 252): $p = \{110\}$, $a = \{100\}$, $c = \{201\}$, $q = \{211\}$, $o = \{111\}$.

Fig. 253.

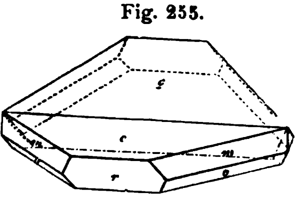


Chinon $= C_6H_4O_2$. $a:b:c = 1{,}0325 : 1 : 1{,}7100$; $\beta = 101° 0'$ (Hintze). Combination (Fig. 253): $c = \{001\}$, $m = \{110\}$, $r = \{10\bar{1}\}$; zuweilen noch $o = \{11\bar{2}\}$

(Fig. 254) und Zwillinge nach r (Fig. 255). Spaltbar nach $r\{10\bar{1}\}$ sehr vollkommen. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, die erste Mittellinie nahe senkrecht zu $r\{10\bar{1}\}$. Axenwinkel in Öl, beob. durch eine Spaltungsplatte:

Fig. 254.

Fig. 255.



$2H_a = 73^\circ 28'$ für Li
74 1 - Na
74 38 - Tl.

Doppelbrechung stark, negativ (Henniges).

Naphtalin $= C_{10}H_8$. $a:b:c = 1,3951:1:1,4278$; $\beta = 123^\circ 29'$ (Groth). Combination (Fig. 256): $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $r = \{20\bar{1}\}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen. Ebene der optischen Axen $\parallel \{010\}$; durch die Spaltungsblättchen eine Axe sichtbar (Groth). Doppelbrechung außerordentlich stark.

Fig. 256.

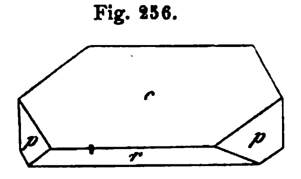
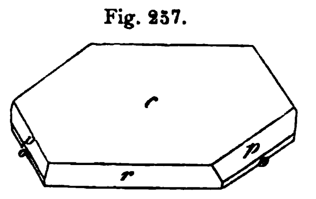


Fig. 257.

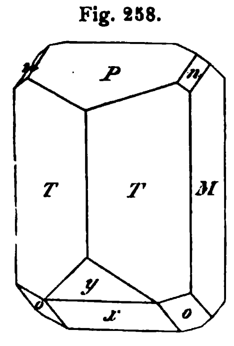


Anthracen $= C_{14}H_{10}$. $a:b:c = 1,422:1:1,878$; $\beta = 124^\circ 24'$ (Groth). Combination (Fig. 257): $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $o = \{11\bar{1}\}$, $r = \{20\bar{1}\}$. Spaltbarkeit $\{001\}$. Ebene der optischen Axen $\parallel \{010\}$, durch $\{001\}$ eine Axe sichtbar (Groth).

Anhang: Mimetisch monokline Krystalle.

Orthoklas (Kalifeldspat) $= Si_3O_8AlK$. Wie bereits S. 351 angeführt wurde, zeigt die dem Albit entsprechende Kaliumverbindung und die isomorphen Mischungen beider eine monokline Form, entweder mit mikroskopisch noch erkennbaren Zwillingslamellen, wie vielfach im sog. »gewöhnlichen Feldspat«, oder ohne solche, wie in den Varietäten Adular und Sanidin. Für letztere gilt die folgende Beschreibung. $a:b:c = 0,6585:1:0,5554$; $\beta = 116^\circ 3'$ (G. vom Rath). Combination (Fig. 258): $T = \{110\}$, $M = \{010\}$, $P = \{001\}$, $n = \{021\}$, $o = \{11\bar{1}\}$, $x = \{10\bar{1}\}$, $y = \{20\bar{1}\}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ vollkommen, $\{010\}$ ziemlich vollkommen. Infolge wechselnder Vertretung von Kalium durch Natrium variieren die

Fig. 258.



optischen Eigenschaften in hohem Grade. Doppelbrechung —; erste Mittellinien im stumpfen Axenwinkel β, schließen mit c 111°—112° ein. Ebenen der optischen Axen meist normal zu {010}, alsdann stets deutliche horizontale Dispersion (in Fig. 8 und 9 der Taf. II dargestellt); Axenwinkel sehr verschieden, zuweilen so klein, daß für eine Farbe die Axen zusammenfallen und für einen Teil der Farben in {010} auseinandergehen; für einzelne Varietäten liegen die Axen aller Farben in der Symmetrieebene.

Im folgenden sind als Beispiele die optischen Constanten einiger Vorkommen zusammengestellt:

Adular vom St. Gotthard, dessen Axenebenen senkrecht zu {010}, mit großem Axenwinkel:

Na: $\alpha = 1{,}5190$ $\beta = 1{,}5237$ $\gamma = 1{,}5260$ $2V = 69°43'$ $2E = 121°6'$.

Feldspat von Elba, Axenebenen wie vor. (Bartalini):

	α	β	γ	$2V$	$2E$
Li:	$\alpha = 1{,}5168$	$\beta = 1{,}5202$	$\gamma = 1{,}5209$	$2V = 48°48'$	$2E = 77°50'$
Na:	1,5191	1,5234	1,5243	47 48	76 14
Tl:	1,5225	1,5259	1,5265	46 27	74 0

Sanidin (natronreich) von Wehr in der Eifel, dessen Axenebene für Rot normal zu {010}, für Blau diesem parallel; für Rot:

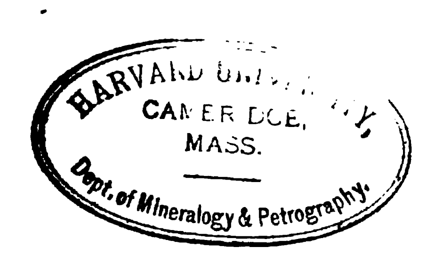
$$\alpha = 1{,}5170,\ \beta = 1{,}5239,\ \gamma = 1{,}5240\quad 2V = 13°34'\ 2E = 20°45',$$

für Blau:

$$\alpha = 1{,}5265\ \ \gamma = 1{,}5356\ \ \beta = 1{,}5355\quad 2V = 11°51'\ 2E = 18°14'.$$

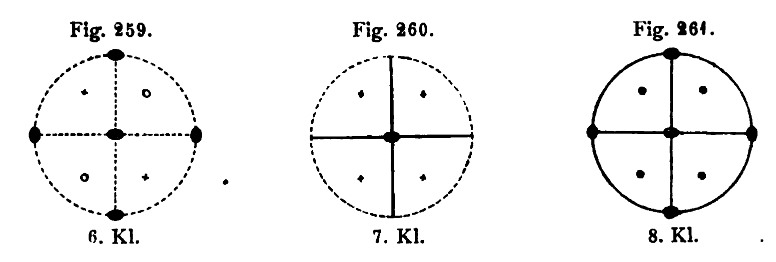
Durch Erhöhung der Temperatur findet eine Abnahme des Winkels der optischen Axen, wenn ihre Ebene normal zu {010}, und eine Zunahme statt, wenn sie in {010} liegen; wird die Platte über 500° erhitzt, so kehren die Axen nach dem Erkalten nicht ganz in ihre frühere Lage zurück (Des Cloizeaux).





III. Rhombisches Krystallsystem.

Wie S. 322 gezeigt wurde, bedingt das Vorhandensein zweier (notwendig aufeinander senkrechter) zweizähliger Symmetrieaxen die Existenz einer dritten, zu beiden senkrechten. Werden diese drei Richtungen, denen als Symmetrieaxen mögliche Kanten des Krystalles entsprechen müssen, als krystallographische Axen angenommen, seien z. B. die in der Projectionsebene der Fig. 259 liegenden, an ihren Enden durch das Zeichen ⬬ als zweizählige Symmetrieaxen charakterisierten Richtungen


Fig. 259. 6. Kl. — Fig. 260. 7. Kl. — Fig. 261. 8. Kl.

die Krystallaxen *a* und *b* und die Normale des Grundkreises in der Mitte die *c*-Axe, so erhalten die vier, infolge der Existenz der drei Symmetrieaxen gleichwertigen (vgl. S. 322), in der Projection eingetragenen Flächen gleiche Indices, da deren Pole von denen der *a*- bzw. *b*- und *c*-Axe je den gleichen Abstand besitzen. Andererseits nimmt nach S. 326 infolge der Existenz zweier (notwendig aufeinander senkrechter) Symmetrieebenen deren Durchschnittsrichtung den Charakter einer zweizähligen Symmetrieaxe an; die zu letzterer senkrechte Ebene, welche natürlich eine mögliche Fläche des Krystalles ist, wurde in Fig. 260 als Projectionsebene genommen; wählt man nun die beiden ausgezogenen Durchmesser des Grundkreises, in welchen dessen Ebene durch die beiden Symmetrieebenen geschnitten wird, als krystallographische Axen, z. B. wie in Fig. 259 als *a*- und *b*-Axe, und die Symmetrieaxe als *c*-Axe, so ist ersichtlich, daß die vier, nach S. 326 gleichwertigen Flächen, deren Pole in der Figur markiert sind, ebenso wie im vorigen Falle, gleiche Indices erhalten. Werden endlich die Symmetrieverhältnisse der beiden eben betrachteten Fälle vereinigt, sei z. B. eine der beiden in die Grundkreisebene fallenden Axen der Fig. 260 zugleich eine zweizählige Symmetrieaxe, so führt die Drehung von 180° um dieselbe die vier oberen Flächenpole in vier untere gleichwertige über, deren Projectionen, wie Fig. 261 zeigt, sich mit denen jener decken: da-

durch ist aber auch die andere dem Grundkreise parallele Axe eine zweizählige Symmetrieaxe und die Ebene des Grundkreises eine Symmetrieebene geworden, so daß nun drei zueinander senkrechte Ebenen und ebensoviele Axen der Symmetrie vorhanden sind; es ist klar, daß jene vier unteren Flächen, bei derselben Wahl der Krystallaxen wie in den beiden vorhergehenden Fällen, mit den vier oberen gleiche Indiceszahlen (mit negativem dritten Index) erhalten.

Den in Fig. 259—261 dargestellten Symmetrieverhältnissen entsprechen nun drei Klassen von Krystallen, denen gemeinsam ist, daß die gleichwertigen Flächen nur dann gleiche Indiceszahlen erhalten, wenn die Krystalle auf drei zueinander senkrechte Axen bezogen werden, deren jede entweder eine zweizählige Symmetrieaxe oder die Normale zu einer Symmetrieebene oder beides ist. Diese drei Klassen bilden daher ein Krystallsystem, welches nach der Gestalt der Durchschnitte der ihm angehörigen Formen mit den Axenebenen das »rhombische« heißt. Da die drei Axenwinkel α, β, $\gamma = 90^\circ$, so enthalten die Elemente eines rhombischen Krystalles nur noch zwei Unbekannte, die Verhältnisse $a : b$ und $b : c$, so daß es also nur zweier Winkelmessungen bedarf, um dieselben zu bestimmen.

Betrachten wir nun die in den Fig. 259—261 eingetragenen Pole als solche beliebiger Richtungen im Krystalle, so lehrt die Vergleichung der drei Projectionen, daß in den beiden ersten Klassen des rhombischen Systemes entgegengesetzte Richtungen nicht gleichwertig sind, während in den Krystallen der dritten stets den beiden, zwei entgegengesetzten Richtungen entsprechenden Polen die gleiche Bedeutung zukommt. Infolgedessen müssen sich die Krystalle der beiden ersten Klassen durch vectorielle physikalische Erscheinungen, wie Pyroelektricität, ungleiches Wachstum und verschiedene Auflösung (Ätzfiguren) entgegengesetzter Flächen usw., von denen der dritten Klasse unterscheiden. Dagegen muß das Verhalten der rhombischen Krystalle in bezug auf die bivectoriellen Eigenschaften für die Krystalle aller drei Klassen identisch sein; denn wenn man sich in Fig. 259 und 260 zu den vier markierten Polen die alsdann gleichwertigen entgegengesetzten hinzudenkt, so erhält man die in Fig. 261 eingetragenen Pole, d. h. acht in bezug auf jene Eigenschaften gleichwertige Richtungen. Damit ist nachgewiesen, daß für die hierher gehörigen Eigenschaften die rhombischen Krystalle ein nach drei zueinander senkrechten Ebenen symmetrisches Verhalten zeigen müssen, d. h. daß sie die dritte der fünf S. 137 aufgezählten Gruppen (= Gruppe V, S. 214 u. 222 f.) bilden.

Für die optischen Eigenschaften sämtlicher rhombischer Krystalle gilt sonach, daß die Hauptaxen des Indexellipsoides für alle Farben mit den drei Krystallaxen coincidieren, die beiden optischen Axen daher stets in einer der drei krystallographischen Axenebenen gelegen sind. Die optische Orientierung eines rhombischen Krystalles für eine bestimmte Farbe erfordert daher nur die Angabe der Ebene der optischen Axen, der 1. Mittellinie und des Winkels der letzteren, sowie des Zeichens der Doppelbrechung.

Die hierzu erforderliche Aufsuchung der Richtung der optischen Axen erfolgt durch die S. 112 f. beschriebenen Interferenzerscheinungen im convergenten polarisierten Lichte, und zwar müssen dieselben in der durch die Figuren 76—83 dargestellten symmetrischen Weise beobachtet werden durch eines der drei Paare von (Krystall-, Spaltungs- oder Schliff-)Flächen, welche den drei krystallographischen Axenebenen parallel sind, da stets eine der drei Krystallaxen die erste Mittellinie der optischen Axen sein muß. Was das Verhalten der rhombischen Krystalle im parallelen polarisierten Lichte betrifft, so ergibt sich aus der Orientierung der Indexfläche (s. S. 109), daß die Schwingungsrichtungen einer Krystallplatte, welche einer der Axenebenen (100), (010) oder (001) parallel ist, die beiden in derselben liegenden Krystallaxen, d. h. Hauptschwingungsrichtungen sind; eine Krystallplatte, welche nur einer dieser Axen parallel ist, zeigt zwei Schwingungsrichtungen, deren eine parallel, die andere senkrecht zu der betreffenden Krystallaxe ist. In beiden Fällen kann eine Dispersion der Schwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben nicht eintreten. Eine solche, sowie eine Schiefe der Auslöschung, ist nur möglich in Platten, welche zu allen drei Krystallaxen schief geneigt sind. Aus dem Parallelismus der letzteren mit den drei Hauptschwingungsrichtungen ergibt sich ohne weiteres die Orientierung der zur Bestimmung der Hauptbrechungsindices nach S. 101—105 erforderlichen Prismen bzw. Platten. Daß die drei Absorptionsaxen eines rhombischen Krystalles (vgl. S. 169) ebenfalls mit den Krystallaxen zusammenfallen, versteht sich hiernach von selbst.

Für das thermische Verhalten ergibt sich aus den Symmetrieverhältnissen der rhombischen Krystalle das Folgende: Die drei Axen des Wärmeleitungsellipsoides sind die drei Krystallaxen; die Orientierung der durch den Sénarmontschen Versuch erhaltenen isothermischen Ellipse auf einer der Krystallflächen (100), ($\bar{1}00$), (010), ($0\bar{1}0$), (001), ($00\bar{1}$) ist derart, daß ihre Axen den beiden in der betreffenden Fläche liegenden Krystallaxen parallel sind; auf einer Fläche, welche nur einer krystallographischen Axe parallel ist, liegt von den Axen der Ellipse eine parallel, die andere senkrecht zu jener; auf einer zu allen drei Axen geneigten Krystallfläche ist die Orientierung der Wärmeleitungsfigur eine schiefe. Die Ausdehnung der rhombischen Krystalle durch die Wärme findet so statt, daß eine der Krystallaxen die Richtung der größten, eine zweite die der kleinsten, die dritte die der mittleren Ausdehnung ist; infolgedessen ändern sich die Winkel einer Fläche (hkl) gegen die drei Axen ungleich, während alle Flächen, deren einer Index $= 0$, stets der betreffenden Axe parallel bleiben und nur ihre Neigung gegen die beiden andern Axen variiert (vgl. S. 186 bis 188). Da die drei Krystallaxen die thermischen Hauptaxen, d. h. diejenigen Richtungen sind, welche bei jeder Temperatur ihre Rechtwinkeligkeit bewahren, so kann eine Änderung der Temperatur, wie überhaupt eine homogene Deformation, an dem Werte der Axenwinkel α, β, γ (90°) keine Änderung hervorbringen, und von den Elementen eines rhombischen

Krystalles sind somit nur die Verhältnisse $a:b$ und $b:c$ Functionen der Temperatur, während, wie in den andern Systemen, die Symmetrie der Krystalle davon vollständig unabhängig ist. Dementsprechend finden auch die Änderungen der optischen Eigenschaften durch gleichmäßige Temperaturveränderung stets innerhalb des Rahmens rhombischer Symmetrie statt, so daß, wenn auch die Ebene der optischen Axen hierbei eine andere wird, sie immer eine der drei krystallographischen Axenebenen bleibt und die beiden optischen Axen immer den gleichen Winkel mit jeder Krystallaxe einschließen (vgl. S. 193—196).

Für die magnetischen und elektrischen Eigenschaften folgt aus den Symmetrieverhältnissen des rhombischen Systemes, daß die drei Krystallaxen zugleich die drei Hauptaxen des Ellipsoides der magnetischen Induction (S. 198), der elektrischen Leitungsfähigkeit, der thermoelektrischen Kraft (S. 200 f.) und desjenigen sind, welches die Abhängigkeit der Dielektricitätsconstante von der Richtung bestimmt (S. 203).

In bezug auf die Elasticität prägt sich die Symmetrie nach den dre zueinander senkrechten Axenebenen der rhombischen Krystalle aus in der Abhängigkeit der Dehnung von der Richtung, wie sie für das Beispiel des Baryts auf S. 223 zur Darstellung gelangt ist. Die Cohäsion der rhombischen Krystalle endlich muß den S. 214 auseinandergesetzten Gesetzmäßigkeiten unterliegen, nach welchen die Spaltbarkeit entweder nach einer der krystallographischen Axenebenen (eventuell auch nach zweien oder allen dreien, aber mit verschiedener Vollkommenheit), oder nach einem rhombischen Prisma oder endlich nach einer rhombischen Doppelpyramide stattfindet. Daß die Härtecurven auf den Flächen rhombischer Krystalle ebenfalls denselben Symmetrieverhältnissen unterworfen sind, haben die S. 243 erwähnten Versuche nachgewiesen.

Das der Structur eines rhombischen Krystalles zugrunde liegende Raumgitter kann nur einer der vier in Fig. 156 (S. 278) abgebildeten Arten angehören. Da diese sämtlich nach drei zueinander senkrechten Ebenen symmetrisch sind, so entsprechen sie den Symmetrieverhältnissen der letzten Klasse dieses Systemes; die Unterschiede der drei Klassen voneinander müssen daher auf der Art der Ineinanderstellung der Raumgitter beruhen. Wie schon S. 285 erwähnt wurde, kann die geringere Symmetrie einer der beiden andern Klassen, und zwar ist dies die erste, schon durch ein, aus gleichartigen Atomen bestehendes, regelmäßiges Punktsystem repräsentiert werden. Es könnte also auch ein Element in der ersten, wie in der dritten Klasse des rhombischen Systemes krystallisieren. Die Unterschiede aller drei Klassen können nur erklärt werden durch die S. 293 f. auseinandergesetzte Theorie der Krystallstructur, und mit dieser steht auch das Verhalten der rhombischen Krystalle in bezug auf Cohäsion, Zwillingsbildung und Krystallwachstum in Übereinstimmung.

Ebenso, wie im triklinen und monoklinen Systeme, müssen die optisch activen Körper der einer Symmetrieebene entbehrenden Klasse, der ersten,

angehören und in zwei enantiomorphen Arten von Krystallen auftreten; da indessen zwei entgegengesetzte parallele Flächen denselben Schichten in der Krystallstructur entsprechen, so ist ihre Bildung bei großer tangentialer Cohäsion gleich begünstigt, und die Combinationen beider enantiomorpher Arten von Krystallen können daher scheinbar die gleichen sein, während sie sich in Wirklichkeit durch das Verhalten der entgegengesetzten Flächen in bezug auf Wachstumsgeschwindigkeit, Ätzfiguren, Pyroelektricität usw. unterscheiden. Ein Drehungsvermögen der Krystalle optisch activer Körper ist bisher nur von wenigen nachgewiesen worden. Da unter den regelmäßigen Punktsystemen, welche dem rhombischen Systeme entsprechen, sich rechte und linke Schraubensysteme befinden, so können auch Krystalle nicht activer Körper ein Drehungsvermögen zeigen und in zwei enantiomorphen Combinationen der ersten Klasse dieses Systemes auftreten. In beiden Fällen muß das Drehungsvermögen, entsprechend den optischen Symmetrieverhältnissen, parallel beiden optischen Axen gleich groß sein, wie es auch die Erfahrung gelehrt hat.

Was die im rhombischen Systeme möglichen Zwillingsgesetze betrifft, so vereinfachen sich diese dadurch, daß in den wichtigsten Fällen die Normale einer Krystallfläche zugleich eine mögliche Kante des Krystalles ist, und mit ihr auch die in einer möglichen Fläche liegende Normale einer möglichen Kante zusammenfällt. Alles dies ist z. B. der Fall bei der Zwillingsbildung nach einer der drei krystallographischen Axenebenen, welche nach jeder derselben möglich ist in der ersten Klasse, nur nach einer (derjenigen, deren Normale die Symmetrieaxe) in der zweiten, während eine solche ausgeschlossen ist in der dritten Klasse, weil hier sowohl (100), als (010) und (001) Symmetrieebenen sind. Ist die Zwillingsebene die Fläche eines rhombischen Prismas, d. h. eine zu zwei Krystallaxen geneigte, der dritten parallele Ebene, so kann als Zwillingsaxe ebensogut deren Normale, wie die in der Zwillingsebene gelegene Senkrechte zur Prismenkante betrachtet werden, da eine Drehung von 180° um jede dieser Geraden die gleiche Zwillingsstellung erzeugt. Diese Zwillingsbildung, bei welcher außerdem eine der drei Axen beider Krystalle coincidiert, ist in allen drei Klassen des Systemes möglich und weitaus die häufigste, besonders bei den sog. pseudosymmetrischen Krystallen (s. S. 271 und besonders 295—296), deren Structur einer solchen von höherer Symmetrie, nämlich einer tetragonalen oder hexagonalen, so nahe steht, daß die Bedingungen für die Entstehung »mimetischer« Verwachsungen besonders günstige sind. Endlich kann auch eine zu allen drei Axen geneigte Krystallfläche Zwillingsebene sein; wie nach den S. 269f. angestellten Betrachtungen zu erwarten, ist aber eine solche, d. h. eine Zwillingsbildung nach einer relativ weniger dichten Schichten entsprechenden Ebene des Krystalles, nur selten zu beobachten.

Da in einer Krystallstructur, welcher ein rhombisches Raumgitter zugrunde liegt, die Symmetrieebenen des letzteren stets zu den Flächen größter tangentialer Cohäsion gehören, so ist ihre Wahl als Axenebenen auch aus diesem

Grunde geboten; willkürlich bleibt nur, welche der drei Axen mit a, b und c bezeichnet werden. Die Wahl der Grundform $\{111\}$ ist, wenn nicht die Cohäsionsverhältnisse dieselbe bestimmen, durch die relativ größte Einfachheit der sich für die übrigen Formen ergebenden Symbole gegeben.

6. Bisphenoidische Klasse.

(Rhombisch-hemiedrische Klasse.)

Die erste Klasse des rhombischen Systemes umfaßt die Krystalle mit drei zueinander senkrechten zweizähligen Symmetrieaxen. Von diesen möge nach S. 382 die in nebenstehend wiederholter Figur 259 zum Grundkreise normale als die in den Krystallen vertical gestellte c-Axe, die beiden andern, den punktierten Durchmessern des Grundkreises parallelen, als die horizontalen Axen a und b angenommen werden. Alsdann entsprechen der im vordern oberen rechten Oktanten markierten Fläche (hkl) noch weitere drei gleichwertige, nämlich $(h\bar{k}\bar{l})$, $(\bar{h}k\bar{l})$ und $(\bar{h}\bar{k}l)$, und die von diesen vier Flächen gebildete »einfache Form« $\{hkl\}$ ist die erste unter den bisher betrachteten, welche für sich allein den Raum umschließt, da von ihren vier Flächen nicht drei in einer Zone liegen, und die also auch ohne mit andern Formen combiniert zu sein als Krystallform auftreten kann. Dieselbe, in Fig. 262 a abgebildet, besteht gewissermaßen aus zwei Sphenoiden, d. h. Flächenpaaren, zu deren Schnittkante eine zweizählige Symmetrieaxe senkrecht steht (vgl. S. 360); sie wird daher »Bisphenoid« und nach ihr werden die in diese Klasse gehörigen Krystalle die »rhombisch bisphenoidischen« genannt. Da das rhombische Bisphenoid nur Axen der einfachen Symmetrie besitzt, ist sein Spiegelbild eine enantiomorphe Gestalt, welche mit jenem durch keine Drehung zur Deckung gebracht werden kann; dieselbe besteht aus den vier entgegengesetzten Flächen $(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}kl)$, $(hk\bar{l})$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ und wird durch das Symbol $\{h\bar{k}l\}$ bezeichnet. In Fig. 262 a und b sind diese beiden Bisphenoide $\{hkl\}$ und $\{h\bar{k}l\}$, welche man als rechtes

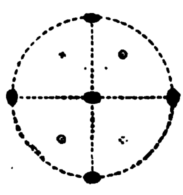


Fig. 262 a.

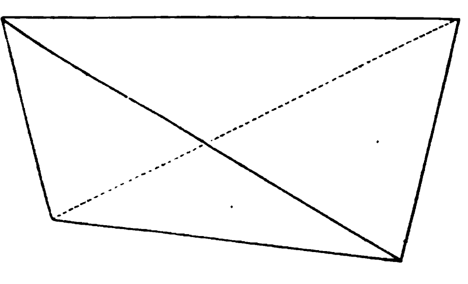
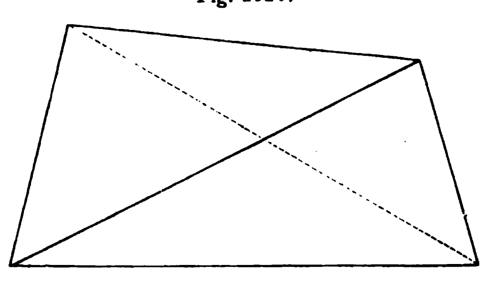


Fig. 262 b.

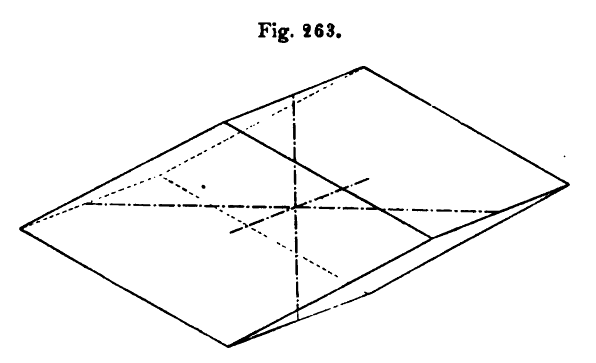


und linkes zu unterscheiden pflegt, so nebeneinander gestellt, wie das eine aus dem andern durch Spiegelung nach der Fläche (010) hervorgeht.

Diese Formen besitzen dreierlei Kanten: zwei stumpfere Mittelkanten, welche bei beiden denselben Flächenwinkel besitzen, aber bei dem ersten von links oben nach rechts unten, beim linken umgekehrt laufen; ferner zwei schärfere Mittelkanten, welche ebenfalls an beiden gleiche Winkel, aber entgegengesetzte Neigung haben; endlich zwei horizontale, sogenannte »Polkanten«, für die das gleiche gilt.

In dem speciellen Falle, daß die vier gleichwertigen Pole der Fig. 259 in einem der beiden zu Axen gewählten Durchmesser oder auf dem Grundkreise liegen, d. h. wenn die Flächen eines rhombischen Bisphenoids in eine der drei Zonen fallen, deren Axen die Krystallaxen sind, wenn also einer der drei Indices = 0, so verwandelt sich das Bisphenoid in ein rhombisches Prisma, welchem sich die erstere Form um so mehr nähert, je kleiner der Wert des einen Index im Verhältnisse zu den beiden andern ist. Denkt man sich z. B. folgende Zone von Bisphenoiden: {111}, {122}, {133}, {144} . . ., so wird in dieser der Parameter der *a*-Axe um so größer, je weiter man in der Reihe fortschreitet; das Endglied derselben ist schließlich ein Bisphenoid, dessen erster Index verschwindend klein gegen die beiden andern ist; dasselbe besteht aus den vier, der Axe *a* parallelen Flächen (011), $0\bar{1}1$), $(01\bar{1})$, $(0\bar{1}\bar{1})$ und bildet zugleich die Grenzform der entsprechenden Reihe linker Bisphenoide: $\{1\bar{1}1\}$, $\{1\bar{2}2\}$, $\{1\bar{3}3\}$, $\{1\bar{4}4\}$ usw. Dieses Prisma {011} ist, da es für sich allein den Raum nicht abschließt, in Fig. 263 in Combination mit den beiden Flächen (100) und $(\bar{1}00)$ abgebildet. Ebenso führt je eine Reihe von Bisphenoiden, welche man sich von {111} oder $\{1\bar{1}1\}$ durch Vervielfältigung des Parameters auf der *b*-Axe abgeleitet denken kann, zu einer gemeinschaftlichen Grenzform, bestehend aus den

Fig. 263.



Flächen (101), $(10\bar{1})$, $(\bar{1}01)$, $(\bar{1}0\bar{1})$, d. h. zu dem in Fig. 264 in Combination mit (010) und $(0\bar{1}0)$ dargestellten, der *b*-Axe parallelen, rhombischen Prisma {101}. Endlich entsteht ein drittes rhombisches Prisma {110}, aus den Flächen (110), $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}10)$, $(\bar{1}\bar{1}0)$ zusammengesetzt, durch Fortführung der beiden Reihen {111}, {221}, {331}, {441} . . . und $\{1\bar{1}1\}$, $\{2\bar{2}1\}$, $\{3\bar{3}1\}$, $\{4\bar{4}1\}$ . . . bis zum Verschwinden des letzten Index, d. h. bis zum Parallelismus der betreffenden Flächen mit der *c*-Axe (s. Fig. 265, Comb. m. (001) und $(00\bar{1})$). Ebenso wie man sich jedes beliebige rhombische Prisma $\{0kl\}$, $\{h0l\}$, $\{hk0\}$ als Grenzglied einer Reihe von Bisphenoiden denken kann, so bilden auch die sämtlichen Prismen, welche derselben Krystallaxe parallel sind, eine Reihe, deren Grenzglieder zwei Pinakoide sind, denn

deren Pole liegen auf einem der drei Zonenkreise, deren Axen die Krystallaxen sind, und müssen daher paarweise zusammenfallen, wenn auch ein zweiter Index = 0 wird. Sämtliche so entstehende specielle Fälle der allgemeinen Form $\{hkl\}$ kann man am besten an der Projektion S. 387 herleiten, wenn man sich jeden der vier Pole, anstatt innerhalb des je einem

Fig. 264.

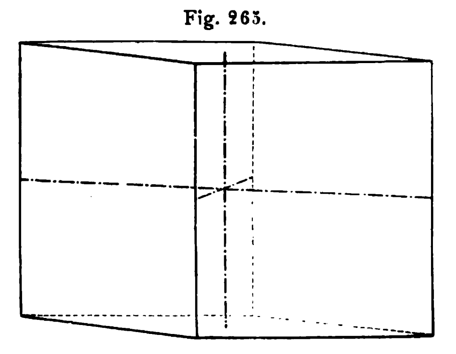


Fig. 265.

Oktanten entsprechenden sphärischen Dreieckes, entweder in eine der drei Seiten oder in eine der drei Ecken desselben denkt. So ergeben sich im ganzen sieben Arten von Formen, deren Benennung ganz dem früher benutzten Principe entspricht:

$\{100\}$ erstes Pinakoid
$\{010\}$ zweites Pinakoid
$\{001\}$ drittes Pinakoid
$\{0kl\}$ Prisma erster Art
$\{h0l\}$ Prisma zweiter Art
$\{hk0\}$ Prisma dritter Art
$\{hkl\}$ Bisphenoid.

$\{111\}$ und $\{1\bar{1}1\}$ pflegt man die beiden »primären« Bisphenoide, $\{011\}$, $\{101\}$ und $\{110\}$ das primäre Prisma erster, bzw. zweiter oder dritter Art zu nennen.

Beispiele.

Optisch inactive Körper.

Salpetersaures Silber NO_3Ag. $a:b:c = 0,9430:1:1,3697$ (Brooke).

Combinationen: Fig. 266 (Verf.) und 267 (nach Scacchi, in gerader Projection auf c): $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $n = \{210\}$, $b = \{010\}$, $u = \{101\}$, $\omega = \{1\bar{1}1\}$. Zwillinge nach $c\,(001)$. Ebene der optischen Axen (010), c erste Mittellinie. Scheinbarer Winkel der optischen Axen: $2E = 126^\circ\,37'$ rot, $133^\circ\,50'$ blau (Des Cloizeaux).

Fig. 266.

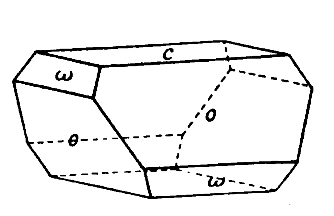
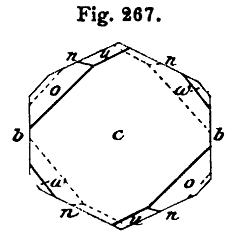


Fig. 267.



Schwefelsaures Magnesium (Bittersalz) $= SO_4Mg.7H_2O$. $a:b:c = 0,9901:1:0,5709$ (Brooke). Combination (Fig. 268): $p = \{110\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{1\bar{1}1\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $s = \{201\}$, $t = \{021\}$, $v = \{211\}$, $x = \{121\}$; eine derartige, in Fig. 269 in gerader Projection auf c (001) dargestellte Combination ähnelt wegen der ungefähren Rechtwinkeligkeit des Prismas {110} einer tetragonalen Combination quadratischer Prismen und

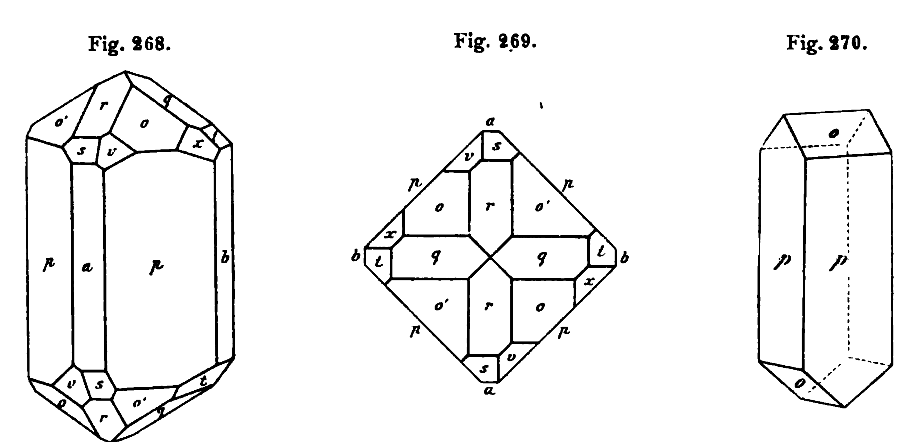


Fig. 268. Fig. 269. Fig. 270.

Pyramiden; aus einer, borsaure Salze enthaltenden Lösung setzen sich Krystalle der einfachen Combination Fig. 270 ab. Die letzteren bilden oft Durchwachsungszwillinge mit der enantiomorphen Combination {110} $\{1\bar{1}1\}$, in denen die Axen beider Krystalle parallel sind; als Zwillingsebene kann daher sowohl (100), als (010) oder (001) betrachtet werden. Spaltbarkeit {010} vollkommen. Ebene der optischen Axen {001}, b erste Mittellinie, Doppelbrechung —; $2E = 77^\circ 59'$ rot, $77^\circ 43'$ violett (Des Cloizeaux). Hauptbrechungsindices (Topsøe):

	α	β	γ
Linie C	1,4305	1,4530	1,4583
- D	1,4325	1,4554	1,4608
- F	1,4374	1,4607	1,4657

Drehungsvermögen parallel einer optischen Axe für 1 mm $2^\circ,6$ Na (Dufet).

Für elektrische Wellen ist die Ebene der Axen ebenfalls {001}, b aber zweite Mittellinie, $2V = 118\frac{1}{2}^\circ$ (Borel).

Schwefelsaures Zink (Zinkvitriol) $= SO_4Zn.7H_2O$. Isomorph mit dem vorigen. $a:b:c = 0,9804:1:0,5631$ (Brooke). Combinationen, Spaltbarkeit und optische Orientierung, wie beim Bittersalze; $2E = 70^\circ 23'$ rot, $70^\circ 6'$ violett (Des Cloizeaux). Hauptbrechungsindices (Topsøe):

	α	β	γ
Linie C	1,4544	1,4776	1,4812
- D	1,4568	1,4801	1,4836
- F	1,4620	1,4860	1,4897

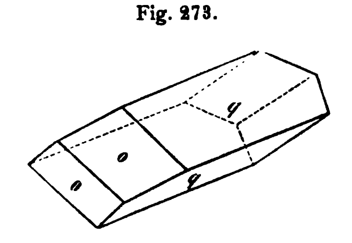
Ameisensaures Strontium $= (CHO_2)_2Sr.2H_2O$. $a:b:c = 0,6076 : 1 : 0,5949$ (Heusser). Combination (Fig. 271): $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $q = \{011\}$, $s = \{1\bar{2}1\}$, $o = \{111\}$, oder Fig. 272, in welcher $s = \{121\}$ und $o = \{1\bar{1}1\}$. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, erste Mittellinie Axe c, Doppelbrechung —, Hauptbrechungsindices nach Schrauf:

Fig. 271. Fig. 272.

für die Linie

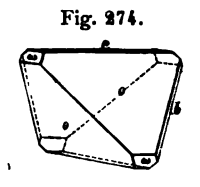
	B	D	E
$\alpha =$	1,4806	1,4838	1,4869
$\beta =$	1,5174	1,5201	1,5244
$\gamma =$	1,5342	1,5382	1,5420
$2V =$	66°36′	67° 0′	67°24′
$2E =$	112 51	114 10	115 31

Glycerin $= C_3H_8O_3$. $a:b:c = 0,70 : 1 : 0,66$ (nur approximativ zu bestimmen) (V. v. Lang). Combination (Fig. 273): $q = \{011\}$, $o = \{111\}$. Spaltbarkeit $\{100\}$ unvollkommen. Axenebene $\{001\}$, erste Mittellinie wahrscheinlich a, zugleich Schwingungsrichtung der größten Lichtgeschwindigkeit; Dispersion $\varrho < v$ (v. Lang).

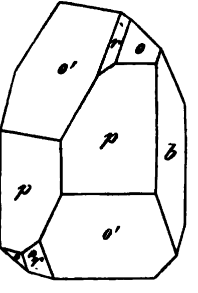

Fig. 273.

Optisch active Körper.

Glutaminsäure $= C_5H_7(NH_2)O_4$. $a:b:c = 0,6868 : 1 : 0,8657$ (Oebbeke). Combination (Fig. 274): $o = \{111\}$, $\omega = \{1\bar{1}1\}$, $c = \{001\}$, $b = \{010\}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, Axe a erste Mittellinie; $2E = 65°39'$ Li, $66°35'$ Na, $66°57'$ Tl. Die Lösung dieses Körpers ist rechtsdrehend.


Fig. 274.

Saures rechtsweinsaures Kalium (Weinstein) $= C_4H_4O_6HK$. $a:b:c = 0,7148 : 1 : 0,7314$ (v. Kraatz). Combination (Fig. 275): $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $o' = \{1\bar{1}1\}$, $o = \{111\}$, $r = \{101\}$; auch flächenreichere Krystalle, wie das folgende Salz. Spaltbarkeit $\{001\}$. Optische Axen in derselben Ebene, b erste Mittellinie, Doppelbrechung negativ. $2H_a = 84°$, $2E = 162°$, $\varrho > v$ (v. Lang).


Fig. 275.

Saures rechtsweinsaures Ammonium $= C_4H_4O_6H(NH_4)$. Isomorph mit dem vor. $a:b:c = 0,6931 : 1 : 0,7100$ (v. Kraatz). Combination

(Fig. 276): $b = \{010\}$, $q = \{011\}$, $u = \{021\}$, $o = \{111\}$; aus Lösungen mit Überschuß von Weinsäure Krystalle mit $o' = \{1\bar{1}1\}$, in gleicher Größe

Fig. 276.

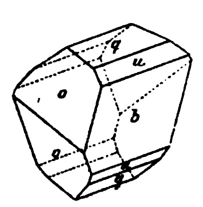


Fig. 277.

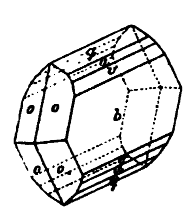
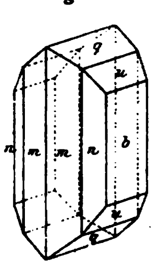
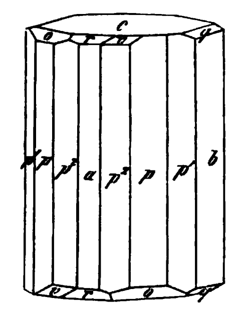


Fig. 278.



wie o, und $v = \{031\}$ (Fig. 277); endlich aus einer Ammoniumcarbonat enthaltenden Lösung Combinationen mit $m = \{110\}$ und $n = \{120\}$ ohne Bisphenoide (Fig. 278). Spaltbarkeit $\{001\}$ vollkommen. Optische Orientierung gleich dem vorigen, $2H_a = 85°$, $2E = 173°$, $\varrho > v$ (v. Lang).

Fig. 279.



Rechtsweinsaures Natriumkalium (Seignettesalz) $= C_4H_4O_6NaK.4H_2O$. $a:b:c = 0{,}8347:1:0{,}4296$ (Rammelsberg). Combination (Fig. 279): $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $p' = \{120\}$, $p^2 = \{210\}$, $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, dazu weniger häufig $o = \{1\bar{1}1\}$, $v = \{211\}$, $q = \{011\}$, $r = \{101\}$. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, a Mittellinie, Doppelbrechung +.

	α	β	γ	$2V$	$2E$
Rot:	1,490	1,491	1,493	71° 6′	120° 11′
Gelb:	1,492	1,493	1,496	69 40	117 2

(Des Cloizeaux). Änderung der optischen Constanten durch die Temperatur sehr beträchtlich; Müttrich fand:

	α	β	γ	$2V$	$2E$
Für Rot bei 16° C.	1,4912	1,4930	1,4964	72°29′	123°38′
- - - 45° -	1,4869	1,4889	1,4920	76 46	135 11[1]).

Drehungsvermögen parallel einer optischen Axe für 1 mm 1°,35 rechts (Dufet).

Winkel der elektrischen Axen 37° (Borel).

Rechtsweinsaures Natriumammonium (Ammoniumseignettesalz) $= C_4H_4O_6Na(NH_4)\cdot 4H_2O$. $a:b:c = 0{,}8233:1:0{,}4200$ (Rammelsberg). Dieselbe Combination, wie die des vorigen Salzes. Ebene der optischen Axen $\{100\}$, c Mittellinie. Doppelbrechung —; $\beta = 1{,}495$.

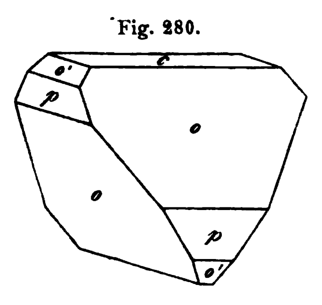
1) Dieses und das folgende Salz haben so starke Dispersion, daß die hyperbolischen Büschel des Axenbündels nirgends dunkel, sondern lebhaft gefärbt und von großer Breite sind.

$2V = 62^\circ$ (rot), $2E = 100^\circ$ (rot),
46° (violett), 70° (violett).

Drehungsvermögen parallel einer optischen Axe für 1 mm $1^\circ,55$ links (Dufet).

Rechtsweinsaures Antimonylkalium (Brechweinstein) = $C_4H_4O_6(SbO)K$. $a:b:c = 0,9556:1:1,1054$ (Brooke). Combination (Fig. 280): $o = \{111\}$, $o' = \{1\bar{1}1\}$, $p = \{110\}$, $c = \{001\}$. Spaltbarkeit $\{001\}$, $\{010\}$ und $\{100\}$. Ebene der optischen Axen $\{001\}$, b Mittellinie. Doppelbrechung —; $2E = 85^\circ 20'$ rot, $83^\circ 10'$ blau (Des Cloizeaux).

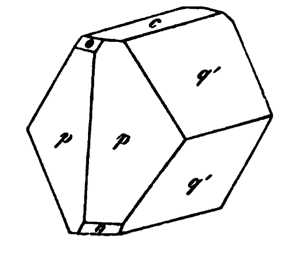
Fig. 280.



Linksweinsaures Antimonylkalium hat mit dem vorigen die gleiche Zusammensetzung und die enantiomorphe Combination, an welcher $\{1\bar{1}1\}$ vorherrschend, $\{111\}$ klein erscheint.

Asparagin = $C_4H_8N_2O_3 . H_2O$. $a:b:c = 0,4737:1:0,8327$ (Miller). Combination (Fig. 281): $p = \{110\}$, $q' = \{021\}$, $c = \{001\}$, $o = \{1\bar{1}1\}$. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, c Mittellinie, Doppelbrechung +;

Fig. 281.

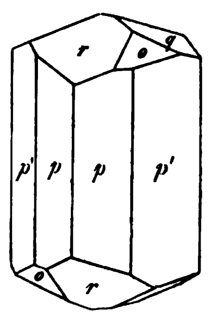


	α	β	γ	$2V$
Rot:	1,5458	1,5778	1,6185	85° 5′
Gelb:	1,5489	1,5829	1,6246	86 15
Blau:	1,5542	1,5943	1,6378	89 51

Demnach ist für eine bestimmte Wellenlänge des äußersten Blau der wahre Axenwinkel genau = 90° (Groth). Die Lösung dieses, des gewöhnlichen, Asparagins ist linksdrehend; das synthetisch dargestellte Rechts-Asparagin hat die gleiche, aber enantiomorphe Krystallform, an welcher $\{111\}$ statt $\{1\bar{1}1\}$ auftritt, und genau dieselben optischen Eigenschaften, wie das Links-Asparagin.

Mycose (= Trehalose) = $C_{12}H_{22}O_{11} . 2H_2O$. $a:b:c = 0,6814:1:0,4171$ (Bodewig). Combination (Fig. 282): $p = \{110\}$, $p' = \{120\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $o = \{111\}$. Spaltbarkeit $\{110\}$ deutlich. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, c Mittellinie, Doppelbrechung +. Durch Messung des spitzen und stumpfen Axenwinkels in Öl wurde gefunden:

Fig. 282.



	$2V$	$2E$	β
Für die *Li*-Linie:	48° 2′		
- - *Na* -	50 16	78°56′	1,478
- - *Tl* -	51 26	83 24	1,533

(Bodewig und Lehmann). Des Cloizeaux fand: $2E = 73^\circ 8'$ rot, $82^\circ 39'$ blau.

7. Pyramidale Klasse.

(Rhombisch-hemimorphe Klasse.)

Die zweite Klasse des rhombischen Krystallsystemes ist charakterisiert durch die Existenz zweier aufeinander senkrechter Symmetrieebenen und einer zweizähligen Symmetrieaxe, in welcher die beiden ersten einander schneiden. Die letztere pflegt man vertical zu stellen und als c-Axe zu nehmen; da sich aus der nebenstehend wiederholten Fig. 260 ergibt, daß alle gleichwertigen Flächen einem Pole derselben angehören, ist diese Richtung eine polare Symmetrieaxe, und diese Eigenschaft prägt sich bei den hierher gehörigen Krystallen aus durch entgegengesetzte Pyroelektricität an den beiden Polen jener Axe. Die aus den vier in der Figur bezeichneten Flächen (hkl), $(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}kl)$, $(\bar{h}\bar{k}l)$ bestehende einfache Form $\{hkl\}$ ist eine rhombische Pyramide, wie sie in Fig. 283 in Combination (da sie für sich allein den Raum nicht abschließt) mit der Fläche $(00\bar{1})$, welche die beiden Krystallaxen a und b enthält, abgebildet ist. Nach dieser Form, welche den allgemeinsten Fall repräsentiert, ist die Klasse benannt. Eine derartige, aus vier oberen Flächen bestehende Form kann als »obere« Pyramide unterschieden werden von der Form $\{hk\bar{l}\}$, welche aus vier, am untern Pole der c-Axe zusammenstoßenden Flächen besteht und dann als »untere« zu bezeichnen wäre. Jede derselben besitzt vier Kanten, sog. »Polkanten«, von denen zwei einen stumpferen, zwei einen schärferen Flächenwinkel bilden.

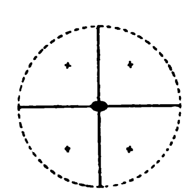
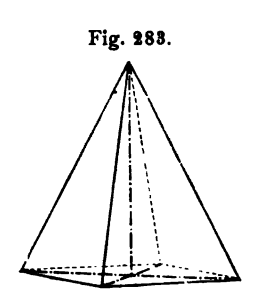


Fig. 283.



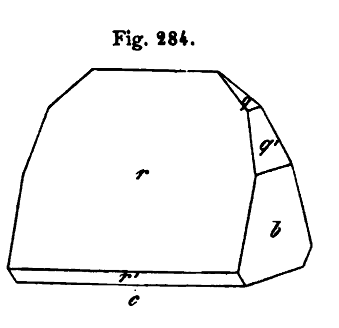
Die Form, welche die rhombische Pyramide in dem speciellen Falle annimmt, daß ihre Flächen einer Krystallaxe parallel sind, ist eine verschiedene, je nachdem dies die Symmetrieaxe oder eine der beiden horizontalen Axen ist. Im ersteren Falle nehmen die vier Pyramidenflächen eine verticale Stellung an und bilden ein rhombisches Prisma (s. Fig. 265 S. 389), welcher Form sich die Pyramiden um so mehr nähern, je kleiner der dritte Index, d. h. je größer der Parameter der c-Axe wird; in dem Grenzfalle $l = 0$ liegt gleichsam die Spitze der rhombischen Pyramide in dem Abstande ∞ auf der c-Axe, und hierbei ist es gleichgültig, ob wir von einer oberen oder einer unteren Pyramide ausgehen, denn das Prisma $\{hk0\}$ ist offenbar die gemeinschaftliche Grenzform beider Reihen. Anders ist es in den speciellen Fällen des Parallelismus mit den beiden horizontalen Axen a und b, wie sich am besten aus der obigen Projection ersehen läßt. Denkt man sich in derselben den Pol (hkl) in den horizontalen Durchmesser verlegt, so fällt der Pol $(\bar{h}kl)$ mit ihm zusammen, ebenso $(\bar{h}\bar{k}l)$ mit $(h\bar{k}l)$, und es entsteht ein, aus zwei der Axe a parallelen Flächen bestehendes, oberes Doma $\{0kl\}$, dessen horizontale Kante in der Symmetrie-

ebene (010) liegt, welche den Flächenwinkel derselben halbirt. Die rhombische Pyramide $\{hk\bar{l}\}$ liefert als entprechende Grenzform ein unteres Doma $\{0k\bar{l}\}$. Diesen Domen nähern sich die beiden Reihen von Pyramiden um so mehr, je kleiner der erste Index im Verhältnis zu den beiden andern wird. Denkt man sich umgekehrt eine Reihe rhombischer Pyramiden mit immer größerem Parameter der b-Axe, d. h. in der Projection die beiden Pole (hkl) und $(h\bar{k}l)$ immer näher aneinander, so gelangt man schließlich zu einer Grenzform, wenn die Pole (hkl) und $(h\bar{k}l)$ einerseits, $(\bar{h}kl)$ und $(\bar{h}\bar{k}l)$ andererseits zusammenfallen, und diese ist wieder ein Doma $\{h0l\}$ mit horizontaler Kante, welche aber nun der b-Axe parallel ist. Die entsprechende Grenzform der unteren Pyramiden ist ein unteres Doma $\{h0\bar{l}\}$. Die beiden eben beschriebenen Arten von Domen bilden nun je eine Reihe, deren Glieder um so steilere Stellung der Flächen besitzen, je kleiner der Index der c-Axe ist; für den Wert 0 desselben gehen sie in ein senkrechtes Pinakoid über, welches offenbar gemeinsames Grenzglied der oberen und der unteren Domen ist. Während aber die beiden Reihen von Domen zu zwei verschiedenen senkrechten Pinakoiden, welche den Axen a bzw. b, also den beiden Symmetrieebenen, parallel sind, führen, besitzen sie eine gemeinsame Grenzform für den umgekehrten Fall, daß der Index der c-Axe seinen größtmöglichen Wert annimmt, d. h. die beiden ersten Indices verschwinden; alsdann fallen nämlich die vier gleichwertigen Pole der Projection in deren Mitte zusammen, und es entspricht ihnen ein oberes Pedion {001}, während die analoge Grenzform der unteren Pyramiden bzw. Domen das Pedion $\{00\bar{1}\}$ ist. Je nachdem also die gleichwertigen Pole auf eine der drei Seiten oder in eine der drei Ecken des von den Axenebenen gebildeten sphärischen Dreieckes fallen, ergeben sich sechs verschiedene specielle Fälle, welche mit dem allgemeinen im folgenden zusammengestellt sind:

{100} erstes Pinakoid
{010} zweites Pinakoid
{001} oberes (drittes) Pedion; $\{00\bar{1}\}$ unteres (drittes) Pedion
$\{0kl\}$ Doma erster Art
$\{h0l\}$ Doma zweiter Art
$\{hk0\}$ Prisma dritter Art
$\{hkl\}$ Pyramide (vierter Art).

{111} wird die primäre obere, $\{11\bar{1}\}$ die primäre untere Pyramide, {110} das primäre Prisma, {011}, {101}, $\{01\bar{1}\}$ und $\{10\bar{1}\}$ die primären Domen genannt.

Fig. 284.



Beispiele.

Phosphorsaures Ammonium-Magnesium (Struvit) $= PO_4MgNH_4 . 6H_2O$. $a : b : c = 0{,}5667 : 1 : 0{,}9121$ (Sadebeck). Combination (Fig. 284): $r = \{101\}$, $b = \{010\}$, $c = \{00\bar{1}\}$,

$q = \{011\}$, $q' = \{0\bar{4}1\}$, $r' = \{10\bar{3}\}$. Spaltbarkeit $\{001\}$ und $\{010\}$ ziemlich vollkommen. Ebene der optischen Axen $\{001\}$; a erste Mittellinie, Doppelbrechung $+$.

$2E = 46°32'$ rot, $47°30'$ gelb, $48°46'$ violett,
$\beta = 1,497$ rot, $1,502$ gelb.

Starke Änderung durch die Wärme;

für Rot: $2E = 41°49'$ bei 7° C.
46 4 - 47 -
51 50 - 95 - (Des Cloizeaux.)

Der obere Pol der c-Axe ist der antiloge elektrische Pol, der untere der analoge. Fig. 4*a* Taf. III zeigt einen während der Abkühlung mit Schwefel und Mennige bestäubten Krystall, Fig. 4*b* die in ersterer nicht sichtbare Fläche $(00\bar{1})$, deren Mitte eine Stelle mit positiver freier Elektricität erkennen läßt, welche jedenfalls der Influenz durch die starke negative Elektricität der Unterseite des Krystalles ihre Entstehung verdankt (Kalkowsky).

Fig. 285.

Kieselzinkerz $= SiO_3Zn_2(OH)_2$. $a:b:c = 0,7835:1:0,4778$ (Schrauf). Combination (Fig. 285): $b = \{010\}$, $a = \{100\}$, $p = \{110\}$; am oberen (analogen) Pole der c-Axe $r' = \{301\}$, $r = \{101\}$, $q' = \{031\}$, $q = \{011\}$, $c = \{001\}$; am unteren (antilogen) Pole nur $o = \{12\bar{1}\}$. Mit letzterem Ende sind zuweilen zwei Krystalle symmetrisch nach $\{001\}$ verwachsen. Ätzfiguren auf $b\,(010)$ zeigen die Polarität der c-Axe sehr deutlich, da sie oben durch untere Pyramidenflächen, unten durch obere Domenflächen begrenzt werden (vgl. S. 253 und Taf. III Fig. 3). Spaltbarkeit $\{110\}$ vollkommen. Ebene der optischen Axen $\{100\}$, c erste Mittellinie, Doppelbrechung $+$; optische Constanten (nach v. Lang):

	α	β	γ	$2V$	$2E$
für Rot:	1,6107	1,6142	1,6324	47°30'	81° 7'
für Gelb:	1,6136	1,6170	1,6360	46 9	78 39
für Grün:	1,6176	1,6202	1,6392	44 42	76 3

Fig. 3 Taf. III stellt das Resultat der Anwendung der Kundtschen Methode auf einen Krystall des Kieselzinkerzes nach Bauer und Brauns dar.

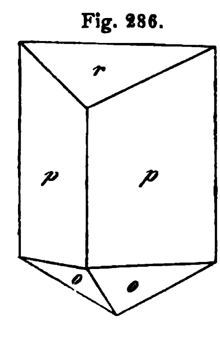


Fig. 286.

Resorcin $= C_6H_6O_2$. $a:b:c = 0,9123:1:0,5876$ (Calderon). Combination (Fig. 286): $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $o = \{11\bar{1}\}$; statt des letzteren kommt auch $\{10\bar{1}\}$ vor. Ebene der optischen Axen $\{001\}$, a erste Mittellinie, Doppelbrechung $-$; für die Na-Linie ist $2V = 46°14'$, $\beta = 1,555$;

$2E = 76°40'$ rot
76 6 gelb
74 35 blau (Groth).

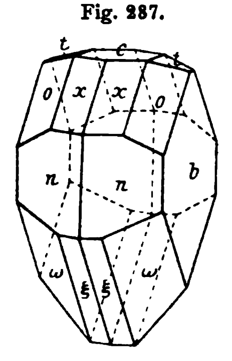


Fig. 287.

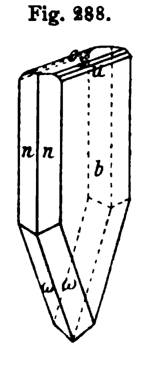


Fig. 288.

Trinitrophenol (Pikrinsäure) = $C_6H_2(NO_2)_3OH$. $a:b:c = 0{,}9691 : 1 : 1{,}0145$ (Peruzzi). Combination (Fig. 287): $b = \{010\}$, $n = \{210\}$, $\omega = \{11\bar{1}\}$, $\xi = \{21\bar{2}\}$, $o = \{111\}$, $x = \{212\}$, $c = \{001\}$, $t = \{014\}$, oder tafelförmig nach b (Fig. 288) mit $s = \{012\}$ und $u = \{011\}$. Spaltbar nach $\{010\}$ und $\{210\}$ unvollkommen. Ebene der optischen Axen $\{100\}$, c erste Mittellinie, Doppelbrechung +. $2V = 82^\circ 19'$ rot, $82^\circ 43'$ gelb. Starke polare Pyroelektricität, der obere Pol der c-Axe (mit der Fläche c) ist der anologe, der untere der antiloge (Brugnatelli).

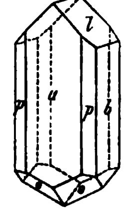
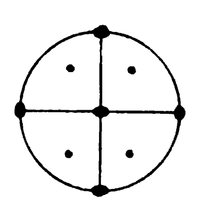


Fig. 289.

Triphenylmethan = $CH(C_6H_5)_3$. $a:b:c = 0{,}5716 : 1 : 0{,}5867$ (Hintze). Combination (Fig 289): $a = \{100\}$, $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $l = \{021\}$, $o = \{12\bar{2}\}$. Spaltbar nach $\{011\}$ unvollkommen. Ebene der optischen Axen $\{001\}$, b erste Mittellinie, $2H_o = 139\frac{1}{2}^\circ$ Na.

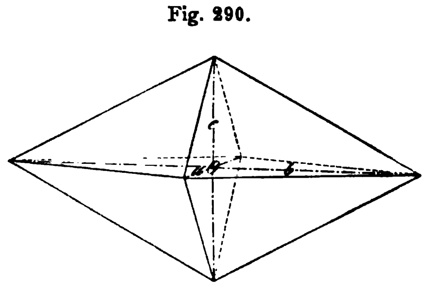
8. Bipyramidale Klasse.

(Rhombisch-holoedrische Klasse.)



Der höchste Grad von Symmetrie im rhombischen Krystallsysteme wird bedingt durch das gleichzeitige Vorhandensein dreier zueinander senkrechter Symmetrieebenen und dreier, zu diesen normaler, zweizähliger Symmetrieaxen (s. Fig. 261 nebenstehend wiederholt). Werden nach S. 382 die letzteren als Krystallaxen, a und b in der Ebene des Grundkreises, die verticale c senkrecht zu demselben, genommen, so gibt es acht gleichwertige Flächen mit den Indiceszahlen h, k und l, von denen vier einer oberen, die andern vier einer unteren Pyramide der vorigen Klasse entsprechen; die vollständige einfache Form $\{hkl\}$ dieser Klasse ist also eine rhombische Doppelpyramide oder Bipyramide, und nach dieser werden die hierher gehörigen Krystalle als »rhombisch-bipyramidale« bezeichnet. Eine derartige in Fig. 290 (mit Hinzufügung der drei Krystallaxen) abgebildete Form besitzt dreierlei Kanten, vier einander gleiche in der Axenebene ab gelegene, sogenannte »Basiskanten«, vier stumpfere und vier schärfere »Polkanten«, von denen

Fig. 290.



die einen in der Ebene (010), die andern in (100) liegen. Die sechs Ecken sind daher sämtlich 2 + 2-kantig (didigonal), da sie von zweierlei Kanten gebildet werden.

Dadurch, daß die Pole der Flächen in der Projection nicht, wie die der allgemeinen Form $\{hkl\}$, innerhalb des von den drei Axenebenen gebildeten sphärischen Dreieckes liegen, sondern auf einer der drei Seiten desselben, entstehen drei specielle Fälle, in welchen, wie aus der Projection unmittelbar zu ersehen, je zwei Pole zusammenfallen, so daß die Bipyramide sich in ein Prisma verwandelt, endlich drei weitere Fälle, wenn die Pole in den Ecken jenes Dreieckes liegen, wobei je vier Pole zusammenfallen und ein Pinakoid entsteht. Alle diese Formen lassen sich auch als Grenzformen je einer Reihe von rhombischen Bipyramiden auffassen. In Fig. 291 sind z. B. drei solcher Formen mit dem gleichen Verhältnisse $a:b$ (die mittlere ist mit Fig. 290 identisch) dargestellt, deren Parameter auf der c-Axe sich wie 1 : 2 : 4 verhalten; je größer dieser letzte wird, desto mehr nähern sich die Formen demjenigen verticalen rhombischen Prisma, dessen

Fig. 291.

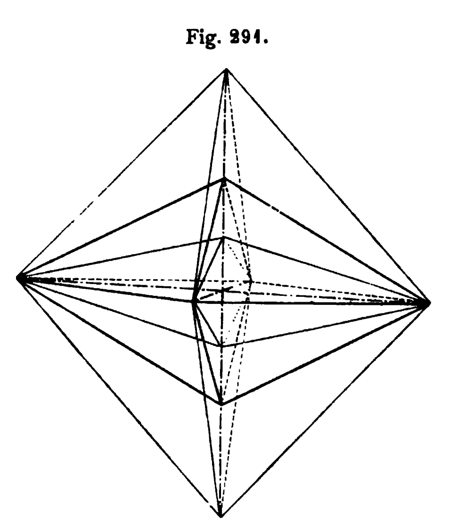
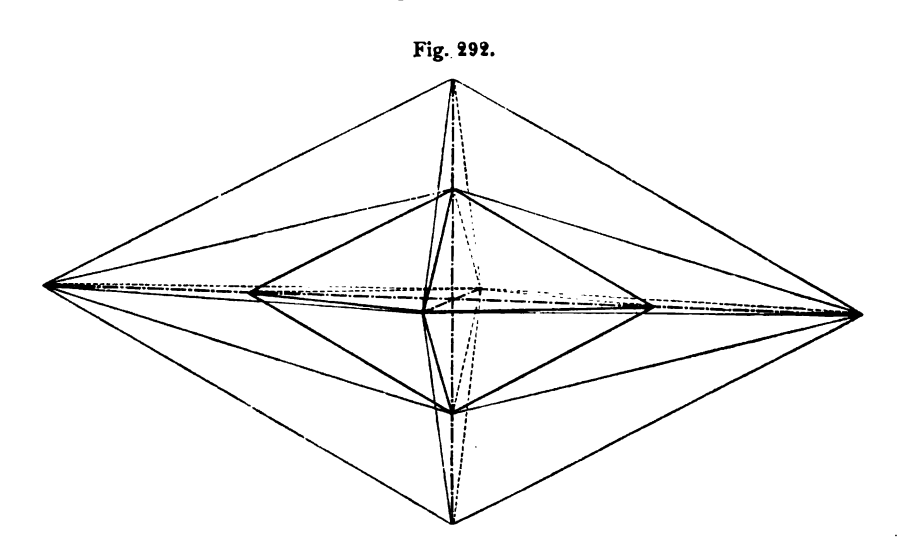


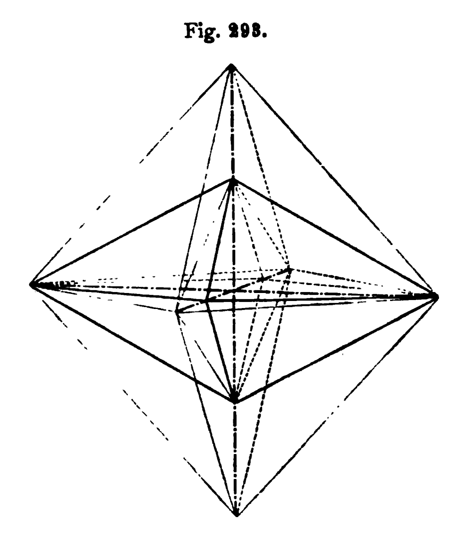
Fig. 292.



beide horizontale Axen in demselben Verhältnisse stehen; sei die mittlere Bipyramide {111}, die beiden andern also {112} und {221}, so ist die

Grenzform {110}. Von jeder derartigen Bipyramide leitet sich nun eine Reihe anderer ab durch Vervielfachung der Axe *b* bei gleichbleibendem Verhältnisse *a* : *c*, wie dies z. B. in Fig. 292 sowohl für die vorige {111}, als {221} geschehen ist unter Verdoppelung der *b*-Axe; das Endglied jeder solchen Reihe ist ein horizontales Prisma, das der ersten {101}, der zweiten {201}. In derselben Weise sind endlich in Fig. 293 mit der oben als {111} gewählten Bipyramide zwei weitere combiniert, welche dasselbe Verhältnis *b* : *c* wie {111} bzw. {221}, aber doppelte *a*-Axe besitzen, also {122} und {121}; setzt man die erste Reihe bis zum Ende fort, so gelangt man schließlich zu dem horizontalen Prisma {011}, in der zweiten zu {021} usf. Die so resultierenden drei Arten von rhombischen Prismen sind dieselben, wie in der ersten Klasse dieses Systemes (s. Fig. 263—265, S. 388), und das gleiche gilt daher auch von den Grenzformen dieser, den drei Pinakoiden. Daraus folgt, daß die letzte Klasse des rhombischen Systemes sich in betreff der möglichen Arten einfacher Formen von der ersten nur durch die Ersetzung der Bisphenoide durch Bipyramiden unterscheidet, wie folgende Übersicht zeigt:

Fig. 293.



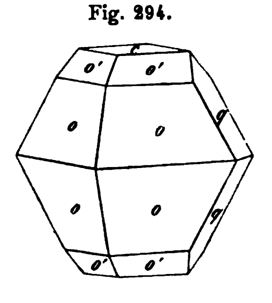
{100} erstes Pinakoid
{010} zweites Pinakoid
{001} drittes Pinakoid
{0*kl*} Prisma erster Art
{*h*0*l*} Prisma zweiter Art
{*hk*0} Prisma dritter Art
{*hkl*} Bipyramide.

Die als {011}, {101}, {110}, {111} gewählten Formen werden, wie in den andern Klassen, als »primäre« bezeichnet.

Beispiele.

Schwefel (vgl. S. 370 Anm.[1])). *a* : *b* : *c* = 0,8130 : 1 : 1,9030 (Schrauf). Entweder nur die spitze Bipyramide {111} oder die Combination Fig. 294: *o* = {111}, *o'* = {113}, *c* = {001}, *q* = {011}. Von der Bipyramide {111} erscheinen zuweilen die vier auswechselnden Flächen größer oder auch allein ausgebildet als Bisphenoid, so daß der Schwefel von manchen Autoren der 6. Klasse zugerechnet wird. Spaltbarkeit {001} und {110}

Fig. 294.



unvollkommen. Ebene der optischen Axen {010}, Axe c erste Mittellinie, Doppelbrechung positiv. Optische Constanten nach Schrauf:

	für Li	Na	Tl
$\alpha =$	1,9416	1,9598	1,9781
$\beta =$	2,0194	2,0401	2,0614
$\gamma =$	2,2185	2,2483	2,2788

$$2V = 69^\circ 5' \; Na, \quad 68^\circ 54' \; Tl;$$

Winkel des Kegels der äußeren und inneren konischen Refraction:

$$\varphi_e = 7^\circ 20' \; Na, \qquad \varphi_i = 6^\circ 56' \; Na.$$

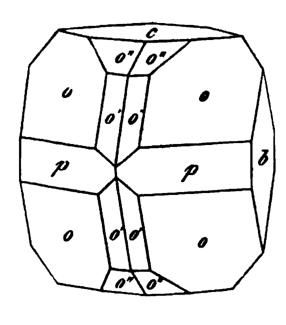
Diese Werte (für 8° C.) zeigen eine außerordentlich starke Abnahme mit steigender Temperatur, entsprechend der bedeutenden Größe der Ausdehnungscoefficienten des rhombischen Schwefels; die letzteren sind nach Schrauf:

$$\alpha = 0{,}00007138 \qquad \beta = 0{,}00008604 \qquad \gamma = 0{,}00002144;$$

Dielektricitätsconstanten s. S. 203.

Jod. $a:b:c = 0{,}6644 : 1 : 1{,}3653$ (Marignac). Combination (Fig. 295): $o = \{111\}$, $o' = \{313\}$ (die kürzeren Polkanten von o zuschärfend, also dasselbe $a:c$, ähnlich wie die Bipyramiden in Fig. 292), ferner $c = \{001\}$, $o'' = \{316\}$ (in der Zone $o'c$, also mit demselben $a:b$, wie ersteres), $p = \{110\}$ (gerade Abstumpfung der Basiskanten von o), $b = \{010\}$.

Fig. 295.



Antimonsulfid (natürl. Antimonglanz) $= Sb_2S_3$. $a:b:c = 0{,}9844 : 1 : 1{,}0110$ (Krenner). Einfachste Combination {110} (fast rechtwinkelig), am Ende {111} (dem regulären Oktaeder sehr ähnlich). Spaltbarkeit {010} vollkommen. Die aus Beobachtungen der metallischen Reflexion von der Spaltungsfläche berechneten (s. S. 175) Hauptbrechungsindices sind 5,17 und 4,49 (Drude).

Fig. 296.

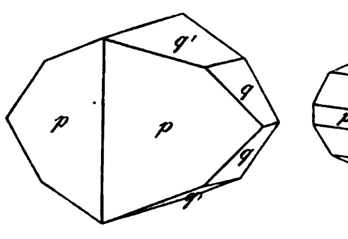


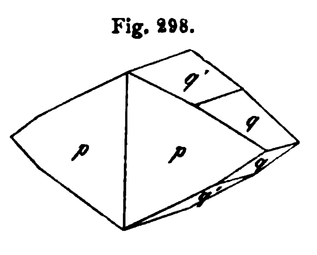
Fig. 297.

Eisenbisulfid (natürl. Markasit) $= FeS_2$. $a:b:c = 0{,}7519 : 1 : 1{,}1845$ (Miller). Combination (Fig. 296): $p = \{110\}$, $q' = \{013\}$, $q = \{011\}$.

Kupfersulfür (natürl. Kupferglanz) $= Cu_2S$. $a:b:c = 0{,}5797 : 1 : 0{,}9743$ (Miller). Combination (Fig. 297): $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{113\}$, $q = \{021\}$, $q' = \{023\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$. Diese Combination stellt einen ausgezeichneten Fall hexagonaler Pseudosymmetrie dar, da das Prisma p wenig von 60° verschieden ist, also p und b einander unter fast

gleichen Winkeln schneiden; wie diese einem hexagonalen Prisma, so ähneln *o* und *q* einer spitzeren, *o'* und *q'* einer stumpferen hexagonalen Bipyramide. Zwillinge und Drillinge nach {110}.

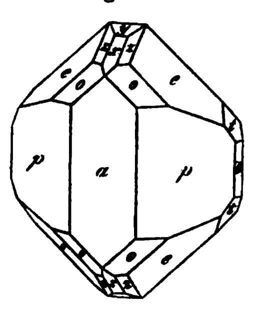
Fig. 298.



Bleioxyd $= PbO$. $a:b:c = 0,666:1:0,971$ (Nordenskiöld). Dünne Tafeln nach {100} ausgedehnt, von schmalen Flächen von {012}, {111} und mehrerer abgeleiteter Bipyramiden begrenzt. Spaltbarkeit {100}. Ebene der optischen Axen {100}.

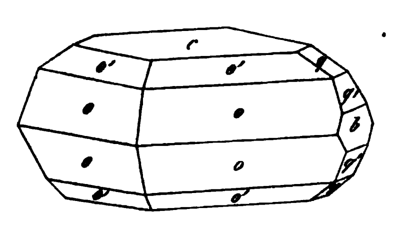
Antimontrioxyd (natürl. Valentinit oder Weißspießglanzerz) $= Sb_2O_3$. $a:b:c = 0,3914:1:0,3367$ (Laspeyres). Combination (Fig. 298): $p =$ {110}, $q =$ {021}, $q' =$ {032}; oder tafelförmig nach {010}. Spaltbarkeit {010} vollkommen. Ebene der optischen Axen für Rot {001}, für den brechbareren Teil des Spectrums {010}; Axenwinkel sehr klein.

Fig. 299.



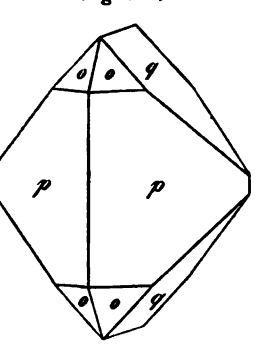
Titandioxyd (nat. Brookit) $= TiO_2$. $a:b:c = 0,9444:1:0,8416$ (von Kokscharow). Combination (Fig. 299): $a =$ {100}, $p =$ {110}, $b =$ {010}, $o =$ {111}, $e =$ {122} (Zone *oeeo*; da *e* häufiger und meist größer als *o*, so wird es von manchen Autoren zur primären Bipyramide genommen), $x =$ {102}, $y =$ {104}, $z =$ {112} (bestimmt durch die beiden Zonen *poz* und *ezxze*), $t =$ {021}. Spaltbarkeit {010}. Ebene der optischen Axen für Rot und Gelb {001}, $2E = 55°$ rot, 30° gelb; für Grün {010}, $2E = 33°$ (von Zepharovich); erste Mittellinie ist für alle Farben die Axe *a*; man erblickt daher im convergenten weißen Lichte die in Fig. 5 der Tafel II abgebildete Interferenzerscheinung (vgl. S. 120). Doppelbrechung +.

Fig. 300.



Bleichlorid $= PbCl_2$. $a:b:c = 0,5952:1:1,1872$ (Stöber). Pseudohexagonale Combination (Fig. 300), tafelartig nach $c =$ {001}, $o =$ {111}, $o' =$ {112}, $q =$ {012}, $q' =$ {021}, $b =$ {010}. Oft auch nur *c*, *o'* und *b*. Spaltbar *c* {001} vollkommen. Ebene der optischen Axen *b* {010}, *a* erste Mittellinie, Doppelbrechung +. Für *Na*: $\alpha = 2,1992$, $\beta = 2,2172$, $\gamma = 2,2596$, $2V = 67°12'$ (Stöber).

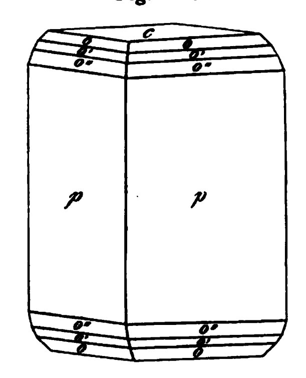
Fig. 301.



Quecksilberchlorid $= HgCl_2$. $a:b:c = 0,7254:1:1,0697$ (Lutschitzky). Kurzprismatische Combination (Fig. 301): $p =$ {110}, $o =$ {111},

$q = \{011\}$ oder (durch Sublimation) langprismatisch nach q (Mitscherlich). Spaltbarkeit q vollkommen. Ebene der optischen Axen $\{100\}$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung negativ.

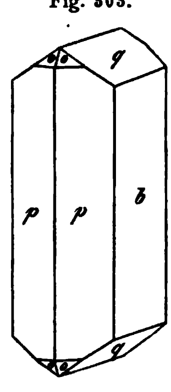
Fig. 302.



Quecksilberbromid $= HgBr_2$. $a:b:c = 0{,}6826:1:1{,}6552$ (Lutschitzky). Mit dem vorigen nicht isomorph[1]). Dünne Tafeln nach $c = \{001\}$ mit den Randflächen $p = \{110\}$, $o' = \{111\}$, $o = \{112\}$. Spaltbar nach $c\,\{001\}$ höchst vollkommen. Ebene der optischen Axen $c\,\{001\}$.

Quecksilberjodid $= HgJ_2$. Isomorph vorigem. $a:b:c = 0{,}649:1:?$ (Mitscherlich). Die Krystalle zeigen nur $\{001\}$ und $\{110\}$, daher der Parameter c nicht bestimmt werden kann. Dagegen bilden die isomorphen Mischungen von $HgBr_2$ und HgJ_2 flächenreichere Krystalle; an einer solchen aus ungefähr gleichen Teilen beider Salze beobachtete Groth: $a:b:c = 0{,}6443:1:1{,}8388$. Kurze Prismen (Fig. 302): $p = \{110\}$, $c = \{001\}$; in der Zone beider $o = \{112\}$, $o' = \{111\}$, $o'' = \{221\}$. Spaltbarkeit $\{001\}$ vollkommen. Ebene der optischen Axen $\{001\}$, b erste Mittellinie.

Fig. 303.



Salpetersaures Kalium (Kalisalpeter) $= NO_3K$. $a:b:c = 0{,}5910:1:7011$ (Miller). Combination (Fig. 303): $b = \{010\}$, $p = \{110\}$, $q = \{011\}$, $o = \{111\}$ (oft ohne die letzte Form, zuweilen auch nach q langprismatisch). Spaltbarkeit nach p und b unvollkommen. Ebene der optischen Axen $\{100\}$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung —; die Hauptbrechungsindices für die Fraunhoferschen Linien nach Schrauf:

	α	β	γ	$2V$ ber.
für B:	1,3328	1,4988	1,4994	6° 11′
- D:	1,3346	1,5056	1,5064	7 12
- E:	1,3365	1,5124	1,5135	8 5
- H:	1,3436	1,5385	1,5404	10 22

Den scheinbaren Winkel in Luft fand Des Cloizeaux:

für Rot $2E =$	7° 55′	bei	17° C.
	6 42	-	71,5 -
	6 6	-	121 -

so daß also derselbe durch die Temperatur eine nicht unbeträchtliche Änderung erleidet.

1) S. des Verfassers Einleitung in die chemische Krystallographie S. 66.

Überchlorsaures Kalium = ClO_4K. $a:b:c$ = 0,7819 : 1 : 0,6396 (Groth). Combination (Fig. 304): c = {001}, p = {110}, r = {101}. Spaltbarkeit nach c und p vollkommen. Ebene der optischen Axen {001}, b erste Mittellinie. Doppelbrechung +.

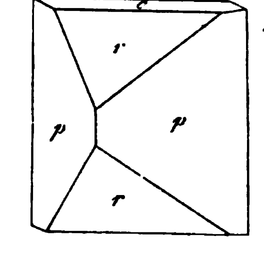


Fig. 304.

Übermangansaures Kalium = MnO_4K. $a:b:c$ = 0,7974 : 1 : 0,6492 (Groth). Combination (Fig. 305), prismatisch durch Vorherrschen von r = {101}, ferner p = {110}, q = {021}. Spaltbarkeit {001} und {110} vollkommen. Isomorph mit vor.

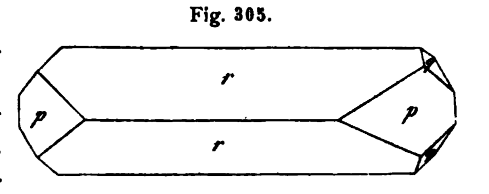


Fig. 305.

Kohlensaurer Kalk (Aragonit) = CO_3Ca. $a:b:c$ = 0,6224 : 1 : 0,7206 (von Kokscharow). Combination (= Fig. 303 a. vor. S.): p = {110}, b = {010}, q = {011}. Häufig Zwillinge nach dem pseudohexagonalen Prisma {110} und mit der Zwillingsebene verwachsen (Fig. 306); sehr oft ist der einspringende Winkel der Flächen b durch Vorherrschen von p verdeckt, und es erscheint nur derjenige von q. Nicht selten ist an den zweiten Krystalle noch ein dritter nach demselben Gesetze angewachsen; hierbei sind aber zwei Fälle möglich: entweder ist die Zwillingsebene des zweiten und dritten Krystalles parallel derjenigen des ersten und zweiten, oder sie ist dem andern Prismenflächenpaar parallel.

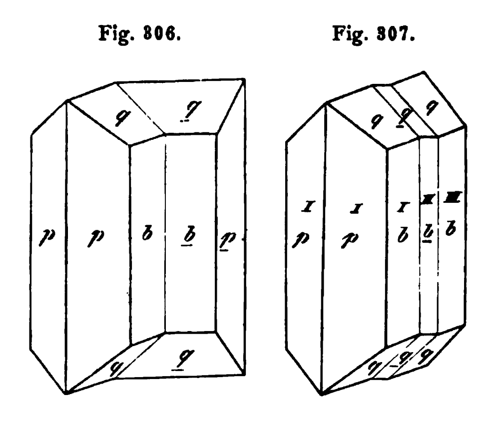


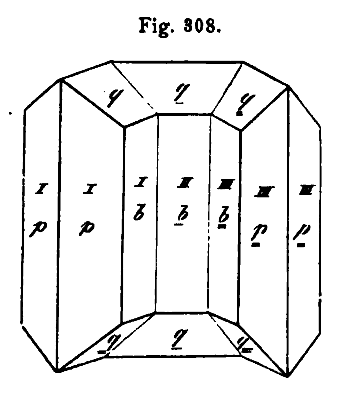
Fig. 306. Fig. 307.

Betrachten wir zunächst den ersten, in Fig. 307 wiedergegebenen Fall, so ist klar, daß Krystall I und III parallel sind, die Verwachsung also erscheint als ein Krystall, in welchem eine in Zwillingsstellung befindliche Lamelle eingewachsen ist. Nicht selten finden sich Krystalle mit einer Anzahl solcher Zwillingslamellen, welche eine Streifung der Flächen q und b verursachen. Ein Aragonitkrystall mit einer derartigen Lamelle bietet in optischer Beziehung besonderes Interesse dar. Schleift man nämlich an demselben oben und unten das Pinakoid {001} an und blickt etwas schräg durch diese Flächen nach einem hellen Lichte (oder einer hellen Öffnung in einem dunkeln Schirme), so sieht man die Interferenzcurven des einen der beiden Axenbilder ohne Polarisationsapparat. Die Ursache dieser Erscheinung ist die eingelagerte Zwillingslamelle. Da nämlich (s. folg. S.) die erste Mittellinie parallel der Verticalaxe und der Axenwinkel des Aragonit

klein ist, so bilden die einer optischen Axe der Zwillingslamelle entsprechenden Strahlen einen sehr spitzen Winkel mit deren, einer verticalen Prismenfläche parallelen, Begrenzungsfläche: fällt nun in einer geeigneten Richtung Licht auf die eine Pinakoidfläche des Krystalles auf, so wird dies doppelt gebrochen; die beiden Strahlenbündel treffen unter verschiedenen, aber bei beiden sehr spitzen Winkeln auf die eingelagerte Lamelle, werden also hier sehr verschieden abgelenkt, bzw. der eine total reflectiert. In der Richtung der optischen Axe des Krystalles *II* tritt also nur ein linear polarisiertes Strahlenbündel in denselben ein; der Krystall *I* wirkt gerade so, wie der polarisierende Nicol des Polarisationsinstrumentes. Die in jener Richtung durch *II* hindurchgegangenen Strahlen werden in *III* wieder doppelt gebrochen, weil in diesem ihre Richtung wegen der Zwillingsstellung nicht die einer optischen Axe ist, sie verlassen die andere Pinakoidfläche also in verschiedenen Richtungen; bringt man nun das Auge in diejenige, welche den Strahlen entspricht, deren Vibrationsrichtung senkrecht zu derjenigen der aus *I* in *II* eintretenden ist, so erhält man die auf eine Schwingungsebene zurückgeführten Componenten der in *III* eintretenden Strahlen, d. h. *III* wirkt ebenso wie der mit dem Polarisator gekreuzte Analysator eines Polarisationsinstrumentes, und man erblickt, in dieser Richtung nach einer hellen Öffnung hinsehend, indem man den Krystall dem Auge nähert, auf jener die dunkle Hyperbel mit den innersten Farbenringen des optischen Axenbildes. Solche Krystalle, welche ohne Polarisationsapparat die Interferenzringe zeigen, hat man idiocyclophanische genannt.

Es wurde a. vor. S. erwähnt, daß noch eine zweite Art von Drillingsverwachsungen eines derartigen rhombischen Krystalles nach demselben Gesetze möglich wäre. Diese ist in Fig. 308 dargestellt; hier ist die Zwillingsfläche von *II* und *III* nicht parallel der von *I* und *II*, sondern es ist die zweite Prismenfläche des Krystalles *II*; infolgedessen hat *III* eine andere Stellung als *I*. Würde sich an *III* in derselben Weise ein vierter Krystall anlegen usf., so könnten, da der Prismenwinkel nahe 60°, deren sechs einen Ring schließen. Sehr häufig sind Krystalle von der relativen Stellung *I*, *II*, *III* auch ganz durcheinander gewachsen; sind sie nach *b* tafelförmig, so erscheint der Drilling, von oben gesehen, wie ein sechsstrahliger Stern, dessen Strahlen nahe 60° miteinander bilden. Die Krystallgruppe zeigt sodann eine mimetisch-hexagonale Form.

Fig. 308.



Spaltbarkeit {010} unvollkommen. Ebene der optischen Axen {100}, *c* erste Mittellinie. Doppelbrechung —; Brechungsindices (Rudberg):

	α	β	γ	$2V$ ber.	$2E$ ber.
für C:	1,5282	1,6778	1,6820	17° 48′	30° 5′
- D:	1,5301	1,6816	1,6859	17 50	30 14
- E:	1,5326	1,6863	1,6908	18 3	30 41

Durch directe Messung fand Kirchhoff

für C:	$2V = 18°\ 7'$	$2E = 30°40'$
- D:	18 11	30 52
- E:	18 17	31 7

Der scheinbare Axenwinkel ändert sich nur wenig mit der Temperatur (bei einer Erhöhung der letzteren um 160° verringert er sich um etwa 40′).

Kohlensaures Baryum (nat. Witherit) $= CO_3Ba$. $a:b:c = 0{,}5949 : 1 : 0{,}7413$ (Miller). Combination (Fig. 309): $o = \{111\}$, $q' = \{021\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, die ersteren sehr nahe eine hexagonale Bipyramide, die beiden letzteren ein dergl. Prisma bildend. Spaltbarkeit {110} unvollkommen. Die Mehrzahl der Krystalle sind Durchwachsungsdrillinge nach {110}. Ebene der optischen Axen {010}, c erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Axenwinkel $2E = 26°30'$ für Rot und Blau, d. h. die Dispersion der optischen Axen ist so gering, daß sie durch die Messung nicht zu bestimmen; die Farbensäume der Hyperbeln deuten an, daß $\varrho > v$. $\alpha = 1{,}740$ (Des Cloizeaux). Isomorph mit vor.

Fig. 309.

Kohlensaures Blei (natürl. Cerussit) $= CO_3Pb$. $a:b:c = 0{,}6102 : 1 : 0{,}7232$ (von Kokscharow). Combination = Fig. 309, doch $b = \{010\}$ gewöhnlich größer ausgebildet, die Krystalle danach oft tafelartig. Meist Zwillinge oder Drillinge nach dem Gesetze des isomorphen Aragonit. Spaltbarkeit {110} unvollkommen. Ebene der optischen Axen {010}, c erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Brechungsindices und daraus berechnete Axenwinkel:

Linie	α	β	γ	$2V$	$2E$
B:	1,7915	2,0595	2,0613	8° 22′	17 17°
- D:	1,8037	2,0763	2,0780	8 14	17 8′
- E:	1,8164	2,0919	2,0934	7 35	15 55

(Schrauf). Durch die Wärme nicht unbeträchtliche Änderung:

Für Rot ist $2E = 18°22'$ bei 12° C.
22 2 - 95,5° C.

(Des Cloizeaux).

Schwefelsaures Natrium (Thenardit) $= SO_4Na_2$. $a:b:c = 0{,}4731 : 1 : 0{,}7996$. Gewöhnlich nur die Bipyramide {111}, ähnlich Fig. 290 S. 397. Spaltbarkeit nach {010} ziemlich vollkommen, nach {111} weniger gut. Doppelbrechung +, schwach. Ebene der optischen Axen {010}, a erste Mittellinie; $2V = 83°35'$ (Baerwald), Dispersion $\varrho > v$, sehr schwach.

Schwefelsaures Kalium $= SO_4K_2$. $a : b : c = 0{,}5727 : 1 : 0{,}7418$ (Tutton). Combination entweder genau = Fig. 309, oder nach der a-Axe prismatisch (Fig. 310): $o = \{111\}$, $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $q = \{011\}$, $q' = \{021\}$. Häufig Drillingskrystalle, welche das ausgezeichnetste Beispiel mimetischer Formen (vgl. S. 271—272) darbieten und wie einfache hexagonale Bipyramiden aussehen. In Fig. 311 ist ein solcher, vertical von oben gesehen, abgebildet. Denkt man sich den Krystall I allein vorhanden und zu beiden Seiten vervollständigt, so bildet er eine rhombische Bipyramide $o_I\ o_I\ o_I\ o_I$, deren Basiskanten durch die vier, in der Figur nur als Linien erscheinenden Flächen p des Prismas $\{110\}$ gerade abgestumpft sind; endlich erscheinen noch die vier Flächen des ebenfalls verticalen Prismas $p' = \{130\}$. Da der Winkel $(110):(1\bar{1}0)$ sehr nahe 60°, so ist derjenige von $\{130\}$ an derselben Seite nicht viel verschieden von 120°, und die Fläche $(1\bar{3}0)$ des letzteren nahezu normal zu (110) (wäre der Winkel von $\{110\}$ genau $= 60^\circ$, so wäre der von $\{130\}$ genau $= 120^\circ$, und die erwähnten beiden Flächen würden sich unter 90° schneiden). Nach der Fläche $(1\bar{3}0)$ symmetrisch zu I ist nun der Krystall II, und nach dem andern Flächenpaar desselben Prismas der Krystall III mit I verbunden. Da nach obigem die Zwillingsebene nahe senkrecht zu einer p-Fläche eines jeden Krystalles steht, so fallen je zwei derartig gelegene Flächen nahezu in eine Ebene (sie bilden einen einspringenden Winkel von $1^\circ 16'$), und da die Neigung von o zu p natürlich in allen drei Krystallen dieselbe ist, so müssen auch die aneinanderstoßenden pyramidalen Flächenteile von I und II und von I und III fast zusammenfallen. Verschwinden nun die einspringenden Winkel der p'-Flächen durch vorherrschende Ausbildung der Bipyramide o, so entsteht eine Form, welche nur bei genauer Betrachtung von einer hexagonalen Bipyramide mit abgestumpften Basiskanten unterschieden werden kann, nämlich dadurch, daß jede ihrer Flächen nicht aus einer Ebene besteht, sondern nach vertical herablaufenden Grenzen geknickt erscheint. Um dies zu erkennen, braucht man nur das Licht einer einigermaßen entfernten Flamme von den Pyramiden- oder Prismenflächen reflectieren zu lassen, wobei immer die Hälfte derselben beleuchtet erscheint.

Fig. 310.

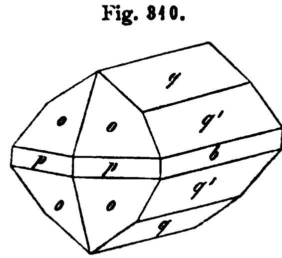


Fig. 311.

Spaltbarkeit $\{010\}$ und $\{001\}$ unvollkommen. Ebene der optischen Axen $\{100\}$, c Mittellinie. Doppelbrechung $+$; $\varrho < v$. Brechungsindices (Topsøe, sehr ähnliche Werte fand Tutton):

	α	β	γ
C	1,4911	1,4928	1,4959
D	1,4932	1,4946	1,4980
E	1,4976	1,4992	1,5029

Direct beobachtet:

$2E = 110°15'$ rot
110 24 grün
110 26 blau.

Durch Temperaturerhöhung um 140° C. wird $2E$ etwa 10° größer (Des Cloizeaux). Durch noch weiteres Erhitzen wird die *b*-Axe erste Mittellinie; bei 380° vereinigen sich die Axen in derselben und der Krystall wird negativ einaxig; alsdann gehen die Axen in {001} auseinander, und wenn dies so weit erfolgt ist, daß *a* erste Mittellinie geworden ist, so wird der Krystall wieder positiv doppeltbrechend, bis er bei 490° in einen einaxigen übergeht, dessen optische Axe parallel *a*; jenseits dieser Temperatur wird er wieder zweiaxig mit {010} als Axenebene. Zwischen 600° und 650° C. findet eine plötzliche Umwandlung in eine andere Modification statt.

Schwefelsaures Ammonium = $SO_4(NH_4)_2$. $a:b:c = 0,5635:1:0,7319$ (Tutton). Combination = vorigem (Fig. 310). Spaltbarkeit *c* {001} vollkommen. Ebene der optischen Axen {010}, *a* erste Mittellinie. Doppelbrechung +; Brechungsindices nach Tutton:

	α	β	γ	2V	2E
Li:	α = 1,5177	β = 1,5199	γ = 1,5297	2V = 52°18'	2E = 84° 1'
Na:	1,5209	1,5230	1,5330	52 12	84 6
Tl:	1,5237	1,5258	1,5359	52 7	84 10.

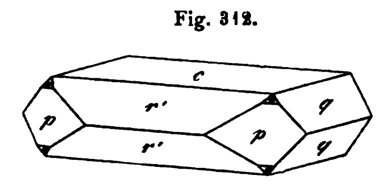
Chromsaures Kalium = CrO_4K_2. $a:b:c = 0,5695:1:0,7297$ (Mitscherlich). Combinationen und Zwillingsbildung, wie bei dem isomorphen Kaliumsulfat (Fig. 310, 311). Ebene der optischen Axen {100}, *b* erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Der mittlere Brechungsindex $\beta = 1,713$ für die Linie *C*, 1,725 für *D*, 1,770 für *F*. $2E = 100°32'$ rot, 95°40' grün, 93°10' blau.

Calciumsulfat (Anhydrit) = SO_4Ca. $a:b:c = 0,8932:1:1,0008$. Gewöhnliche Combination: {100}, {010}, {001}, einem regulären Würfel gleichend. Spaltbarkeit {010} sehr vollkommen, {001} vollkommen, {100} deutlich. Gleitflächen parallel den beiden Ebenen (110) und (1$\bar{1}$0), daher die Hauptaxen des Deformationsellipsoides den drei Krystallaxen parallel sind und die einfache Schiebung nach den Gleitflächen die Symmetrie des Krystalles nicht ändert. Ebene der optischen Axen {001}, erste Mittellinie Axe *a*, $2E = 70°18'$ rot, 72°42' violett (Grailich u. Lang). Brechungsindices nach Mülheims:

	α	β	γ	2V
für *C*	1,5672	1,5729	1,6106	43°27'
- *D*	1,5693	1,5752	1,6130	43 44
- *E*	1,5722	1,5782	1,6162	44 8

Schwefelsaures Baryum (nat. Schwerspat, Baryt) = SO_4Ba. $a:b:c$ = 0,7622 : 1 : 1,2416 (Helmhacker). Combination (Fig. 312): $c = \{001\}$, $p = \{110\}$, $r' = \{102\}$, $q = \{011\}$, $o = \{111\}$. Spaltbarkeit {001} vollkommen, {110} ziemlich vollkommen, {010} und {111} deutlich. Ebene der optischen Axen {010}, Axe a erste Mittellinie. Doppelbrechung +. Optische Constanten nach Heusser:

Fig. 312.



	α	β	γ	$2E$
C	1,6336	1,6348	1,6452	62° 34′
D	1,6363	1,6375	1,6480	63 12
E	1,6397	1,6409	1,6517	64 10

Über die Änderung der Brechungsindices durch die Wärme liegen ausführliche Untersuchungen von Arzruni und Offret vor. Letzterer fand, daß die Abnahme der Brechungsindices bei um 100° steigender Temperatur im Mittel beträgt für α: 0,00199, für β: 0,00177, für γ: 0,00257. Die Änderung des Winkels der optischen Axen ist daher sehr beträchtlich; Arzruni fand für D:

20° C.	$2V$ = 37° 28′
50 -	38 43
75 -	39 28
100 -	40 15
150 -	42 6
200 -	44 18

Des Cloizeaux fand für die Änderung des scheinbaren Axenwinkels

$2E$ = 63° 5′	rot,	bei 12° C.
70 10	-	- 121 -
74 42	-	- 196 -

Schwefelsaures Strontium (nat. Cölestin) = SO_4Sr. $a:b:c$ = 0,7696 : 1 : 1,2551 (Arzruni). Combination und Spaltbarkeit gleich vorigem. Axenebene {010}, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +.

Brechungsindices bei 20° C.:

	α	β	γ
C	1,61954	1,62120	1,62843
D	1,62198	1,62367	1,63092
F	1,62790	1,62960	1,63697

bei 200° C.:

	α	β	γ
C	1,61719	1,61925	1,62547
D	1,61958	1,62168	1,62790
F	1,62542	1,62768	1,63399

Bei 16° C. ist der scheinbare Axenwinkel:

für *Li*-Licht: $2E = 87° \; 2'$
- *Na* - 88 38
- *Tl* - 89 $55\frac{1}{2}$

Derselbe zeigt in höherer Temperatur eine beträchtliche Zunahme (Arzruni).

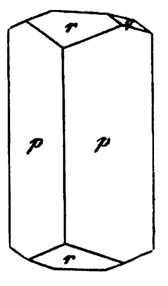
Schwefelsaures Blei (natürl. Anglesit) $= SO_4Pb$. $a : b : c = 0,7852 : 1 : 1,2894$ (von Lang). Combination wie SO_4Ba. Spaltbarkeit ebenso, aber weniger vollkommen. Ebene der optischen Axen {010}, *a* erste Mittellinie.

Brechungsindices bei 20° C. nach Arzruni:

		α	β	γ
	C	1,86981	1,87502	1,88630
	D	1,87709	1,88226	1,89365
	F	1,89549	1,90097	1,91263
bei 200° C.:				
	C	1,86527	1,87088	1,88008
	D	1,87260	1,87833	1,88754
	F	1,89124	1,89716	1,90678

Der wahre Axenwinkel $2V$ ist bei gewöhnlicher Temperatur 75°24′ (*D*-Linie), bei 200° = 89°17′; der scheinbare $2E$ kann nicht direct gemessen werden, da wegen des hohen Brechungsindex die den Axen parallelen Strahlen aus einer zur ersten Mittellinie senkrechten Platte nicht mehr austreten.

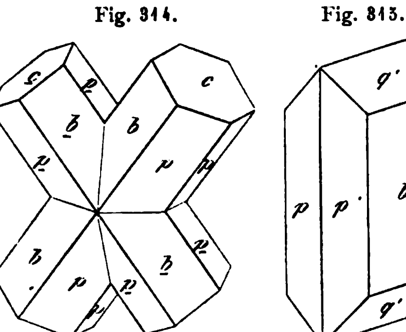
Fig. 313.



Nitroprussidnatrium $= Na_{12}Fe_6N_5O_6(CN)_{30} \cdot 6H_2O$. $a : b : c = 0,7650 : 1 : 0,4115$ (Rammelsberg). Combination (Fig. 313): $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$. Ebene der optischen Axen {100}, *c* erste Mittellinie. Doppelbrechung +. $2E = 61°$ rot.

Staurolith $= Si_2O_{13}Al_5FeH$. $a:b:c = 0,4803:1:0,6761$. Combination (Fig. 314): $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $c = \{001\}$. Die sonst seltene Zwillingsbildung nach einer Bipyramidenfläche (vgl. S. 386) ist an diesem Minerale verhältnismäßig häufig; die Zwillingsebene ist eine Fläche von {232}, welche in Fig. 314 senkrecht gestellt ist.

Fig. 314. Fig. 315.



Olivin $= SiO_4(Mg,Fe)_2$. $a : b : c = 0,4660 : 1 : 0,5867$ (von Kokscharow). Combination (Fig. 315): $p = \{110\}$, $b = \{010\}$, $q' = \{021\}$. Spaltbarkeit {010} deutlich. Ebene der optischen Axen {001}, *a* erste Mittellinie. Doppelbrechung +. Dispersion der Axen gering, $\varrho < v$.

Gelb: $\alpha = 1{,}661$, $\beta = 1{,}678$, $\gamma = 1{,}697$, $2V = 87°46'$ (Des Cloizeaux).

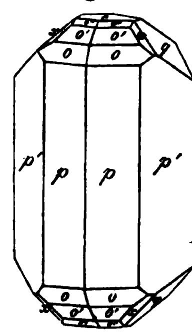


Fig. 316.

Normales Eisensilicat (Frischschlacke) = SiO_4Fe_2. $a:b:c = 0{,}4623:1:0{,}5813$ (Mitscherlich). Combination gleich vorigem.

Topas = $SiO_4Al.Al(F,OH)_2$. $a:b:c = 0{,}5285:1:0{,}9539$ (von Kokscharow). Combination (Fig. 316): $p = \{110\}$, $p' = \{120\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{112\}$, $o'' = \{113\}$, $c = \{001\}$, $q = \{011\}$, $x = \{123\}$ (in den Zonen qo', $o''o''$ und $p'c$). Spaltbarkeit $\{001\}$ vollkommen. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, c erste Mittellinie (daher durch eine Spaltungsplatte beide Axenbilder sichtbar); Doppelbrechung +. Brechungsindices:

	α	β	γ	$2V$	$2E$
C	1,6094	1,6114	1,6188	56°19'	99° 0'
D	1,6116	1,6138	1,6211	56 39	100 40
E	1,6145	1,6167	1,6241	56 58	100 54

Je nach dem Verhältnis von $F:OH$ ist der scheinbare Axenwinkel größer (bis 125°) oder kleiner. Mit der Temperatur ändert er sich merklich (z. B. $2E = 119°$ bei 20° C., = 123° bei 250° C.). Ausdehnung durch die Wärme nach Fizeau:

parallel der Axe $a = 0{,}00000484$
- - $b = 0{,}00000414$
- - $c = 0{,}00000592$

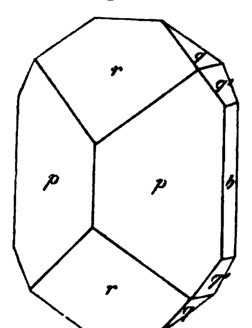


Fig. 317.

Ameisensaures Baryum = $C_2H_2O_4Ba$. $a:b:c = 0{,}7650:1:0{,}8638$ (Heusser). Combination (Fig. 317): $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $q' = \{021\}$. Spaltbarkeit $\{011\}$ deutlich. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +. Brechungsindices:

	α	β	γ	$2V$
B	1,5679	1,5918	1,6310	77°40'
D	1,5729	1,5970	1,6361	77 53
E	1,5777	1,6024	1,6412	78 53

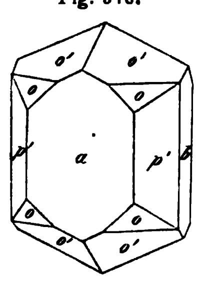


Fig. 318.

(Schrauf). Des Cloizeaux berechnete den scheinbaren Winkel in Luft aus demjenigen in Öl und dem Brechungsindex des letzteren (vgl. S. 133) und fand:

$2E = 161°18'$ rot
164 0 gelb
176 34 blau.

Ameisensaures Calcium = $C_2H_2O_4Ca$. $a:b:c = 0{,}7599:1:0{,}9342$ (Heusser). Combination (Fig. 318): $a = \{100\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{112\}$,

$p' = \{120\}$, $b = \{010\}$. Ebene der optischen Axen $\{010\}$, a Mittellinie. Doppelbrechung +.

	α	β	γ	$2V$	$2E$
B	1,5067	1,5100	1,5731	26°29′	40°28′
D	1,5101	1,5135	1,5775	26 49	41 5
E	1,5132	1,5167	1,5819	26 59	41 27

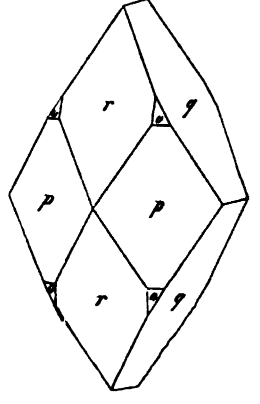


Fig. 319.

(Schrauf). Starke Änderung des Axenwinkels mit der Temperatur:

$2E = 37°44'$ bei 15° C.
$= 41\ 36$ - 47 -
$= 42\ 40$ - 56 -

(Des Cloizeaux).

Citronensäure $= C_6H_8O_7.H_2O$. $a:b:c = 0,6740:1:1,6621$ (Heusser). Combination (Fig. 319): $p = \{110\}$, $r = \{101\}$, $q = \{011\}$, $o = \{111\}$. Spaltbarkeit $\{001\}$ vollkommen. Ebene der optischen Axen $\{100\}$, b Mittellinie. Doppelbrechung +.

	α	β	γ	$2V$	$2E$
B	1,4896	1,4943	1,5054	66°31′	110° 3′
D	1,4932	1,4977	1,5089	66 9	107 28
E	1,4967	1,5011	1,5122	64 47	107 4 (Schrauf).

Der scheinbare Axenwinkel in verschiedenen Platten oft ziemlich variierend.

Terpin (Terpentinölhydrat) $= C_{10}H_{20}O_2.2H_2O$. $a:b:c = 0,8072:1:0,4764$ (Arzruni). Combination (Fig. 320): $p = \{110\}$, $o = \{111\}$, $q = \{011\}$, $b = \{010\}$. Axenebene $\{010\}$, a Mittellinie. Doppelbrechung +. Brechungsindices:

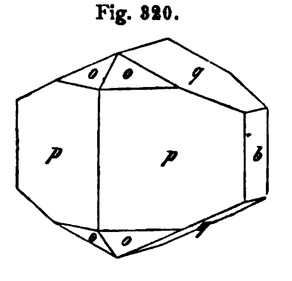


Fig. 320.

	α	β	γ
Li-Linie	1,5024	1,5093	1,5211
Na -	1,5049	1,5124	1,5243
Tl -	1,5073	1,5148	1,5272

Der wahre Axenwinkel direct bestimmt (durch Messung des scheinbaren spitzen und stumpfen in Öl, s. S. 134) nach Arzruni:

Li-Linie	$2V = 77°37'$
Na -	77 27
Tl -	77 18

Benzol $= C_6H_6$. $a:b:c = 0,891:1:0,799$ (Groth). Nur die primäre Bipyramide $\{111\}$.

Mellithsaures Ammon $= C_6(NH_4CO_2)_6.9H_2O$. $a:b:c = 0,6461:1:0,3561$ (G. Rose). Gewöhnlich sind die Krystalle nur sechsseitige Prismen, gebildet von $\{110\}$ und $\{010\}$, am Ende mit $\{001\}$; dazu treten

zuweilen kleine Flächen von {101} und {011}. Optisch interessant durch seine große Dispersion der Axen; die Verticalaxe ist erste Mittellinie und Schwingungsrichtung der größten Lichtgeschwindigkeit für alle Farben, die Ebene der optischen Axen dagegen ist für Rot {010}, für Violett {100}; die Krystalle sind also für eine Farbe, und zwar für Grün, welches näher an Gelb als an Blau liegt, einaxig, und zeigen daher die in Fig. 5 der Tafel II dargestellte Interferenzfigur (vgl. S. 120). Brechungsindices für Strahlen, deren Schwingungsrichtung

	$\parallel a$	$\parallel b$
rot	1,550 (β)	1,552 (γ)
grün	1,564 (γ)	1,563 (β)
blau	1,572 (γ)	1,570 (β)
$2V =$	11° 0′	$2E =$ 17° rot
	12 40	20 blau.

Demnach ist die Dispersion der wahren Axen 23° 40′, die der scheinbaren 37° (Grailich uud v. Lang).

Fig. 321. Fig. 322.

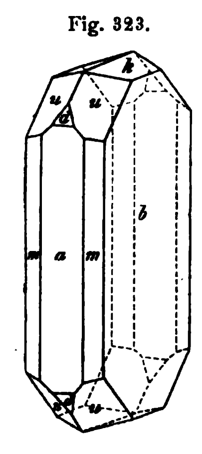
Triphenylbenzol $= C_6H_3(C_6H_5)_3$. $a:b:c = 0,5662:1:0,7666$ (Arzruni). Combinationen (Fig. 321, 322): $a = \{100\}$, $l = \{310\}$, $m = \{110\}$, $b = \{010\}$, $d = \{011\}$, $p = \{112\}$, $k = \{012\}$. Axenebene {010}, c Mittellinie. Außerordentlich starke negative Doppelbrechung:

	α	β	γ
Na:	1,5241	1,8670	1,8725
Tl:	1,5291	1,8848	1,8897

$2E$ für Li: 17° 48′, für Na: 18° 25′, für Tl: 19° 27′ (A. Arzruni).

Anhang: Mimetisch-rhombische Krystalle.

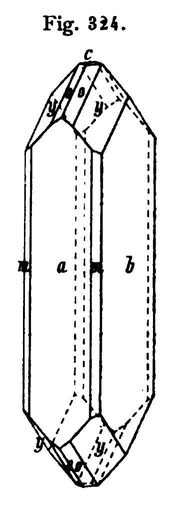
Fig. 323.



Rhombischer Pyroxen (Enstatit, Bronzit, Hypersthen). Isomorphe Mischungen von SiO_3Mg und SiO_3Fe. $a:b:c = 0,971:1:0,570$. Combination (Fig. 323): $b = \{010\}$, $a = \{100\}$, $m = \{110\}$, $k = \{012\}$, $u = \{223\}$, $d = \{201\}$. Spaltbar nach {010} und {110}. Die Krystalle sind (meist submikroskopisch) aus monoklinen Lamellen parallel b (010) zusammengesetzt, deren Krystallstructur derjenigen des isomorphen Augit (s. S. 377) entspricht, und zwar nach dem beim Augit gewöhnlichen Zwillingsgesetze: Zwillingsebene {100} (diese Ebene entspricht der Fläche b in Fig. 323). Ebene der optischen Axen {010}, in den eisenärmsten Mischungen erste Mittellinie c, $2V = 70°$, bei den eisenreichsten 129°, also erste Mittellinie a.

Isopropylaminplatinchlorid $PtCl_6(NH_3 . C_3H_7)_2$. $a : b : c = 1{,}2207 : 1 : 0{,}7460$ (Ries). Combination (Fig. 324): $b = \{010\}$, $a = \{100\}$, $y = \{232\}$, $o = \{111\}$, $m = \{430\}$, $c = \{001\}$. Spaltbar nach *b* {010} sehr vollkommen, nach *a* {100} vollkommen, nach *o* {111} deutlich. Die Krystalle bestehen aus dünnen Zwillingslamellen nach *a* {100} von monokliner Symmetrie (Symmetrieebene *b* {010}) und negativer Doppelbrechung, deren Axenebene {010}, erste Mittellinie die Axe *b* und zweite Mittellinie mit *c* 19½° bildet; infolgedessen bilden die Schwingungsrichtungen der abwechselnden Lamellen auf {010} 39° miteinander. Beim Erwärmen der Krystalle auf 32° C. verschwinden die Lamellen plötzlich und die Axenebene wird {100}. Hierbei findet anscheinend keine discontinuierliche Änderung der skalaren Eigenschaften statt (s. des Verfassers Einleitung in die chemische Krystallographie S. 5).

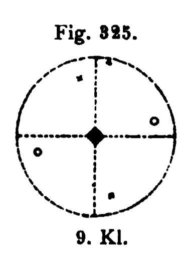
Fig. 324.



IV. Tetragonales Krystallsystem.

Dieses System umfaßt alle Krystalle mit einer (und nur einer) vierzähligen Symmetrieaxe. Wenn außer dieser kein weiteres Symmetrieelement vorhanden ist, so sind zwei Fälle möglich, je nachdem jene singuläre Axe eine solche der einfachen oder der zusammengesetzten Symmetrie ist. Der letztere wurde bereits S. 329 erörtert und gezeigt, daß die vierzählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie zugleich eine zweizählige der einfachen Symmetrie ist, daß aber die resultierende Form (s. Fig. 325 = 185) verschieden ist von derjenigen, welche eine einfache zweizählige Symmetrieaxe liefert, d. i. von dem Sphenoide der monoklinen Krystalle (Klasse 3, S. 360). Aus der Tatsache, daß in dem in Fig. 325 dargestellten Falle je vier Richtungen, welche paarweise in zwei zueinander senkrechten Ebenen liegen und mit der Axe gleiche Winkel einschließen, gleichwertig sind, geht ferner hervor, daß die hierher gehörigen Krystalle optisch einaxig (mit der optischen Axe parallel der Symmetrieaxe) sein müssen, denn niemals können in einem optisch zweiaxigen Krystalle verschiedene Paare aufeinander senkrechter Ebenen eine solche Gesetzmäßigkeit zeigen, sondern nur dann, wenn die Indexfläche des Lichtes für alle Farben ein Rotationsellipsoid ist, in welchem alle jener Symmetrieaxe parallelen Schnitte gleichwertige Ebenen darstellen. Dasselbe Verhältnis muß offenbar für alle Krystalle mit einer vierzähligen Symmetrieaxe gelten, daher **sämtliche tetragonalen Krystalle optisch einaxig sind und die vierzählige Symmetrieaxe die optische Axe ist.**

Fig. 325.



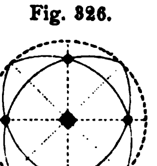
9. Kl.

Die beiden der Grundkreisebene parallelen Kanten, in welchen die zwei oberen bzw. die zwei unteren in Fig. 325 markierten Flächen einander schneiden, kreuzen einander unter 90°, wie aus der Construction der Figur (vgl. S. 329) hervorgeht, und da die Rechtwinkeligkeit dieser Kanten eine Folge der Vierzähligkeit der Symmetrieaxe ist, so gilt für alle tetragonalen Krystalle der Satz, daß zu jeder in der Ebene des Grundkreises liegenden möglichen Kante des Krystalles eine gleichwertige existiert, welche ebenfalls dem Grundkreise parallel ist und die erstere unter 90° schneidet. Zwei derartige Kanten, in Fig. 325 und den folgenden durch punktierte Gerade dargestellt, wählt man nun als Krystallaxen, welche man, da sie gleichwertig sind, beide mit a (statt mit a und b) bezeichnet, während man zur

c-Axe die vierzählige Symmetrieaxe nimmt (die letztere wird gewöhnlich Hauptaxe, die beiden ersteren Nebenaxen und ihre Ebene, d. i. (001), die Basis genannt). Man erhält dadurch für die tetragonalen Krystalle ein Axensystem, welches sich von dem rhombischen nur durch die Gleichwertigkeit zweier von den drei aufeinander senkrechten Axen unterscheidet.

Die beiden als Nebenaxen bezeichneten Durchmesser des Grundkreises stellen die Projection zweier Zonen des Krystalles dar; denkt man sich vier gleichwertige Flächen diesen Zonen angehörig (s. Fig. 326), so erhalten die beiden oberen Flächen die Symbole $(h0l)$ und $(\bar{h}0l)$, die beiden unteren, weil sie dieselbe Neigung zur Hauptaxe, also die gleichen Parameter haben, und infolgedessen $k = h$ ist, die Symbole $(0h\bar{l})$ und $(0\bar{h}\bar{l})$. Zu den möglichen Flächen eines tetragonalen Krystalles gehören nun offenbar auch die jenen vier entgegengesetzten, nämlich $(\bar{h}0\bar{l})$, $(h0\bar{l})$, $(0\bar{h}l)$ und $(0hl)$, deren Pole sich in der Projection mit den ersteren in der in Fig. 326 dargestellten Weise decken. Hierdurch sind vier Zonen des Krystalles: $[h0l, 0hl]$, $[h0l, 0\bar{h}l]$ usf. gegeben, welche durch ausgezogene Kreisbögen in die Projection eingetragen sind; je zwei derselben schneiden einander in einem Punkte des Grundkreises, dessen Abstand von den Polen der beiden horizontalen Axen gleich 45° ist, d. h. in dem Pole einer von vier gleichwertigen Flächen, welche der Symmetrieaxe und den Halbierenden des Winkels der beiden horizontalen Axen parallel sind. Aus den Indices jener Zonen ergeben sich die Symbole dieser vier, ein quadratisches Prisma bildender Krystallflächen als (110), $(1\bar{1}0)$, $\bar{1}10)$, $(\bar{1}\bar{1}0)$. Durch je zwei gegenüberliegende derselben und durch die Ebene des Grundkreises ist je eine mögliche Zone des Krystalles bestimmt, deren Pole sämtlich auf dem (punktiert bezeichneten) Durchmesser liegen, welcher den Winkel der beiden horizontalen Axen halbiert. Es existiert also an jedem tetragonalen Krystalle eine Reihe möglicher Flächen, welche mit der Hauptaxe verschiedene Winkel einschließen, aber sämtlich auf den beiden Nebenaxen gleiche Parameter abschneiden. Wählt man eine solche Fläche zur Grundform (111), so sind, da die Axenwinkel = 90° und $a = b$, die Elemente des betreffenden Krystalles gegeben durch das Verhältnis $a : c$, d. h. die Bestimmung derselben erfordert nur eine einzige Messung, diejenige des Winkels der Grundform zur Hauptaxe oder zu einer der beiden senkrechten Axenebenen, aus welchem jenes Verhältnis berechnet werden kann. Aus der Existenz von Flächen mit gleichen Parametern auf den Nebenaxen folgt ferner, daß alle Flächen eines tetragonalen Krystalles auf den beiden gleichwertigen Nebenaxen Parameter besitzen, welche in rationalem Verhältnisse zueinander stehen[1]).

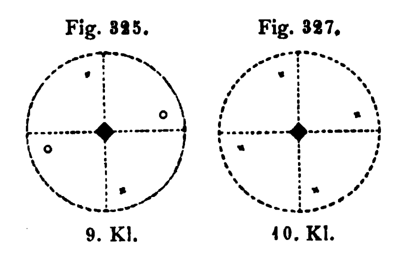
Fig. 326.



1) Dies gilt allgemein für gleichwertige Kanten, denn diese entsprechen Punktreihen des der Structur zugrunde liegenden Raumgitters, auf denen die Punkte die gleichen Abstände haben. Daraus folgt ohne weiteres, daß die ihnen parallelen Parameter jeder beliebigen Netzebene des Raumgitters sich wie rationale Zahlen verhalten.

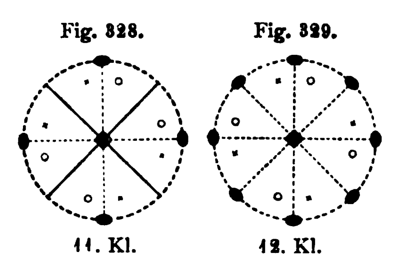
Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß für diejenigen einfachen Formen des tetragonalen Systemes, deren Flächen zur Hauptaxe geneigt sind, dreierlei Stellungen in bezug auf die beiden zu Nebenaxen gewählten Kanten möglich sind: 1) diagonal, d. h. mit gleichen Parametern auf letzteren, 2) parallel den Nebenaxen, so daß einer der beiden ersten Indices = 0, 3) mit zwei ungleichen, aber in rationalem Verhältnisse (dem reciproken der beiden ersten Indices) stehenden, Parametern der Nebenaxen. Da eine Benennung der Formen dieses Krystallsystemes (und der folgenden) nach dem S. 346 angegebenen Principe wegen der Gleichwertigkeit zweier Axen, denen je die Hälfte der Flächen einer Form, wie $\{h0l\}$, parallel gehen, nicht möglich ist, so unterscheidet man die Formen je nach der angegebenen Stellung zu den Nebenaxen als solche erster, zweiter und dritter Art. Dieselbe Benennung läßt sich dann auch auf diejenigen Formen übertragen, welche der singulären c-Axe parallel sind, und denen allein die Gestalt von Prismen zukommt. Daß man die den beiden Nebenaxen parallele Ebene die Basis zu nennen pflegt, wurde bereits erwähnt.

Wie schon oben angeführt, umfaßt das tetragonale Krystallsystem außer der Klasse mit einer vierzähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie (Fig. 325, nebenstehend zum Vergleich wiederholt) noch eine weitere mit einer vierzähligen Axe der einfachen Symmetrie. Dieses Verhältnis ist in der Fig. 327 zur Darstellung gelangt, in welcher ebenfalls, wie auch in allen folgenden, die Ebene des Grundkreises diejenige der beiden horizontalen Nebenaxen, die in der Mitte errichtete Normale die Hauptaxe, d. h. die vierzählige Symmetrieaxe ist; der Pol × einer beliebigen oberen Fläche (hkl) erzeugt durch viermalige Drehung von 90° um die Hauptaxe den Pol je einer weiteren oberen Fläche, so daß in diesem Falle die sämtlichen gleichwertigen Flächen auf der gleichen Seite der Grundkreisebene liegen, die Hauptaxe also polar ist. Zu der singulären vierzähligen Axe können aber nun noch weitere Symmetrieelemente (Axen geringerer Zähligkeit oder Ebenen) hinzutreten, und dadurch resultieren noch fünf mögliche Arten von Symmetrieverhältnissen, entsprechend fünf weiteren Klassen tetragonaler Krystalle, denen in der fortlaufenden Reihenfolge der Symmetrieklassen die Nummern 11—15 zukommen würden. Zunächst leiten sich aus den beiden ersten Klassen (9 und 10) je eine weitere dadurch ab, daß zu der vierzähligen Axe der zusammengesetzten bzw. einfachen Symmetrie noch eine in der Ebene des Grundkreises liegende zweizählige Symmetrieaxe hinzutritt, und da diese eine mögliche Kante ist, müssen deren zwei aufeinander senkrechte existieren; nimmt man diese zugleich als Nebenaxen des Krystalles an, so erhält man die in die Projectionen Fig. 328 und 329 eingezeichneten Symmetrieverhältnisse. Die Anordnung der infolge dreier


Fig. 325. 9. Kl. — Fig. 327. 10. Kl.

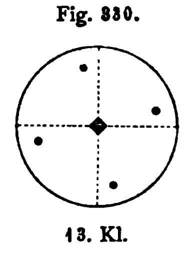
aufeinander senkrechter Symmetrieaxen gleichwertigen Pole in der ersteren (Fig. 328) zeigt, daß die entsprechende Form zugleich symmetrisch ist nach zwei Ebenen, welche einander in der vierzähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie schneiden und den Winkel der Nebenaxen halbieren. Im zweiten Falle dagegen (Fig. 329) liefert die Symmetrie nach den beiden Nebenaxen zu den vier oberen Flächen der Fig. 327 vier untere, welche so liegen, daß das ganze Gebilde noch zwei weitere zweizählige Symmetrieaxen besitzt, welche den Winkel der beiden Nebenaxen halbieren (man nennt diese Richtungen auch die »Zwischenaxen« der tetragonalen Krystalle). Während die letzte Klasse sich aus der zehnten durch Hinzufügung einer zur vierzähligen Axe senkrechten weiteren Symmetrieaxe ergibt, lassen sich aus derselben zehnten Klasse durch Hinzufügung von Ebenen der Symmetrie noch drei neue Klassen ableiten: 13. Der einfachste Fall ist der einer Symmetrieebene senkrecht zur vierzähligen Axe (Fig. 330); zu den vier Flächen der Fig. 327 treten dann als gleichwertig hinzu vier untere, deren Projectionen mit denen der ersten zusammenfallen. 14. Die

Fig. 328. Fig. 329.



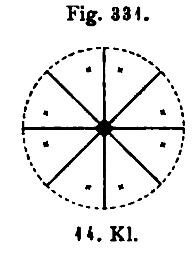
11. Kl. 12. Kl.

Fig. 330.



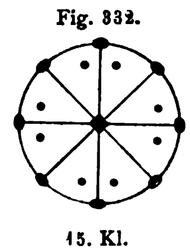
13. Kl.

Fig. 331.



14. Kl.

Fig. 332.



15. Kl.

Hinzufügung einer der vierzähligen Axe parallelen Ebene der Symmetrie bedingt außer den in Fig. 327 dargestellten Polen vier damit gleichwertige, welche ebenfalls oberen Flächen entsprechen und so angeordnet sind, wie es Fig. 331 zeigt; die vollständige einfache Form besitzt aber dann vier in der Hauptaxe einander schneidende Symmetrieebenen, von denen zwei den Neben-, zwei den Zwischenaxen parallel sind. 15. Endlich können die Symmetrieebenen beider Klassen 13 und 14 vereinigt vorhanden sein; dann bedingt ein beliebiger Pol einer Fläche (hkl) die sämtlichen in Fig. 332 dargestellten Pole als gleichwertige, und das aus diesen bestehende Gebilde hat nicht nur jene Ebenen, sondern auch noch vier zweizählige Axen der Symmetrie, welche den sog. Neben- und Zwischenaxen parallel sind.

Aus den Symmetrieverhältnissen dieser sieben verschiedenen Klassen geht hervor, daß die tetragonale Hauptaxe polar ist in der 10. und 14., und daß überhaupt entgegengesetzte Richtungen gleichwertig sind nur in der 13. und 15. Klasse, so daß die Krystalle aller übrigen in bezug auf

vectorielle Eigenschaften, wie Pyroelektricität, Löslichkeit usw., eine Verschiedenheit entgegengesetzter paralleler Flächen zeigen können, während dies für bivectorielle Eigenschaften nicht möglich ist.

Was zunächst die optischen Verhältnisse betrifft, so folgt aus S. 414 unmittelbar, daß eine der Ebene (001) parallele Platte im convergenten Lichte die Fig. 59 und 60 (S. 80 und 83) abgebildete Interferenzerscheinung und im parallelen Lichte das S. 75 angegebene Verhalten zeigen muß. Da in einem einaxigen Krystalle jeder polarisierte Lichtstrahl in einen ordinären, senkrecht zum Hauptschnitte schwingenden, und einen extraordinären, parallel demselben schwingenden, zerlegt wird, so finden die Dunkelstellungen eines tetragonalen Krystalles, welcher von der Hauptaxe parallelen Flächen begrenzt wird, zwischen gekreuzten Nicols jedesmal dann statt, wenn die Hauptaxe mit einem Nicolhauptschnitte parallel ist; fällt das parallele polarisierte Licht dagegen normal durch ein zur Hauptaxe geneigtes Flächenpaar (hkl) und $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, so sind die beiden Schwingungsrichtungen einer solchen Platte parallel und senkrecht zur Trace des optischen Hauptschnittes, d. h. im allgemeinen schief zu den Kanten der Platte, außer wenn dieselbe von einer zur Hauptaxe senkrechten Kante begrenzt ist, welcher als der Normale zum Hauptschnitte natürlich dann die eine der Schwingungsrichtungen parallel ist.

Von den thermischen Eigenschaften ist die Wärmeleitung in ihrer Abhängigkeit von der Richtung gegeben durch ein Sphäroid, dessen Rotationsaxe die tetragonale Hauptaxe ist; infolgedessen ergibt der Sénarmontsche Versuch auf (001) einen Kreis als Schmelzfigur, auf allen andern Krystallflächen eine Ellipse, deren beide Axen analoge Orientierung besitzen, wie die Schwingungsrichtungen des polarisierten Lichtes. Die Ausdehnung durch die Wärme ist am größten oder am kleinsten in der Hauptaxe der Krystalle, am kleinsten bzw. größten in der Ebene (001) und hier in allen ihr parallelen Richtungen gleich groß, weil diese Ebene dem Kreisschnitte des Deformationsellipsoides entspricht; da letzteres in diesem Falle ein Rotationsellipsoid ist, so erfahren überhaupt alle den gleichen Winkel mit der tetragonalen Axe einschließenden Richtungen die gleiche Änderung durch eine derartige homogene Deformation, und daraus folgt unmittelbar, daß durch eine solche nur das Verhältnis $a : c$, nicht aber die Symmetrie eines tetragonalen Krystalles und sämtliche davon abhängigen Verhältnisse, wie z. B. die Rationalität der Parameter der Nebenaxen, alteriert werden. Ebensowenig kann dadurch die Einaxigkeit und die Orientierung der optischen Axe eine Änderung erfahren.

In bezug auf die Elasticität liegen für dieses Krystallsystem bisher keine experimentellen Untersuchungen vor, jedoch läßt sich aus der Theorie auf Grund der Symmetrieverhältnisse desselben nachweisen, daß die tetragonalen Krystalle betreffs ihres Verhaltens bei der elastischen Dehnung in zwei Gruppen zerfallen müssen, welche die beiden S. 222 mit IV*a* und *b* bezeichneten Unterabteilungen der optisch einaxigen Krystalle bilden, und zwar umfaßt die erstere die Klassen 11, 12, 14, 15, die letztere die Klassen

9, 10, 13. Der Unterschied, welchen diese beiden Gruppen in ihren Symmetrieverhältnissen zeigen, tritt sofort hervor, wenn man sich in den entsprechenden Projectionen derselben (S. 416 u. 417) zu den vorhandenen Polen die der entgegengesetzten Richtungen, welche in bezug auf die Elasticität (da diese eine bivectorielle Eigenschaft ist) mit ihnen gleichwertig sind, hinzudenkt; die Projectionen der ersten Gruppe erhalten dann acht Doppelpole, welche zu den Neben- und Zwischenaxen symmetrisch liegen, die Projectionen der zweiten Gruppe nur vier, deren Verteilung in bezug auf die genannten Krystallaxen eine unsymmetrische ist. Wie bereits S. 213 erwähnt, existiert in bezug auf die Cohäsion ein derartiger Unterschied innerhalb des tetragonalen Systemes nicht, sondern die Krystalle aller Klassen können die gleichen Arten der Spaltbarkeit besitzen, nämlich nach der Basis (001), einem tetragonalen Prisma oder einer tetragonalen Doppelpyramide, d. h. nach vier zur Hauptaxe gleich geneigten Ebenen.

Das der Structur eines tetragonalen Krystalles zugrunde liegende Raumgitter kann nur einer der beiden in Fig. 157 S. 278 abgebildeten Arten angehören. Diese sind symmetrisch zu vier, in der Axe des quadratischen Prismas einander schneidenden Ebenen und nach dessen Basis, Symmetrieverhältnisse, welche von den sieben Klassen der tetragonalen Krystalle nur die letzte, 15., besitzt. Ob einer tetragonal krystallisierenden Substanz nun dieser oder einer der niedrigeren, den andern Klassen entsprechenden, Grade der Symmetrie zukommt, dies hängt von der Symmetrie der regelmäßigen Punktsysteme, welche die Structur zusammensetzen, und von der Art der Ineinanderstellung derselben, d. h. von der Natur des chemischen Moleküls, ab. Da unter den regelmäßigen Punktsystemen sich keines befindet, welches den Symmetrieverhältnissen der 9. und der 14. Klasse entspricht, so kann ein Element keiner dieser beiden Klassen angehören. Enantiomorph sind unter den sieben Klassen des tetragonalen Systemes nur die 10. und 12., und die deren Symmetrieverhältnissen entsprechenden Arten von regelmäßigen Punktsystemen sind meistens Schraubensysteme mit der vierzähligen Axe als Schraubungsaxe, und zwar teils solche, welche nur Schrauben von einem Windungssinne enthalten, teils solche, die aus Schrauben von entgegengesetztem Windungssinne bestehen. Durch die ersteren ist also nach S. 285 die Möglichkeit gegeben, daß die Krystalle in der Richtung der optischen Axe die Polarisationsebene des Lichtes drehen, ohne daß die Ineinanderstellung der Punktsysteme, d. h. die Natur des chemischen Moleküls, eine enantiomorphe ist, während durch die übrigen regelmäßigen Punktsysteme die Existenz von Krystallen ohne Drehungsvermögen erklärt wird. Somit können drei verschiedene Arten von Körpern den genannten beiden Klassen angehören:

a) Optisch inactive, deren Krystalle ebenfalls kein Drehungsvermögen besitzen;

b) In Lösung inactive, deren Krystalle Drehung der Polarisationsebene bewirken;

c) Optisch active Substanzen, bei denen die Enantiomorphie des chemischen Moleküls die Enantiomorphie der Krystallstructur und das Drehungsvermögen der Krystalle bedingt. Das letztere wird aber beeinflußt von der Krystallstructur und ist daher im allgemeinen nicht von gleicher Größe, wie das sogenannte molekulare Drehungsvermögen der Substanz in Lösung (s. weiterhin das Beispiel des schwefelsauren Strychnin; vgl. auch des Verf. Einleitung in die chemische Krystallographie S. 73).

Zwillinge, in welchen die beiden Krystalle zueinander symmetrisch sind in bezug auf eine Ebene, sind im tetragonalen Systeme nach (001) möglich in den Klassen 9, 10, 11, 12, 14, weil diese Fläche hier keine Ebene der einfachen Symmetrie ist, ferner nach jeder der Hauptaxe parallelen Krystallfläche, welche nicht, wie gewisse Flächen in den Klassen 11, 14 und 15, Symmetrieebenen sind, endlich nach irgendeiner, zur vierzähligen Axe schief geneigten Fläche in allen sieben Klassen. Zwillingsaxe ist im letzten Falle die Normale zur Zwillingsebene, in den vorhergehenden nur dann, wenn dieselbe nicht zugleich eine zwei- oder vierzählige Symmetrieaxe ist, in welchem Falle die Stellung des zweiten Krystalles nicht durch Drehung von 180° um die Zwillingsaxe, sondern nur durch Spiegelung nach der Zwillingsebene erhalten wird.

In denjenigen Klassen, in welchen Symmetrie nach den Ebenen der tetragonalen Prismen vorhanden ist und diese daher als Zwillingsebenen ausgeschlossen sind, findet sich häufig Zwillingsbildung nach Ebenen schief zur Hauptaxe, was nach Früherem auf große Flächendichtigkeit der betreffenden Ebenen hinweist. Es kann daher aus einer derartigen Zwillingsbildung ebenso wie aus der Spaltbarkeit nach einer solchen Ebene auf die richtige Wahl der Elemente (s. S. 415) d. h. derjenigen Form geschlossen werden, aus welcher sich die übrigen durch die einfachsten Symbole ableiten.

9. Bisphenoidische Klasse.

(Sphenoidisch-tetartoedrische Klasse.)

Die durch eine vierzählige Axe und dazu senkrechte Ebene der zusammengesetzten Symmetrie charakterisierten Krystalle zeigen als allgemeinste einfache Form, wie aus der nebenstehend wiederholten Projection

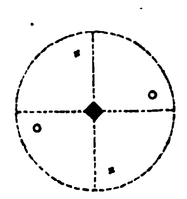
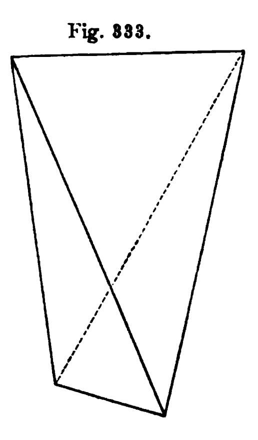
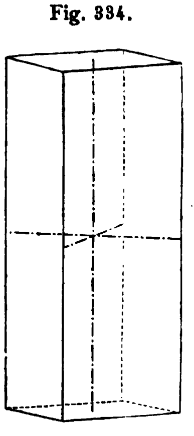


Fig. 325 nach S. 414 hervorgeht, ein »Bisphenoid«, welches sich von demjenigen des rhombischen Systemes (S. 387) dadurch unterscheidet, daß die Kanten der beiden es zusammensetzenden Sphenoide, die sog. Polkanten der vollständigen Form, einander nicht schiefwinkelig, sondern unter rechtem Winkel kreuzen. Infolgedessen sind die vier Mittelkanten dieses tetragonalen Bisphenoides, welches in Fig. 333 abgebildet ist, nicht paarweise verschieden, sondern besitzen sämtlich die gleichen Winkel; seine Flächen sind daher gleichschenkelige Dreiecke; die Symbole derselben sind, wie aus der Projection zu ersehen,

wenn $h > k$: (hkl), $(\bar{h}\bar{k}l)$, $(k\bar{h}\bar{l})$ und $(\bar{k}h\bar{l})$. Außer dieser Form $\{hkl\}$ gibt es aber noch drei andere einfache Formen mit denselben Zahlenwerten der Indices, nämlich $\{h\bar{k}l\}$, bestehend aus den vier Flächen $(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}kl)$, $(\bar{k}\bar{h}\bar{l})$ und $(kh\bar{l})$, ferner $\{khl\}$, zusammengesetzt aus den gleichwertigen Flächen (khl), $(\bar{k}\bar{h}l)$, $(h\bar{k}\bar{l})$ und $(\bar{h}k\bar{l})$ endlich $\{k\bar{h}l\}$, bestehend aus $(k\bar{h}l)$, $(\bar{k}hl)$, $(hk\bar{l})$ und $(\bar{k}\bar{h}\bar{l})$.


Fig. 333.

In dem speciellen Falle, daß $h = k$, werden diese Formen, nach dem S. 416 auseinandergesetzten Principe der Benennung, Bisphenoide erster Art, wenn dagegen die beiden Parameter auf den Nebenaxen die größte mögliche Verschiedenheit darbieten, d. h. wenn einer der beiden ersten Indices $= 0$, so sind die Formen als tetragonale Bisphenoide zweiter Art zu bezeichnen. In jeder der beiden Reihen gibt es zwei primäre Bisphenoide, deren Symbole für diejenigen erster Art $\{111\}$ und $\{1\bar{1}1\}$, für die zweite Art $\{101\}$ und $\{011\}$ sind. Fallen die Pole in der Projection in den Grundkreis, so ist dies gleichbedeutend damit, daß die vier gleichwertigen Flächen der Hauptaxe parallel werden; dieselben müssen dann ein tetragonales Prisma bilden, welches, je nachdem seine Flächen zu den Nebenaxen diagonal, parallel oder ungleich geneigt sind, erster, zweiter oder dritter Art genannt wird. Fig. 334 zeigt das Prisma erster Art in Combination mit (001) und mit eingezeichnetem Axensysteme. Jedes derartige Prisma bildet das Grenzglied einer Reihe von Bisphenoiden, welchem diese sich um so mehr nähern, je steiler sie sind, d. h. je kleiner der dritte Index in ihrem Symbol ist; das andere Grenzglied, und zwar das gemeinsame für alle Reihen, ist ein Pinakoid, die tetragonale Basis $\{001\} = (001)\ (00\bar{1})$, welcher sich die Bisphenoide um so mehr nähern, je flacher sie sind, d. h. je größer der dritte Index im Vergleich zu den beiden ersten ist. So ergibt sich folgende Übersicht der in dieser Klasse möglichen Formen:


Fig. 334.

$\{001\}$ Basis
$\{110\}$ Prisma erster Art
$\{100\}$ Prisma zweiter Art
$\{hk0\}$ Prisma dritter Art
$\{hhl\}$ Bisphenoid erster Art
$\{h0l\}$ Bisphenoid zweiter Art
$\{hkl\}$ Bisphenoid dritter Art.

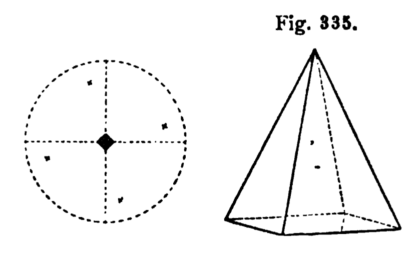
Beispiele dieser Klasse sind bisher noch nicht beobachtet worden.

10. Pyramidale Klasse.

(Hemimorph-hemiedrische Klasse.)

Die zweite mögliche Art der Symmetrie im tetragonalen Systeme ist die in untenstehender Projection dargestellte nach einer vierzähligen Axe der einfachen Symmetrie. Die einfache Form $\{hkl\}$, bestehend aus den Flächen (hkl), $(k\bar{h}l)$, $(\bar{h}\bar{k}l)$ und $(\bar{k}hl)$, ist alsdann eine tetragonale Pyramide, in Fig. 335 in Combination mit der Fläche $(00\bar{1})$ dargestellt, welche sich von der rhombischen Pyramide Fig. 283 S. 394 dadurch unterscheidet, daß ihre vier Polkanten sämtlich den gleichen Flächenwinkel besitzen. Mit denselben Zahlenwerten der Indices und folglich mit den gleichen Flächenwinkeln gibt es noch drei andere Pyramiden, nämlich $\{khl\}$, bestehend aus den Flächen (khl), $(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}kl)$ und $(\bar{k}\bar{h}l)$, ferner die beiden unteren Pyramiden $\{hk\bar{l}\}$ und $\{kh\bar{l}\}$, deren Flächen die gleichen Symbole, wie die beiden oberen, nur mit negativem Vorzeichen des dritten Index, besitzen.

Fig. 335.



Die vorstehenden tetragonalen Pyramiden sind als solche dritter Art zu bezeichnen, wenn $h > k$; ist dagegen $h = k$, so fallen die vier Pole der Projection in die Diagonalen der Nebenaxen; bei positivem l resultiert dann eine obere Pyramide erster Art, welche gleichsam das gemeinschaftliche Grenzglied zweier Zonen von Pyramiden dritter Art, $\{hkl\}$ und $\{khl\}$, darstellt, welchem diese Formen sich um so mehr nähern, je weniger h und k sich voneinander unterscheiden. Das zweite Grenzglied dieser Reihen wird erreicht, wenn h und k die größtmögliche Verschiedenheit annehmen, d. h. wenn einer der beiden ersten Indices $= 0$; alsdann resultiert eine obere Pyramide zweiter Art, deren Pole in der Projection in die beiden punktierten Durchmesser fallen. Den beiden unteren Pyramiden $\{hk\bar{l}\}$ und $\{kh\bar{l}\}$ entsprechen in gleicher Weise je eine untere Pyramide erster bzw. zweiter Art. Infolgedessen gibt es in diesen beiden Stellungen nur je zwei primäre Pyramiden, nämlich in der ersten $\{111\}$ und $\{11\bar{1}\}$, in der zweiten $\{101\}$ und $\{10\bar{1}\}$. Genau wie in der vorigen Klasse ergeben sich drei weitere specielle Fälle, wenn die vier Pole in den Grundkreis fallen, nämlich je ein tetragonales Prisma, welchem sich die entsprechenden Pyramiden um so mehr nähern, je spitzer dieselben sind, d. h. je größer deren Parameter auf der Hauptaxe ist. Umgekehrt nähern sich die oberen Pyramiden um so mehr dem oberen Pedion $\{001\}$, je flacher sie sind, und für den Grenzfall, daß ihre Pole in der Projection mit demjenigen der vierzähligen Axe zusammenfallen, entsteht jenes obere Pedion selbst; andererseits führen die unteren Pyramiden $\{hk\bar{l}\}$, $\{hh\bar{l}\}$ und $\{h0\bar{l}\}$ sämtlich zu einer gemeinsamen Grenzform $\{00\bar{1}\}$. Während also in der ersten Klasse

des tetragonalen Systemes die Basis ein Pinakoid ist, existieren hier die obere und die untere Basisfläche als zwei vollständige, voneinander unabhängige Formen. Die gesamten hierher gehörigen Formen sind also die folgenden:

{001} obere (positive) Basis; {00$\bar{1}$} untere (negative) Basis
{110} Prisma erster Art
{100} Prisma zweiter Art
{$hk0$} Prisma dritter Art
{hhl} Pyramide erster Art
{$h0l$} Pyramide zweiter Art
{hkl} Pyramide dritter Art.

Beispiele.

Optisch inactive Körper.

Molybdänsaures Blei (Wulfenit) $= MoO_4Pb$. $a:c = 1:1{,}5777$ (Koch). Einfache Combination {111}, {00$\bar{1}$} Fig. 335 s. vor. S.; flächenreichere Combination (nach Naumann) (Fig. 336): $o = \{111\}$, $\varepsilon = \{10\bar{1}\}$, $\omega = \{11\bar{1}\}$, $\sigma = \{31\bar{1}\}$, $x = \{432\}$. Sehr häufig sind Combinationen der Pyramiden o und ω in ungefähr gleicher Ausbildung, zu denen noch das Prisma dritter Art $p = \{430\}$ hinzutritt (Fig. 337); endlich dieselben Formen combiniert mit $c = \{001\}$ und dem gewöhnlich eine andere Oberflächenbeschaffenheit darbietenden $c' = \{00\bar{1}\}$ (Fig. 338). Spaltbarkeit {111} unvollkommen.

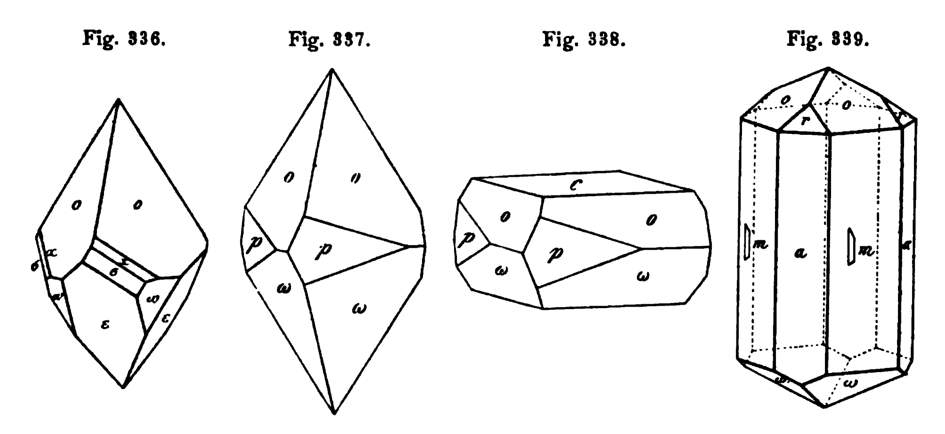


Fig. 336. Fig. 337. Fig. 338. Fig. 339.

Optisch active Körper.

Rechtsweinsaures Antimonyl-Baryum $= (C_4H_4O_6)_2(SbO)_2Ba \cdot H_2O$. $a:c = 1:0{,}4406$ (Traube). Combination (Fig. 339): $m = \{110\}$, $a = \{100\}$, $o = \{111\}$, $r = \{201\}$, $\omega = \{11\bar{1}\}$. Die Zugehörigkeit zu dieser Klasse, d. h. die Abwesenheit verticaler Symmetrieebenen, geht aus den in der Figur eingezeichneten Ätzfiguren auf {110} hervor, welche sowohl nach oben und unten, als nach rechts und links unsymmetrisch sind. Die Polarität der Hauptaxe erweist sich ferner durch die Existenz einer ihr

parallelen elektrischen Axe, deren oberer Pol der antiloge, der untere der analoge ist. Doppelbrechung +. Die Krystalle sind nach **Mamontoff**, wie die Lösung, rechtsdrehend.

11. Skalenoedrische Klasse.

(Sphenoidisch-hemiedrische Klasse.)

Wie S. 316f. gezeigt wurde und aus der hier wiederholten Projection zu ersehen ist, bedingt die Combination der vierzähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie mit zwei in der dazu senkrechten Ebene gelegenen zweizähligen Symmetrieaxen, die zu Nebenaxen gewählt werden mögen, die Existenz zweier Symmetrieebenen, welche zu letzteren diagonal sind und einander in der Hauptaxe schneiden. Alsdann treten zu den infolge der Symmetrie nach der vierzähligen Axe gleichwertigen Flächen des Bisphenoids (hkl), $(\bar{h}\bar{k}l)$, $(k\bar{h}\bar{l})$ und $(\bar{k}h\bar{l})$ (s. 9. Klasse S. 421) noch als gleichwertig hinzu die Flächen (khl), $(\bar{k}\bar{h}l)$, $(h\bar{k}\bar{l})$ und $(\bar{h}k\bar{l})$. Die vollständige einfache Form $\{hkl\}$, in Fig. 340 abgebildet, führt nach der Gestalt ihrer Flächen (ungleichseitiges Dreieck = τρίγωνον σκαληνόν) den Namen **tetragonales Skalenoeder** und besitzt dreierlei Kanten mit verschiedenen Flächenwinkeln, nämlich vier stumpfere und vier schärfere Polkanten, welche am oberen und unteren Pole der Hauptaxe zu je zwei in einer zwei- und zweikantigen Ecke (entsprechend der Zweizähligkeit dieser vierzähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie) zusammentreffen; von den vier (untereinander gleichen) Mittelkanten bilden je zwei mit einer stumpferen und einer schärferen Polkante vier 2 + 1 + 1-kantige Ecken. Die zu den vorhin aufgezählten Flächen dieser Form entgegengesetzten acht Flächen $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, $(hk\bar{l})$, ... $(h\bar{k}l)$ bilden eine zweite selbständige einfache Form derselben Art $\{h\bar{k}l\}$, welche, da in dieser Klasse Ebenen der Symmetrie vorhanden sind, mit $\{hkl\}$ zur Deckung gebracht werden kann; man erhält dieses, zum Unterschiede von dem ersteren, dem positiven, als negatives bezeichnete Skalenoeder, wenn man $\{hkl\}$ 90° um die Hauptaxe dreht, so daß in der Projection durchweg obere Pole an die Stelle von unteren, und umgekehrt, treten.

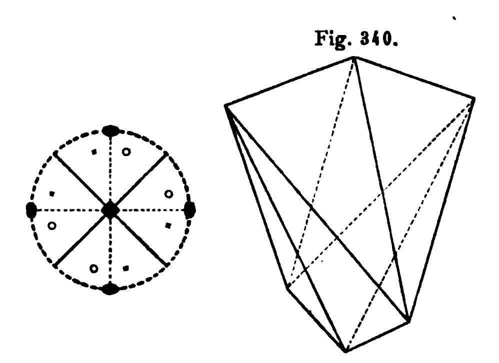


Fig. 340.

Wie aus der obenstehenden Projection ersichtlich, liegt in dem allgemeinsten Falle, welcher zu der eben beschriebenen Art von Formen, den Skalenoedern, führt, jeder Pol innerhalb des sphärischen Dreiecks, welches von einer Axenebene ac, einer Symmetrieebene und der Ebene des Grundkreises (der Axenebene $a\,a$) aus der Kugeloberfläche herausgeschnitten

wird. Je nachdem der Pol einer Fläche nun auf einer der drei Seiten oder in einer der drei Ecken dieses Dreieckes liegt, ergeben sich sechs verschiedene specielle Fälle: 1. Liegen die Pole in den ausgezogenen Diagonalen, welche den Zwischenaxen bzw. den Symmetrieebenen entsprechen, so fallen je zwei obere und ebenso je zwei untere zusammen, und es entsteht ein Bisphenoid (Fig. 333 S. 421), welches natürlich erster Art sein muß, weil seine Parameter auf den beiden Nebenaxen gleich groß sind. 2. Sind die Flächen dagegen je einer Nebenaxe parallel, liegen ihre Pole also in den punktierten Durchmessern, so fallen die Projectionen je eines oberen und eines unteren zusammen (so, wie es in Fig. 326 S. 415 dargestellt ist), und es entsteht eine Form mit acht gleichen Polkanten, welche aus vier oberen und den vier dazu parallelen unteren Flächen zusammengesetzt und in Fig. 341 mit eingezeichnetem Axensystem abgebildet ist; dieselbe heißt tetragonale »Bipyramide« zweiter Art. Einer solchen Form nähern sich die Skalenoeder um so mehr, je verschiedener ihre Parameter auf den beiden Nebenaxen sind und je weniger sich daher ihre beiden Arten von Polkanten unterscheiden, während dieselben andererseits sich um so mehr einem Sphenoide erster Art nähern, je weniger verschieden die beiden ersten Indices sind, je kleineren Flächenwinkel also die beiden Ebenen (hkl) und (khl) usf. miteinander einschließen. 3. Der dritte mögliche Fall ist der, daß die Pole in die entsprechenden Bögen des Grundkreises fallen; dann entsprechen dieselben acht der Hauptaxe parallelen Flächen, welche ein ditetragonales Prisma bilden, so genannt, weil es vier stumpfere und vier schärfere Flächenwinkel besitzen muß, da ein »oktogonales« Prisma mit acht gleichen Kanten einer achtzähligen Symmetrieaxe, d. h. einem irrationalen Verhältnisse (tang $22\frac{1}{2}°$) der beiden ersten Indices entsprechen würde. In Fig. 342 ist die Form {210} mit eingezeichnetem Axensysteme und mit der Basis combiniert, abgebildet. 4. Tritt der weitere specielle Fall ein, daß der auf dem Grundkreise befindliche Pol in eine der Symmetrieebenen fällt, so entspricht dies einem Zusammenfallen von je zwei Flächen der vorigen Form, nämlich $(hk0)$ und $(kh0)$, $(h\bar{k}0)$ und $(k\bar{h}0)$ usf., und es entsteht das tetragonale Prisma {110}. 5. Fällt dagegen der Pol einer Prismenfläche mit demjenigen einer horizontalen Symmetrieaxe zusammen, so resultieren die vier Flächen des Prismas zweiter Art {100}. Die beiden letzteren Formen, welche natürlich identisch sind mit den

Fig. 341.

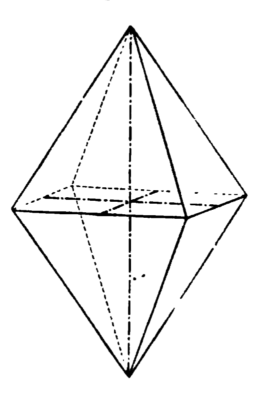
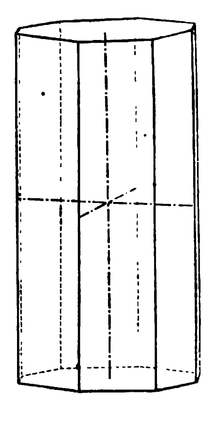
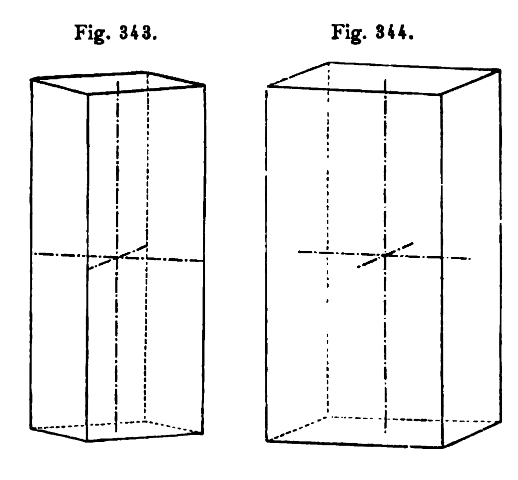


Fig. 342.



bereits in den beiden ersten Klassen dieses Systemes betrachteten beiden tetragonalen Prismen, sind in Fig. 343 und 344 mit eingezeichnetem Axensysteme abgebildet. 6. Die gemeinsame Grenzform, welcher sich die drei ersten Formen dieser Klasse um so mehr nähern, je kleiner ihr Parameter auf der Hauptaxe ist, die Basis, muß hier ein Pinakoid sein, da jene Formen gleichwertige Flächen an beiden Polen der vierzähligen Axe besitzen; dasselbe erscheint in den drei letzten Figuren als obere und untere Begrenzung der Prismen. Hiernach ergibt sich folgende Übersicht:


Fig. 343. Fig. 344.

{001} Basis
{110} Prisma erster Art
{100} Prisma zweiter Art
{$hk0$} ditetragonales Prisma
{hhl} Bisphenoid (erster Art)
{$h0l$} Bipyramide (zweiter Art)
{hkl} Skalenoeder.

Von diesen Formen nennt man {111} das positive, {$1\bar{1}1$} das negative primäre Bisphenoid, {101} die primäre Bipyramide.

Beispiele.

Quecksilbercyanid = $Hg(CN)_2$. $a:c = 1:0{,}4596$ (de la Provostaye). Combination (Fig. 345): o = {111}, a = {100}, zuweilen mit

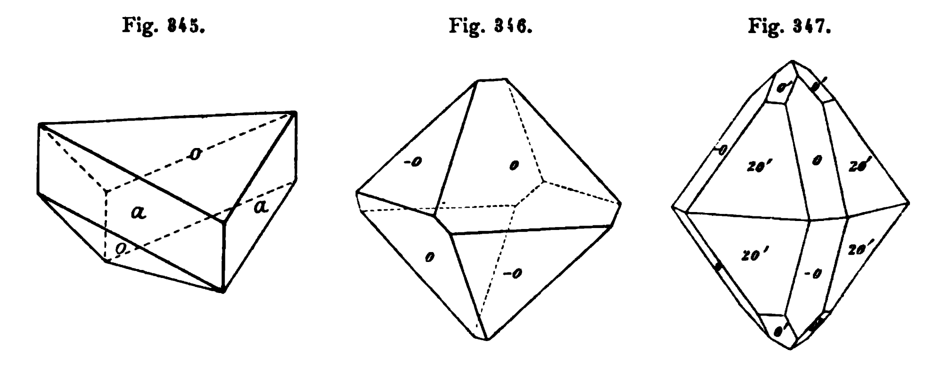
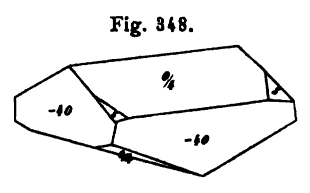


Fig. 345. Fig. 346. Fig. 347.

{201}. Spaltbarkeit unvollkommen nach a {100}. Doppelbrechung negativ (Des Cloizeaux).

Kupferkies $= FeS_2Cu$. $a : c = 1 : 0{,}9856$ (Haidinger). Häufigste Combination (Fig. 346): $o = \{111\}$, $-o = \{1\bar{1}1\}$ (einem regulären Oktaeder sehr ähnlich); die beiden Bisphenoide durch ihre Oberflächenbeschaffenheit (das eine glänzend, das andere matt) leicht zu unterscheiden. Fig. 347 zeigt die spitz bipyramidale Combination: $2o' = \{201\}$, $o' = \{101\}$, $o = \{111\}$, $-o = \{1\bar{1}1\}$; endlich Fig. 348 die Formen: $o/_4 = \{114\}$, $-4o = \{4\bar{4}1\}$, $s = \{6.3.16\}$. Es treten indes an diesem Minerale Skalenoeder, z. B. $\{825\}$, auch ganz vorherrschend auf. Zwillinge der ersten Combination besonders häufig nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Normale zu $\{111\}$; alsdann liegen an der zur Zwillingsaxe senkrechten Verwachsungsebene abwechselnde o- und $-o$-Flächen einander gegenüber, der Zwilling kann also nicht durch Spiegelung nach jener Ebene erhalten werden; außerdem kommen auch Zwillinge mit $\{101\}$ als Zwillingsebene vor. Spaltbarkeit nach $\{201\}$ unvollkommen.

Fig. 348.



Saures Kaliumphosphat $= PO_4KH_2$. $a : c = 1 : 0{,}9391$ (Mitscherlich). Combination (Fig. 349): $a = \{100\}$, $p = \{101\}$. Letztere Form zeigt Ätzfiguren, welche auf benachbarten Flächen entgegengesetzt, symmetrisch nach Ebenen von $\{110\}$, orientiert sind. Doppelbrechung —; Brechungsindices nach Topsøe:

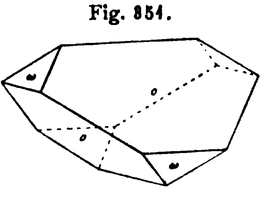
Fig. 349. Fig. 350.

		ω	ε
Linie	C	1,5064	1,4664
-	D	1,5095	1,4684
-	F	1,5154	1,4734

Saures Ammoniumphosphat $= PO_4(NH_4)H_2$. $a : c = 1{,}0076$ (Mitscherlich). Dieselbe Combination wie das vorige Salz. Doppelbrechung —; $\omega = 1{,}5112$ (C), $1{,}5246$ (D), $\varepsilon = 1{,}4768$ (C), $1{,}4792$ (D) (Topsøe).

Harnstoff $= CH_4N_2O$. $a : c = 1 : 0{,}8345$ (Schabus). Combination (Fig. 350): $m = \{110\}$, $o = \{111\}$, $c = \{001\}$, oder ohne letztere Form. Die Ätzfiguren auf $m\{110\}$ sind nach rechts und links gleich, nach oben und unten verschieden gestaltet und auf den benachbarten Flächen umgekehrt orientiert. Spaltbarkeit $\{110\}$ vollkommen, $\{001\}$ deutlich. Doppelbrechung $+$, stark.

Fig. 351.

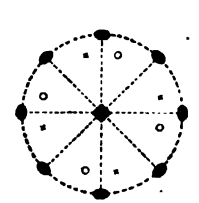


Tetraäthylammoniumjodid $= N(C_2H_5)_4J$. $a : c = 1 : 0{,}5544$ (Slavík). Combination (Fig. 351): $o = \{111\}$, $\omega = \{1\bar{1}1\}$. Spaltbarkeit nach $\{110\}$ deutlich, nach $\{111\}$ unvollkommen. Doppelbrechung negativ, schwach.

12. Trapezoedrische Klasse.

(Trapezoedrisch-hemiedrische Klasse.)

Die Symmetrie dieser Klasse leitet sich aus derjenigen der zehnten dadurch her, daß zu der vierzähligen Axe der einfachen Symmetrie noch eine dazu senkrechte zweizählige hinzutritt; alsdann erzeugt die Drehung um diese zu den vier oberen Polen der tetragonalen Pyramide in Fig. 327 (S. 416) vier damit gleichwertige untere, welche so liegen, wie es in beistehend wiederholter Projection Fig. 329 der Fall ist, d. h. es sind auch die zu jener zweizähligen Axe Senkrechte in der Basis und die beiden Geraden, welche deren Winkel halbieren, zweizählige Symmetrieaxen. Die dieser Symmetrie entsprechende vollständige Form $\{hkl\}$, deren acht einzelne Flächensymbole sich ohne weiteres aus der Projection ablesen lassen, ist in Fig. 352 abgebildet; dieselbe besitzt, wie die tetragonale Pyramide an einem Pole, so an beiden Polen der Hauptaxe je vier gleiche Polkanten; ihre Mittelkanten aber sind zweierlei, wie unmittelbar aus der Projection zu ersehen, da die Winkelabstände eines oberen von einem unteren Pole abwechselnd größere und kleinere sind; infolgedessen ist die Gestalt ihrer Flächen diejenige von Trapezen, und daher heißt eine solche Form ein tetragonales Trapezoeder.



Das in Fig. 352 abgebildete ist ein linkes Trapezoeder, so genannt, weil von den im positiven (oberen rechten vorderen) Oktanten des Axensystemes liegenden Flächen die linke (hkl) dazu gehört. Die ebenfalls mögliche Krystallfläche (khl), die rechts anliegende mit den gleichen positiven Indiceszahlen, gehört zu acht einander gleichwertigen Flächen, deren Pole in der Projection man erhält, wenn man alle Pole mit den entgegengesetzten vertauscht, d. h. die oberen mit den unteren und umgekehrt, oder wenn man die Pole der ersten Form nach einer Axenebene oder nach (110) usw. spiegelt. Die Form $\{khl\}$, in Fig. 353 abgebildet, heißt das »rechte« Trapezoeder und kann mit dem linken, seinem Spiegelbilde, in keiner Stellung zur Deckung gebracht werden, beide sind enantiomorph.

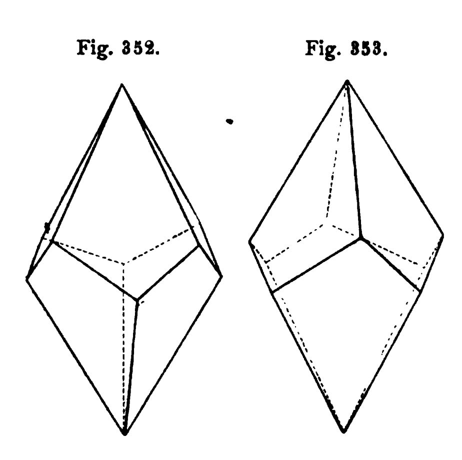


Fig. 352. Fig. 353.

Die Formen, in welche die Trapezoeder in besonderen Fällen übergehen, wenn die Pole der Flächen in die Seiten oder Ecken des S. 424 erwähnten sphärischen Dreiecks der Projection fallen, ergeben sich aus der letzteren ganz in derselben Weise, wie es dort auseinandergesetzt wurde, nämlich:

1) Wenn $h = k$, so verwandelt sich das Trapezoeder in eine »tetragonale Bipyramide« erster Art, in Fig. 354 mit eingezeichneten Axen dargestellt, die gemeinschaftliche Grenzform einer Reihe rechter und linker Trapezoeder, welcher diese sich um so mehr nähern, je weniger sich ihre beiden Parameter auf den Nebenaxen voneinander unterscheiden, je mehr infolgedessen sich die eine Art von Mittelkanten den horizontalen Basiskanten der Bipyramide nähern, und je steiler und kürzer die vier andern Mittelkanten werden. 2) Ganz ebenso fallen die Projectionen je eines oberen und eines unteren Poles zusammen, wenn die Flächen den Nebenaxen parallel werden; die entstehende tetragonale Bipyramide zweiter Art (s. Fig. 341, S. 425) ist die zweite Grenzform jener beiden Reihen von Trapezoedern. Diesen drei Arten von Formen entsprechen die gleichen Prismen, wie in der vorigen Klasse (s. Fig. 342—344, S. 425 und 426), für den Fall des Parallelismus der Flächen mit der vierzähligen Axe, und ebenso ein Pinakoid für den Fall des Parallelismus der Flächen mit den zweizähligen Axen. Die an »tetragonal-trapezoedrischen« Krystallen möglichen Arten von einfachen Formen sind also:

Fig. 354.

{001} Basis
{110} Prisma erster Art
{100} Prisma zweiter Art
{$hk0$} ditetragonales Prisma
{hhl} Bipyramide erster Art
{$h0l$} Bipyramide zweiter Art
{hkl} Trapezoeder.

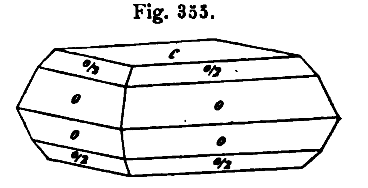
Von den Bipyramiden werden {111} und {101} die primären genannt.

Beispiele.

Optisch inactive Körper.

Schwefelsaures Nickel $= SO_4Ni.6H_2O$. $a : c = 1 : 1{,}9061$ (Mitscherlich). $o = \{111\}$, $o/_2 = \{112\}$, $c = \{001\}$ Fig. 355. Die Ätzfiguren auf o sind nach Blasius unsymmetrisch gestellte Trapeze, deren relative Stellung aut den acht gleichwertigen Flächen von {111} derart ist, wie es die Existenz der fünf Symmetrieaxen dieser Klasse erfordert, nämlich so, daß ihre längste Seite stets von links unten nach rechts oben ansteigt, wenn man die betreffende Krystallfläche in die Stellung einer oberen bringt. Spaltbarkeit nach {001}. Doppelbrechung —, Brechungsindices nach Topsøe und Christiansen:

Fig. 355.

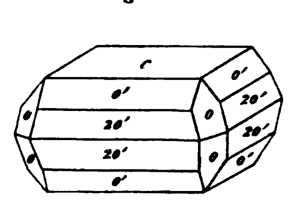


		ω	ε
Linie	C	1,5078	1,4844
-	D	1,5109	1,4873
-	F	1,5173	1,4930

Schwefelsaures Äthylendiamin $= (C_2H_4)H_4N_2 . H_2SO_4$. $a : c =$ 1 : 1,4943 (V. v. Lang). Combination entweder (Fig. 356): $2o = \{221\}$, $c = \{001\}$, oder (Fig. 357): $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{101\}$, $2o' = \{201\}$.

Fig. 356.

Fig. 357.



Spaltbarkeit vollkommen nach {001}. Doppelbrechung +. Die (wahrscheinlich mimetisch tetragonalen) Krystalle drehen die Polarisationsebene des Natriumlichtes für 1 mm 15° 30′.

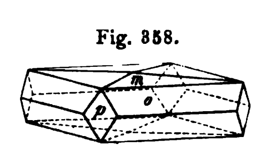
Kohlensaures Guanidin $= (CH_5N_3)_2H_2CO_3$. $a : c = 1 : 0{,}9910$ (Bodewig). Combination {111}, {001}, {100}, die beiden letzteren klein, so daß diese Combination fast vollkommen einem regulären Oktaeder mit Abstumpfung der Ecken gleicht. Spaltbarkeit nach {001} vollkommen. Doppelbrechung —, nicht stark.

		ω	ε
Rot	$Li =$	1,4922	1,4818
Gelb	$Na =$	1,4963	1,4864
Grün	$Tl =$	1,5003	1,4899

Drehung 12° 35′ Li, 14° 34′ Na, 17° 4′ Tl.

Sulfobenzoltrisulfidid (Benzoldisulfothiosulfonsäurethioanhydrid) $= (C_6H_5 . SO_2)_2S_3$. $a : c = 1 : 1{,}1917$ (Brugnatelli). Bipyramiden {111} mit {001} und {221}. $\omega = 1{,}7204$, $\varepsilon = 1{,}7077$ (Na). Rechtsdrehend. Wahrscheinlich gehört hierher auch das ähnlich krystallisierte Sulfotoluoltrisulfid (Toluoldisulfothiosulfonsäurethioanhydrid) $= (C_7H_7 . SO_2)_2S_3$, an dessen Krystallen, ihrer Kleinheit wegen, das optische Drehungsvermögen nicht nachgewiesen werden konnte.

Fig. 358.



Diacetylphenolphtaleïn $= C_{20}H_{12}O_4(C_2H_3O)_2$. $a : c = 1 : 1{,}3593$ (Bodewig). Combination (Fig. 358): $o = \{111\}$, $p = \{100\}$ und $c = \{001\}$ oder statt der letzteren Fläche eine sehr stumpfe vicinale Pyramide m, annähernd {1.1.200}. Spaltbarkeit nach {110} deutlich. Doppelbrechung —. Die Krystalle sind teils rechts-, teils linksdrehend. Drehung 17,1° Li, 19,7° Na, 23,8° Tl.

Optisch active Körper.

Saures äpfelsaures Zink $(C_4H_5O_5)_2$ Zn. $2H_2O$. $a:c = 1:2,0410$ (Traube). Combination (Fig. 359): $o = \{111\}$, $c = \{001\}$. Spaltbarkeit $\{001\}$ vollkommen. Die Ätzfiguren auf $\{001\}$ sind Quadrate oder quadratische Pyramiden, welche auf den beiden entgegengesetzten Seiten der basischen Spaltungsplatten in entgegengesetztem Sinne gegen deren Umriß gedreht sind (s. Fig. 360), daher von Trapezoedern gebildet werden. Doppelbrechung positiv. Die Krystalle z. T. aus zweiaxigen Lamellen zusammengesetzt, z. T. mimetisch einaxig und linksdrehend, wie die Lösung; ihre Drehung beträgt für 1 mm — 3°,02 (*Na*), die der entsprechenden Substanzmenge in Lösung — 0°,55.

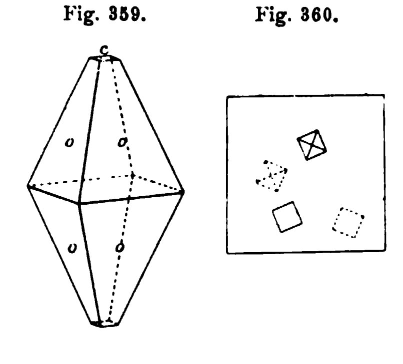


Fig. 359. Fig. 360.

Rechtsweinsaures Antimonylkalium + Natriumsulfat = $C_4H_4O_6(SbO)K.SO_4Na_2$. $a:c = 1:1,0832$ (Traube). Combination (Fig. 361): $o = \{111\}$, $m = \{110\}$, $c = \{001\}$, $a = \{100\}$. Die Ätzfiguren auf *m* (s. Fig.) zeigen das Fehlen einer verticalen oder horizontalen Symmetrieebene. Doppelbrechung negativ, sehr stark. Drehung nicht gemessen.

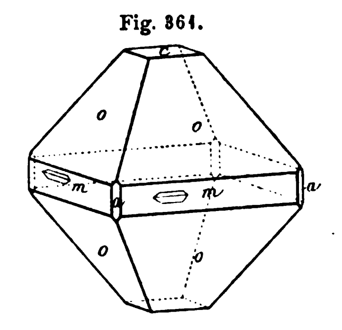
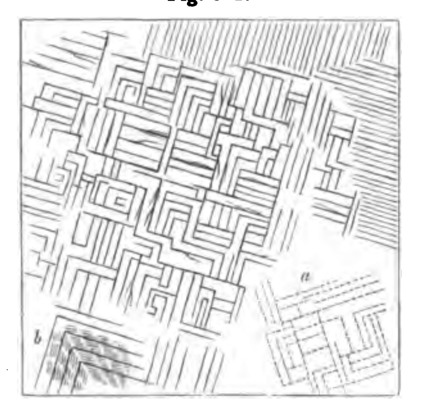


Fig. 361.

Schwefelsaures Strychnin $= (C_{21}H_{22}N_2O_2)_2 . H_2SO_4 . 6H_2O$. $a:c = 1:3,312$ (Des Cloizeaux). Combination ähnlich Fig. 356 bzw. 359: $\{111\}$, $\{001\}$; nach $\{001\}$ äußerst vollkommen spaltbar. Spaltungsplatten, mit verdünnter Salzsäure geätzt, zeigen unter dem Mikroskope zahlreiche feine Risse (s. Fig. 362), welche stets gegen den Umriß der Platte nach derselben Seite gedreht erscheinen. Ätzt man auch die Unterseite der Platte und stellt das Mikroskop auf diese ein, so erweisen sich dieselben umgekehrt gedreht (s. in Fig. 362 bei *a*), wie es der trapezoedrischen Symmetrie entspricht (Baumhauer). Doppelbrechung —. Drehung, 9—10° für Rot, stets links (ebenso dreht die wäßrige Lösung des Salzes, aber auf die gleiche Menge der Substanz berechnet, beträgt die molekulare Drehung nur $\frac{1}{24}$ von der Größe der Krystalldrehung).

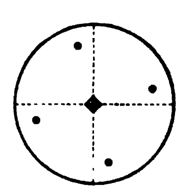
Fig. 362.



13. Bipyramidale Klasse.

(Pyramidal-hemiedrische Klasse.)

Wenn mit der vierzähligen Axe der einfachen Symmetrie statt einer weiteren Symmetrieaxe, wie in der vorigen Klasse, eine dazu senkrechte Ebene der Symmetrie combiniert wird (s. nebenstehende Projection, die Wiederholung von Fig. 330), so treten zu den vier oberen, eine tetragonale Pyramide bildenden Flächen vier untere gleichwertige hinzu, welche dieselben Parameter auf den Nebenaxen abschneiden, also mit jenen horizontale Kanten bilden. Die so entstehende vollständige einfache Form ist eine tetragonale Bipyramide dritter Art, deren es zwei mit denselben Werten der Indices gibt: die in der Projection dargestellte $\{hkl\}$ und diejenige, zu der im positiven Oktanten die Fläche (khl) gehört, welcher also das Symbol $\{khl\}$ zukommt; die letztere erhält man, wenn man die erste Bipyramide um eine Nebenaxe um 180° dreht oder nach einer der beiden verticalen Axenebenen spiegelt. Diese beiden Formen gehen in ein einzige über, wenn $h = k$, d. h. die Pole der Flächen in der Projection in den Diagonalen der Nebenaxen liegen, in welchem Falle sie einer tetragonalen Bipyramide erster Art entsprechen; das andere Grenzglied einer Reihe von Bipyramiden $\{hkl\}$ und $\{khl\}$ ist eine tetragonale Bipyramide zweiter Art, deren Pole in der Projection auf den punktierten, den Nebenaxen entsprechenden Durchmessern liegen. Den drei Arten von Bipyramiden correspondieren nun drei Arten tetragonaler Prismen, denn wenn die Pole in den Grundkreis fallen, resultieren nur vier Flächen, welche entweder den Nebenaxen parallel, oder zu ihnen diagonal oder endlich ungleich geneigt sind; im letzteren Falle gibt es zwei tetragonale Prismen dritter Art mit den gleichen Indices $\{hk0\}$ und $\{kh0\}$. Schließlich liefern die vier oberen Flächen, wenn ihre Pole mit dem der tetragonalen Axe zusammenfallen, eine Ebene (001), die vier unteren $(00\bar{1})$, so daß die Basis auch in dieser Klasse ein Pinakoid darstellt. Somit ergeben sich folgende mögliche Formen:



$\{001\}$ Basis
$\{110\}$ tetragonales Prisma erster Art
$\{100\}$ tetragonales Prisma zweiter Art
$\{hk0\}$ tetragonales Prisma dritter Art
$\{hhl\}$ tetragonale Bipyramide erster Art
$\{h0l\}$ tetragonale Bipyramide zweiter Art
$\{hkl\}$ tetragonale Bipyramide dritter Art.

Beispiele.

Wolframsaures Calcium (Scheelit) $= WO_4Ca$. $a : c = 1 : 1{,}5359$ (Dauber). Die durch Umsetzung von wolframsaurem Natrium mit

Chlorcalcium aus dem Schmelzflusse entstehenden Krystalle zeigen eine spitze Bipyramide von der Form der Fig. 354, welche, da ihr parallel Spaltbarkeit stattfindet, als primäre erster Art {111} genommen wird. Der natürliche Scheelit erscheint häufiger in der Combination (Fig. 363): $e = \{101\}$ (die primäre Bipyramide zweiter Art vorherrschend), $o = \{111\}$, $h = \{313\}$, $s = \{131\}$. Nicht selten Zwillinge mit parallelen Axensystemen beider Krystalle, deren relative Stellung man auf dreierlei Weise erhalten kann: entweder durch Spiegelung nach einer Fläche des Prismas zweiter Art, wie es Fig. 364 in gerader Projection auf die Basis (vertical von oben gesehen) darstellt, — oder durch Drehung um die Normale zu einer Fläche des Prismas erster Art, — oder durch Spiegelung nach einer solchen. Die Symmetrie des Zwillingsgebildes nach den Ebenen der beiden Prismen {110} und {100} tritt besonders in der gewöhnlichen Ausbildung desselben hervor, bei welcher nämlich die beiden Krystalle in der eben definierten relativen Stellung vollständig durcheinander gewachsen sind,

Fig. 363.

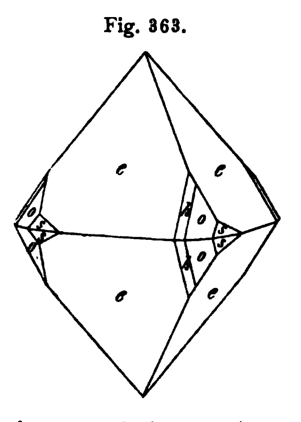


Fig. 364.

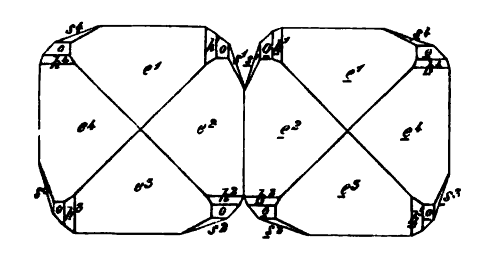
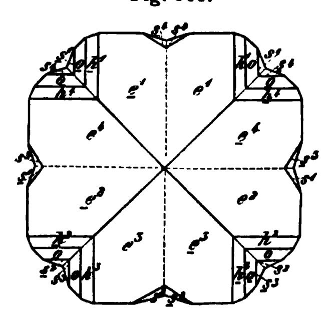


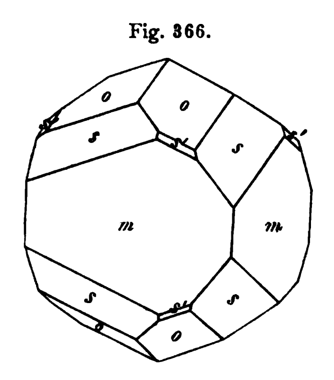
Fig. 365.



so daß, wie es in Fig. 365 (ebenfalls von oben gesehen) abgebildet ist, von den acht Achteln des Zwillings je vier abwechselnde dem einen, vier dem andern Krystalle angehören, wie es die übereinstimmende Numerierung der Flächen *e*, *h*, *o* und *s* in beiden Figuren zeigt. Da von den Flächen *e* je eine des einen Krystalles mit einer des andern in eine Ebene fällt, so erscheint das Ganze wie eine einfache tetragonale Bipyramide von der Form {101}, aber mit einspringenden Winkeln an den vier Basisecken und den Mitten der Basiskanten. Durch die Zwillingsbildung ist gleichsam die höhere Symmetrie der letzten Klasse dieses Systemes hergestellt. Bei einer nicht ganz vollständigen Durchdringung der Krystalle können die einspringenden Ecken teilweise fehlen, oder sie können durch größere Ausdehnung von *o* und *e* zum Verschwinden gebracht werden, in welchem Falle dann der Krystall wie ein einfacher mit jener höheren Symmetrie

erscheinen würde und von einem solchen wegen des Parallelismus der Hauptaxe in beiden Krystallen auch optisch nicht zu unterscheiden wäre.

Fig. 366.



Spaltbarkeit $\{111\}$ und $\{001\}$ unvollkommen. Doppelbrechung +,

$\omega = 1{,}918, \quad \varepsilon = 1{,}934$ Rot.

Erythroglucin (Erythrit, Phycit) = $C_4H_{10}O_4$. $a : c = 1 : 0{,}3762$ (Schabus). Combination (Fig. 366): $m = \{100\}$, $o = \{111\}$, $s = \{131\}$, $s' = \{311\}$; letztere Form fehlt auch oft ganz, während s zuweilen so vorherrscht, daß o nur mit vier kleinen unsymmetrisch auf die Polecke desselben aufgesetzten Flächen erscheint. Doppelbrechung —, stark. Nach Des Cloizeaux:

	ω	ε
Rot	$\omega = 1{,}5419$	$\varepsilon = 1{,}5184$
Gelb	1,5444	1,5210
Blau	1,5495	1,5266

14. Ditetragonal-pyramidale Klasse.

(Hemimorph-holoedrische Klasse.)

Wie S. 417 an Fig. 331 (nebenstehend wiederholt) nachgewiesen wurde, bedingt die Hinzufügung einer der Hauptaxe parallelen Symmetrieebene zu der Symmetrie nach einer vierzähligen Axe die Existenz dreier weiterer Ebenen der Symmetrie. Die so entstehende vollständige einfache Form $\{hkl\}$ besteht, wie aus der Projection ersichtlich, aus acht oberen Flächen, von denen sich aus vier abwechselnden, welche eine tetragonale Pyramide dritter Art (Fig. 327) darstellen, die vier andern durch Vertauschung der Indices h und k, d. h. der Parameter auf den beiden gleichwertigen Nebenaxen, ergeben.

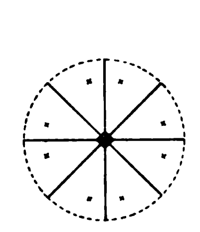
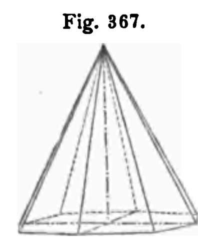


Fig. 367.



Diese, in Fig. 367 abgebildete Form heißt eine ditetragonale Pyramide und nach ihr die hierher gehörigen Krystalle »ditetragonal-pyramidal«. Setzt man den dritten Index negativ, so erhält man eine zweite Form $\{hk\bar{l}\}$ von der gleichen Gestalt, deren Flächen aber zur horizontalen Basis umgekehrt liegen, und welche daher als untere, die erstere als obere ditetragonale Pyramide bezeichnet wird. Da beide Formen voneinander unabhängig sind, ist in dieser Klasse die Hauptaxe polar, eine Eigenschaft, welche sich an den hierher gehörigen Krystallen durch die Erscheinung der polaren Pyroelektricität nach derselben Axe auch physikalisch erkennen läßt.

In dem speciellen Falle $h = k$ fallen je zwei Flächen der ditetragonalen Pyramide zusammen, und es entsteht eine tetragonale Pyramide erster Art, deren Pole in der Projection auf den Diagonalen der Nebenaxen liegen; ist dagegen einer jener beiden Indices = 0, so fallen wieder je zwei, aber nun in den Zonen der Nebenaxen liegende Pole zusammen, die resultierende tetragonale Pyramide ist eine solche zweiter Art. Je eine tetragonale Pyramide $\{hhl\}$ und $\{h0l\}$ bilden die Grenzglieder einer Zone von ditetragonalen $\{hkl\}$, in welcher der kleinere Index k zwischen den Grenzen h und 0 variiert. Diesen drei Arten von Pyramiden entsprechen für den Fall des Parallelismus mit der tetragonalen Axe die drei in Fig. 342—344 S. 425 f. abgebildeten Arten von Prismen, während jede derartige Reihe als anderes Grenzglied für $h = k = 0$ ein Pedion $\{001\}$ oder $\{00\bar{1}\}$ besitzt, je nachdem die Pyramiden obere oder untere sind. So ergibt sich folgende Übersicht:

$\{001\}$ obere (positive) Basis, $\{00\bar{1}\}$ untere (negative) Basis
$\{110\}$ tetragonales Prisma erster Art
$\{100\}$ tetragonales Prisma zweiter Art
$\{hk0\}$ ditetragonales Prisma
$\{hhl\}$ tetragonale Pyramide erster Art
$\{h0l\}$ tetragonale Pyramide zweiter Art
$\{hkl\}$ ditetragonale Pyramide.

Beispiele.

Silberfluorid, $AgF.H_2O$. $a : c = 1 : 1,1366$ (Marignac). Combination (Fig. 368): $x = \{113\}$, $o = \{111\}$, $\omega = \{11\bar{1}\}$. Auf Grund dieser Formen könnte das Salz auch der 10. Klasse (s. S. 422 f.) angehören; eine Entscheidung hierüber, wie sie bei der folgenden Verbindung durch die Ätzfiguren gegeben ist, war bei diesem zerfließlichen Salze bisher nicht zu gewinnen.

Fig. 368.

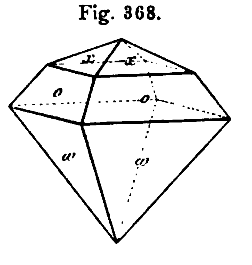
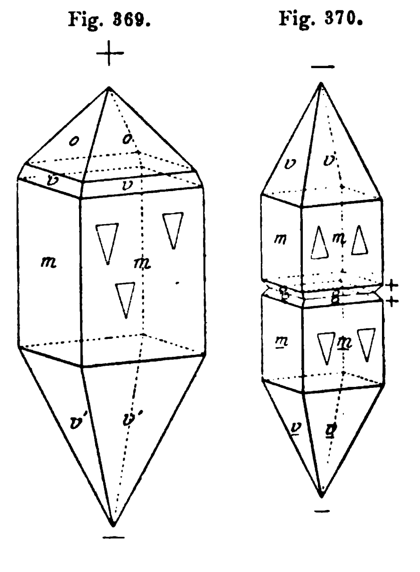


Fig. 369. Fig. 370.



Succinjodimid = $C_4H_4O_2NJ$. $a : c = 1 : 0,8733$ (Groth). Combination (Fig. 369): $o = \{111\}$, $v = \{221\}$, $m = \{110\}$, $v' = \{22\bar{1}\}$. Spaltbarkeit nach $\{111\}$ ziemlich deutlich. Doppelbrechung —. Nach Traube sind die Ätzfiguren auf m (s. Fig. 369) symmetrische gleichschenkelige Dreiecke; polar pyroelektrisch nach der Hauptaxe, deren unterer Pol der analoge ist. Symmetrische Zwillinge nach (001) Fig. 370,

deren analoge elektrische Pole nach außen, deren antiloge einander zugekehrt sind.

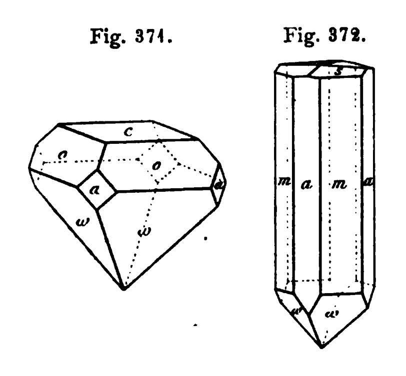


Fig. 371. Fig. 372.

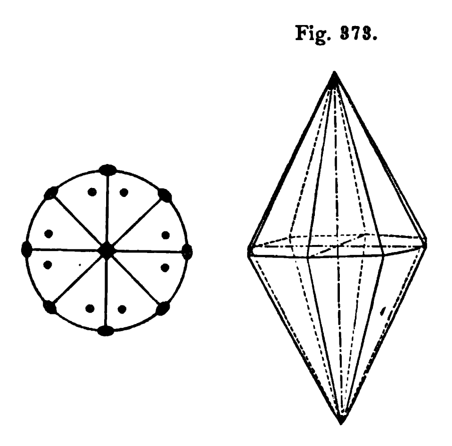
Penta-Erythrit, $C_5H_{12}O_4$. $a:c = 1:1,0236$ (Martin). Combination (Fig. 371): $c = \{001\}$, $o = \{111\}$, $\omega = \{11\bar{1}\}$, $a = \{100\}$ oder wie Fig. 372: $m = \{110\}$, $a = \{100\}$, $\omega = \{11\bar{1}\}$ und eine der Basis vicinale Pyramide erster Art $s = \{117\}$. Spaltbarkeit nach $\{001\}$ höchst vollkommen, $\{110\}$ weniger vollkommen. Brechungsindices für D: $\omega = 1,5588$, $\varepsilon = 1,5480$. Die Krystalle zeigen nicht selten optische Anomalien, sind also wohl mimetisch tetragonal.

15. Ditetragonal-bipyramidale Klasse.

(Holoedrische Klasse.)

Tritt zu der Symmetrie der vorigen Klasse noch diejenige nach der Ebene (001) hinzu, so entsteht als allgemeine Form die in beistehender Projection durch ihre Pole markierte ditetragonale Bipyramide $\{hkl\}$ Fig. 373, eine Form, welche aus der Gesamtheit aller Flächen mit den Indiceszahlen h, k, l besteht und den höchsten Grad der Symmetrie innerhalb des tetragonalen Systemes repräsentiert; dieselbe besitzt fünf Ebenen der Symmetrie und außer der vierzähligen Axe noch vier zweizählige in der dazu senkrechten Ebene, welche infolge der Vierzähligkeit der Hauptaxe paarweise gleichwertig sind (die früher als Neben- und Zwischenaxen bezeichneten Richtungen).

Fig. 373.



Jede ditetragonale Bipyramide besitzt dreierlei Kanten, nämlich acht Basiskanten und je acht stumpfere und schärfere, miteinander abwechselnde Polkanten. Eine Form dieser Art, aber mit 16 genau gleichen Polkanten, ist krystallographisch unmöglich, weil bei derselben das Verhältnis $h:k = \text{tang}\ 67\frac{1}{2}^\circ = 2,4142\ldots$, also eine irrationale Zahl sein würde. Ist dieses Verhältnis kleiner, als 2,4142, z. B. 2, so sind diejenigen Polkanten die stumpferen, welche vom Pol der Hauptaxe nach denen der Zwischenaxen herablaufen; in diesem Falle ähnelt die Bipyramide um so mehr einer tetragonalen erster Art, je weniger h von k verschieden ist; in dem Grenzfalle, daß $h = k$, ist der Winkel der bezeichneten Polkanten $= 0$, d. h. je zwei in einer solchen Polkante aneinander stoßende Flächen,

also die Flächen eines Oktanten, fallen in eine Ebene; es resultiert eine tetragonale Bipyramide erster Art als die eine Grenzgestalt jener Reihe von ditetragonalen. Ist dagegen $h:k$ größer, als 2,4142, z. B. 3, so sind die nach den Nebenaxen herablaufenden Polkanten die stumpferen, und zwar um so stumpfwinkeliger, je größer $h:k$ ist. Für den Grenzfall $k = 0$ sind die Basiskanten der Bipyramide den Nebenaxen parallel, also werden die oben bezeichneten Polkantenwinkel Null, d. h. zwei an solchen zusammenstoßende, benachbarten Oktanten angehörige Flächen fallen in eine Ebene; es entsteht eine tetragonale Bipyramide zweiter Art als zweite Grenzgestalt derselben Reihe von ditetragonalen Bipyramiden. Zwei ditetragonale Formen einer solchen Reihe mit dem gleichen Werte des Verhältnisses $h:l$ erscheinen so miteinander combiniert, daß die eine eine sogenannte »Zuschärfung« der Polkanten der andern bildet, d. h. die letzteren werden durch stumpfere, aber in derselben Richtung verlaufende Kanten ersetzt. Hat von zwei ditetragonalen Bipyramiden die eine einen größeren Wert von l, so ist sie flacher und erscheint an der andern als sogenannte »achtflächige Zuspitzung« der Polecken, d. h. letztere werden durch je eine stumpfere 4 + 4kantige Ecke ersetzt. Die analoge Combination zweier tetragonaler Bipyramiden erster Art ist in Fig. 374 abgebildet, während

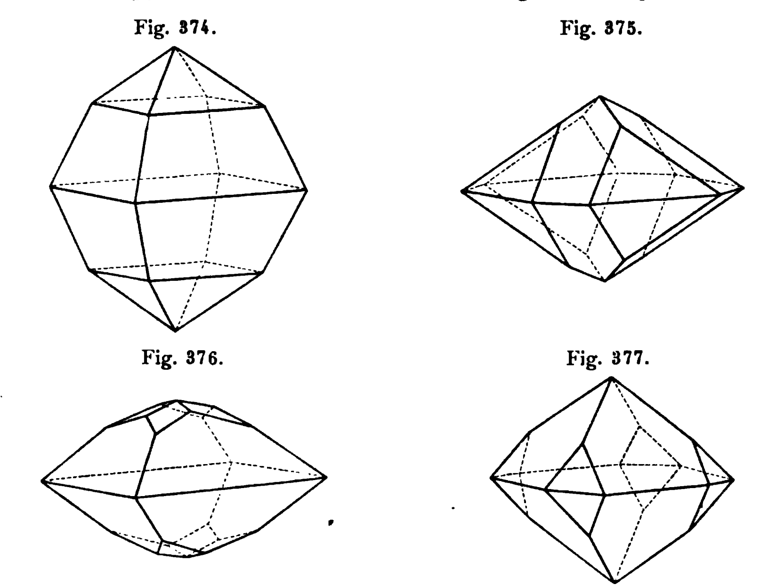


Fig. 374. Fig. 375. Fig. 376. Fig. 377.

Fig. 375 diejenige zweier tetragonaler Bipyramiden, eine erster mit einer zweiter Art, welche gleiches Verhältnis $h:l$ besitzen, z. B. {111} mit {101}, darstellt. Ist dagegen in einer derartigen Combination der Parameter der zweiten Bipyramide auf der Hauptaxe ein kleinerer, so bildet sie eine »vierflächige Zuspitzung« der Polecken der ersten (Fig. 376); ist endlich jener Parameter größer, so erscheint die Form zweiter Art als »Zuschärfung« der Seitenecken der ersteren, wie es Fig. 377 zeigt, welche den speciellen

Fall {111} {201} darstellt, wie sich aus dem Parallelismus der Kanten [201, 111] und [111, 021] ohne weiteres ergibt.

Den drei Arten von Bipyramiden entsprechen für den Fall des Parallelismus ihrer Flächen mit der Hauptaxe die drei in den Fig. 342—344 abgebildeten Arten von Prismen. Von diesen bildet das tetragonale Prisma erster Art an einer Bipyramide derselben Stellung die gerade Abstumpfung der Basiskanten (Fig. 378), während dasjenige der zweiten Art an derselben

Fig. 378.

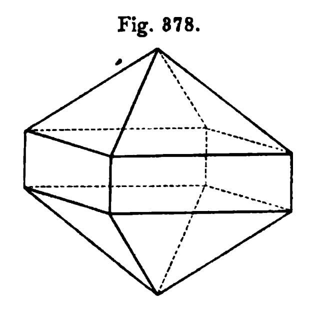
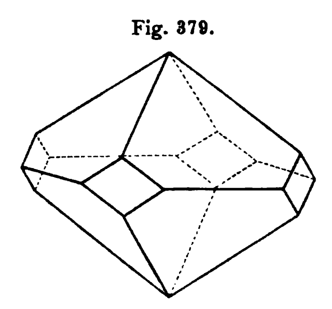


Fig. 379.



bipyramidalen Form die Basisecken gerade abstumpft (Fig. 379). Die Basis, die Grenzform jeder Reihe von Bipyramiden mit steigendem Index l, stumpft die Polecken derselben gerade ab und ist, da beide Pole der Hauptaxe gleichwertig sind, ein Pinakoid. Der letzten Klasse des tetragonalen Systemes gehören also folgende Formen an:

{001} Basis
{110} tetragonales Prisma erster Art
{100} tetragonales Prisma zweiter Art
{$hk0$} ditetragonales Prisma
{hhl} tetragonale Bipyramide erster Art
{$h0l$} tetragonale Bipyramide zweiter Art
{hkl} ditetragonale Bipyramide.

Beispiele.

Zinn. $a:c = 1:0{,}3857$ (Miller). Die galvanisch ausgeschiedenen Krystalle dieses Metalles sind entweder nadelförmige Combinationen: $m = \{110\}$, $p = \{100\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{101\}$, Fig. 380, oder nur die flache Bipyramide o; im letzteren Falle häufig Zwillinge nach einer Fläche derselben Form.

Fig. 380.

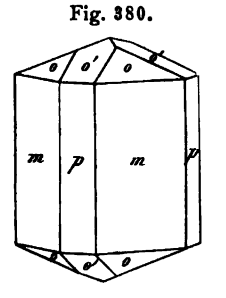
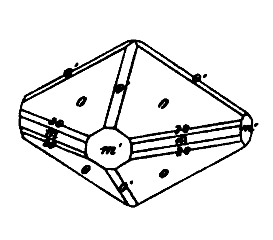


Fig. 381.

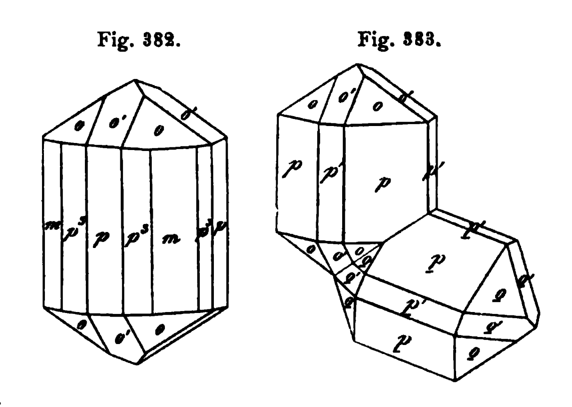


Aluminiumborcarbid = $Al_3B_{48}C_2$ (nach Hampe, von Wöhler und Deville als Bor betrachtet). $a:c = 1:0{,}576$ (Sella). Die

fast diamantharten Krystalle zeigen $o = \{111\}$, $2o = \{221\}$, $o' = \{101\}$, $m = \{110\}$, $m' = \{100\}$ (Fig. 381).

Zinndioxyd $= SnO_2$ (natürl. Zinnerz). $a : c = 1 : 0{,}6724$ (Miller). Combination: $m = \{110\}$, $p = \{100\}$, $p^3 = \{310\}$, $o = \{111\}$, $o' = \{101\}$, Fig. 382. Doppelbrechung +, schwach. Sehr häufig Zwillinge nach $\{101\}$, Fig. 383, bei denen vorn und hinten die Flächenpaare von $p' = \{100\}$ in eine Ebene fallen, da sie normal zur Zwillingsebene sind. Da eine tetragonale Bipyramide aus vier Paaren paralleler Flächen besteht, so kann an einem Krystalle nicht bloß nach einem derselben, sondern auch noch, symmetrisch in bezug auf das zweite, dritte und vierte Paar, je ein Krystall angewachsen sein, und so ein Fünflingskrystall entstehen, der bei vollständiger Durchwachsung aller Einzelkrystalle gleichsam die tetragonale Symmetrie wieder herstellt, welche im Zwilling gestört ist.

Fig. 382. Fig. 383.



Titandioxyd $= TiO_2$ (Rutil). $a : c = 1 : 0{,}6442$ (Miller). Dieselbe Combination wie die vorige Substanz (Fig. 382). Brechungsindices nach Baerwald:

	ω	ε
Li-Licht	2,5671	2,8415
Na-Licht	2,6158	2,9029
Tl-Licht	2,6725	2,9817

Fig. 384. Fig. 385.

Zirkon $= ZrSiO_4$. $a : c = 1 : 0{,}6404$ (Haidinger). Combination (Fig. 384): $m = \{110\}$, $p = \{100\}$, $o = \{111\}$, $3o = \{331\}$, $d = \{311\}$; die letzte Form bestimmt durch die beiden Zonen [331, $3\bar{3}1$] und [111, 100]. Brechungsindices nach Tornow:

Linie	ω	ε
Linie *C*:	$\omega = 1{,}92018$	$\varepsilon = 1{,}97298$
- *d*:	1,93015	1,98320
- *F*:	1,94279	1,99612

Quecksilberchlorür $= Hg_2Cl_2$ (nat. Quecksilberhornerz). $a : c = 1 : 1{,}7414$ (Miller). Die Krystalle sind prismatische Combinationen von $p = \{100\}$ und $o = \{111\}$, Fig. 385. Brechungsindices nach Dufet:

Li:	$\omega =$ 1,95560	$\omega =$ 2,6006
Na:	1,97325	2,6559
Tl:	1,99085	2,7129

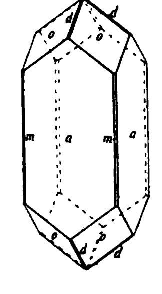
Quecksilberjodid $= HgJ_2$. $a:c =$ 1 : 1,9955 (Mitscherlich). Kleine dunkelrote, spitze Bipyramiden {111} oder {112} mit {001}, selten {114}. Spaltbar nach {001} vollkommen. Doppelbrechung negativ, sehr stark.

Ferrocyankalium (gelbes Blutlaugensalz) $= Fe(CN)_6K_4 . 3H_2O$. Quadratische Tafeln {001} begrenzt von einer Bipyramide, deren $a:c =$ 1: 2,50 approx. Spaltbarkeit nach {001} vollkommen. Die Interferenzfigur basischer Platten läßt häufig die Übereinanderlagerung zweiaxiger Zwillingslamellen mit senkrechter Kreuzung der Axenebenen erkennen; die Lamellen sind monoklin und ihr {010} entspricht der tetragonalen Basis, zu welcher die erste Mittellinie der optischen Axen senkrecht steht; die Zwillingsebene ist {101} oder {10$\bar{1}$}. Die Krystalle sind also nur mimetisch tetragonal. Vgl. S. 371.

Magnesiumplatincyanür $= PtCy_4Mg . 7H_2O$. $a:c =$ 1 : 0,5863 (Haidinger). Dicke kurze Prismen {100}, am Ende {001} und untergeordnet {111}. Brechungsindices nach Grailich: $n =$ 1,5472 (Linie *B*), 1,5485 (L. *C*), 1,5532 (L. *D*); die beiden Strahlen ω und ε waren nicht deutlich getrennt. Doppelbrechung positiv. Carminrot mit schwachem Pleochroismus (ord. Strahl mehr bläulich); auf {100} grüne, auf {001} und {111} lasurblaue metallische Oberflächenfarbe (s. S. 174 und 175).

Kaliumkupferchlorid $= K_2CuCl_4 . 2H_2O$. $a:c =$ 1 : 0,7531 (Rammelsberg). Combination {111} {100} vom Habitus derjenigen des folgenden Körpers (Fig. 386), bei gleicher Größe der Flächen beider Formen einem Rhombendodekaeder ähnlich. Brechungsindices nach Grailich:

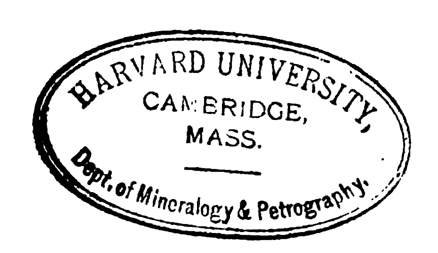
Fig. 386.



Linie *B*	$\omega =$ 1,6311	$\varepsilon =$ 1,6070
- *D*	1,6365	1,6148
- *E*	1,6468	1,6227

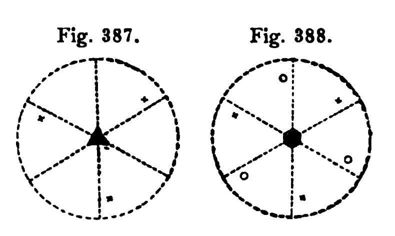
Deutlicher Pleochroismus (ω grün, ε himmelblau).

Tetramethylammoniumjodid $= N(CH_3)_4J$. $a:c =$ 1: 0,7223 (Slavík). Combination (Fig. 386): $a =$ {100}, $o =$ {111}, $m =$ {110}, $d =$ {101}. Spaltbarkeit nach {100} und {001} ziemlich vollkommen, nach {111} weniger vollkommen. Doppelbrechung negativ, schwach.



V. Trigonales Krystallsystem.

Das trigonale System umfaßt nach der S. 332 gegebenen Definition alle Krystalle mit einer dreizähligen Symmetrieaxe; die letztere kann aber, wie Seite 330 gezeigt wurde, zugleich auch eine sechszählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie sein, so daß, wenn sonst kein weiteres Symmetrieelement vorhanden ist, zwei Fälle unterschieden werden müssen, welche in den beiden Projectionen Fig. 387 und Fig. 388 dargestellt sind. Wie aus denselben ersichtlich, erfordert die Existenz einer einfachen trigonalen Axe nur drei gleichwertige, der gleichen Seite dieser Axe angehörige Pole (in Fig. 387 drei obere), während, wenn jene zugleich sechszählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie ist, noch drei weitere, der andern Seite angehörige, als gleichwertig hinzutreten, welche durch Drehung um 60° und gleichzeitige Spiegelung nach der Ebene des Grundkreises aus den ersteren hervorgehen. Es wurde bereits S. 334 hervorgehoben, daß die dem zweiten Falle entsprechenden Formen deshalb auch dem hexagonalen Systeme zugezählt werden könnten, gerade so, wie die Krystalle mit einer vierzähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie dem tetragonalen. Daß in der Tat die Trennung der trigonalen und hexagonalen Krystalle in zwei Systeme einer gewissen Willkür unterliegt, und daß die verschiedenen Klassen derselben in einer näheren Beziehung zueinander stehen, als diejenigen irgend zweier anderer Systeme, wird aus dem Folgenden noch deutlicher hervorgehen.

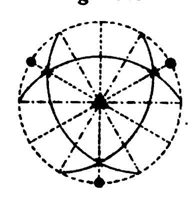

Fig. 387. Fig. 388.

Denkt man sich in den beiden obigen Projectionen den speciellen Fall, daß der Pol einer Fläche in den Grundkreis fällt, so würde in der Fig. 387 die Drehung von 120° um die dreizählige Axe (welche auch hier, wie im tetragonalen Systeme, Hauptaxe heißen möge) zwei damit gleichwertige, ebenfalls der Hauptaxe parallele Flächen liefern, und diese drei würden ein trigonales Prisma bilden, während bei der in Fig. 388 dargestellten Symmetrie auch die drei entgegengesetzten Flächen mit jenen gleichwertig wären, und so als vollständige einfache Form ein hexagonales Prisma entstehen würde. Die Flächen des ersteren, bzw. die drei Paare paralleler Flächen des letzteren, schneiden die Ebene des Grundkreises, welche wieder die Basis heißen möge, in drei gleichwertigen Kanten, die miteinander

Winkel von 60° bzw. 120° bilden. Da hierbei von einem beliebigen Pole im Grundkreise ausgegangen wurde, so ergibt sich der Satz, welcher (ganz ebenso, wie der entsprechende im tetragonalen Systeme S. 414 aus der Vierzähligkeit) aus der Dreizähligkeit der Hauptaxe folgt, daß zu jeder der Basis parallelen Kante zwei gleichwertige existieren, welche mit der ersten 60° bzw. 120° einschließen. Unter diesen Triaden gleichwertiger Kanten gibt es immer je zwei, von denen die eine die Winkel der andern halbiert.

Die Gültigkeit des letzteren Satzes ist leicht aus Fig. 389 zu ersehen. Seien die mit ⊙ bezeichneten Pole diejenigen eines beliebigen trigonalen Prismas, die strichpunktierten Geraden also die Richtungen der Combinationskanten zwischen jenem und der Basis; seien ferner die mit × bezeichneten Pole diejenigen dreier gleichwertiger Flächen aus den durch jene Combinationskanten gegebenen Zonen. Je zwei dieser Flächen bestimmen eine durch einen ausgezogenen Kreisbogen dargestellte Zone, welche den Grundkreis an den beiden Enden eines strichpunktierten Durchmessers schneidet. Folglich sind diese Endpunkte die Pole möglicher Krystallflächen, deren Combinationskanten mit der Basis die punktierten Durchmesser sind, welche den Winkel der strichpunktierten halbieren.

Fig. 389.



Ein derartiges Paar von Triaden, deren jede aus drei gleichwertigen Kanten besteht, entspricht in jeder Beziehung einem Paare von je zwei auf einander senkrechten Kanten im tetragonalen Systeme (s. S. 414); wie dort zwei derselben als Nebenaxen, die beiden andern, den Winkel jener halbierenden, als Zwischenaxen bezeichnet wurden, so könnte man hier z. B. die drei gleichwertigen Richtungen, welche in Fig. 389 strichpunktiert sind, Nebenaxen und die drei ebenfalls einander gleichwertigen punktierten Durchmesser Zwischenaxen nennen. Auf zwei Nebenaxen schneiden die den Polen × in der Figur entsprechenden Flächen offenbar gleiche Parameter ab, daher alle Flächen eines hierher gehörigen Krystalles auf den gleichwertigen Nebenaxen Parameter besitzen, welche in rationalem Verhältnisse zueinander stehen (vgl. auch S. 415, Anmerk.).

In der Tat kann man nun alle trigonalen und hexagonalen Krystalle auf drei derartige Kanten, welche einander unter 60° bzw. 120° schneiden, und auf die zu ihnen senkrechte drei- oder sechszählige Symmetrieaxe als krystallographische Axen beziehen und erhält dann ein dem tetragonalen (s. S. 415) ganz analoges Axensystem, welches jedoch vier Axen, d. h. eine überflüssige, enthält, da die Parameter zweier Nebenaxen und der Hauptaxe eine Fläche ja vollständig bestimmen. Wählt man zur Grundform eine Krystallfläche, welche (wie × in Fig. 389) auf zwei Nebenaxen gleiche Parameter a besitzt, so sind die Elemente des Krystalles, bezogen auf diese und die Hauptaxe, gegeben durch die Größen:

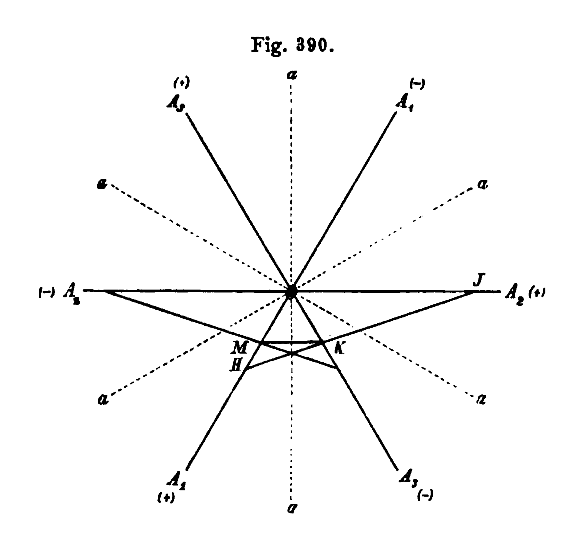
$$a : a : c, \quad \alpha = \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 60^\circ,$$

enthalten also nur eine, aus einer Messung zu berechnende Unbekannte, nämlich den Parameter c der Hauptaxe, wenn derjenige der Nebenaxen gleich 1 gesetzt wird. Die Indices der zur Grundform gewählten Fläche



wären dann, wie gewöhnlich, (111). Bezöge man aber nun eine der beiden andern, damit gleichwertigen Flächen × in Fig. 389 auf dieselben Nebenaxen und auf die Hauptaxe, so erhielte man, da dieselbe offenbar einer der beiden Nebenaxen parallel ist und auf der entgegengesetzten Seite der andern liegt, für sie die Indices $(\bar{1}01)$, für die dritte Fläche endlich das Symbol $(0\bar{1}1)$, d. h. für gleichwertige Flächen nicht die gleichen Indiceszahlen, so daß es nicht möglich wäre, durch ein Symbol die vollständige »einfache Form« zu bezeichnen. Dieser Umstand beruht eben auf der Gleichwertigkeit von drei Nebenaxen, denn auf die dritte und eine der beiden ersteren bezogen hat jede der beiden andern Flächen dieselben Parameter, also auch die gleichen Indices, wie die erste; gibt man daher außer dem auf die Hauptaxe bezüglichen Index die den sämtlichen drei Nebenaxen entsprechenden an, so erhält man ein vierstelliges Symbol, welches für alle gleichwertigen Flächen die gleichen Zahlen enthält, also zur Bezeichnung der vollständigen Form benutzt werden kann. Seien in Fig. 390 die Geraden A_1A_1, A_2A_2, A_3A_3, die drei Nebenaxen, und werde die mit + bezeichnete Richtung derselben als positiv, die mit – bezeichnete als negativ genommen, so sind offenbar die Symbole der drei gleichwertigen Flächen × in Fig. 389 folgende: $(10\bar{1}1)$ $(\bar{1}101)$ $(0\bar{1}11)$, unterscheiden sich daher nur durch die Vertauschung der drei ersten, auf gleichwertige Axen bezüglichen, Indiceszahlen. Eine Form, wie die vorliegende $\{10\bar{1}1\}$, deren Flächen einer Nebenaxe parallel sind, soll im trigonalen und hexagonalen Krystallsysteme als eine solche erster Art bezeichnet werden. Liegen die Pole der Flächen dagegen auf den in Fig. 389 strichpunktierten Durchmessern, so entsprechen sie Ebenen, welche auf zwei mit gleichem Vorzeichen versehenen Nebenaxenrichtungen gleiche Parameter, auf der dazwischen liegenden dritten einen halb so großen abschneiden, z. B. $\{11\bar{2}1\}$; solche Formen heißen zweiter Art. Endlich werden trigonale und hexagonale Formen dritter Art diejenigen genannt, deren Flächenpole zwischen den beiden Arten von Durchmessern der Projection Fig. 389 liegen; ihr allgemeines Symbol ist $\{hikl\}$, in welchem sich die drei Indices h, i, k auf die drei gleichwertigen Nebenaxen beziehen, und da diese in einer Ebene liegen, ist eine jener drei Größen durch die beiden andern gegeben.

Fig. 390.



Um die zuletzt erwähnte Abhängigkeit allgemein zu bestimmen, sei in Fig. 390 HKJ die Gerade, in welcher eine beliebige Krystallfläche, deren Indices in bezug auf die drei Nebenaxen h, $-k$, i sind, die Basis schneidet. Alsdann sind die betreffenden Parameter, derjenige der Grundform $= 1$ gesetzt:

$$OH = \frac{1}{h}, \qquad OK = \frac{1}{-k}, \qquad OJ = \frac{1}{i}.$$

Da $MK \parallel OJ$, so gilt die Gleichung:

$$OJ : MK = OH : MH.$$

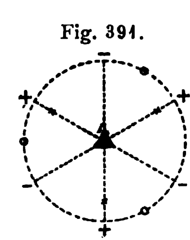
Setzt man die Seite OK des gleichseitigen Dreieckes OMK für MK und $OH - OK$, d. i. $OH - OM$, für MH, so ergibt sich durch Einsetzen der obigen Werke für OH, OK und OJ:

$$i = -k - h \qquad \text{oder:} \qquad h + i + k = 0.$$

Es ist demnach stets die Summe der auf die drei Nebenaxen bezüglichen Indices gleich Null. Sind also zwei dieser Zahlen gegeben, so ist die dritte diejenige Zahl, welche mit den beiden ersten die Summe 0 gibt. Es muß sonach von den drei Indices h, i, k mindestens einer negativ sein.

Die vorstehend erläuterten Symbole, die sogenannten Bravaisschen, sollen im hexagonalen Krystallsysteme allein verwendet werden, weil sie die einzigen sind, welche gestatten, die Gesamtheit aller gleichwertiger Flächen eines Krystalles mit sechszähliger Symmetrieaxe, auch im Falle der höchsten in jenem Systeme vorkommenden Symmetrie, d. h. der flächenreichsten einfachen Form, durch ein Symbol zu bezeichnen. Bei der Mehrzahl der hier als »trigonales Krystallsystem« zusammengefaßten Klassen von Krystallen gibt es dagegen noch eine zweite Art der Auswahl der Axen, welche ebenfalls für gleichwertige Flächen gleiche Indiceszahlen liefert und insofern naturgemäßer ist, als sie für die hier in Betracht kommenden Formen in directer Beziehung zu der Structur der Krystalle steht. Die in Fig. 387 dargestellte Symmetrie nach einer dreizähligen Axe der einfachen Symmetrie liefert als Gesamtheit der gleichwertigen Flächen eine sogenannte »trigonale Pyramide«, deren drei gleichartige Kanten unter gleichem Winkel zur Hauptaxe geneigt sind. Nebenstehende Fig. 391 repräsentiert nun den speciellen Fall, daß die Pole derselben in die punktierten Durchmesser fallen, daß die trigonale Pyramide also nach der a. vor. S. auseinandergesetzten Bezeichnung eine solche erster Art ist. Alsdann sind offenbar die drei mit – bezeichneten Radien des Grundkreises die senkrechten Projectionen der drei nach abwärts laufenden Kanten jener trigonalen Pyramide, welche jenseits ihres Schnittpunktes (der dreikantigen Ecke der Pyramide) nach oben verlängert und senkrecht auf den Grundkreis projiciert die drei mit + bezeichneten Radien liefern. Wählt man nun diese drei Kanten als krystallographische Axen, und zwar als positive Seite derselben die drei schräg nach oben laufenden Richtungen (+), ferner als Grundform die obere, der Ebene des Grundkreises parallele Basisfläche, so erhält man, da letztere auf den drei

Fig. 391.



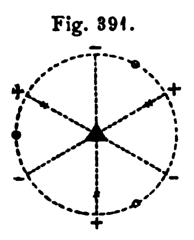
Axen gleiche Längen abschneidet, und je zwei Axen den gleichen Winkel miteinander einschließen, folgende Elemente:

$$a:a:a = 1:1:1, \qquad \alpha = \beta = \gamma.$$

Diese enthalten wieder nur eine Unbekannte, nämlich den Kantenwinkel zwischen je zwei Axen, welcher aus der Messung eines Flächenwinkels der trigonalen Pyramide durch eine sehr einfache Berechnung folgt.

Auf diese Elemente bezogen, erhalten die drei in Fig. 391 mit × bezeichneten Flächen der trigonalen Pyramide erster Art, da sie die Axenebenen sind, die Symbole (100), (010) und (001), die obere Basisfläche, deren Pol der Punkt ▲ in der Mitte der Projection ist, das Symbol (111). Fallen die drei ersteren Pole an die (+) Enden der betreffenden Durchmesser, so entsprechen sie offenbar drei der Hauptaxe parallelen Ebenen, welche, durch die (–) Endpunkte der beiden benachbarten Radien gelegt, den zugehörigen positiven Radius in der Mitte schneiden; damit sind die Parameter auf den drei Axen gegeben, d. h. die drei Flächen dieses trigonalen Prismas erster Art erhalten die Symbole $(2\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}2\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}2)$. Hierdurch sind die Zeichen aller trigonaler Pyramiden erster Art bestimmt, denn jede Fläche eines solchen muß in der Zone der Basis und des Prismas erster Art (ihr Pol in der Projection also auf einem der punktierten Durchmesser) liegen; aus der Zone $[2\bar{1}\bar{1}, 111]$ folgen die Indices $[0\bar{1}1]$, also für eine beliebige Fläche (pqr) die Bedingungsgleichung $r = q$, d. h.: eine Fläche gehört einer trigonalen Pyramide erster Art an, wenn zwei ihrer Indices gleich groß sind und das gleiche Vorzeichen besitzen. Die drei in Fig. 391 mit o bezeichneten Pole entsprechen nach der S. 443 gewählten Benennung einem trigonalen Prisma zweiter Art, dessen drei Flächen, wie unmittelbar aus der Figur zu ersehen, die Symbole $(10\bar{1})$, $(\bar{1}10)$, $(0\bar{1}1)$ besitzen; damit sind die Zeichen aller trigonaler Pyramiden zweiter Art gegeben, deren Pole in den die punktierten Durchmesser der Projection halbierenden Zonenkreisen liegen würden; z. B. ergibt sich aus der Zone $[\bar{1}10, 111] = [11\bar{2}]$ die Bedingungsgleichung $p + q = 2r$, d. h.: eine Fläche gehört einer Form zweiter Art an, wenn, bei gleichen Vorzeichen aller drei Indices, der eine derselben das arithmetische Mittel der beiden andern ist. Alle Symbole, welche keiner dieser beiden Bedingungsgleichungen genügen, gehören Formen der dritten Art an. Die Vorteile, welche diese sogenannte Millersche Bezeichnung der trigonalen Formen darbietet, sollen weiterhin bei Besprechung der Structur der trigonalen Krystalle betrachtet werden.

Fig. 391.



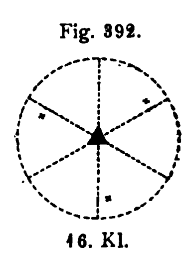
Die Umwandlung eines Millerschen Symbols (pqr) in ein Bravaissches $(hikl)$ und umgekehrt geschieht durch folgende Transformationsformeln:

$$h = \frac{p-q}{3}, \qquad i = \frac{q-r}{3}, \qquad k = \frac{r-p}{3}, \qquad l = \frac{p+q+r}{3}$$

bzw. $$p = h - k + l, \qquad q = i - h + l, \qquad r = k - i + l.$$

Nachdem nunmehr die Wahl der Axen und die Bezeichnung der trigonalen und hexagonalen Krystallformen an dem einfachsten Falle der Symmetrie, derjenigen nach einer einfachen dreizähligen Axe, erläutert ist, sollen aus der trigonalen Pyramide, welche die allgemeine Form der ersten hierher gehörigen Klasse (der 16. in der fortlaufenden Reihenfolge) bildet, zunächst die Formen von denjenigen (sechs) weiteren Klassen abgeleitet werden, welche geometrisch mit jener in der nächsten Beziehung stehen und deshalb mit ihr zu einem Krystallsysteme, dem trigonalen, vereinigt werden mögen.

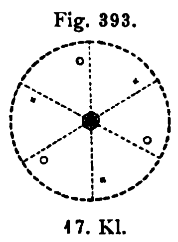
Fig. 392.



16. Kl.

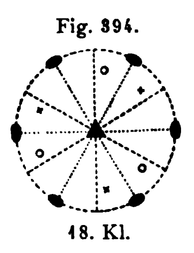
Zu den drei Flächen einer oberen trigonalen Pyramide, deren Pole in Fig. 392 (Wiederholung von Fig. 387) markiert sind, können drei untere gleichwertige, behufs Bildung einer einfachen Krystallform von höherer Symmetrie, auf dreierlei Weise hinzugefügt werden, nämlich a) so, daß ihre Pole in der Projection gleich weit von den drei oberen abstehen (Fig. 393);

Fig. 393.



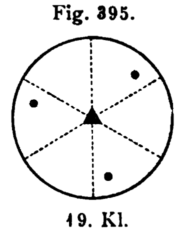
17. Kl.

Fig. 394.



18. Kl.

Fig. 395.



19. Kl.

dies ist der bereits S. 441 erwähnte Fall, in welchem die dreizählige Axe zugleich sechszählige der zusammengesetzten Symmetrie ist; — b) in der Weise, daß ihre Pole in der Projection mit ungleichen Abständen zwischen denen der oberen Flächen, aber natürlich analog zu den krystallographischen Axen liegen, da sie sonst nicht die gleichen Indices erhalten würden (s. Fig. 394); dies ist der Fall, wenn drei in der Basis gelegene gleichwertige Kanten zweizählige Symmetrieaxen sind; — endlich c) so, daß die Pole der hinzutretenden unteren Flächen mit denen der oberen in der Projection zusammenfallen (Fig. 395), d. h. wenn die Basis Symmetrieebene ist. So ergeben sich die in den vorstehenden drei Figuren dargestellten Symmetrieverhältnisse, welche die drei nächstfolgenden Klassen von Krystallen, die 17., 18. und 19., charakterisieren. Während die letzte dieser drei Symmetrieklassen sich dadurch von der 16. unterscheidet, daß zu der trigonalen Axe noch eine zu ihr senkrechte Ebene der Symmetrie hinzutritt, leitet sich von jener als Ausgangspunkt für das trigonale System dienenden Klasse noch eine weitere (20.) ab durch Hinzufügung einer der trigonalen Axe parallelen Symmetrieebene, welche notwendig, wegen der Dreizähligkeit der Hauptaxe, noch zwei gleichwertige erfordert (Fig. 396). Endlich kann die Symmetrie noch erhöht werden durch Hinzufügen zweizähliger

Axen in der Basis, welche natürlich immer drei gleichwertige sein müssen, auf zweierlei Art: a) die Winkel der drei Symmetrieebenen der vorigen Klasse halbierend; dann erzeugen die sechs oberen Pole von Fig. 396 noch

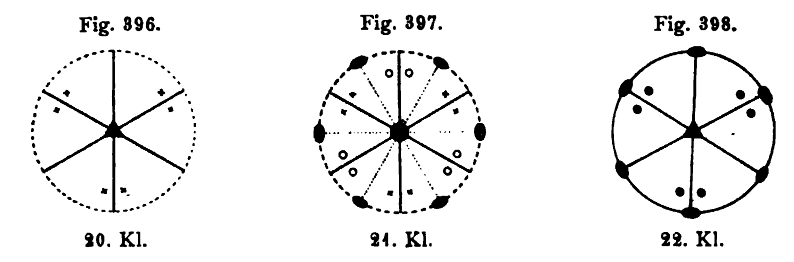


Fig. 396. 20. Kl. Fig. 397. 21. Kl. Fig. 398. 22. Kl.

sechs untere, deren Anordnung aus Fig. 397 ersichtlich ist — oder b) parallel den drei Symmetrieebenen; dann entstehen die in Fig. 398 dargestellten Symmetrieverhältnisse, und die vollständige einfache Form ist auch symmetrisch nach der Basis.

Von den vorstehend charakterisierten sieben Klassen trigonaler Krystalle sind nur zwei, die 16. und die 18., welche weder eine Ebene der einfachen, noch der zusammengesetzten Symmetrie besitzen, deren Formen also paarweise enantiomorph sind. Polarität der Hauptaxe ist vorhanden in der 16. und 20. Klasse, und die gleiche Eigenschaft besitzen drei in der Basis liegende Kanten bzw. Axen in der 16., 18., 19., 20. und 22. Klasse. Gemäß diesen Verhältnissen unterscheiden sich die Krystalle der betreffenden Klassen in gewissen vectoriellen Eigenschaften von denen der übrigen, in den meisten bivectoriellen jedoch ist das Verhalten aller trigonaler Krystalle ein übereinstimmendes.

Dies gilt zunächst für sämtliche optische Eigenschaften mit einer einzigen Ausnahme, nämlich derjenigen des Drehungsvermögens, welches nur einer Anzahl den beiden enantiomorphen Klassen angehöriger Krystalle zukommt. Da die Dreizähligkeit der Hauptaxe notwendig die optische Einaxigkeit und das Zusammenfallen der optischen Axe mit jener Richtung bedingt, so gilt das S. 418 für das optische Verhalten der tetragonalen Krystalle Gesagte in entsprechenden Richtungen ebenso für die trigonalen. Das gleiche ist der Fall bezüglich der thermischen, magnetischen und elektrischen Eigenschaften; nur in betreff der Pyroelektricität unterscheiden sich die oben angeführten Klassen mit polaren Axen dadurch von den übrigen, daß diese Richtungen sich bei Temperaturänderungen als elektrische Axen erweisen. In bezug auf die Cohäsionsverhältnisse (vgl. S. 213) existieren keine Unterschiede innerhalb dieses Krystallsystemes; ist das Minimum der Cohäsion in der Richtung der Hauptaxe, so spalten die Krystalle basisch; liegt es in der Ebene der Basis, so müssen deren drei gleichwertige vorhanden sein, und man kann durch Spaltbarkeit ein hexagonales Prisma hervorbringen; findet endlich die kleinste Cohäsion in einer zur Hauptaxe geneigten Richtung statt, so sind deren drei gleichwertige

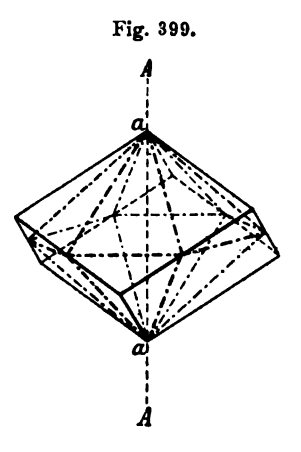
und gleichgeneigte, eine trigonale Pyramide bildend, vorhanden, d. h. der Krystall spaltet nach einem Rhomboeder. In den bisher beobachteten Fällen der Existenz von Gleitflächen sind diese die Ebenen eines Rhomboeders, welche die Kanten desjenigen der Spaltbarkeit gerade abstumpfen. Was endlich die Elasticität betrifft, so ergibt die Theorie, daß die Oberfläche der Dehnungscoefficienten in denjenigen beiden Klassen (19. und 22.), deren Krystalle nach der Basis symmetrisch sind, eine Rotationsfigur, d. h. den S. 221 unter II erörterten Fall darstellt, während die unter IIIa beschriebene Art von Dehnungsflächen den Krystallen der 18., 20. und 21. Klasse, endlich die S. 222 unter IIIb beschriebenen den Krystallen der 16. und 17. Klasse zukommen.

Für die Structur der trigonalen Krystalle kommen unter den Raumgittern in Betracht das rhomboedrische (Fig. 158) und das trigonal-prismatische (Fig. 159, S. 279). Das erstere besitzt sämtliche Symmetrieelemente der 21. Klasse, Fig. 397, und das gleiche gilt unter den regelmäßigen Punktsystemen für dasjenige, welches aus sechs rhomboedrischen Raumgittern derart zusammengesetzt ist, daß an Stelle der Punkte des einfachen Raumgitters Gruppen von je sechs Punkten treten, welche so angeordnet sind, wie die sechs Mittelecken eines Rhomboeders. Fällt die letztere Specialisierung fort, so zeigt das »zusammengesetzte Rhomboedersystem« nur die Symmetrieelemente der 18. Klasse, Fig. 394. Das nur aus drei rhomboedrischen Raumgittern bestehende »Rhomboedersystem« Sohnckes entspricht bei einer bestimmten Anordnung der Symmetrie der 20. Klasse, Fig. 396, andernfalls derjenigen der 16., Fig. 392. Daß die Symmetrie der 16. Klasse aber auch einem aus trigonal-primatischen Raumgittern bestehenden regelmäßigen Punktsysteme, dem »Dreipunktschraubensysteme« zukommt, wurde bereits S. 286 auseinandergesetzt; wenn die in Fig. 163 mit 1, 2, 3 bezeichneten Punkte in einer Ebene, der Basis des trigonalen Prismas, liegen, so entsteht das »dreiseitige Säulensystem« Sohnckes, welches die Symmetrie der 19. Klasse, Fig. 395, besitzt. Treten an Stelle der drei Punkte des Dreipunktschraubensystems sechs in der Anordnung von Fig. 165 oder 166 (S. 288), so entsteht das rechte oder linke »abwechselnde Dreipunktschraubensystem«, dessen Symmetrie, wie schon l. c. erwähnt, derjenigen des Quarzes (Klasse 18, Fig. 394) entspricht, und denkt man sich in Fig. 165 und 166 die Sechspunktgruppen sämtlich um 90° um die dreizählige Axe gedreht, so erhält man das rechte und linke »zusammengesetzte Dreipunktschraubensystem« Sohnckes, welches ebenfalls die Symmetrie der 18. Klasse, Fig. 394, zeigt. Liegen endlich die Sechspunktgruppen sämtlich in der Basisebene, so resultiert im ersteren Falle das »abwechselnde«, im zweiten Falle das »zusammengesetzte dreiseitige Säulensystem« Sohnckes; diese beiden regelmäßigen Punktsysteme zeigen bei symmetrischer Anordnung der Sechspunktgruppen die Symmetrie der 22. Klasse (Fig. 398), bei beliebiger Stellung derselben die der 18. Klasse (Fig. 394). Die einzige Klasse, deren Symmetrie durch kein regelmäßiges

Punktsystem dargestellt wird (welche also nach der hier adoptierten Anschauung für ein krystallisiertes Element ausgeschlossen wäre), ist die 17; eine ihr entsprechende Structur erfordert zum mindesten die Annahme zweier, centralperspectivisch ineinander gestellter, zusammengesetzter Rhomboedersysteme, welche aus enantiomorphen Bausteinen bestehen (S. 292). Natürlich kann man die Symmetrie der andern Klassen ebenfalls durch Ineinanderstellung mehrerer regelmäßiger Punktsysteme, die aus verschiedenartigen Atomen bestehen, erhalten, z. B. die Symmetrie der 16. Klasse schon durch Ineinanderstellung zweier Punktsysteme, welche für sich die Symmetrie der 19. oder der 22. Klasse besitzen.

Diejenigen unter den vorgenannten Structurarten, welche aus rhomboedrischen Raumgittern zusammengesetzt sind, haben notwendig gleiche, und zwar sehr große, Dichtigkeit in denjenigen Schichten, welche den drei Ebenenpaaren des der Structur zugrunde liegenden Rhomboeders parallel sind. Parallel denjenigen drei Ebenenpaaren, welche in Fig. 399 durch strichpunktierte Gerade angedeutet sind und, zur Hauptaxe *AA* unter demselben Winkel geneigt, mit den ersteren drei Ebenenpaaren eine hexagonale Doppelpyramide bilden, ist dagegen die Dichtigkeit der Schichten eine ganz andere, und zwar erheblich geringere, da die ihnen entsprechenden Netzebenen des Raumgitters eine viel geringere Flächendichtigkeit besitzen. Die letzteren Flächenpaare, welche für sich allein ein Rhomboeder von derselben Gestalt, aber anderer Stellung (um die Hauptaxe um 60° oder 180° gedreht), als die ersteren, bilden, können also nicht Ebenen vollkommener Spaltbarkeit sein, wenn eine solche nach den Flächen des ersten, des Grundrhomboeders, stattfindet, ebensowenig gleich leicht bei der Bildung des Krystalles entstehen. Wenn wir nun solche Krystalle auf die S. 443 angenommenen Axen beziehen wollten, so würden jene beiden, für die Structur des betreffenden Körpers so wesentlich verschiedenen Formen die gleichen (Bravaisschen) Symbole $\{10\bar{1}1\}$ und $\{01\bar{1}1\}$ erhalten; beziehen wir sie aber auf die drei Kanten des Grundrhomboeders in der S. 444 f. angegebenen Weise, so erhalten sämtliche Formen die ihrer Flächendichtigkeit entsprechenden Symbole, z. B. die jenes zweiten Rhomboeders dic Indices $\{22\bar{1}\}$, wie unmittelbar aus Fig. 399 zu ersehen ist. Hieraus geht also hervor, daß die Krystallformen derjenigen Substanzen, deren Structur eine rhomboedrische ist, nur durch die Millersche Bezeichnung ihre rationellen Symbole erhalten. Dies gilt für alle Krystalle der 17., der 20. und der 21. Klasse, deren Structurarten sämtlich aus rhomboedrischen Raumgittern zusammengesetzt sind, und damit stimmt die Erfahrung über das Auftreten der verschiedenen Formen, namentlich an den so zahlreichen

Fig. 399.



Beispielen der 21. Klasse (derjenigen, welche die Symmetrie des rhomboedrischen Raumgitters selbst besitzt), vollkommen überein[1]).

Anders liegt die Sache bei denjenigen Structurarten, welchen ein trigonal-prismatisches Raumgitter zugrunde liegt. Hier sind die Flächen zweier correlater Rhomboeder, wie sie in Fig. 399 dargestellt sind, zwar im allgemeinen nicht gleichwertig, die ihnen parallelen Schichten besitzen aber eine gleiche oder nur wenig verschiedene Dichtigkeit, weil sämtlichen einer hexagonalen Doppelpyramide entsprechenden Ebenen des trigonal-pyramidalen Raumgitters die gleiche Flächendichtigkeit zukommt. Da in der 16. und 18. Klasse beiderlei Structurarten möglich sind, so können hier Krystalle vorkommen, bei deren Bildung die correlaten Formen in ungefähr gleicher Weise begünstigt sind und sich auch in bezug auf Cohäsion nur wenig unterscheiden; ein ausgezeichnetes Beispiel hierfür bietet der Quarz dar, dessen Structur bereits S. 288 erörtert wurde. Eine ganz besondere Stellung nehmen die 19. und die 22. Klasse ein, deren Symmetrie nur durch eine aus trigonal-prismatischen Raumgittern zusammengesetzte Structur erklärt werden kann, und zwar nur aus sog. »Säulensystemen«, in welchen alle Drei- oder Sechspunktgruppen in einer Ebene liegen. Solche sind auch möglich in der 16. und 18. Klasse, hier aber auch »Schraubensysteme«, und die diesen beiden Klassen angehörigen Krystalle zeigen, selbst diejenigen, welche in Lösung nicht activ sind, sämtlich Drehung der Polarisationsebene, daher man ihnen eine rechte bzw. linke schraubenartige Structur zuschreiben muß. Hieraus geht hervor, daß den sog. »Säulensystemen« ein stabiles Gleichgewicht der inneren Kräfte nicht entspricht, und damit stimmt überein, daß Substanzen von der Symmetrie der 19. und der 22. Klasse, welche also nur derartige Anordnungen der Atome haben könnten, überhaupt noch nicht nachgewiesen worden sind. Unter den Beispielen der beiden einzigen enantiomorphen Klassen, der 16. und 18., und nur dieser, befinden sich, dem S. 325 angeführten Gesetze entsprechend, auch solche Körper, welche in Lösung die Polarisationsebene des Lichtes drehen, und bei diesen ist die optische Activität der Krystalle, wie bei denen des tetragonalen Krystallsystemes (S. 420), schon durch die Enantiomorphie der chemischen Moleküle bedingt, ohne daß jedoch molekulare Drehung und Krystalldrehung gleich groß sind[2]).

Ehe diese Abteilungen im einzelnen betrachtet werden, möge über die Zwillingsbildung trigonaler Krystalle das Folgende zur allgemeinen Orien-

1) Ganz besonders klar zeigt sich diese Gesetzmäßigkeit an der großen Formenreihe des Kalkspates, derselben Substanz, an welcher Hauy das Gesetz der Rationalität der Indices, d. h. die einfache Beziehung, in welcher alle Formen dieses Minerales zu seinem Spaltungsrhomboeder stehen, entdeckte.

2) Beide können sogar, wie das Beispiel des rechtsweinsauren Rubidiums zeigt, entgegengesetzt sein, so daß die Krystalldrehung von der molekularen mehr oder weniger compensiert werden kann. Dies gibt die Erklärung dafür, daß bei einigen optisch activen Körpern der 18. Klasse das jedenfalls sehr schwache Drehungsvermögen der Krystalle noch nicht nachgewiesen worden ist.

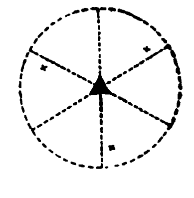


tierung dienen. Regelmäßige Verwachsung zweier Krystalle mit parallelen Haupt- und Nebenaxen kann in den beiden enantiomorphen Klassen nach zwei Gesetzen vorkommen: a) so, daß ein Krystall das Spiegelbild des andern in bezug auf die Basis oder eine zu einer Nebenaxe senkrechten Ebene ist, oder b) so, daß ein Krystall gegen den andern 180° um die Hauptaxe gedreht erscheint, in welchem Falle dieselben nicht enantiomorph (beide rechte oder beide linke) sind. In der besonders wichtigen 21. Klasse fallen diese beiden Gesetze in eins zusammen, welches auch so definiert werden kann: »Zwillingsaxe die in der Basis liegende Normale einer Nebenaxe« oder »Zwillingsebene die zu einer solchen Normalen senkrechte Ebene«. Daß eine Rhomboederfläche in dieser Klasse und überhaupt eine zur Hauptaxe geneigte Ebene eines jeden trigonalen Krystalles Zwillingsebene sein kann, daß es sich aber hierbei stets um eine durch die Cohäsionsverhältnisse ausgezeichnete Ebene handelt, wurde bereits S. 270 auseinandergesetzt. Die Einfachheit der Indices der Zwillingsebenen bietet also auch hier eine wichtige Controlle für die richtige Wahl der Grundform.

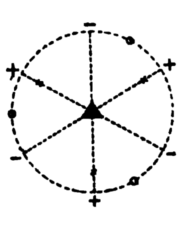
16. Trigonal-pyramidale Klasse.

(Hemimorph-tetartoedrische oder ogdoedrische Klasse.)

Die allgemeine Form dieser durch eine dreizählige Axe der einfachen Symmetrie charakterisierten Klasse ist die schon mehrfach erwähnte *trigonale Pyramide*, und zwar ist die in nebenstehender Projection (= Fig. 387) durch ihre Pole markierte eine solche dritter Art, welcher im tetragonalen Krystallsysteme die in Fig. 335 S. 242 abgebildete »tetragonale Pyramide« entspricht. Ihr (Millersches) Symbol ist $\{pqr\}$, und sie besteht aus den drei gleichwertigen Flächen (pqr), (rpq) und (qrp), während die drei Flächen (prq), (qpr) und (rqp) mit denselben Indiceszahlen[1]) eine zweite trigonale Pyramide $\{prq\}$ bilden, deren Pole in der Projection symmetrisch zu denen der ersten trigonalen Pyramide in bezug auf die in beistehenden Figuren punktierten Durchmesser liegen;



diese beiden Formen mögen die »rechte« und »linke« *positive trigonale Pyramide 3. Art* heißen, weil ihre Pole den positiven Radien der ebenfalls beistehend wiederholten Fig. 391 am nächsten liegen. Genau dieselbe Gestalt, d. h. die gleichen Flächenwinkel und Neigung zur Hauptaxe, besitzen noch zwei andere trigonale Pyramiden dritter Art, deren Pole zu den drei andern (negativen) Radien die gleiche Stellung haben, wie die der beiden ersteren Formen zu den drei positiven Radien; diese beiden, als rechte und linke *negative* zu bezeichnende



1) Ohne Änderung eines Vorzeichens nur in der Reihenfolge vertauscht.

Pyramiden erhalten, auf die gleichen Axen bezogen, die Symbole $\{p'q'r'\}$ und $\{p'r'q'\}$, wo

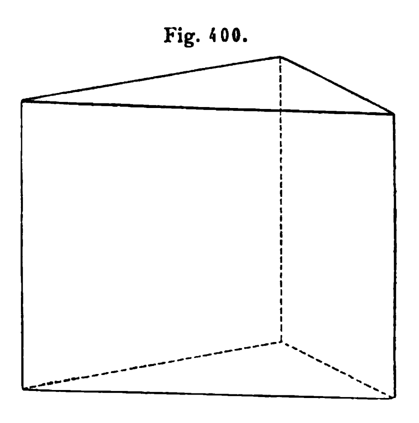
$$p' = -p + 2q + 2r, \quad q' = 2p - q + 2r, \quad r' = 2p + 2q - r.$$

Endlich gehören zu den möglichen Formen des Krystalles auch noch vier untere trigonale Pyramiden von gleicher Form und verschiedener Stellung, deren Symbole aus denen der vier oberen durch Multiplication mit — 1 erhalten werden.

In dem speciellen Falle, daß $r = q$, resultiert nach S. 445 eine trigonale Pyramide erster Art, deren Pole entweder auf den positiven (s. Fig. a. vor. S.) oder auf den negativen Radien der Projection gelegen sind, und welche dementsprechend als »positive« oder »negative« bezeichnet wird. Ist ersteres der Fall, so erscheint in den weiterhin folgenden Abbildungen, wenn die Form eine obere ist, stets eine Fläche dem Beobachter zugekehrt. Zu den positiven trigonalen Pyramiden erster Art gehört die primäre $\{100\}$, deren Kanten die Krystallaxen sind; flachere Pyramiden derselben Stellung, welche eine dreiflächige »Zuspitzung« der Polecke der primären bilden, haben das Symbol $\{pqq\}$, wo $p > q$, denn für $p = q$ ist die flachste mögliche Pyramide, die Basis $\{111\}$, erreicht; steilere Pyramiden, deren Pole zwischen denen von $\{100\}$ und $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ gelegen sind, erhalten das Symbol $\{p\bar{q}\bar{q}\}$, in welchem das Verhältnis $p : q$ zwischen denen der beiden erwähnten Grenzformen liegt. Von den negativen trigonalen Pyramiden erster Art ist die wichtigste $\{110\}$, deren drei Flächen (110), (101) und (011) die Kanten der primären gerade abstumpfen; flachere haben das Zeichen $\{pqq\}$, wo $p < q$, steilere $\{\bar{p}qq\}$ zwischen den Grenzen $\{011\}$ und $\{\bar{2}11\}$: unter diesen befindet sich auch $\{\bar{1}22\}$, welche dieselbe Gestalt, wie die primäre, besitzt, aber gegen letztere 180° um die Hauptaxe gedreht erscheint. Ein weiterer specieller Fall ergibt sich nach S. 445, wenn $p + q = 2r$, indem alsdann die Pole in der Mitte zwischen einem positiven und einem negativen Radius der Projection gelegen sind und einer trigonalen Pyramide zweiter Art entsprechen; diese bezeichnet man als »rechte«, wenn ihre Pole in denjenigen drei Sextanten der a. vor. S. wiederholten Projection (Fig. 387) liegen, welche dort die Zeichen × der allgemeinen Form enthalten, als »linke«, wenn sie in den drei andern Sextanten liegen. Hieraus geht hervor, daß eine Reihe von rechten positiven trigonalen Pyramiden dritter Art zwischen einer positiven erster Art und einer rechten zweiter Art liegt, während die entsprechenden Grenzformen der linken positiven Pyramiden dritter Art die gleiche erster Art und eine linke zweiter Art sind; andererseits ist jede negative trigonale Pyramide erster Art die gemeinsame Grenzform je einer Reihe rechter und linker negativer Pyramiden dritter Art, aber die andere Grenzform der ersten Reihe ist die linke, der zweiten die rechte Pyramide zweiter Art. Zu den erwähnten oberen trigonalen Pyramiden erster und zweiter Art treten als mögliche Formen des Krystalles hinzu ebensoviele untere, für welche das gleiche gilt. Ferner entsprechen den drei Arten

trigonaler Pyramiden drei Arten von trigonalen Prismen: a) zwei trigonale Prismen erster Art $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ und $\{\bar{2}11\}$, von denen das erste, das positive genannt, entsprechend der in den Abbildungen trigonaler Krystalle üblichen Stellung, die in Fig. 400 dargestellte Orientierung erhält, während das zweite eine der drei gleichen Kanten nach vorn kehrt; b) zwei trigonale Prismen zweiter Art $\{10\bar{1}\}$ und $\{1\bar{1}0\}$, welche man, entsprechend den Pyramiden zweiter Art, als »rechtes« und »linkes« unterscheidet; c) trigonale Prismen dritter Art, deren Symbole, da ihre Flächen sämtlich in der Zone $[2\bar{1}\bar{1}, 10\bar{1}] = [111]$ liegen, ebenfalls der Bedingung $p + q + r = 0$ genügen müssen; man unterscheidet auch hier je nach der Stellung, entsprechend den Pyramiden dritter Art, positive rechte und linke, sowie negative rechte und linke trigonale Prismen dritter Art. Während jedes trigonale Prisma als Grenzglied einer oberen und einer unteren Reihe von Pyramiden aufgefaßt werden kann, welchen die letzteren sich um so mehr nähern, je spitzer ihre Polecke wird, ist die gemeinsame andere Grenzform aller Reihen oberer trigonaler Pyramiden das obere Pedion $\{111\}$, diejenige aller unteren die entgegengesetzte Fläche bzw. Form $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$.

Fig. 400.



In der folgenden Zusammenstellung sind den soeben besprochenen Symbolen zum Vergleiche auch die vierstelligen, sog. Bravaisschen (s. S. 444) und in den Beispielen dieser und der folgenden Klassen dem Winkel α $(= \beta = \gamma)$ auch die Elemente, bezogen auf die Haupt- und Nebenaxen, hinzugefügt:

$\{111\} = \{0001\}$ obere (positive) Basis; $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\} = \{000\bar{1}\}$ untere (negative) Basis
$\{2\bar{1}\bar{1}\} = \{10\bar{1}0\}$ positives, $\{\bar{2}11\} = \{\bar{1}010\}$ negatives trigonales Prisma erster Art
$\{10\bar{1}\} = \{11\bar{2}0\}$ rechtes, $\{1\bar{1}0\} = \{2\bar{1}\bar{1}0\}$ linkes trigonales Prisma zweiter Art
$\{pqr\}_{p+q+r=0} = \{hik0\}$ trigonales Prisma dritter Art
$\{pqq\} = \{h0\bar{h}l\}$ trigonale Pyramide erster Art
$\{pqr\}_{p+q=2r} = \{h.h.\overline{2h}.l\}$ trigonale Pyramide zweiter Art
$\{pqr\} = \{hikl\}$ trigonale Pyramide dritter Art.

Beispiel[1]).

Natriumperjodat (überjodsaures Natrium) $= JO_4Na.3H_2O$. $\alpha = 94^\circ 9'$ $(a : c = 1 : 1,094$ Groth). Combination (Fig. 401): $r = \{100\}$, $e =$

1) Das folgende einzige Beispiel dieser Klasse betrifft einen Körper, dessen Lösung kein Drehungsvermögen besitzt. Ein hierher gehöriger optisch activer Körper ist noch nicht beobachtet worden.



$\{11\bar{1}\}$, $c = \{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$, $s = \{201\}$; dieselbe Combination ist in Fig. 402 in gerader Projection von oben gesehen dargestellt, und aus letzterer noch deutlicher zu ersehen, daß s als schiefe Abstumpfung der Kanten $r:r$ eine linke trigonale Pyramide zweiter Art ist, während das Spiegelbild eines derartigen Krystalles s als rechte trigonale Pyramide zweiter Art zeigen würde. Häufiger sind gerade Abstumpfungen derselben Kanten $d = \{011\}$ mit $z = \{504\}$, d. i. einer negativen rechten trigonalen Pyramide dritter Art (s. Fig. 403); eine Form der letzteren Art ist auch die in Fig. 404 dargestellte $t = \{\bar{1}85\}$. Flächenreichere Krystalle beschrieb Eakle. Die in Fig. 403 und 404 dargestellten Krystalle sind linksdrehend, während die enantiomorphen mit linken negativen trigonalen Pyramiden dritter Art rechtsdrehend sind. Zwillinge eines rechts- und eines linksdrehenden Krystalles

Fig. 401.

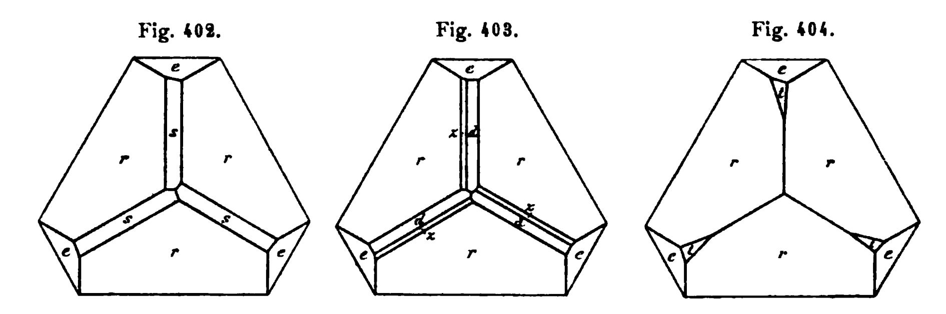


Fig. 402. Fig. 403. Fig. 404.

nach $\{111\}$ symmetrisch mit den Polecken der trigonalen Pyramiden verwachsen, zeigen durch die parallelen $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$-Flächen die Airyschen Spiralen (s. S. 161). Keine deutliche Spaltbarkeit. Doppelbrechung +, ziemlich schwach. Drehung der Polarisationsebene (1 mm):

für die Linie	C	D	E	F	G
	19°,4	23°,3	28°,5	34°,2	47°,1

17. Rhomboedrische Klasse.

(Rhomboedrisch-tetartoedrische Klasse.)

Wenn die dreizählige Hauptaxe eines trigonalen Krystalles zugleich eine sechszählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie ist, so treten zu den drei Flächen einer oberen trigonalen Pyramide dritter Art, der allgemeinen Form der vorigen Klasse, noch als gleichwertig die drei in nebenstehender Projection (Wiederholung von Fig. 388) durch die Pole ∘ markierten unteren Flächen, d. h. die drei parallelen, hinzu. Die vollständige einfache Form $\{pqr\}$ ist ein Rhomboeder dritter Art, und nach dieser, den allgemeinsten Fall repräsentierenden Form ist die

Klasse benannt. Dieselben Flächenwinkel besitzen noch drei andere Rhomboeder, nämlich $\{prq\}$, $\{p'q'r'\}$ und $\{p'r'q'\}$, zwischen denen dieselben Beziehungen obwalten, wie zwischen den vier gleichgestalteten oberen trigonalen Pyramiden dritter Art in der 16. Klasse (s. S. 451). Man könnte diese vier Rhomboeder daher ebenso als rechtes und linkes positives und als rechtes und linkes negatives bezeichnen, nur hat diese Benennung hier nicht diejenige Bedeutung, welche ihr bei trigonal-pyramidalen Krystallen zukommt, von denen die rechten und linken Combinationen enantiomorph sind, während sie hier zur Deckung gebracht werden können.

Wenn $r = q$, so resultiert ein Rhomboeder erster Art, welches man positiv nennt, wenn die drei oberen Pole in der Projection auf den drei positiven Radien liegen, d. h. wenn seine drei oberen Flächen die Stellung einer positiven trigonalen Pyramide erster Art (s. S. 452) besitzen, andernfalls es ein negatives genannt wird. Ebenso sind für den speciellen Fall $p + q = 2r$ Rhomboeder zweiter Art von zweierlei Stellung zu unterscheiden, welche man so, wie die entsprechenden trigonalen Pyramiden, rechte und linke nennen kann, deren Combinationen mit den Rhomboedern erster Art aber nicht enantiomorph sind. Während die Beziehungen der Rhomboeder der drei Arten zueinander analoge sind, wie sie für die trigonalen Pyramiden S. 452 auseinandergesetzt wurden, resultieren für den Fall, daß die Flächen der Hauptaxe parallel sind, in dieser Klasse nicht trigonale, sondern hexagonale Prismen. Fallen die sechs Pole der Projection a. vor. S., welche dann sämtlich im Grundkreise liegen, an die Enden der punktierten Durchmesser, so entsteht das hexagonale Prisma erster Art (Fig. 405); liegen sie in der Mitte zwischen jenen Endpunkten, das hexagonale Prisma zweiter Art, welches dieselbe Gestalt, aber eine 30° um die Hauptaxe gedrehte Stellung hat; endlich bei intermediärer Lage der Pole ein hexagonales Prisma dritter Art. Da in dieser Klasse die trigonale Symmetrieaxe nicht polar ist, so ist die Basis, die eine Grenzform aller Rhomboeder (während die andere ein hexagonales Prisma ist), ein Pinakoid. So ergibt sich die folgende Übersicht der Formen:

Fig. 405.

$\{111\} = \{0001\}$ Basis

$\{2\bar{1}\bar{1}\} = \{10\bar{1}0\}$ hexagonales Prisma erster Art

$\{10\bar{1}\} = \{11\bar{2}0\}$ hexagonales Prisma zweiter Art

$\{pqr\}_{p+q+r=0} = \{hik0\}$ hexagonales Prisma dritter Art

$\{pqq\} = \{h0\bar{h}l\}$ Rhomboeder erster Art

$\{pqr\}_{p+q=2r} = \{h.h.\overline{2h}.l\}$ Rhomboeder zweiter Art

$\{pqr\} = \{hikl\}$ Rhomboeder dritter Art.

Beispiele.

Dolomit $= (CO_3)_2MgCa$. $\alpha = 102^\circ 53'$ ($a : c = 1 : 0{,}8322$ Miller). Gewöhnliche Form das Spaltungsrhomboeder $\{100\}$ Fig. 144 (S. 252), dessen Ätzfiguren die Zugehörigkeit zur vorliegenden Klasse beweisen. Doch kommen auch Combinationen wie Fig. 406 (nach Becke) vor: $t = \{3\bar{1}\bar{1}\}$, $r = \{100\}$, $s = \{20\bar{1}\}$, $a\{10\bar{1}\}$. Spaltbarkeit $\{100\}$ vollkommen. Zwillinge, symmetrisch nach $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ (Zwillingsaxe die Normale dazu), ferner Zwillingslamellen nach $\{11\bar{1}\}$. $\omega = 1{,}6817$, $\varepsilon = 1{,}5026$ für D (Fizeau).

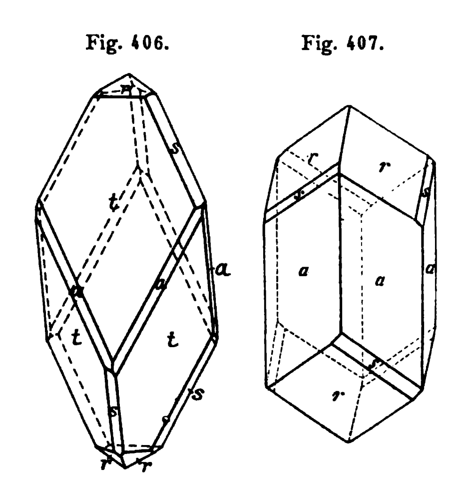


Fig. 406. Fig. 407.

Dioptas $= SiO_4CuH_2$. $\alpha = 111^\circ 42'$ ($a : c = 1 : 0{,}5342$ Breithaupt). Combination (Fig. 407): $a = \{10\bar{1}\}$, $r = \{11\bar{1}\}$, $s = \{7\bar{7}6\}$. Spaltbar vollkommen nach $\{100\}$, welches die Polkanten des negativen Rhomboeders r gerade abstumpft. Farbe smaragdgrün, Doppelbrechung +, stark. Brechungsindices: $\omega = 1{,}667$, $\varepsilon = 1{,}723$ (Des Cloizeaux).

Phenakit $= SiO_4Be_2$. $\alpha = 108^\circ 1'$ ($a : c = 1 : 0{,}6611$ v. Kokscharow). Combination (Fig. 408, in gerader Projection von oben gesehen): $r = \{100\}$, $z = \{22\bar{1}\}$, $p = \{210\}$, $p_{,} = \{201\}$, $d = \{110\}$, $x = \{12\bar{1}\}$, $x_{,} = \{21\bar{1}\}$,

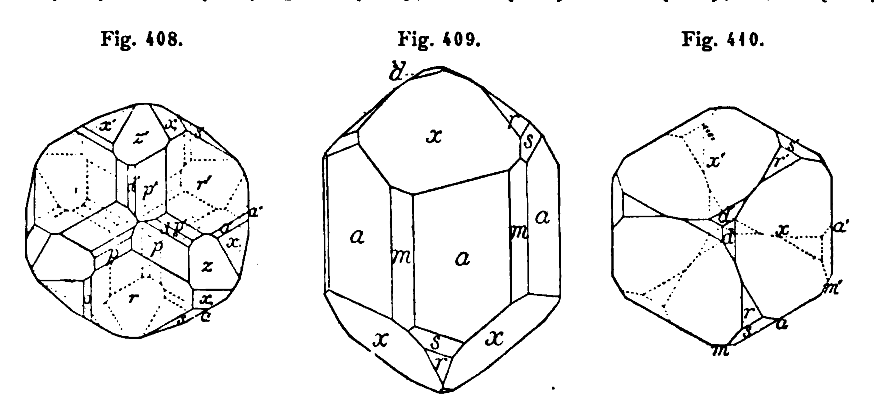


Fig. 408. Fig. 409. Fig. 410.

$s = \{20\bar{1}\}$, $o = \{3\bar{1}1\}$. Während diese Krystalle einen flach rhomboedrischen Habitus besitzen, kommen auch prismatische der in Fig. 409 und 410 (letztere wie 408 gestellt) wiedergegebenen Ausbildung vor mit den Formen: $a = \{10\bar{1}\}$, $m = \{2\bar{1}\bar{1}\}$, $x = \{12\bar{1}\}$, $s = \{20\bar{1}\}$, $r = \{100\}$, $d = \{110\}$. Zwillinge nach $\{111\}$, mit paralleler Hauptaxe so durcheinander gewachsen, daß die Prismenzone wie die eines einfachen Krystalles erscheint, während an den Enden die drei Rhomboederkanten des einen Krystalles

aus den entsprechenden Rhomboederflächen des andern herausspringen. Spaltbar nach {100} und {10$\bar{1}$} unvollkommen. Brechungsindices nach Offret:

	Li-Linie	*D*-Linie	grüne *Cd*-Linie	blaue *Cd*-Linie
ω =	1,6509	1,6542	1,6570	1,6610
ε =	1,6666	1,6700	1,6729	1,6770

Ammoniumperjodat (halbüberjodsaures Ammonium Rammelsbergs) $=J_2O_9(NH_4)_4.3H_2O$, zeigt neben {100}, {110}, {11$\bar{1}$}, {10$\bar{1}$}, {111} sehr untergeordnete Flächen eines nicht meßbaren Rhomboeders dritter Art in der Zone [$\bar{1}$11, 10$\bar{1}$] (Groth, unveröff. Beob.). Doppelbrechung +, schwach.

18. Trigonal-trapezoedrische Klasse.

(Trapezoedrisch-tetartoedrische Klasse.)

Tritt zu der dreizähligen Axe der einfachen Symmetrie eine zweizählige Axe (und infolgedessen noch zwei gleichwertige) in der dazu senkrechten Ebene (111) hinzu, so resultieren die in nebenstehenden Projectionen (Fig. 411 *a* und *b*), deren erste die Wiederholung von Fig. 394 ist, dargestellten Symmetrieverhältnisse. Die aus den sechs gleichwertigen Flächen, deren Pole in der ersten Projection eingetragen sind, bestehende einfache Form {*pqr*}, in Fig. 412*a* abgebildet, heißt nach der Trapezform ihrer Flächen trigonales Trapezoeder, und zwar wird das so orientierte Trapezoeder, entsprechend der S. 451 für die analog orientierten trigonalen Pyramiden eingeführten Benennung, als »rechtes« bezeichnet. Geht man statt des Poles (*pqr*) von dem Pole (*prq*) aus, welcher in der Projection zu dem ersteren symmetrisch auf der entgegengesetzten Seite des senkrechten Durchmessers liegt, so folgt aus der Symmetrie dieser Klasse die Gleichwertigkeit der sechs in Fig. 411 *b* markierten Pole, welche dem in Fig. 412*b* abgebildeten, zu Fig. 412*a* enantiomorphen »linken« trigonalen Trapezoeder entsprechen. Diese beiden Formen werden nach

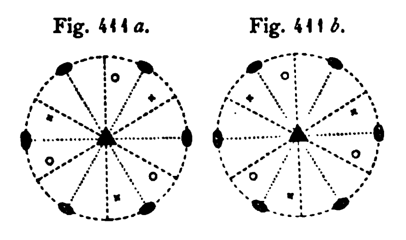


Fig. 411 *a*. Fig. 411 *b*.

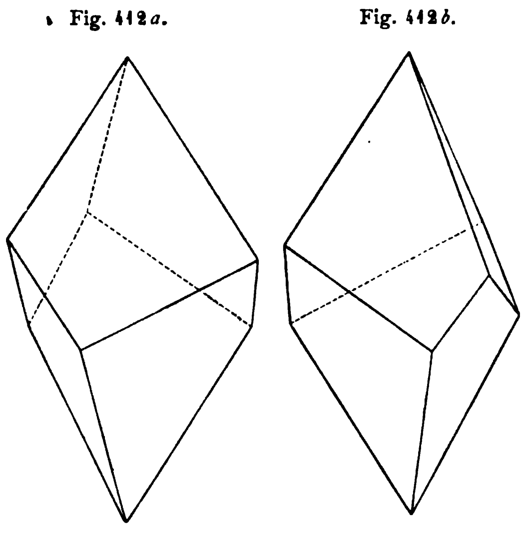


Fig. 412 *a*. Fig. 412 *b*.

dem S. 451 angegebenen Principe als positive bezeichnet und sie enthalten die Gesamtheit aller Flächen, deren Symbole resultieren, wenn man sämtliche möglichen Vertauschungen der drei Indiceszahlen (ohne Änderung ihrer Vorzeichen) vornimmt. Die Erfahrung lehrt aber, daß dieselben an den dieser Klasse angehörigen Krystallen, welche die Polarisationsebene des Lichtes drehen, im allgemeinen nicht combiniert auftreten, sondern die eine nur an den rechtsdrehenden, die andere nur an den linksdrehenden erscheint. Wie es zwei negative trigonale Pyramiden von derselben Gestalt, wie die beiden positiven, aber mit andern Indices (s. S. 452) gibt, so existieren auch zwei negative Trapezoeder, welche sich von den beiden a. vor. S. abgebildeten nur durch ihre Stellung (sie erscheinen um 60° oder, was zu demselben Resultate führt, 180° um die Hauptaxe gegen jene gedreht) unterscheiden. Wie namentlich am Quarze nachgewiesen ist, gilt für diese das gleiche Gesetz, daß sie im allgemeinen an den Krystallen mit Drehungsvermögen einander ausschließen, aber das linke ist es, welches an den rechtsdrehenden Krystallen auftritt, während ein rechtes nur an linksdrehenden vorkommt (vgl. auch S. 454). Diesem Verhältnisse entspricht auch das Auftreten der Formen, welche gleichsam specielle Fälle der Trapezoeder darstellen, d. h. derjenigen, welche sich ergeben, wenn die Pole in einer der drei Seiten oder der drei Ecken des sphärischen Dreieckes liegen, welches in den Projectionen Fig. 411 von zwei benachbarten Radien und dem zwischenliegenden Zwölftel des Grundkreises eingeschlossen wird.

Liegen die Pole auf denjenigen sechs Radien, welche den Winkel zweier Symmetrieaxen halbieren, so entsprechen sie offenbar einem Rhomboeder (erster Art), und aus Fig. 411 *a* und *b* ist ohne weiteres ersichtlich, daß für diesen speciellen Fall das rechte und linke Trapezoeder zusammenfallen, d. h. daß ein positives Rhomboeder die gemeinsame Grenzform je einer Reihe rechter und linker positiver Trapezoeder darstellt, also sowohl an rechtsdrehenden, wie an linksdrehenden Krystallen auftreten kann. Das gleiche gilt für die negativen Rhomboeder, zu denen man gelangt, wenn man von einem rechten oder linken negativen Trapezoeder ausgeht und $r = q$ setzt. Je weniger diese beiden Indices sich voneinander unterscheiden, desto geringer ist der Unterschied der Flächenwinkel der beiden Arten von Mittelkanten eines Trapezoeders, desto ähnlicher also die Umrißfigur seiner Flächen einem Rhombus, und um so mehr nähert sich die Gestalt des Trapezoeders derjenigen eines Rhomboeders, in welche sie für jenen speciellen Fall übergeht. Betrachten wir nun den zweiten Fall, daß die sechs gleichwertigen Pole in der Fig. 411 *a* in den Symmetrieaxen liegen, so gelangt offenbar jedesmal die Projection eines unteren mit der eines oberen zur Deckung, und es resultiert eine »rechte« trigonale Bipyramide zweiter Art (Fig. 413 *a*), welche identisch ist mit derjenigen, welche man erhält, wenn man von einem linken negativen Trapezoeder ausgeht (dessen obere Pole × in der Projection da liegen, wo sich die

unteren o eines positiven befinden, und umgekehrt). Ebenso ist die entsprechende »linke« trigonale Bipyramide (Fig. 413*b*) die gemeinsame Grenzform je einer Reihe linker positiver und rechter negativer Trapezoeder, ist

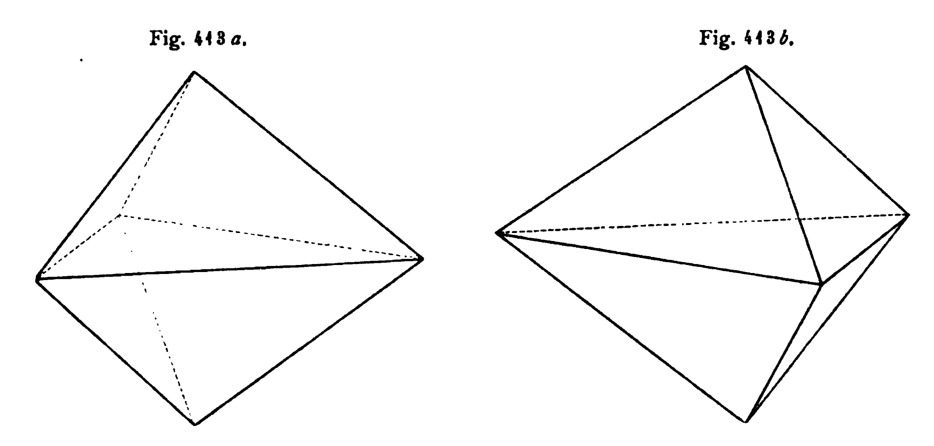
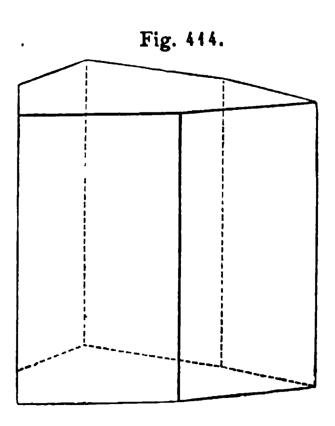


Fig. 413 *a*. Fig. 413 *b*.

also ebenso charakteristisch für die »linken« Krystalle mit Drehungsvermögen, wie die erstere Bipyramide für die »rechten«. Der dritte specielle Fall ist derjenige, in welchem die Pole auf dem Grundkreise liegen, und dieser entspricht Formen, denen sich die Trapezoeder um so mehr nähern, je spitzer sie sind. Da alsdann der Unterschied oberer und unterer Flächen aufhört, liefern je zwei Reihen von Trapezoedern eine gemeinsame Grenzform, und zwar ist aus Fig. 411*a* zu ersehen, daß die aus der Verschiebung der sechs Pole in den Grundkreis resultierende Form sich sowohl ergibt, wenn man von einem rechten positiven Trapezoeder, wie es in der Figur markiert ist, als wenn man von einem linken negativen Trapezoeder ausgeht. Diese Form, in Fig. 414 in der richtigen Stellung mit dem Pinakoid {111} combiniert dargestellt, ist ein ditrigonales Prisma, dessen drei stumpfere Kanten je dem einen, die drei schärferen je dem andern Pole der drei gleichwertigen zweizähligen Symmetrieaxen entsprechen. Geht man dagegen von einem linken positiven Trapezoeder (Fig. 411*b*) aus, so erhält man als gemeinsame Grenzform einer solchen Reihe und einer entsprechenden rechter negativer Trapezoeder ein ditrigonales Prisma, welches sich von dem vorigen durch seine Stellung unterscheidet, indem seine schärferen Kanten an denjenigen Polen der drei horizontalen Symmetrieaxen liegen, wo bei dem ersteren die stumpfen Kanten gelegen sind, und umgekehrt, d. h. man erhält das eine aus dem andern durch Drehung von 60° (oder 180°) um die Hauptaxe. Der Unterschied

Fig. 414.



der zweierlei Kanten der ditrigonalen Prismen wird um so geringer, je näher ihre Pole den Punkten liegen, welche auf dem Grundkreise gleich weit von zwei benachbarten Polen der zweizähligen Symmetrieaxen abstehen; liegen ihre Pole in diesen Punkten selbst, so ist der Abstand je zweier benachbarter = 60°, das Prisma geht in ein hexagonales (erster Art) über, welches die gemeinsame Grenzform sowohl der rechten und linken positiven, wie der rechten und linken negativen Trapezoeder darstellt und daher den »rechten«, wie den »linken« Krystallen gleichmäßig angehört. Andererseits nähern sich die ditrigonalen Prismen, je größer der Unterschied ihrer Kanten wird, um so mehr einer Form, welche erreicht wird, wenn der Flächenwinkel der stumpfen Kanten = 0, d. h. wenn ihre Pole mit denen der Symmetrieaxen zusammenfallen. Wie aus Fig. 414 *a* ersichtlich, fällt alsdann je ein oberer Pol mit einem unteren zusammen, und es ist daher gleichgültig, ob man von einem rechten positiven oder einem linken negativen Trapezoeder ausgeht; die resultierende Form ist ein »rechtes« trigonales Prisma (zweiter Art) von der Stellung, wie es in Fig. 415 in Combination mit $\{111\}$ wiedergegeben ist, dessen drei Flächen je an einem Pole der zweizähligen Symmetrieaxen liegen. Die drei entgegengesetzten Flächen entsprechen dem »linken« trigonalen Prisma, welches, wie aus Fig. 414 *b* ersichtlich, für den vorliegenden speciellen Fall die gemeinsame Grenzform der linken positiven und der rechten negativen Trapezoeder darstellt. Dementsprechend gehört das erste den »rechten« Krystallen, das zweite den »linken« an. Schließlich bleibt als letzter specieller Fall nur derjenige übrig, daß die Pole der allgemeinen Form mit denen der dreizähligen Symmetrieaxe zusammenfallen; man gelangt hierbei zu demselben Pinakoid $\{111\}$, von welcher Art von Trapezoedern man auch ausgehen mag. Die trigonal-trapezoedrischen Krystalle können also folgende Arten von Formen zeigen:

Fig. 415.

$\{111\} = \{0001\}$ Basis
$\{2\bar{1}\bar{1}\} = \{10\bar{1}0\}$ hexagonales Prisma (erster Art)
$\{10\bar{1}\} = \{11\bar{2}0\}$ trigonales Prisma (zweiter Art)
$\{pqr\}_{p+q+r=0} = \{hik0\}$ ditrigonales Prisma
$\{pqq\} = \{h0\bar{h}l\}$ Rhomboeder (erster Art)
$\{pqr\}_{p+q=2r} = \{h.h.2\bar{h}.l\}$ trigonale Bipyramide (zweiter Art)
$\{pqr\} = \{hikl\}$ trigonales Trapezoeder.

Wie aus der Beschaffenheit dieser Formen hervorgeht, sind in dieser Klasse die drei gleichwertigen zweizähligen Symmetrieaxen (nicht aber die

Hauptaxe) polar und demzufolge bei Nichtleitern der Elektricität, wenn dieselben durch Temperaturänderung elektrisch erregt werden, elektrische Axen. In ausgezeichneter Weise zeigt dies der Quarz (s. Taf. III Fig. 6 und 7), dessen sechs in der Horizontalebene liegende, abwechselnd positive und negative elektrische Pole in gesetzmäßiger Weise der Verteilung der Flächen an den Krystallen entsprechen, so daß die letzteren auch bei ungenügender Ausbildung durch Feststellung ihrer pyroelektrischen Verhältnisse mittels der Kundtschen Methode orientiert werden können.

Beispiele.

Optisch inactive Körper.

Zinnober = HgS. $\alpha = 92^\circ 30'$ ($a:c = 1:1{,}1453$ Schabus). Die gewöhnliche Combination (Fig. 416) zeigt außer $c = \{111\}$ und $m = \{2\bar{1}\bar{1}\}$ zwei Rhomboeder, welche in den Beschreibungen dieses Minerales meist als negative betrachtet werden und dementsprechend auch in der Figur gestellt sind; das vorherrschende r' hat die gleichen Flächenwinkel, wie $r = \{100\}$ unter den positiven, und daher das Symbol $\{22\bar{1}\}$, während $i = \{33\bar{1}\}$.

Fig. 416. Fig. 417. Fig. 418.

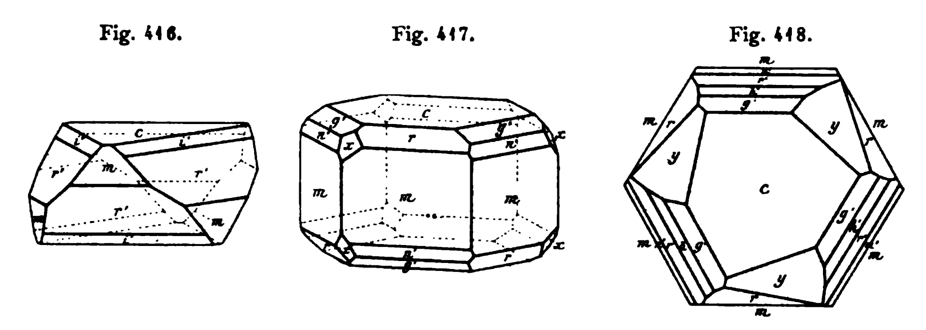
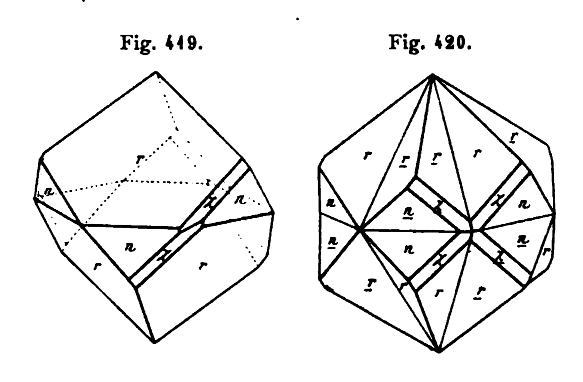


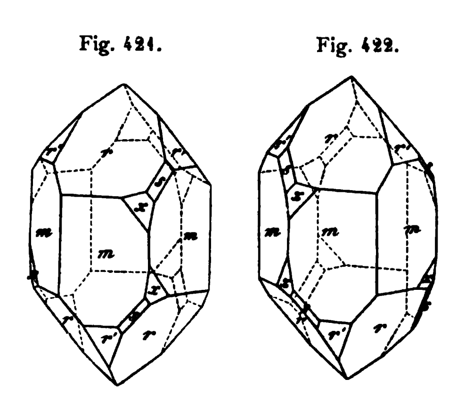
Fig. 417 ist die Abbildung eines kurz prismatischen Krystalles mit den Formen: $c = \{111\}$, $m = \{2\bar{1}\bar{1}\}$, $r = \{100\}$, $g' = \{110\}$, $n' = \{11\bar{1}\}$, $x = \{6\bar{2}1\}$, letztere ein linkes positives Trapezoeder. Fig. 418 stellt einen noch flächenreicheren, nach der Basis tafelförmigen Krystall in gerader Projection auf die letztere Fläche dar, an welchem außer den bereits angeführten Formen noch das negative Rhomboeder $h' = \{55\bar{1}\}$ und recht groß das positive rechte Trapezoeder $y = \{421\}$ auftreten[1]). Die in Fig. 419 abgebildeten Krystalle der Combination $r = \{100\}$, $n = \{5\bar{1}\bar{1}\}$, $\chi = \{13.1.\bar{5}\}$ sind nach Tschermak rechtsdrehend, aber häufig mit einem links-

1) Es muß indessen bemerkt werden, daß an derartigen flächenreichen Krystallen des Zinnobers nach A. Schmidt auch kleine Flächen solcher entgegengesetzter Trapezoeder auftreten, welche nach der a. folg. S. angegebenen und an den Krystallen des Quarzes beobachteten Regel einander ausschließen würden. Da die betreffenden Zinnoberkrystalle nicht optisch untersucht werden konnten, so ist es zweifelhaft, ob diese Erscheinung auf einer, bei diesem Minerale sehr häufigen, Zwillingsbildung beruht, oder ob dasselbe in dieser Hinsicht vom Quarz sich abweichend verhält (vgl. übrigens S. 464).

drehenden enantiomorphen Krystalle zu einem nach {111} symmetrischen Durchkreuzungszwillinge (Fig. 420) verbunden. Spaltbarkeit nach {$2\bar{1}\bar{1}$} vollkommen. Die Krystalle besitzen das größte bisher beobachtete Drehungsvermögen, welches nach Des Cloizeaux 15mal so groß als dasjenige des Quarzes ist. Infolge von Verwachsung rechts- und linksdrehender Partien nach dem erwähnten Zwillingsgesetze sind häufig in basischen Platten die Airyschen Spiralen zu beobachten. Doppelbrechung +; $\omega = 2{,}854$, $\varepsilon = 3{,}201$ für Rot.


Fig. 419. Fig. 420.

Quarz = SiO_2. $\alpha = 93^0\,56\frac{1}{2}'$ ($a:c = 1:1{,}0999$ Kupffer). Die gewöhnlichsten Formen dieses, des verbreitetsten Minerales, sind $m = \{2\bar{1}\bar{1}\}$, $r = \{100\}$ und $r' = \{22\bar{1}\}$, welche letzteren beiden oft von ungefähr gleicher Größe eine Combination bilden, welche einer hexagonalen Bipyramide gleicht (vgl. S. 449). Zu diesen Formen treten nun nicht selten solche hinzu, deren Combination mit jenen die Enantiomorphie der Quarzkrystalle erkennen läßt, nämlich $s = \{41\bar{2}\}$ (in den Zonen rm und $r'm$) als rechte trigonale Bipyramide an den rechtsdrehenden Krystallen (Fig. 421) und dessen Spiegelbild $s = \{4\bar{2}1\}$ als linke trigonale Bipyramide an den linksdrehenden Krystallen (Fig. 422); ferner $x = \{4\bar{1}\bar{2}\}$ als rechtes positives Trapezoeder an den ersteren, das enantiomorphe linke positive Trapezoeder $x = \{4\bar{2}\bar{1}\}$ an den letzteren. Außer diesen finden sich noch andere positive Trapezoeder, meist in derselben Zone $r'm$ gelegene, während solche, deren Flächen unter r' liegen und welche wir daher als negative Trapezoeder zu bezeichnen haben, ziemlich selten auftreten. In bezug auf Zusammenvorkommen der verschiedenen Arten von Formen sind, vorzüglich durch G. Rose, folgende Gesetzmäßigkeiten erkannt worden: es gibt zweierlei Quarzkrystalle: 1) rechte; diese zeigen r, r', verschiedene andere Rhomboeder, m; ferner s nur rechts von r, positive Trapezoeder unter r rechts (s. Fig. 421), daneben seltener und untergeordnet negative Trapezoeder unter r', diese aber links; 2) linke mit r, r', andern Rhomboedern und m, wie die vorigen; dagegen s links von r, positive Trapezoeder unter r links


Fig. 421. Fig. 422.

(s. Fig. 422), daneben seltener und untergeordnet negative Trapezoeder unter r', diese aber rechts. Es findet sich demnach an den Krystallen der ersten Art neben rechten positiven und linken negativen Trapezoedern diejenige trigonale Bipyramide, welche zu den gemeinschaftlichen Grenzformen jener gehört; an den Krystallen der zweiten Art linke positive und rechte negative Trapezoeder, sowie die andere trigonale Bipyramide, welche deren gemeinsame Grenzform für den Fall $p+q=2r$ ist. Diese Verschiedenheit steht nun in gesetzmäßigem Zusammenhange mit dem Sinne der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch die Quarzkrystalle; diejenigen der ersten Art sind nämlich die rechtsdrehenden, die der zweiten die linksdrehenden. Das Gesetz des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und dem Drehungsvermögen des Quarzes lautet daher, wenn dasjenige Rhomboeder r, nach dessen Ebenen die (allerdings unvollkommene) Spaltbarkeit stattfindet, d. i. dasjenige, welches meist größer und glänzender ist, als das entgegengesetzte, und unter welchem die gewöhnlichen Trapezoeder vorkommen, zum positiven gewählt wird, folgendermaßen:

1) Rechtsdrehende Krystalle zeigen die trigonale Bipyramide s rechts von r, sowie rechte positive und linke negative Trapezoeder;

2) die linksdrehenden Krystalle zeigen s links von r, sowie linke positive und rechte negative Trapezoeder.

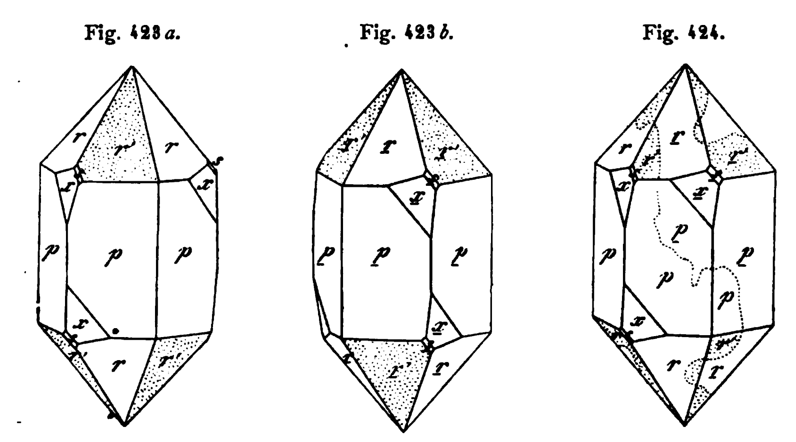
In Fig. 421 und 422 tritt die Polarität der drei horizontalen zweizähligen Symmetrieaxen, d. h. der Verbindungslinien zwischen zwei gegenüberliegenden Prismenkanten, sehr deutlich hervor. Dementsprechend zeigt ein Quarzkrystall, wenn er erwärmt oder nach dem Erwärmen abgekühlt wird, polare Pyroelektricität, wie namentlich Hankel und von Kolenko durch eingehende Untersuchungen nachgewiesen haben; jene Richtungen sind die »elektrischen Axen«, d. h. die beiden gegenüberliegenden Prismenkanten werden entgegengesetzt elektrisch, daher die Krystalle sechs abwechselnd positiv und negativ elektrische Zonen zeigen, welche durch unelektrische Zonen, die über die Mitte der Prismenflächen herablaufen, getrennt werden (s. Taf. III Fig. 6*a*, *b*). Beim Abkühlen werden negativ elektrisch diejenigen drei Prismenkanten, an denen s und die Trapezoeder, d. h. diejenigen Formen erscheinen, welche nach dem obigen Gesetze den Sinn des Drehungsvermögens zu erkennen gestatten. Hiernach ist man imstande, auch an einem Krystalle, welcher jene Formen nicht zeigt, zu bestimmen, ob er, nach der Basis geschliffen, die Polarisationsebene des Lichtes rechts oder links drehen würde; es gehört dazu nur die Unterscheidung von r und r', welche wegen der größeren Ausdehnung, andern Flächenbeschaffenheit usw. des ersteren meist nicht zweifelhaft ist. Untersucht man alsdann den Krystall nach der Kundtschen Methode, und erscheinen dabei die elektrisch negativen Zonen rechts von r, so ist der Krystall rechtsdrehend, im entgegengesetzten Falle linksdrehend. Die Verteilung der Elektricität auf einer nach der Basis geschliffenen Platte eines linksdrehenden Krystalles in der Fig. 6*a* entsprechenden Stellung zeigt Fig. 7 auf Taf. III.

Die Polarität des Quarzes nach den zweizähligen Symmetrieaxen bedingt eine gegenseitige Unabhängigkeit in der Ausbildung der Krystallflächen an deren beiden Seiten, aber nicht ein vollständiges gegenseitiges Ausschließen der an denselben auftretenden Formen; danach könnten auch an den der Fläche *s* und den gewöhnlichen Trapezoedern gegenüberliegenden Ecken trigonale Bipyramiden, Trapezoeder usw. auftreten, aber als von jenen unabhängige Formen, also mit andern Indices oder anderer Flächenbeschaffenheit. In der Tat ist dies der Fall, wenn auch nur außerordentlich selten, und wahrscheinlich handelt es sich hierbei nicht um eigentliche Krystallflächen, sondern um Flächen, welche durch natürliche Ätzung entstanden sind, da dieselben stets ganz rauhe und unebene Oberflächenbeschaffenheit besitzen. Derartige Krystalle zeigen also Formen, für welche das a. vor. S. angegebene Gesetz des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und dem Sinne der Drehung gerade das entgegengesetzte wäre. Abgesehen von ihrem äußerst seltenen Vorkommen und der leichten Unterscheidbarkeit von den gewöhnlichen Formen mittels der Oberflächenbeschaffenheit, sind diese Formen als die entgegengesetzten dadurch mit Sicherheit zu bestimmen, daß sie in den beim Abkühlen positiv elektrisch werdenden Zonen (an den antilogen Polen der elektrischen Axen) am Krystalle liegen, während die an den negativen Zonen (an den analogen Polen) liegenden es sind, welche den Sinn der Drehung dem angeführten Gesetze gemäß bestimmen. Das ausgezeichnetste Beispiel dieser seltenen Art von Krystallen bilden gewisse Quarze von Carrara, an denen diejenigen Prismenkanten $m:m$, an welchen die Trapezoederflächen nicht liegen, durch das trigonale Prisma zweiter Art abgestumpft erscheinen.

Von großer Wichtigkeit ist die elektrische Untersuchung auch für die Erkennung der Zwillingskrystalle des Quarzes, welche besonders nach zwei Gesetzen gebildet vorkommen:

1) Gewöhnliches Gesetz: Zwei gleichartige, d. h. zwei rechtsdrehende oder zwei linksdrehende, Krystalle sind mit parallelen Hauptaxen so miteinander verbunden, daß die positiven Rhomboederflächen des einen parallel den negativen des andern sind. Da das Spiegelbild eines enantiomorphen Krystalles stets einen entgegengesetzten darstellt, so kann ein solcher Zwilling aus zwei gleichartigen Quarzen niemals symmetrisch sein

Fig. 423 *a*. Fig. 423 *b*. Fig. 424.



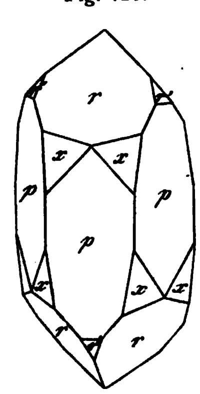
in bezug auf irgendeine Krystallfläche. Man erhält die relative Stellung der beiden Krystalle, wenn man, von der parallelen ausgehend, den einen um 180° um die Hauptaxe dreht; s. Fig. 423 *a* und *b*, zwei rechtsdrehende

Krystalle darstellend, an denen das negative Rhomboeder *r'* durch Punktierung unterschieden ist. Zwei derartige Krystalle verwachsen nun fast immer so miteinander, daß sie sich gegenseitig mit unregelmäßigen Grenzen vollständig durchdringen und äußerlich ganz so erscheinen wie ein einfacher Krystall, Fig. 424, dessen Oberfläche jedoch teilweise dem einen, teilweise dem andern Krystalle angehört. Die Zusammensetzung des scheinbar einfachen Krystalles wird durch zweierlei Eigenschaften desselben erkannt: die Flächen der trigonalen Bipyramide *s* und des Trapezoeders *x* liegen oft an zwei benachbarten Ecken, während sie an einfachen Krystallen oben (ebenso unten) nur an den abwechselnden vorkommen; je nach der Art der Durchdringung sind die bezeichneten Flächen in der verschiedensten Zahl und Verteilung am Krystalle vorhanden, es können z. B. oben alle sechs, unten gar keine auftreten usf. Ein zweites Erkennungsmittel der Verwachsung liegt in der verschiedenen Oberflächenbeschaffenheit der beiden Rhomboeder *r* und *r'*, von welchen gewöhnlich das letztere weniger eben und glänzend, als das erstere, manchmal auch (meist durch natürliche Ätzung) ganz matt ist; hierdurch sind nun bei sehr vielen derartigen Verwachsungen auf den Rhomboederflächen die Grenzen der beiden Krystalle deutlich zu sehen, da Teile derselben glänzend (*r* des einen), andere matter (*r'* des andern) erscheinen; natürlich muß an den Kanten stets eine glänzende an eine matte Fläche, demselben Krystalle angehörig, zusammenstoßen. Wenn die Differenz der Beschaffenheit der beiden Flächen so gering ist, daß sie sich der Beobachtung entzieht, und wenn weder trigonale Pyramiden, noch Trapezoeder an einem Krystalle auftreten, ist er von einem einfachen nur durch pyroelektrische Untersuchung zu unterscheiden. Während ein einfacher Krystall regelmäßig abwechselnde positive und negative Zonen zeigt, werden durch die Zwillingsstellung offenbar die beiden Pole der zweizähligen Symmetrieaxen vertauscht: wenn also zwei benachbarte Prismenkanten nicht demselben Krystalle, sondern die eine dem ersten, die andere dem zweiten angehört, so zeigen sie gleiche Elektricität statt verschiedener; geht die Zwillingsgrenze über eine Prismenkante fort, wie in Fig. 424 vorn rechts, so ist an dieser Stelle die elektrische Zone unterbrochen durch den Beginn der entgegengesetzten. Läuft die Zwillingsgrenze an einer Prismenkante entlang, so zeigen die zu beiden Seiten derselben liegenden Flächenteile verschiedene Elektricität, und eine aus dem Krystalle herausgeschnittene basische Platte die in Fig. 8 Taf. III dargestellte Erscheinung. Auf diesem Wege erkennt man, daß viele äußerlich einfach erscheinende Quarzkrystalle aus zahlreichen, unregelmäßig einander durchdringenden und vielfach miteinander abwechselnden Teilen zweier Krystalle in Zwillingsstellung bestehen.

2) Brasilianisches Gesetz: Zwillingsebene ist eine Fläche des Prismas zweiter Art, d. h. nach dieser Fläche sind die beiden Krystalle zueinander symmetrisch, daher stets ein rechter mit einem linken verbunden ist. Auch bei diesem Gesetze sind die beiden Krystalle des Zwillings fast immer so

durcheinander gewachsen, daß sie äußerlich wie ein einfacher erscheinen, welcher Symmetrie nach den Ebenen von {01$\bar{1}$} zeigt. Treten, wie es an Krystallen von Brasilien (Fig. 425) der Fall ist, die Flächen des Trapezoeders *x* auf, so müssen diese scheinbar ein sog. ditrigonales Skalenoeder (s. Fig. 441 S. 475) bilden, wenn die Zwillingsgrenzen zugleich der Zwillingsebene entsprechen, d. h. der Krystall aus sechs Sectoren, deren Grenzen senkrecht durch die Mitten der Prismenflächen gehen, drei rechtsdrehenden mit rechten *x*-Flächen und drei linksdrehenden mit linken *x*-Flächen, besteht. Da *r* senkrecht zur Zwillingsebene, so ist die zu *r* symmetrische Fläche des zweiten Krystalles ebenfalls *r*, daher die positiven Rhomboederflächen beider Krystalle zusammenfallen, ebenso die negativen. Erwärmt man einen Krystall von der Ausbildung der Fig. 425 und läßt ihn dann abkühlen, so müssen sämtliche sechs Prismenkanten negativ elektrisch werden, weil diejenigen Enden der Nebenaxen, welche die Trapezflächen tragen, nach außen gekehrt sind. Ist das Umgekehrte der Fall, besteht ein derartiger Zwilling aus sechs Sectoren, deren jeder die entgegengesetzte Seite der Nebenaxe nach außen kehrt, so zeigt er gar keine Trapezoederflächen und muß, da auch die *r*-Flächen beider Krystalle zusammenfallen, vollkommen wie ein normaler einfacher Krystall erscheinen; von einem solchen ist er aber leicht zu unterscheiden durch sein pyroelektrisches Verhalten, denn nunmehr muß beim Erkalten an allen sechs Prismenkanten positive Elektricität auftreten. Ebenso wie durch elektrische Untersuchung lassen sich diese Krystalle als Zwillinge natürlich auch erkennen durch Prüfung ihrer optischen Eigenschaften. Diese zeigt, daß sie aus rechts- und linksdrehenden Partien zusammengesetzt sind, und daß in einem Zwillinge von der Form Fig. 425 die rechtsdrehenden Teile sich da befinden, wo äußerlich das rechte Trapezoeder *x* auftritt, die linksdrehenden am linken *x*. Da, wo die Grenzen horizontal verlaufen, zeigt eine basische Platte im polarisierten Lichte die Airyschen Spiralen (S. 161). An Krystallen ohne Trapezoederflächen ist sehr häufig die Art der Durchwachsung eine weit innigere, indem dieselben aus abwechselnden Schichten von Rechts- und Linksquarz bestehen; sind diese zahlreich und dünn, so zeigt eine Platte eines derartigen Krystalles das gewöhnliche schwarze Kreuz der nicht drehenden einaxigen Krystalle. Charakteristisch ist diese Erscheinung für den violett gefärbten Quarz, den sogenannten Amethyst.

Fig. 425.



Spaltbar ist der Quarz nur unvollkommen nach *r* {100}; im allgemeinen zeigt er einen sog. muscheligen Bruch.

Die Ätzfiguren, welche man auf den Krytallflächen des Quarzes mittels Flußsäure erhält (s. Fig. 6 *a* und *b* auf Taf. III), gestatten eine sichere Unterscheidung der beiden Rhomboeder, sowie der rechts- und linksdrehenden

Krystalle voneinander. Auf r erscheinen horizontal verlängerte Vertiefungen, auf r' schief verlängerte, und zwar geht deren Längsrichtung bei den linksdrehenden Krystallen (Fig. 6 *a*), wenn man eine obere r'-Fläche betrachtet, von links oben nach rechts unten, bei den rechtsdrehenden (Fig. 6*b*) umgekehrt. Außerdem entstehen an Krystallen, welche keine Trapezoeder- oder s-Flächen zeigen, solche durch die Ätzung, und zwar an den Kanten rechts von r, wenn der Krystall rechtsdrehend ist, links von r im entgegengesetzten Falle (Leydolt). Wichtige Untersuchungen über die in der Natur erfolgte Ätzung des Quarzes durch (Carbonate enthaltende) wässerige Lösungen, welcher wesentlich die S. 465 erwähnte Oberflächenbeschaffenheit von r' zuzuschreiben ist, wurden von Molengraaff angestellt.

Die Drehung des Quarzes beträgt für 1 mm Dicke nach den Messungen von Soret und Sarasin:

für die Linie A = 12°,65
- - - B = 15 75
- - - C = 17 31
- - - D = 21 70
- - - E = 27 54
- - - F = 32 76
- - - G = 42 59
- - - H = 51 19

(für die äußerste ultraviolette Linie 26 im Cadmiumspectrum: 235°,97).

Der Quarz ist optisch positiv und besitzt eine ziemlich schwache Doppelbrechung; die Brechungsindices des ordentlichen und außerordentlichen Strahls sind für dieselben Linien (nach den neuesten Messungen von Macé de Lépinay):

	ω	ε
A	1,53919	1,54813
B	1,54100	1,55000
C	1,54190	1,55093
D	1,54425	1,55336
E	1,54717	1,55640
F	1,54969	1,55899
G	1,55425	1,56368[1])
H	1,55816	5,56775

1) Für diese Linie, welche Macé de Lépinay nicht beobachtete, sind die von Wülfing gefundenen Werte eingesetzt. Die Zahlen des ersteren entsprechen der Temperatur 15°, die Änderung der Brechungsindices für 1° beträgt zwischen 0° und 100° nach Dufet für ω: — 0,00000625, für ε: — 0,00000722. Für die obenerwähnte ultraviolette Cadmiumlinie 26 fand Sarasin: ω = 1, 63040, ε = 1,64268; für die Strahlen größter beobachteter Brechbarkeit (Aluminium 32): ω = 1,67500, ε = 1,68910. Die Doppelbrechung nimmt also mit der Brechbarkeit der Strahlen zu.

Unterschwefelsaures (dithionsaures) Kalium $= S_2O_6K_2$. $\alpha = 108^\circ 27'$ ($a : c = 1 : 0{,}6467$ Weiss). Die Krystalle zeigen zuweilen rhomboedrische Ausbildung mit untergeordneten Flächen einer trigonalen Bipyramide oder eines Trapezoeders, gewöhnlich aber die anscheinend hexagonale Combination Fig. 426: $c = \{111\}$, $r = \{100\}$, $r' = \{22\bar{1}\}$, $m = \{2\bar{1}\bar{1}\}$, $n = \{10\bar{1}\}$, $s = \{41\bar{2}\}$, $s' = \{4\bar{2}1\}$; wie Fock auf optischem und Hankel und Lindenberg auf elektrischem Wege nachgewiesen haben, sind die letzteren Krystalle stets Zwillinge mit der Hauptaxe als Zwillingsaxe, d. h. nach dem beim Quarze gewöhnlichen Gesetze (s. S. 464). Doppelbrechung +. Drehung nach Pape:

Fig. 426.

Linie $C = 6^\circ{,}2$
- $D = 8{,}4$
- $E = 10{,}5$
- $F = 12{,}3$

Unterschwefelsaures Blei $= S_2O_6Pb.4H_2O$. $\alpha = 81^\circ 19'$ ($a : c = 1 : 1{,}5160$ Březina). Gewöhnliche Combination (ähnlich Fig. 430, S. 470): $\{111\}$, $\{100\}$, $\{22\bar{1}\}$; selten treten hierzu die trigonalen Bipyramiden $\{201\}$ (an rechtsdrehenden Krystallen) oder $\{210\}$ (an linksdrehenden), ferner $\{41\bar{2}\}$ bzw. $\{4\bar{2}1\}$ und das trigonale Prisma $\{10\bar{1}\}$ bzw. $\{1\bar{1}0\}$. Meist Zwillinge nach dem ersten Gesetze des Quarzes (s. S. 464), doch kommen auch solche mit $\{111\}$ als Zwillingsebene und Combinationen beider Zwillingsgesetze vor. Keine deutliche Spaltbarkeit; Härtecurve auf allen Flächen kreisförmig. Die Krystalle sind optisch positiv, schwach doppeltbrechend und zeigen nach Pape folgende Drehung:

Linie $C = 4^\circ{,}1$
- $D = 5{,}5$
- $E = 7{,}2$
- $F = 8{,}9$

Unterschwefelsaures Calcium $= S_2O_6Ca.4H_2O$. Isomorph mit dem vorigen[1]). Doppelbrechung —, Drehung $2^\circ{,}1$ für Grün (Pape).

Unterschwefelsaures Strontium $= S_2O_6Sr.4H_2O$. $\alpha = 81^\circ 47'$ ($a : c = 1 : 1{,}5024$ Heeren). $\{111\}$, $\{100\}$, $\{22\bar{1}\}$ in ungefähr gleicher Größe. Doppelbrechung —. Drehung für Gelb mindestens $3^\circ{,}4$ (die Krystalle enthalten nach Bodländer stets entgegengesetzt drehende Partien, sind also Zwillinge und ergeben daher sehr verschiedene Werte der Drehung; die angegebene Zahl ist die höchste von dem genannten Beobachter gefundene,

[1]) Es muß bemerkt werden, daß bei diesem und dem folgenden Salze von Baumhauer Ätzfiguren beobachtet wurden, welche Combinationen rechter und linker trigonaler Trapezoeder entsprechen, also insofern nicht mit der trigonal-trapezoedrischen Symmetrie im Einklange stehen, als beim Quarze jene einander auch in den Ätzfiguren ausschließen.

welche aber möglicherweise noch zu niedrig ist, da die untersuchte Platte ebenfalls noch umgekehrt drehende Teile enthalten haben kann.

Benzil = $C_{14}H_{10}O_2$. $\alpha = 78°13'$ ($a : c = 1 : 1,6322$ Martin). Vorherrschend $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, an den Enden $\{100\}$ oder: $\{111\}$ und untergeordnet $\{100\}$, $\{22\bar{1}\}$, $\{110\}$. Auf den Prismenflächen unsymmmetrische Ätzfiguren. Spaltbarkeit $\{111\}$. Drehung 25°,0 für Natriumlinie. Doppelbrechung +; Brechungsindices:

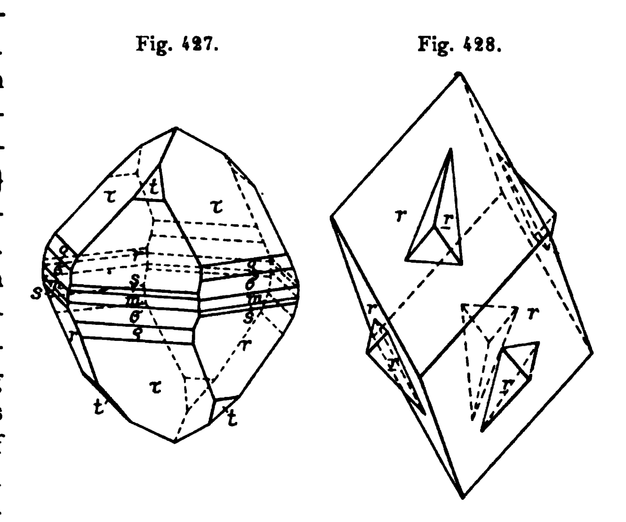
$$\omega = 1,6588. \quad \varepsilon = 1,6784$$

für die Linie D (Des Cloizeaux).

Optisch active Körper.

Rechtsweinsaures Rubidium $C_4H_4O_6Rb_2$. $\alpha = 73°11'$ ($a : c = 1 : 1,8240$ Traube). Combination (Fig. 427): $r = \{100\}$, $\tau = \{110\}$, $t = \{411\}$, $\varrho = \{22\bar{1}\}$, $\sigma\,\{11\bar{1}\}$, $m = \{2\bar{1}\bar{1}\}$, $s = \{5\bar{1}\bar{1}\}$. Hier sind r mit ϱ, t mit τ und s mit σ correlate Rhomboeder (s. S. 449) und erscheinen auch oft mit ungefähr gleichgroßen Flächen. Andererseits kommt auch $r\{100\}$ allein vor an den Durchkreuzungszwillingen Fig. 428 eines Krystalles von rechts- und eines von linksweinsaurem Rubidium, welche sich aus der Lösung des traubensauren Salzes bilden. Ätzfiguren auf den r-Flächen der beiden Salze enantiomorph. Doppelbrechung —, sehr stark. Die Krystalle des rechtsweinsauren Rubidium drehen die Polarisationsebene des Lichtes links, die des linksweinsauren rechts, und zwar für Na 10°,2 (Traube). Das gleiche gilt für die isomorphen Cäsiumtartrate.

Fig. 427. Fig. 428.



Traubenzucker-Chlornatrium = $2C_6H_{12}O_6 . NaCl . H_2O$. $\alpha = 74°10\frac{1}{2}'$ ($a : c = 1 : 1,7854$ Traube). Combination des Rhomboeders $\{100\}$ mit dem correlaten $\{22\bar{1}\}$, zu denen untergeordnet $\{10\bar{1}\}$ und $\{1\bar{1}0\}$ hinzutreten, so daß die Krystalle anscheinend hexagonal sind; die Zugehörigkeit zu dieser Klasse beweisen aber die unsymmetrischen, auf $\{100\}$ und $\{22\bar{1}\}$ verschiedenen Ätzfiguren. Keine deutliche Spaltbarkeit. Doppelbrechung +. Häufig optische Anomalien, bestehend in einer Teilung der basischen Platten in zweiaxige Sectoren, entsprechend einer rhombischen Drillingsbildung, wie beim Kaliumsulfat (S. 406). Drehungsvermögen nicht beobachtet.

Traubenzucker-Jodnatrium $= 2C_6H_{12}O_6.NaJ.H_2O$. Isomorph mit dem vor. $\alpha = 72°50'$ ($a : c = 1,8388$ Traube). Combination (Fig. 429): $r = \{100\}$, $\varrho = \{22\bar{1}\}$, $m = \{2\bar{1}\bar{1}\}$, $s = \{210\}$, zu welchen Formen zuweilen noch mit sehr schmalen Flächen die entsprechende linke ditrigonale Bipyramide $s' = \{201\}$ hinzutritt. Ätzfiguren, Cohäsion und optische Eigenschaften = vorigem. Die Lösung beider Körper ist rechtsdrehend.

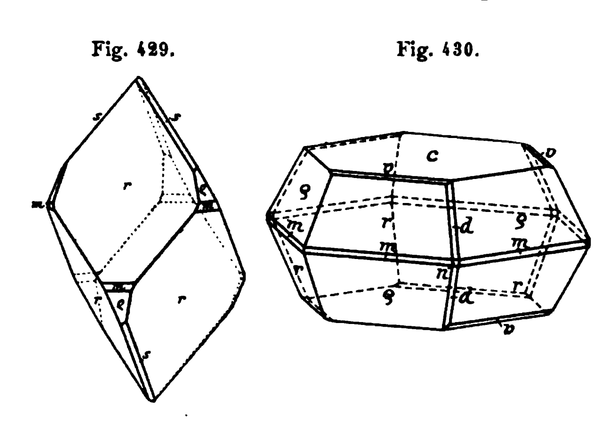


Fig. 429. Fig. 430.

Rechts-Campher (Laurineencampher) $= C_{10}H_{16}O$. $\alpha = 76°44'$ ($a : c = 1,6851$ Traube). Combination (Fig. 430): $c = \{111\}$, $r = \{100\}$, $\varrho = \{22\bar{1}\}$, $d = \{52\bar{1}\}$, $m = \{2\bar{1}\bar{1}\}$, $n = \{10\bar{1}\}$, $v = (10.7.7)$. Doppelbrechung —. Drehung für $Na = + 0°,65$ (v. Seherr-Thoss).

Matico-Campher $= C_{10}H_{16}O$. $\alpha = 111°20'$ ($a : c = 1 : 0,5475$ Hintze). Gewöhnlich nur $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, $\{100\}$, seltener die trigonale Bipyramide $\{7\bar{5}1\}$ und das Trapezoeder $\{3\bar{2}0\}$ an linksdrehenden Krystallen. Doppelbrechung schwach und negativ.

	Brechungsindices: ω	ε	Drehungsvermögen:
Lithiumlinie	1,5415	1,5404	— 1°41′
Natriumlinie	1,5447	1,5436	— 2 4
Thalliumlinie	1,5488	1,5478	— 2 28

(Hintze). Der geschmolzene (flüssige) Matico-Campher und dessen Lösung drehen ebenfalls die Polarisationsebene links (vgl. S. 450).

Patchouli-Campher $= C_{15}H_{26}O$. $\alpha = 111\frac{1}{4}°$ ($a : c = 1 : 0,55$ Des Cloizeaux). Comb. $\{100\}$, $\{22\bar{1}\}$, $\{2\bar{1}\bar{1}\}$[1]). Doppelbrechung —. Drehungsvermögen für Na — 1°,33 (die Lösung dreht sehr stark und ebenfalls links).

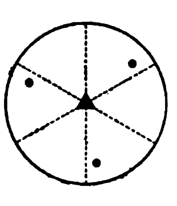
19. Trigonal-bipyramidale Klasse.

(Trigonotyp-tetartoedrische Klasse.)

Die letzte Art, wie zu den drei Flächen einer oberen trigonalen Pyramide dritter Art (der allgemeinen Form der 16. Klasse) drei untere Flächen als gleichwertig hinzutreten und mit jenen eine krystallographisch mögliche

[1]) Ein Unterschied der beiden correlaten Rhomboeder ist hier noch nicht nachgewiesen, daher diese Substanz auch in die 24. Klasse des hexagonalen Krystallsystemes gehören könnte.

»einfache Form« bilden können, ist in der nebenstehenden Projection, der Wiederholung der Fig. 395, dargestellt. Die drei unteren Flächen sind zu den drei oberen symmetrisch in bezug auf die Basis, d. h. die durch eine dreizählige Axe und eine dazu senkrechte Ebene der einfachen Symmetrie charakterisierte allgemeine Form ist eine trigonale Bipyramide dritter Art, welche sich von den in Fig. 413 abgebildeten nur durch ihre Stellung unterscheidet. In dem speciellen Falle, daß ihre Pole in der Projection auf den punktierten Durchmessern liegen, geht sie in eine solche erster Art über; bilden dagegen die Durchmesser, welche die Pole derselben enthalten, 30° mit jenen, so ist es eine solche zweiter Art. Diesen drei Arten von trigonalen Bipyramiden entsprechen für den Fall, daß ihre Flächen der Hauptaxe parallel sind, als Grenzformen, denen sie sich um so mehr nähern, je spitzer sie werden, drei Arten von trigonalen Prismen, sämtlich voneinander nur durch ihre Stellung verschieden. Die andere Grenzform aller dieser Reihen, welcher sich die Bipyramiden um so mehr nähern, je flacher sie werden, ist das basische Pinakoid.



Daß ein Repräsentant dieser Klasse von Krystallen bisher nicht bekannt ist, wurde bereits S. 450 erwähnt.

20. Ditrigonal-pyramidale Klasse.

(Hemimorph-hemiedrische Klasse.)

Treten zu der dreizähligen Axe drei ihr parallele, gleichwertige Ebenen der Symmetrie, so resultiert als allgemeine Form (s. nachstehende Projection) eine ditrigonale Pyramide mit drei schärferen und drei stumpferen Polkanten, welche in Fig. 431 in Combination mit der Fläche $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ abgebildet ist. Dieselbe besteht aus den sechs Flächen, deren Symbole aus demjenigen der einen, (pqr), durch Vertauschung der Indices ohne Änderung des Vorzeichens hervorgehen, und soll mit dem Symbole $\{pqr\}$ bezeichnet werden. Die sechs dazu parallelen Flächen (mit gleichen Indiceszahlen, aber entgegengesetzten Vorzeichen) bilden eine untere ditrigonale Pyramide $\{\bar{p}\bar{q}\bar{r}\}$. Außerdem existieren noch zwei andere Formen von der gleichen Gestalt, aber von anderer Stellung (die Pole der oberen liegen paarweise zu beiden Seiten der drei andern (negativen) Radien der Projection), welche natürlich andere Symbole besitzen (s. S. 452). Man kann diese vier Arten von Formen als obere und untere, positive und negative unterscheiden.

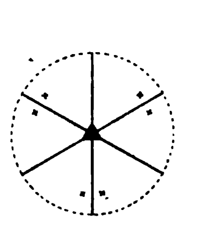
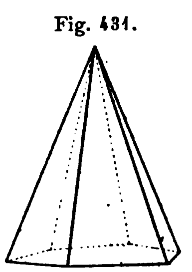


Fig. 431.



Wie in den früher behandelten Klassen, führen nun die S. 445 betrachteten speciellen Fälle der Werte der Indices zu sechs besonderen

Fällen der dieser Klasse angehörigen Formen. Für den Fall $q = r$ wird der Abstand der Pole von den Symmetrieebenen Null, d. h. die ditrigonale Pyramide verwandelt sich in eine trigonale Pyramide erster Art, welche eine positive oder negative, obere oder untere ist, je nachdem, von welcher der a. vor. S. genannten vier Arten von ditrigonalen Pyramiden man ausgeht; da hierbei je zwei Pole zusammenfallen, nähern sich die ditrigonalen Pyramiden dieser Grenzform um so mehr, je kleiner der Flächenwinkel ihrer stumpferen Polkanten wird. Denkt man sich eine derartige Reihe nach der andern Seite fortgesetzt, d. h. die Flächenwinkel der stumpferen Kanten größer werdend, so gelangt man schließlich zu einer Form, deren sechs Polkanten den gleichen Flächenwinkel besitzen, deren Pole also in der Projection in gleichem Abstande zwischen den Symmetrieebenen liegen; dieser Fall, welcher eintritt, wenn $p + q = 2r$, entspricht einer hexagonalen Pyramide zweiter Art (Fig. 432 in Combination mit $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ abgebildet). Von jeder ditrigonalen Pyramide kann eine Reihe analog gestellter spitzerer Formen (mit größerem Parameter der Hauptaxe) abgeleitet werden, deren letzte, d. h. spitzeste, ein aus sechs der Hauptaxe parallelen Flächen bestehendes ditrigonales Prisma ist; in Fig. 433 ist dasjenige abgebildet, welches die gemeinsame Grenzform darstellt der positiven oberen und der negativen unteren ditrigonalen Pyramiden, während das den negativen oberen und positiven unteren Pyramiden entsprechende vorn eine scharfe und

Fig. 432.

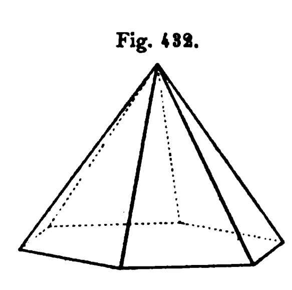
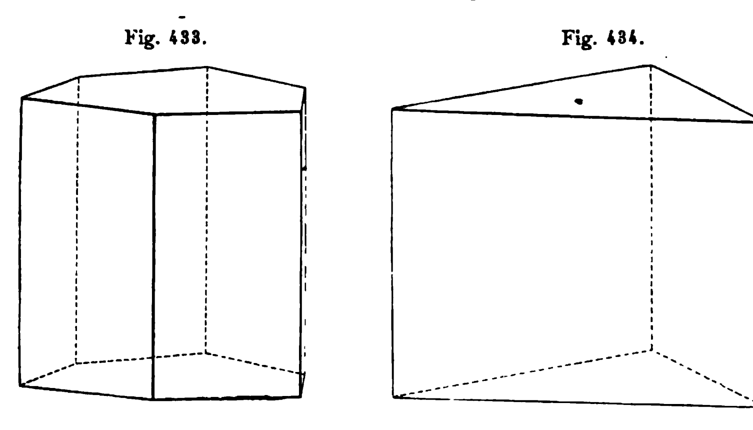


Fig. 433. Fig. 434.



hinten eine stumpfe Kante besitzt. In derselben Weise bildet das positive trigonale Prisma (Fig. 434) die Grenzform der positiven trigonalen Pyramiden, das negative, nur durch seine, um die Hauptaxe 180° gedrehte Stellung davon unterschiedene, trigonale Prisma diejenige der negativen Pyramiden. Einem dieser beiden Prismen nähern sich die entsprechend gestellten ditrigonalen um so mehr, je kleiner der Flächenwinkel ihrer stumpferen Kanten wird; umgekehrt: je größer derselbe wird, desto ähn-

licher wird er demjenigen der schärferen Kanten, und für den Fall der Gleichheit der sechs Flächenwinkel geht das Prisma in ein hexagonales (zweiter Art) über, welches zugleich die gemeinsame Grenzform der oberen und unteren hexagonalen Pyramiden ist. Die andere Grenzform ist für alle Reihen oberer Pyramiden gemeinsam die obere Basisfläche $\{111\}$, für alle unteren das Pedion $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$. So ergibt sich die folgende Übersicht:

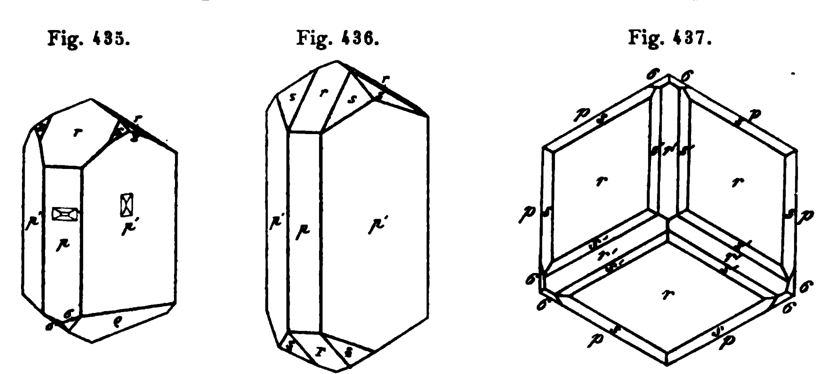
$\{111\} = \{0001\}$ obere Basis; $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\} = \{000\bar{1}\}$ untere Basis
$\{2\bar{1}\bar{1}\} = \{10\bar{1}0\}$ positives trigonales Prisma; $\{\bar{2}11\} = \{\bar{1}010\}$ negatives trig. Pr.
$\{10\bar{1}\} = \{11\bar{2}0\}$ hexagonales Prisma (zweiter Art)
$\{pqr\}_{p+q+r=0} = \{hik0\}$ ditrigonales Prisma
$\{pqq\} = \{h0\bar{h}l\}$ = trigonale Pyramide (erster Art)
$\{pqr\}_{p+q=2r} = \{h \cdot h \cdot \overline{2h} \cdot l\}$ hexagonale Pyramide (zweiter Art)
$\{pqr\} = \{hikl\}$ = ditrigonale Pyramide.

Die Polarität der trigonalen Axe (Hauptaxe) prägt sich bei den Krystallen dieser Klasse durch polare Pyroelektricität nach dieser Richtung aus, und zwar ist es der hierher gehörige Turmalin, an welchem diese Eigenschaft überhaupt zuerst entdeckt wurde.

Beispiele.

Schwefelsaures Natrium-Lithium $= SO_4NaLi$. $\alpha = 110°57'$ ($a:c =$ 0,5624 Scacchi). Combination (Fig. 435): $p' = \{11\bar{2}\}$, $p = \{2\bar{1}\bar{1}\}$, durch Oberflächenbeschaffenheit und Ätzfiguren verschieden, $r = \{100\}$, $s = \{31\bar{1}\}$, $\varrho = \{00\bar{1}\}$, $\sigma = \{1\bar{1}\bar{3}\}$. Zwillinge nach $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$. Der untere Pol in Fig. 435 ist der analoge der elektrischen Axe, und mit diesem sind die Zwillinge (Fig. 436) verwachsen, so daß sie beim Abkühlen an beiden Enden positive, in der Mitte negative Elektricität zeigen. Doppelbrechung + (Traube).

Fig. 435. Fig. 436. Fig. 437.



Arsensilberblende (lichtes Rotgiltigerz) $= AsS_3Ag_3$. Isomorph mit dem folgenden.

Antimonsilberblende (dunkles Rotgiltigerz) $= SbS_3Ag_3$. $\alpha = 104°3'$ ($a : c = 1,0788$ Miller). Die vorherrschend nach $p = \{10\bar{1}\}$ prismatisch ausgebildeten Krystalle zeigen an einem Ende der Hauptaxe (Fig. 437 in gerader Projection dargestellt) oft zahlreiche Formen, nämlich $r = \{100\}$,

$r' = \{110\}$, $s' = \{310\}$, $s = \{20\bar{1}\}$, $\sigma = \{14.\bar{7}.\bar{4}\}$. Zuweilen ist auch das trigonale Prisma $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ herrschend, wie bei dem folgenden Minerale. Spaltbarkeit nach $\{100\}$ deutlich. Doppelbrechung negativ; Hauptbrechungsindices für *Li*-Rot: $\omega = 3{,}084$, $\varepsilon = 2{,}881$.

Turmalin $= (SiO_4)_4 Al_3 B_2 O_5 H_2 \left(\frac{Al}{3}, \frac{Mg}{2}, \frac{Fe}{2}, Li, Na, H\right)_9$. $\alpha = 113°58'$ ($a : c = 1 : 0{,}4474$ Kupffer). Fig. 438 stellt eine häufige Combination dieses Minerales dar mit den Formen: $p = \{11\bar{2}\}$, $m = \{10\bar{1}\}$, $r = \{100\}$, $e = \{11\bar{1}\}$, $\varrho = \{\bar{1}00\}$, $\delta = \{\bar{1}\bar{1}0\}$; in Fig. 439 treten hierzu noch $c' = \{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ und $t = \{20\bar{1}\}$; während diese ditrigonale Pyramide nur untergeordnet ist, kommen auch Krystalle vor, an denen eine derartige Form vorherrscht; auch ditrigonale Prismen (zwischen *m* und *p*) sind nicht selten. Keine deutliche Spaltbarkeit. Der in Fig. 438 und 439 obere Pol der elektrischen Axe, d. h. der Hauptaxe, ist der antiloge. Nach der großen Untersuchung von V. von Worobieff treten an diesem Pole zahlreiche Formen auf, welche für ihn charakteristisch sind, während am analogen Pole flächenreicher Krystalle stets nur wenige Formen auftreten. Wenn $\{111\}$ und $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ an demselben Krystalle ausgebildet sind, unterscheiden sie sich durch ihre Oberflächenbeschaffenheit, ebenso $\{100\}$ und $\{\bar{1}00\}$ usw. — Die Hauptbrechungsindices des farblosen (eisenfreien) Turmalins sind für die *D*-Linie: $\omega = 1{,}6366$, $\varepsilon = 1{,}6193$. Über die starke Absorption des ordinären Strahles in den dunkel gefärbten Turmalinen s. S. 39 und 168.

Fig. 438.

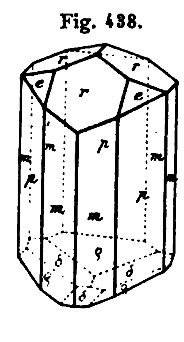


Fig. 439.

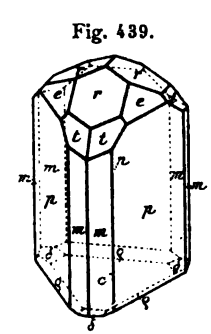
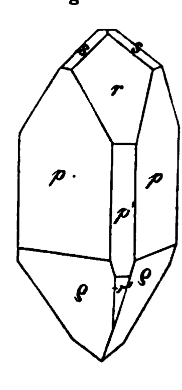


Fig. 440.



Tolylphenylketon $= C_{14}H_{12}O$. $\alpha = 89°59'$ ($a : c = 1 : 1{,}2254$ Bodewig). Combination (Fig. 440): $p = \{\bar{2}11\}$, $p' = \{2\bar{1}\bar{1}\}$, $r = \{100\}$, $s = \{110\}$, $\varrho = \{\bar{1}00\}$, $r' = \{\bar{2}\bar{2}1\}$. Der in der Figur obere Pol ist der analoge der elektrischen Axe. Hauptbrechungsindices für die *D*-Linie: $\omega = 1{,}7170$, $\varepsilon = 1{,}5629$.

21. Ditrigonal-skalenoedrische Klasse.

(Rhomboedrisch-hemiedrische Klasse.)

Die wichtigste Klasse des vorliegenden Krystallsystemes ist diejenige, welche charakterisiert ist durch das Hinzutreten dreier zweizähliger Symmetrieaxen zu den drei Symmetrieebenen der vorigen Klasse, und zwar den Winkel der letzteren halbierend. Wie aus der a. folg. S. wiederholten Fig. 397 hervorgeht, wird dadurch die trigonale Axe eine sechszählige Axe der

zusammengesetzten Symmetrie, d. h. zu den Flächen einer oberen ditrigonalen Pyramide treten diejenigen unteren hinzu, welche sich durch Drehung von 60° um die Hauptaxe und gleichzeitige Spiegelung nach der Basis ergeben. So entsteht als allgemeine Form dieser Klasse das in Fig. 441 abgebildete ditrigonale Skalenoeder mit je drei stumpferen und drei schärferen Polkanten am oberen und unteren Pole der Hauptaxe, an dessen sechs Mittelecken stets eine stumpfe und eine schärfere Polkante mit zweien der sechs Mittelkanten zusammentreffen. Diese Form $\{pqr\}$ enthält also alle Flächen der ditrigonalen Pyramide $\{pqr\}$ und alle dazu parallelen unteren, d. h. die der ditrigonalen Pyramide $\{\bar{p}\bar{q}\bar{r}\}$ (s. S. 471). Ein zweites Skalenoeder von derselben Gestalt, aber durch seine 60° bzw. 180° um die Hauptaxe gedrehte Stellung verschieden, hat das Symbol $\{p'q'r'\}$, dessen Indices sich aus pqr in der S. 452 angeführten Weise ergeben. Man pflegt ein Skalenoeder der ersten Stellung als ein positives, eines der zweiten Stellung, welches also statt einer stumpfen Polkante oben dem Beobachter eine scharfe zukehrt, als ein negatives zu bezeichnen.

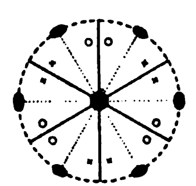
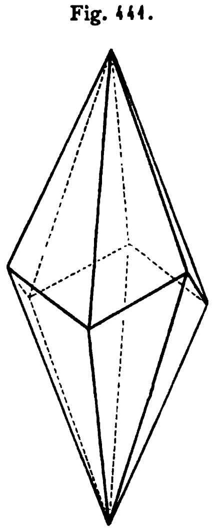


Fig. 441.



Je nachdem der Pol einer Fläche in der Projection auf einer Seite oder in einem Eckpunkte des sphärischen Dreieckes liegt, welches von zwei benachbarten Radien und einem Zwölftel des Grundkreises gebildet wird, entspricht er einer von den folgenden sechs speciellen Fällen der Formen dieser Klasse. 1. Die Flächennormalen fallen in die Symmetrieebenen, die Pole also in die ausgezogenen Durchmesser der Projection; es resultieren die sechs Flächen eines Rhomboeders, welchem sich die Skalenoeder um so mehr nähern, je kleiner der Flächenwinkel ihrer stumpferen Polkanten wird; geht man hierbei von einem positiven Skalenoeder aus, so gelangt man zu einem positiven Rhomboeder, welches oben dem Beobachter eine Fläche zukehrt, während die entsprechende Grenzform einer Reihe negativer Skalenoeder ein negatives Rhomboeder ist, welches gegen jenes 60° bzw. 180° um die Hauptaxe gedreht erscheint. 2. Die zweite Grenzform jener Reihen, und zwar die gemeinsame je einer Reihe positiver und negativer Skalenoeder, ergibt sich, wenn die Pole in der Projection in den Symmetrieaxen (den punktierten Durchmessern) gelegen sind; alsdann fallen nicht, wie im vorigen Falle, je zwei obere und zwei untere, sondern immer ein oberer Pol mit einem unteren zusammen, und es entsteht eine hexagonale Bipyramide zweiter Art (Fig. 442), welcher sich jene Skalenoeder um so mehr nähern, je weniger sich die Flächenwinkel ihrer stumpferen und schärferen Polkanten voneinander unterscheiden, je ähnlicher demnach der basische

Querschnitt einem Hexagon wird; in dem Grenzfalle selbst gehen dementsprechend die auf- und niedersteigenden Mittelkanten der Skalenoeder in die horizontalen »Basiskanten« jener Bipyramide über. 3. Liegen die Pole im Grundkreise der Projection, so resultieren die zwölf, der Hauptaxe parallelen Flächen eines **dihexagonalen Prismas** (Fig. 443), welches sechs schärfere und sechs damit abwechselnde stumpfere Kanten besitzt (ein zwölfseitiges Prisma mit gleichen Kanten würde einer zwölfzähligen Symmetrieaxe entsprechen und ist daher unmöglich). 4. Je kleiner der Flächenwinkel derjenigen Kanten eines dihexagonalen Prismas ist, welche von den Symmetrieebenen halbiert werden, d. h. je näher die Pole ×× bzw. ∘∘ auf dem Grundkreise zusammenrücken, desto mehr nähert sich jenes dem **hexagonalen Prisma** erster Art (Fig. 444). 5. Die zweite Grenzform der dihexagonalen Prismen für den Fall, daß je ein Pol × und ∘ mit demjenigen einer Symmetrieaxe zusammenfällt, ist das hexagonale Prisma zweiter Art (Fig. 445). 6. Liegen

Fig. 442.

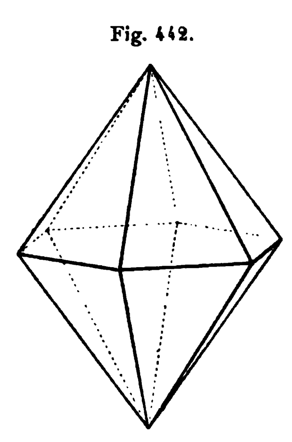
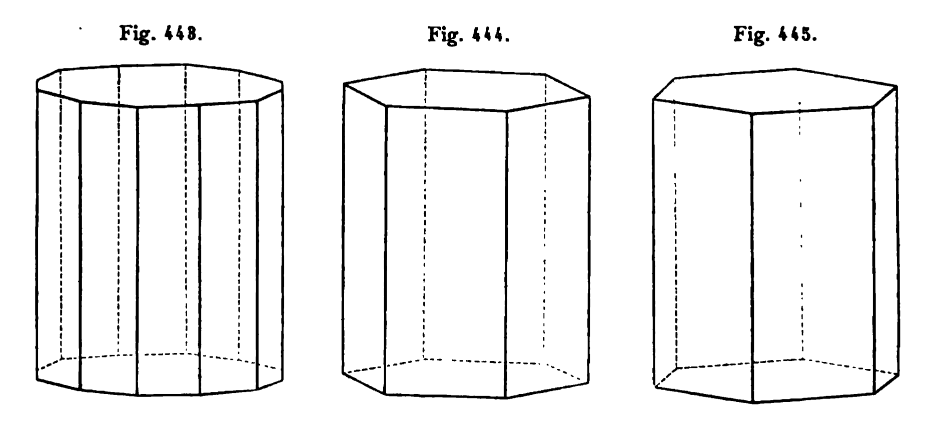


Fig. 443. Fig. 444. Fig. 445.



endlich die Pole der Flächen in der Mitte der Projection, so fallen alle oberen, wie alle unteren zu je einem zusammen, und es entsteht das Pinakoid $\{111\}$. Die sieben Arten möglicher Formen dieser Klasse sind also die folgenden:

$\{111\} = \{0001\}$ Basis
$\{2\bar{1}\bar{1}\} = \{10\bar{1}0\}$ hexagonales Prisma erster Art
$\{10\bar{1}\} = \{11\bar{2}0\}$ hexagonales Prisma zweiter Art
$\{pqr\}_{p+q+r=0} = \{hik0\}$ dihexagonales Prisma
$\{pqq\} = \{h0hl\}$ Rhomboeder (erster Art)
$\{pqr\}_{p+q=2r} = \{h.h.\overline{2h}.l\}$ hexagonale Bipyramide (zweiter Art)
$\{pqr\} = \{hikl\}$ ditrigonales Skalenoeder.

Man pflegt die Form $\{100\}$ das primäre positive Rhomboeder, die gleichgestaltete $\{22\bar{1}\}$ das primäre negative Rhomboeder, endlich diejenige hexagonale Pyramide zweiter Art $\{52\bar{1}\}$, welche die Combinationskanten jener beiden Rhomboeder gerade abstumpft, die primäre hexagonale Pyramide zweiter Art zu nennen, eine Bezeichnung, welche auf der früheren Auffassung der beiden gleichgestalteten Rhomboeder als »Hälftflächner (hemiedrische Formen)« einer hexagonalen Bipyramide erster Art beruht. Wie S. 449 auseinandergesetzt wurde, stehen diese beiden Formen in ganz verschiedener Beziehung zur Structur, wenn dieser ein rhomboedrisches Raumgitter zugrunde liegt, und daher gehören bei den betreffenden Substanzen, selbst wenn sie sehr flächenreiche Combinationen bilden, das »primäre« negative Rhomboeder und noch mehr die sogenannte primäre hexagonale Bipyramide zweiter Art zu den seltenen Formen. Richtiger wäre es, diejenige hexagonale Bipyramide $\{31\bar{1}\}$, deren abwechselnde Polkanten von dem primären Rhomboeder $\{100\}$ gerade abgestumpft werden, die »primäre« hexagonale Bipyramide zweiter Art zu nennen; diese ist in der Tat auch weit häufiger, wie mehrere der folgenden Beispiele lehren.

Beispiele.

Phosphor. Mikroskopische Rhomboeder von würfelähnlicher Form, also wahrscheinlich isomorph mit den folgenden gleichwertigen Elementen (nach Hittorf, welcher diese Modification als metallische bezeichnet). Metallglänzend, schwarz, in dünnen Schichten gelbrot durchsichtig.

Arsen. $\alpha = 84^\circ 38'$ ($a : c = 1 : 1,4025$ G. Rose). Combination der Basis $\{111\}$ mit dem würfelähnlichen Rhomboeder $\{100\}$, ähnlich der Fig. 453. Spaltbar nach $\{111\}$ vollkommen, weniger nach $\{110\}$. Zwillinge nach der letzteren Form.

Antimon. $\alpha = 86^\circ 58'$ ($a : c = 1 : 1,3236$ Laspeyres). Würfelähnliche Rhomboeder $\{100\}$, spaltbar vollkommen nach $\{111\}$, weniger nach $\{110\}$.

Wismut. $\alpha = 87^\circ 34'$ ($a : c = 1 : 1,3035$ G. Rose). Rhomboeder $\{100\}$; häufig Zwillinge nach $\{110\}$ (an käuflichem W. beobachtete Verf. auch solche nach $\{111\}$). Spaltbar vollkommen nach $\{111\}$, ziemlich vollkommen nach $\{11\bar{1}\}$, unvollkommen nach $\{110\}$. (Die Combination der Spaltungsebenen $\{111\}$ $\{11\bar{1}\}$ ist dem regulären Oktaeder sehr ähnlich.) Die Flächen von $\{110\}$ sind sowohl beim Antimon als beim Wismut nach Mügge Gleitflächen, nach denen, wie nach $\{110\}$ beim Kalkspate, künstliche Zwillingslamellen erzeugt werden können.

Fig. 446.

Die Platinmetalle besitzen ebenfalls eine hierher gehörige Modification, welcher ein würfelähnliches Rhomboeder zugrunde liegt; derartige Krystalle sind beobachtet am Palladium und am Osmiridium, einer isomorphen Mischung von Ir, Os, Pt usw.

Selen (metallische Modification). $\alpha = 87^\circ$ circa (Muthmann). Sehr kleine Krystalle der Combination (Fig. 446): $m = \{2\bar{1}\bar{1}\}$, $r = \{100\}$. Unzweifelhaft isomorph mit dem folgenden.

Tellur. $\alpha = 86^\circ 47'$ ($a : c = 1 : 1,3298$ G. Rose). Aus dem Schmelzflusse nur das Rhomboeder $\{100\}$; die natürlichen Krystalle zeigen die Combination Fig. 446, oft noch mit dem negativen Rhomboeder $\{22\bar{1}\}$. Spaltbar nach $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, unvollkommen nach $\{111\}$.

Eis = H_2O. $\alpha = 109\frac{1}{2}^\circ$ circa ($a : c = 0{,}61$ Kenngott). Combinationen von Rhomboedern (in manchen Hagelfällen) oder hexagonale Tafeln nach der Basis mit nicht bestimmbaren Randflächen (in Eishöhlen zuweilen sehr groß) oder dünne hexagonale Prismen (in den Cirruswolken). See-Eis ist gewöhnlich aus Krystallpartikeln zusammengesetzt, deren Hauptaxe senkrecht zur gefrorenen Wasserfläche steht, daher eine natürliche Eisplatte direct das einaxige Interferenzbild im convergenten polarisierten Lichte zeigt. Hauptbrechungsindices nach Pulfrich:

Linie:	ω	ε
B	1,30645	1,30775
Li	1,30669	1,30802
C	1,30715	1,30861
D	1,30911	1,31041
Tl	1,31098	1,31242
E	1,31140	1,31276
F	1,31335	1,31473

Magnesiumhydroxyd (nat. Brucit) = MgH_2O_2. $\alpha = 81^\circ 12'$ ($a : c = 1 : 1{,}5208$ Hessenberg). Tafelförmige Combinationen von {111} und {100}. Spaltbarkeit nach {111} vollkommen. Doppelbrechung +.

Thonerde (nat. (Korund) = Al_2O_3. $\alpha = 85^\circ 43'$ ($a : c = 1 : 1{,}3652$ Melczer). Vorherrschend {10$\bar{1}$}, {100}, {111}. Doppelbrechung —; $\omega = 1{,}7690$, $\varepsilon = 1{,}7598$ Na (Osann).

Eisenoxyd (nat. Hämatit) = Fe_2O_3. $\alpha = 85^\circ 42'$ ($a : c = 1 : 1{,}3654$ Melczer). Eine besonders an natürlichen Krystallen häufige Combination zeigt Fig. 447: r = {100}, r' = {211}, p = {31$\bar{1}$}. Das Zeichen dieser letzteren Form folgt aus dem Parallelismus der Kanten $p : r$ und $r : p$. Häufig Zwillingslamellen nach {100}, welches Gleitfläche ist; das gleiche gilt auch für den Korund.

Fig. 447.

Brechungsindices nach Wülfing:

Linie	ω	ε
A:	$\omega = 2{,}904$	$\varepsilon = 2{,}690$
- B:	2,988	2,759
- C:	3,042	2,797

Stärker gebrochene Strahlen werden absorbiert.

Chromoxyd = Cr_2O_3. $\alpha = 85^\circ 36'$ ($a : c = 1 : 1{,}368$ G. Rose). Tafelförmige Combinationen von {111} mit {100} oder dem vorigen ähnliche mit {31$\bar{1}$} und {10$\bar{1}$}.

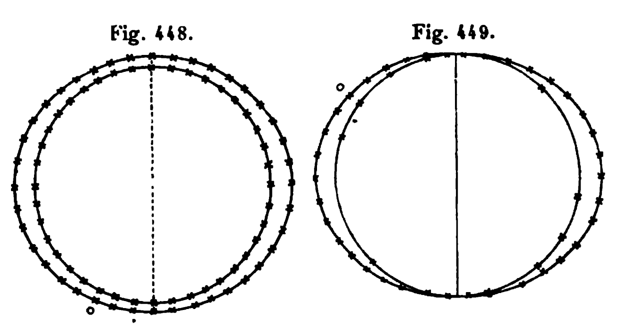
Magnesiumsiliciumfluorid = $SiF_6Mg.6H_2O$. $\alpha = 112^\circ 7'$ ($a : c = 1 : 0{,}5174$ Topsøe). Combination {100}, {10$\bar{1}$}, ersteres vorherrschend (ähnlich Fig. 452) oder beide Formen gleich groß, so daß die Krystalle einem Rhombendodekaeder ähneln. Durchwachsungszwillinge nach {111}. — Mit diesem Salze ist eine große Reihe anderer isomorph, in denen Mg durch andere zweiwertige Metalle, Si durch Ti, Zr, Sn usw., endlich F durch Cl, Br, J ersetzt ist.

Kaliumnitrat $= NO_3K$. Beim Verdampfen eines Tropfens der warmen Lösung bilden sich zuerst mikroskopische Rhomboeder von etwa 74° Flächenwinkel der Polkanten.

Natriumnitrat $= NO_3Na$. $\alpha = 102°47'$ ($a : c = 1 : 0,8276$ Brooke). Natürlicher und aus wässerigen Lösungen erhaltener Natronsalpeter {100}. Krystallform (Fig. 450) und physikalische Eigenschaften sehr ähnlich denen des Kalkspates. Vollkommen spaltbar nach {100}. Einfache Schiebungen nach den Gleitflächen {110} ebenso wie beim Kalkspate. Doppelbrechung negativ. Brechungsindices für die Linien:

	ω	ε
$B =$	1,579	1,335
$D =$	1,587	1,336
$E =$	1,594	1,337
$H =$	1,626	1,344

(Schrauf). Diese außerordentlich starke Doppelbrechung veranlaßte W. Kohlrausch, mittels des Totalreflectometers in einer größeren Zahl von Richtungen innerhalb einer Spaltungsfläche und einer der optischen Axe parallelen Ebene die Lichtgeschwindigkeiten zu messen. Fig. 448 u. 449 zeigen die den genannten beiden Ebenen parallelen Durchschnitte der Strahlenfläche in den richtigen Verhältnissen (s. S. 73 Anmerk.); die markierten Punkte entsprechen den Radien, in welchen die Messung ausgeführt wurde (bei dem Kreise in Fig. 449 genügten einige wenige, um die Gleichheit des Durchmessers nach allen Richtungen zu constatieren).


Fig. 448. Fig. 449.

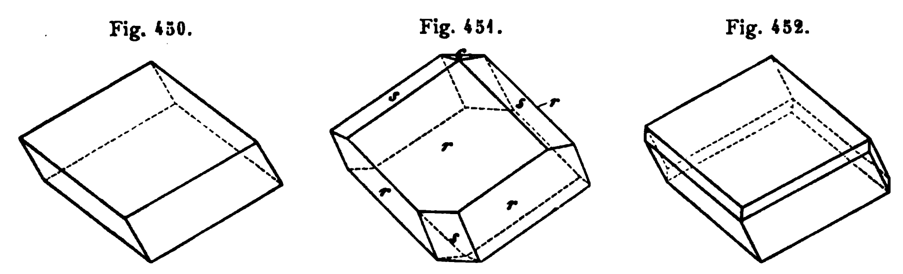


Fig. 450. Fig. 451. Fig. 452.

Kalkspat (Calcit) $= CO_3Ca$. $\alpha = 101°55'$ ($a : c = 1 : 0,8543$ Kupffer). Die natürlichen Krystalle zeigen sehr viele Formen, deren wichtigste die folgenden sind: {100} (Fig. 450), {110}, {11$\bar{1}$}, {3$\bar{1}\bar{1}$} (Fig. 460), {2$\bar{1}\bar{1}$}, {111}, {20$\bar{1}$} (Fig. 456). Von den höchst mannigfachen Combinationen dieses Minerales sind in den Figuren oben und S. 480 einige besonders instructive abgebildet. Fig. 451: $r = \{100\}$, $s = \{110\}$, $c = \{111\}$; Fig. 452: {100}, {10$\bar{1}$};

Fig. 453: $\{111\}$, $\{100\}$; Fig. 454: $\{100\}$, $\{2\bar{1}\bar{1}\}$; Fig. 455: $\{100\}$, $\{22\bar{1}\}$, letztere Form selten (s. Fig. 399 S. 449); Fig. 457: $\{20\bar{1}\}$, $\{2\bar{1}\bar{1}\}$; Fig. 458:

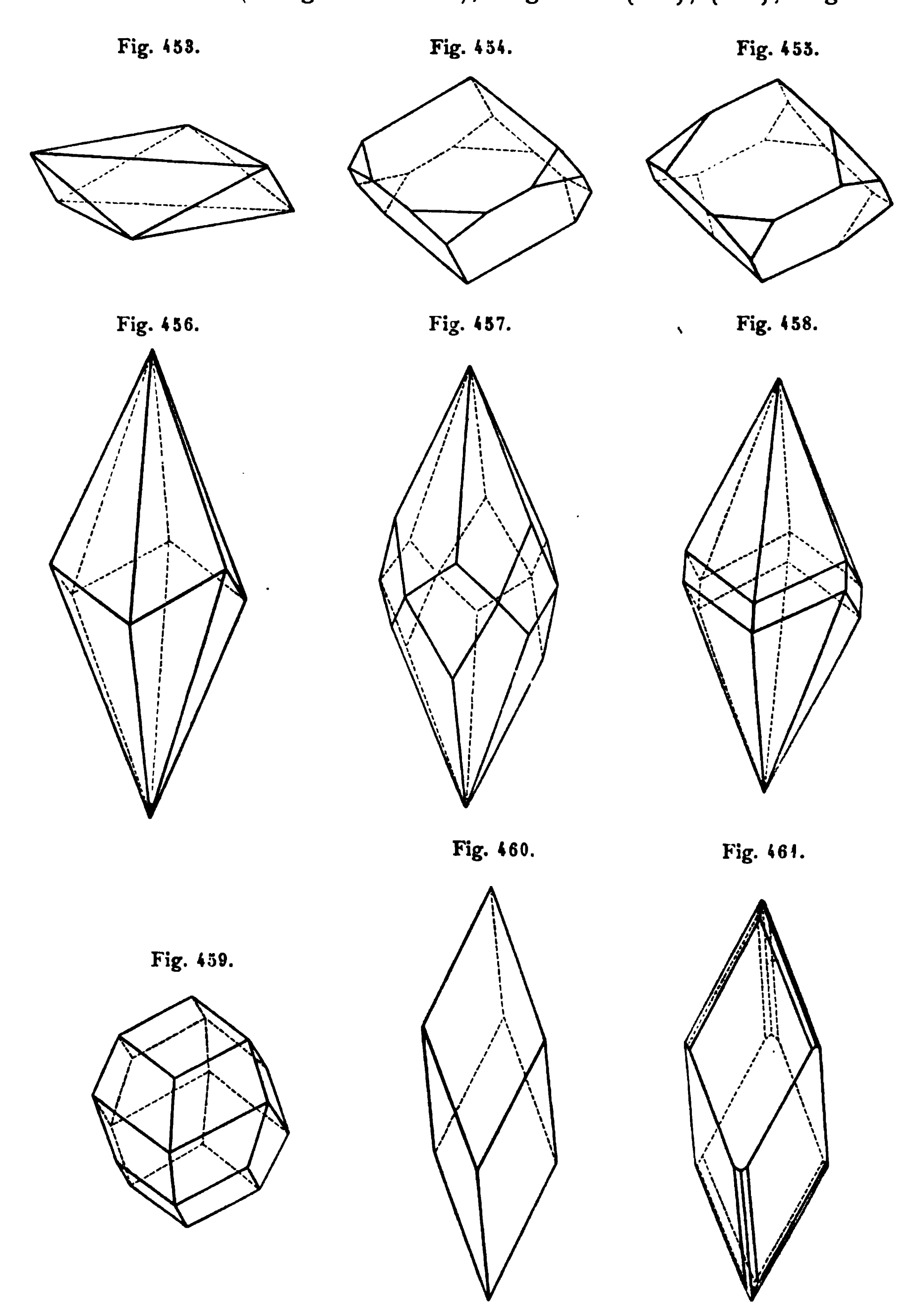
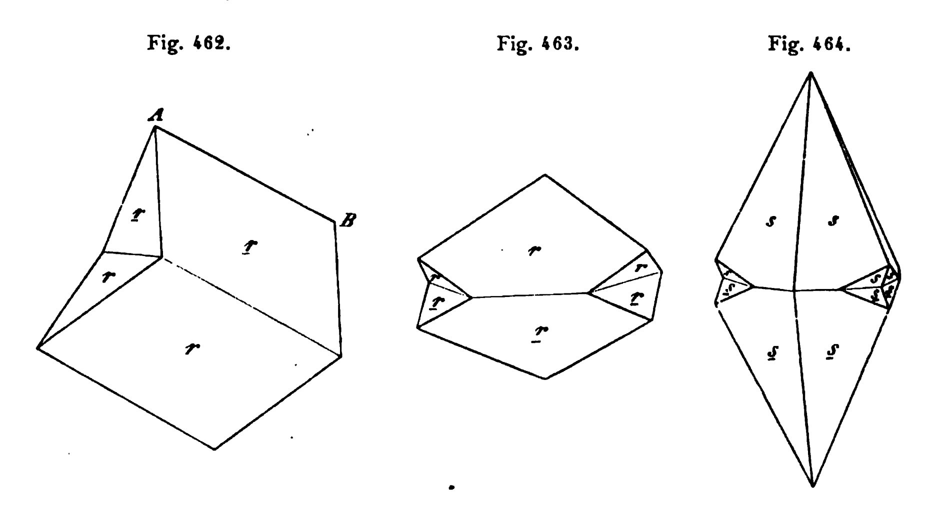


Fig. 453. Fig. 454. Fig. 455. Fig. 456. Fig. 457. Fig. 458. Fig. 459. Fig. 460. Fig. 461.

$\{20\bar{1}\}$, $\{10\bar{1}\}$; Fig. 459: $\{100\}$, $\{20\bar{1}\}$; Fig. 461: $\{3\bar{1}\bar{1}\}$, $\{20\bar{1}\}$. Spaltbar sehr vollkommen nach $\{100\}$. Die Gleitflächen sind nach Reusch die

Flächen von {110}, welche die Polkanten des Spaltungsrhomboeders gerade abstumpfen. Die nach diesen Ebenen leicht erfolgende Umlagerung des Kalkspates in die Zwillingsstellung wurde bereits S. 245 f. ausführlich beschrieben und auch angegeben, daß die in Fig. 140 abgebildeten Zwillingslamellen sich sehr häufig am natürlichen Kalkspate finden. Seltener sind symmetrische Zwillinge nach {110}, wie Fig. 462 einen solchen, aus zwei Rhomboedern $r = \{100\}$, jedes nur zur Hälfte ausgebildet und mit der Zwillingsebene, der Abstumpfung der Polkante AB, aneinander gewachsen, darstellt. Dagegen zeigt der Calcit häufig symmetrische Zwillingsbildung mit {111} als Zwillingsebene (oder, was das gleiche bedeutet, mit der Hauptaxe als Zwillingsaxe, oder endlich mit einer Fläche von $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ als Zwillingsebene). Fig. 463 stellt einen solchen Zwilling zweier Spaltungsrhomboeder r {100} dar, Fig. 464 einen solchen des gewöhnlichen Skalenoeders $s = \{20\bar{1}\}$.

Fig. 462. Fig. 463. Fig. 464.



Doppelbrechung —, sehr stark. Brechungsindices:

	Rudberg: ω	Rudberg: ε	Sarasin: ω	Sarasin: ε
Linie A	—	—	1,6499	1,4826
- B	1,6531	1,4839	1,6528	1,4839
- C	1,6545	1,4845	—	—
- D	1,6585	1,4863	1,6583	1,4864
- E	1,6636	1,4887	—	—
- F	1,6680	1,4907	1,6678	1,4907
- G	1,6762	1,4945	—	—
- H	1,6833	1,4978	1,6832	1,4977

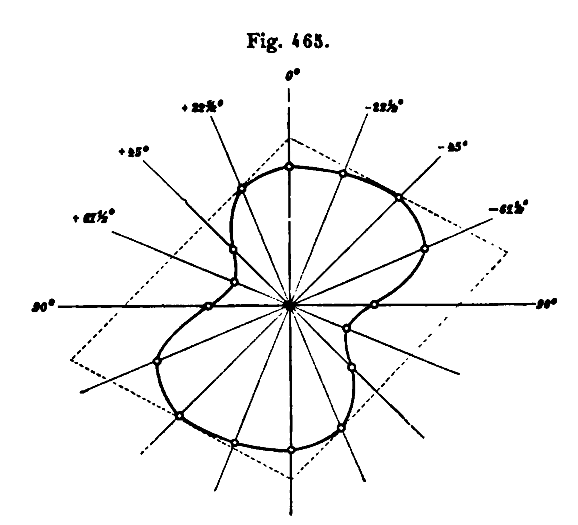
Für die äußerste Cadmiumlinie im Ultraviolett (Wellenlänge = 0,000214 mm) fand Sarasin:

ω	ε
1,8459	1,5600

Auf der Stärke der Doppelbrechung des Kalkspates beruht die Möglichkeit seiner Verwendung als idiocyclophaner Krystall; läßt man durch ein Stück desselben von der Form des Fresnelschen Glasparallelepipedes (Fig. 26, S. 35), in welchem *ad* und *bc* parallel der optischen Axe sind, gewöhnliches Licht fallen, so erblickt man die einaxigen Interferenzbilder mit schwarzem und weißem Kreuze nebeneinander. Über die Interferenzerscheinungen in Krystallen mit Zwillingslamellen s. S. 247.

Die sonstigen physikalischen Eigenschaften des Kalkspates, namentlich seine thermische Ausdehnung, sind bereits in der I. Abteilung ausführlich behandelt worden. Zu den S. 221 gemachten Angaben für die Elasticität desselben nach verschiedenen Richtungen möge hier noch einiges über die Messungen von Baumgarten hinzugefügt werden. Derselbe bestimmte die Biegungen von Stäbchen, deren Längsrichtungen parallel dem Hauptschnitte des primären Kalkspatrhomboeders {100} und untereinander $22\frac{1}{2}^\circ$ geneigt waren. Die Radien der Curve, Fig. 465, sind den elastischen Biegungen der entsprechenden Stäbchen proportional. Die Curve zeigt, wie sich im Hauptschnitte, d. i. in einer Fläche von {10$\bar{1}$}, die Elasticität mit der Richtung ändert; das Minimum der Biegung liegt parallel der Rhomboederkante, das Maximum parallel der kurzen Diagonale der Rhomboederfläche, und die Curve ist nicht symmetrisch nach der Basis und der zum Hauptschnitte senkrechten Prismenfläche erster Art, entsprechend dem Fehlen einer geometrischen Symmetrie nach diesen Ebenen.

Fig. 465.



Magnesit = CO_3Mg. $\alpha = 103^\circ 21\frac{1}{2}'$ ($a : c = 1 : 0{,}8095$ Rumpf.) Nur {100}, nach welchem auch die Krystalle vollkommen spalten. Doppelbrechung —, stark.

Eisenspat (Siderit) = CO_3Fe. $\alpha = 103^\circ 4\frac{1}{2}'$ ($a : c = 1 : 0{,}8191$ Breithaupt). Ähnliche Combinationen, wie Kalkspat, häufig nur {100}, danach vollkommen spaltbar. Doppelbrechung —, stark.

Manganspat = CO_3Mn. $\alpha = 103^\circ 6'$ ($a : c = 1 : 0{,}8183$ Sansoni). {100}. Spaltbar nach derselben Form.

Zinkspat = CO_3Zn. $\alpha = 103^\circ 28'$ ($a : c = 1 : 0{,}8062$ Breithaupt. {100}. Spaltbarkeit wie vorige.

Fig. 466.

Aldehyd-Ammoniak = C_2H_7NO. $\alpha = 84°24'$ ($a : c$ = 1,3949 Rammelsberg). Combination: {100}, {110}, {111}, d. h. ähnlich Fig. 451, nur sind die Rhomboeder spitzer. Doppelbrechung —, nicht stark.

Hydrochinon = $C_6H_6O_2$. $\alpha = 108° 4\frac{1}{2}'$ ($a : c$ = 1 : 0,6591 Groth). Combination (Fig. 466): p = {10$\bar{1}$}, r = {100}. Doppelbrechung +, schwach.

Thymol = $C_{10}H_{14}O$. $\alpha = 79°52\frac{1}{2}'$ ($a : c$ = 1 : 1,5685 Groth). Combination der gleichen Formen, wie Aldehyd-Ammoniak, aber noch etwas steiler, als jene. Doppelbrechung +.

Mimetische Krystalle.

Kaliumnatriumsulfat (Glaserit) = $(SO_4)_2K_3Na$. $\alpha = 87°58'$ ($a : c$ = 1 : 1,2904 Gossner). Combinationen der beiden correlaten Rhomboeder r = {100} und ϱ = {22$\bar{1}$} (Fig. 467), mit m = {2$\bar{1}\bar{1}$} und c = {111} (Fig. 468),

Fig. 467.

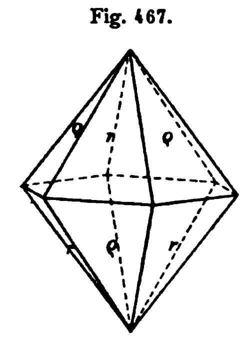


Fig. 468.

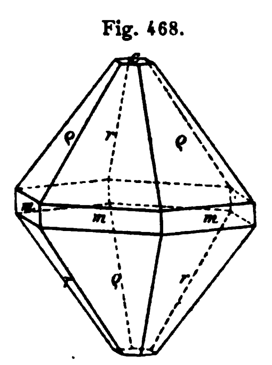
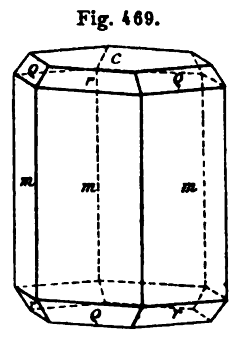


Fig. 469.



oder die beiden letzteren vorherrschend (Fig. 469), ferner Tafeln nach c ohne ϱ (Fig. 470), endlich rhomboedrische Krystalle (Fig. 471). Zuweilen aus zweiaxigen (wahrscheinlich monoklinen) Sectoren zusammengesetzt,

Fig. 470.

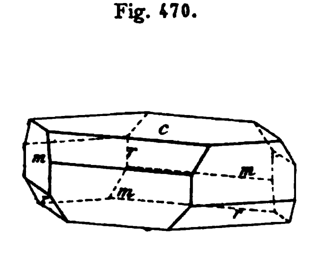


Fig. 471.

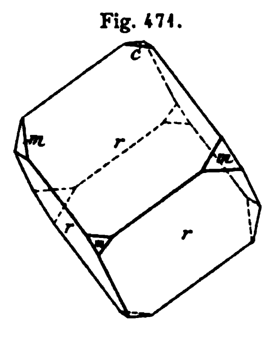
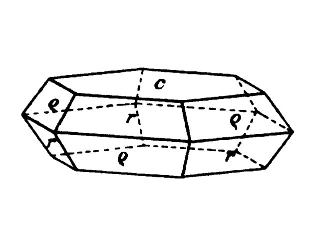


Fig. 472.



ähnlich wie die pseudohexagonalen Drillinge des Kaliumsulfates (S. 406), meist aber ganz aus feinen Lamellen aufgebaut, welche beim Erwärmen zahlreicher und feiner werden, bis schließlich vollkommene Einaxigkeit und

scheinbare Homogenität entsteht. Spaltbarkeit nach {111} unvollkommen. Brechungsindices für Na : $\omega = 1{,}4901$, $\varepsilon = 1{,}4996$.

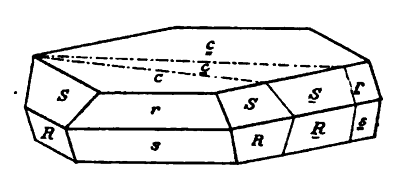
Kaliumnatriumchromat $= (CrO_4)_2K_3Na$. $\alpha = 88°28'$ ($a:c = 1{,}2857$). Dieses mit dem vor. isomorphe Salz zeigt dieselben Combinationen, sowie die in Fig. 472 dargestellte, und in optischer Beziehung alle möglichen Übergänge von deutlichen Drillingen bis zu homogenen einaxigen Krystallen. Spaltbarkeit nach {111} deutlich. Brechungsindices für Na : $\omega = 1{,}7278$, $\varepsilon = 1{,}7361$; im weißen Lichte zeigen die Krystalle die Erscheinung der Leukocyklite (S. 84).

Pennin (Chlorit) $= Si_8Al_4Mg_{13}H_{20}O_{45}$. $\alpha = 44°45'$ ($a : c = 1 : 3{,}495$ (Des Cloizeaux). Combination: {100}, {111}. Spaltbarkeit {111} sehr vollkommen. Doppelbrechung sehr schwach, teils — ($\omega = 1{,}577$, $\varepsilon = 1{,}576$ rot), teils +. Diese und andere optische Anomalien rühren daher, daß die Krystalle mimetische, aus zweiaxigen Lamellen parallel {111} aufgebaute sind. Sehr starker Pleochroismus; Absorption der senkrecht zur optischen Axe schwingenden Strahlen smaragdgrün, der der optischen Axe parallelen hyazinthrot bis braun.

Uranylmagnesiumnatriumacetat $= (C_2H_3O_2)_9(UO_2)_3MgNa.9H_2O$. Die nur in niedriger Temperatur beständigen einfachen Krystalle dieses Salzes sind monokline Combinationen (Fig. 473): $c = \{001\}$, $r = \{101\}$, $R = \{13\bar{2}\}$, $s = \{10\bar{2}\}$, $S = \{134\}$, $q = \{021\}$, $o = \{111\}$, $\omega = \{11\bar{1}\}$, $m = \{110\}$, $x = \{131\}$. Diese sind pseudotrigonal, indem r und R einem Rhomboeder {100},

Fig. 473.

Fig. 474.



s und S einem negativen Rhomboeder {110}, o, ω und q einer hexagonalen Bipyramide 2. Art $\{31\bar{1}\}$ entsprechen; bei geringer Erwärmung bilden sich Zwillinge nach {110} und {130}, welche Ebenen etwa 30° miteinander bilden (s. Fig. 474), bei steigender Temperatur wird die lamellare Zwillingsbildung nach beiden Gesetzen immer feiner; bei 28° verschwinden alle Lamellen, und der Krystall wird optisch einaxig (Wyrouboff).

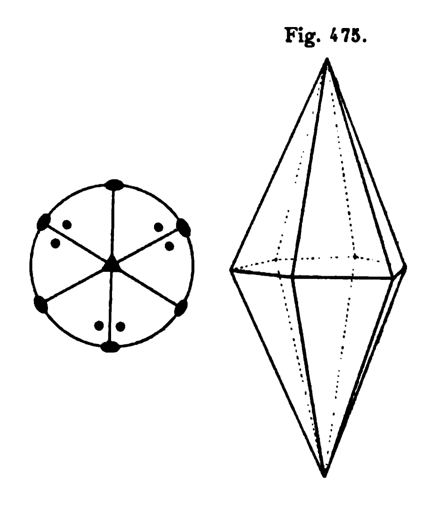
22. Ditrigonal-bipyramidale Klasse.

(Trigonotyp-hemiedrische Klasse.)

Die Symmetrieverhältnisse der letzten Klasse des trigonalen Krystallsystemes leiten sich aus denen der 20. durch Hinzutreten der Symmetrieebene der 19., oder aus dieser durch Hinzufügung der drei Symmetrieebenen

der 20. her. Dementsprechend ist die allgemeine Form, wie die nachstehende Projection (= Fig. 398) zeigt, eine ditrigonale Bipyramide Fig. 475, von der allgemeinen Form der 19. Klasse (Fig. 431, S. 471) dadurch verschieden, daß infolge der Symmetrie nach der Basis die sechs unteren Flächen derselben den oberen gleichwertig sind. In dem speciellen Falle, daß die Pole in die Symmetrieebenen fallen, geht diese Form in eine trigonale Bipyramide erster Art über; liegen die Pole jedoch in gleichem Abstande zwischen den Symmetrieebenen, so werden die Flächenwinkel aller sechs Polkanten der oberen, wie der unteren Hälfte gleich, und es resultiert eine hexagonale Bipyramide zweiter Art (Fig. 442, S. 476). Diesen drei Arten bipyramidaler Formen entsprechen drei Arten prismatischer, für den Fall des Parallelismus der Flächen mit der trigonalen Axe, nämlich: ein ditrigonales Prisma (Fig. 433, S. 472), wenn die Pole irgendwo auf dem Grundkreise liegen, ein trigonales Prisma erster Art, wenn sie mit denen der zweizähligen Symmetrieaxen zusammenfallen, endlich das hexagonale Prisma zweiter Art (Fig. 445, S. 476), wenn die Pole in 30° Abstand von denjenigen der digonalen Axen auf dem Grundkreise gelegen sind. Andererseits ist die gemeinsame Grenzform der Bipyramiden, welcher sie sich um so mehr nähern, je flacher sie sind, das basische Pinakoid.

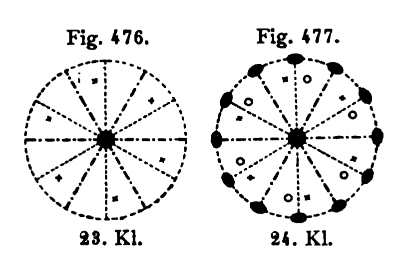
Fig. 475.



Wie bereits S. 450 erwähnt, ist bisher kein Repräsentant dieser Klasse von Krystallen gefunden worden.

VI. Hexagonales Krystallsystem.

Die Gesamtheit der optisch einaxigen Krystalle, d. h. derjenigen mit einer einzigen Axe von höherer Symmetrie, als sie etwa noch weitere vorhandene Symmetrieaxen besitzen, welche man dieser besonderen Bedeutung wegen Hauptaxe zu nennen pflegt, zerfallen, je nachdem letztere eine trigonale, tetragonale oder hexagonale ist, in die drei hiernach benannten Krystallsysteme, von denen nunmehr nur noch das letzte zu betrachten übrigbleibt. Das zuerst behandelte tetragonale enthält außer fünf Klassen, welche durch eine vierzählige Axe der einfachen Symmetrie charakterisiert sind, noch zwei, in denen die vierzählige Axe nur eine solche der zusammengesetzten Symmetrie ist, die 9. und 11. (vgl. S. 415 f.). Jenen fünf Klassen entsprechen nun ebensoviele mit einer dreizähligen Axe der einfachen Symmetrie, nämlich der 10. die 16., der 12. die 18., der 13. die 19., der 14. die 20. und der 15. die 22., und zwar stimmen, wie eine Vergleichung der betreffenden Abschnitte lehrt, je zwei derartige gleichbenannte Klassen des tetragonalen und des trigonalen Systemes in allen Beziehungen überein bis auf diejenigen Punkte, welche von der Zähligkeit der Hauptaxe abhängen. Mit den fünf erwähnten Klassen des trigonalen Systemes wurden aber ihrer geometrischen Verwandtschaft wegen diejenigen beiden Klassen vereinigt, deren trigonale Axe zugleich eine sechszählige der zusammengesetzten Symmetrie ist. Da diese somit bei der Betrachtung des hexagonalen Krystallsystemes ausfallen und entsprechende Klassen mit einer mehr als sechszähligen Axe nicht möglich sind, so geht aus den Erörterungen S. 321—328 hervor, daß für das hexagonale System nur fünf Klassen übrigbleiben, welche in derselben Weise den oben aufgezählten Klassen des trigonalen und tetragonalen Systemes entsprechen, wie diese paarweise einander, und sich nur dadurch von ihnen unterscheiden, daß die Hauptaxe eine sechszählige, statt einer drei- bzw. vierzähligen Symmetrieaxe ist. Diese Analogie bedingt auch die Gleichheit der Namen dieser fünf Abteilungen mit den entsprechenden der beiden vorhergehenden Systeme, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird.


Fig. 476. 23. Kl. Fig. 477. 24. Kl.

Der einfachste Fall hexagonaler Symmetrie ist offenbar der in Fig. 476 dargestellte, in welchem außer der sechszähligen Hauptaxe kein weiteres

Symmetrieelement vorhanden ist und der daher vollkommen dem der trigonal-pyramidalen und der tetragonal-pyramidalen Klasse entspricht. Tritt zu der sechszähligen Axe noch eine zweizählige, notwendig dazu senkrechte, hinzu, so erfordert die Sechszähligkeit der Hauptaxe deren sechs, von denen je drei, miteinander 60° bildende gleichwertig sind, wie aus Fig. 477 hervorgeht, deren Symmetrieverhältnisse sich aus denen der vorigen Figur ergeben, sobald irgendeiner der punktierten oder der strichpunktierten Durchmesser als zweizählige Symmetrieaxe angenommen wird. Diese Klasse entspricht der trapezoedrischen des tetragonalen und trigonalen Krystallsystemes. Genau so, wie von der trigonal-pyramidalen und der tetragonal-pyramidalen Klasse lassen sich von der analogen hexagonal-pyramidalen drei weitere Klassen ableiten durch Hinzufügung einer Symmetrieebene senkrecht zur Hauptaxe, einer solchen parallel der letzteren und durch Combination beider Arten von Symmetrieebenen. In dem ersten dieser drei Fälle (Fig. 478) treten zu den sechs oberen Polen der Fig. 476 sechs

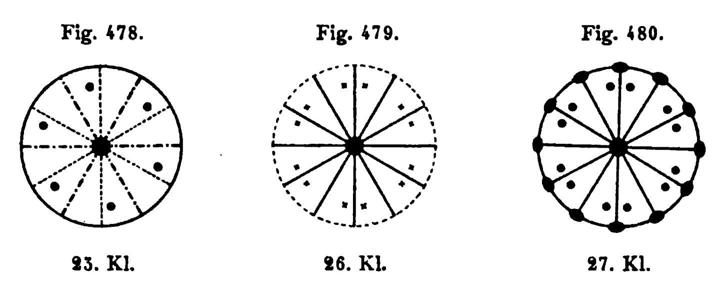
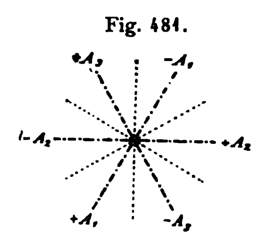


Fig. 478. 25. Kl. Fig. 479. 26. Kl. Fig. 480. 27. Kl.

untere gleichwertige in der Weise hinzu, daß eine der trigonalen, bzw. tetragonalen Bipyramide entsprechende Form entsteht. Fügt man dagegen zu den in Fig. 476 dargestellten Symmetrieverhältnissen noch eine der Hauptaxe parallele Ebene der Symmetrie hinzu, so liefert die Spiegelung der sechs Pole jener sechs weitere, ebenfalls obere, und die entstehende einfache Form hat dann, wie aus Fig. 479 hervorgeht, sechs in der Hauptaxe einander schneidende Symmetrieebenen, d. h. sie entspricht den ditrigonal- und ditetragonal-pyramidalen Formen. Combiniert man endlich diese beiden Fälle durch Hinzufügung der Symmetrieebene des ersten zu denen des zweiten, so erhält man die in Fig. 480 dargestellten Symmetrieverhältnisse, welche zur Gleichwertigkeit von zwölf oberen und zwölf unteren Flächen und daher zur notwendig gleichzeitigen Existenz von sechs zweizähligen Symmetrieaxen führen. Dieser letzten, höchst symmetrischen Klasse des Systemes entsprechen in den beiden vorhergehenden die ditrigonal- bzw. ditetragonal-bipyramidale. Von obigen fünf Klassen besitzen die beiden ersten nur Axen der einfachen Symmetrie, daher nur diesen enantiomorphe hexagonale Krystalle angehören, und infolgedessen auch nur unter den Beispielen dieser beiden Klassen sich solche Körper befinden, deren Lösung optisch activ ist, sowie solche, deren Krystalle die Polarisationsebene des Lichtes drehen.

Da die Formen des hexagonalen Krystallsystemes jedesmal nach einer Drehung von 60° um die Hauptaxe mit sich selbst zur Deckung gelangen, so ist es nicht möglich, sämtliche gleichwertige Flächen irgendeiner hexagonalen Form durch die gleichen Indiceszahlen zu bezeichnen, wenn man als Axen drei gleichwertige Kanten in der Weise, wie es im trigonalen Systeme geschah, zugrunde legt[1]; dagegen ist dies möglich bei Annahme der S. 443 auseinandergesetzten, sog. Bravaisschen Bezeichnung, welche daher im folgenden benutzt werden soll, und zwar in der a. a. O. ausgeführten Art, daß die drei gleichwertigen in Fig. 481 strichpunktierten Richtungen, die sog. Nebenaxen, als Axen in der bezeichneten Reihenfolge und mit den angegebenen Vorzeichen die drei ersten Indices des Symboles $\{hikl\}$, die Hauptaxe den vierten Index bestimmen. Da A_1, A_2, A_3 gleichwertige krystallographische Axen sind, so erfordern die Elemente $a : a : a : c$ eines hexagonalen Krystalles nur eine Messung zu ihrer Bestimmung (vgl. S. 442), und es ist daher bei den weiterhin folgenden Beispielen immer nur das Verhältnis $a : c$ angegeben.

Fig. 481.



Betreffs der vectoriellen und bivectoriellen Eigenschaften gilt das bei den tetragonalen (S. 418f.) und trigonalen Krystallen Gesagte naturgemäß auch für die ebenfalls optisch einaxigen hexagonalen; nur in bezug auf die Elasticität ist zu erwähnen, daß die Oberfläche der Dehnungscoefficienten für alle Klassen dieses Systemes eine Rotationsfigur ist, die hexagonalen Krystalle also sämtlich der Gruppe II S. 221 angehören, und daß die Spaltbarkeit derselben, entsprechend der Sechszähligkeit der Hauptaxe, nur nach einem hexagonalen Prisma, einer ebensolchen Bipyramide oder nach der Basis stattfinden kann.

Was die Structur der hexagonalen Krystalle betrifft, so liegt ihr stets das reguläre dreiseitige Prisma Fig. 159 S. 279 zugrunde. Die regelmäßigen Punktsysteme mit sechszähliger Hauptaxe sind aus sechs oder zwölf jener Raumgitter zusammengesetzt und zeigen vier verschiedene Arten der Symmetrie, nämlich diejenigen der aufgezählten fünf Klassen mit Ausnahme der 26. (Fig. 479), welcher also ein krystallisiertes Element nicht angehören kann. Unter ihnen befindet sich eine Anzahl enantiomorpher Punktsysteme, deren Symmetrieverhältnisse identisch sind mit denen der 23. und 24. Klasse, den einzigen enantiomorphen Abteilungen des hexagonalen Krystallsystemes, in welchen allein daher Krystalle mit Drehungsvermögen vorkommen können. Im übrigen gelten auch für diese beiden Klassen die für die entsprechenden trigonalen und tetragonalen Krystalle angestellten Betrachtungen.

---

1) Will man die für die trigonalen Krystalle in so hohem Grade geeignete Millersche Bezeichnung auch auf das hexagonale Krystallsystem anwenden, so muß man jede einfache Form desselben, wie eine Combination, mit zwei Symbolen $\{hkl\}$ $\{pqr\}$ bezeichnen, wo $p = -h + 2k + 2l$, $q = 2h - k + 2l$, $r = 2h + 2k - l$.



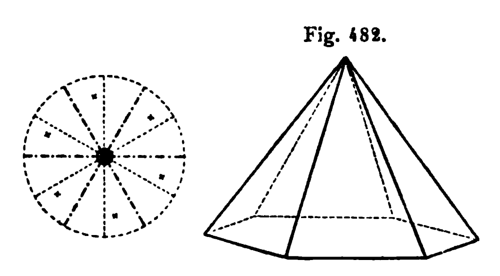
Das wichtigste Zwillingsgesetz des hexagonalen Systemes ist dasjenige der symmetrischen Verwachsung nach der Basis, welche in den beiden ersten Klassen aus einer Verbindung eines rechten und eines linken Krystalles mit parallelen Axensystemen besteht und außerdem noch möglich ist in der 26. Klasse, in welcher die Hauptaxe, wie in der 23., polar ist. Ausgeschlossen ist dieses Gesetz in den beiden Klassen, in denen die Basis Symmetrieebene ist, ebenso wie das Gesetz »Zwillingsaxe die Hauptaxe« in allen Abteilungen dieses Systemes ausgeschlossen ist, weil der charakteristische Drehungswinkel dieser Axe ein aliquoter Teil von 180° ist. Das Gesetz »Zwillingsebene eine Fläche eines hexagonalen Prismas« ist möglich in den drei ersten Klassen und führt in den beiden ersten zu demselben Resultate, wie das eingangs erwähnte Gesetz. Da eine zur Hauptaxe schief geneigte Krystallfläche niemals Symmetrieebene ist, so kann nach derselben Zwillingsbildung stattfinden, doch ist dieser Fall kaum beobachtet worden.

23. Hexagonal-pyramidale Klasse.

(Hemimorph-hemiedrische Klasse.)

In dem einfachsten Falle hexagonaler Symmetrie, in welchem außer der sechszähligen Axe kein weiteres Symmetrieelement vorhanden ist, erzeugt der Pol einer beliebigen Fläche (s. beistehende Projection) durch Drehung um 60° je einen gleichwertigen, welcher derselben Seite der polaren Hauptaxe angehört; es entsteht als allgemeine Form eine hexagonale Pyramide dritter Art (vgl. S. 443). Eine solche, und zwar die der Projection entsprechende obere, ist in Fig. 482 in Combination mit $\{000\bar{1}\}$ abgebildet; dieselbe besteht aus sechs rechten Flächen, welche, wenn $h > i$ und $k = -(h + i)$, folgende Symbole erhalten: $(hikl)$, $(\bar{i}\bar{k}\bar{h}l)$, $(khil)$, $(\bar{h}\bar{i}\bar{k}l)$, $(ikhl)$, $(\bar{k}\bar{h}\bar{i}l)$. Dieselben Indiceszahlen kommen einer zweiten oberen Pyramide zu, deren sechs Pole × in der obigen Projection auf der linken Seite der punktierten Radien in gleichem Abstande stehen würden; z. B. $(\bar{k}\bar{i}\bar{h}l)$. Ferner gibt es noch zwei untere hexagonale Pyramiden mit denselben Indiceszahlen $\{hik\bar{l}\}$ und $\{\bar{k}\bar{i}\bar{h}\bar{l}\}$.

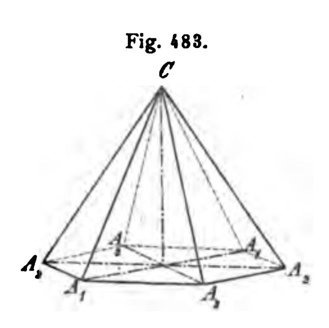
Fig. 482.



In dem speciellen Falle, daß $k = -h$, d. h. $i = 0$, fallen die Pole in die punktierten Durchmesser der Projection (die sog. »Zwischenaxen«), d. h. die Flächen schneiden auf zwei benachbarten Nebenaxen (strichpunktierten Durchmessern) gleich große Parameter ab und sind der dritten parallel; die entstehende hexagonale Pyramide $\{h0\bar{h}l\}$, in Fig. 483 mit Einzeichnung der Haupt- und Nebenaxen abgebildet, ist nach der S. 443 erklärten Benennung eine solche erster Art, die gemeinschaftliche Grenzform

zweier Reihen von Pyramiden dritter Art, welcher diese Formen sich um so mehr nähern, je geringer der Abstand ihrer Pole von den punktierten Durchmessern der Projection ist. Die entsprechende gemeinsame Grenzform je zweier Reihen unterer Pyramiden dritter Art ist die Form $\{h0\bar{h}\bar{l}\}$. Ist dagegen $i = h$, d. h. $k = -2h$, so wird aus der allgemeinen Form $\{hikl\}$ eine hexagonale Pyramide zweiter Art $\{h.h.\overline{2h}.l\}$ (s. Fig. 432, S. 472), welche ebenfalls die gemeinsame Grenzform zweier Reihen von Pyramiden dritter Art darstellt für den Fall, daß jedesmal der Pol einer rechten Fläche mit dem einer linken, aber nicht in den punktierten, sondern in den strichpunktierten Durchmessern der Projection zusammenfällt. Den drei Arten hexagonaler Pyramiden entsprechen drei Arten von Prismen: a) hexagonale Prismen dritter Art, deren zwei mit den gleichen Indiceszahlen $\{hik0\}$ und $\{\bar{k}\bar{i}\bar{h}0\}$ existieren, die gemeinsamen Grenzformen der rechten bzw. linken oberen und unteren Pyramiden dritter Art (das erste derselben würde in Fig. 482 die Combinationskanten von $\{hikl\}$ und $\{000\bar{1}\}$ mit senkrechten Flächen abstumpfen); b) das hexagonale Prisma erster Art (Fig. 444, S. 476); c) das hexagonale Prisma zweiter Art (Fig. 445, S. 476). Je flacher die hexagonalen Pyramiden werden, um so mehr nähern sich dieselben einer für alle oberen gemeinschaftlichen Grenzform, dem oberen Pedion $\{0001\}$; die unteren dagegen dem unteren $\{000\bar{1}\}$. So ergibt sich folgende Zusammenstellung der hierher gehörigen Formen:

Fig. 483.



$\{0001\}$ obere (positive) Basis; $\{000\bar{1}\}$ untere (negative) Basis
$\{10\bar{1}0\}$ hexagonales Prisma erster Art
$\{11\bar{2}0\}$ hexagonales Prisma zweiter Art
$\{hik0\}$ hexagonales Prisma dritter Art
$\{h0\bar{h}l\}$ hexagonale Pyramide erster Art
$\{h.h.\overline{2h}.l\}$ hexagonale Pyramide zweiter Art
$\{hikl\}$ hexagonale Pyramide dritter Art.

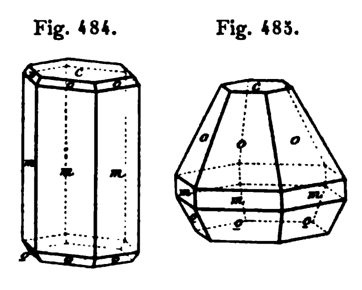
Die Form $\{10\bar{1}1\}$ und die gerade Abstumpfung der Polkanten derselben $\{11\bar{2}2\}$ pflegt man die »primäre Pyramide« erster bzw. zweiter Art zu nennen.

Beispiele.

Optisch inactive Körper.

Schwefelsaures Kalium-Lithium $= SO_4KLi$. $a : c = 1 : 1,675$ (Wulff). Combination (Fig. 484, 485): $c = \{0001\}$, $o = \{10\bar{1}1\}$, $m = \{10\bar{1}0\}$ in scheinbar bipyramidaler Entwicklung, nur daß oft die untere Pyramide, wie in Fig. 485 dargestellt, kleiner ausgebildet ist, als die obere. Diese scheinbar einfachen Krystalle sind aber nach Traube meist Zwillinge nach drei Gesetzen: a) ein rechter und ein linker Krystall symmetrisch zu

$\{000\bar{1}\}$, welcher Fläche der analoge Pol der polarelektrischen Hauptaxe entspricht (infolgedessen werden derartige Zwillinge beim Abkühlen an beiden Enden +, in der Mitte — elektrisch); b) zwei entgegengesetzte Krystalle symmetrisch nach einer Prismenfläche; c) Zwillingsaxe die Normale einer Prismenfläche. Diese Verwachsungen sind nur zu erkennen durch Untersuchung des optischen und pyroelektrischen Verhaltens verbunden mit derjenigen der Orientierung der trapezförmigen Ätzfiguren auf den Pyramidenflächen. Doppelbrechung sehr schwach; nach Wulff ist

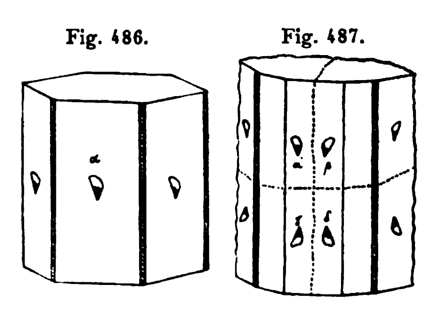

Fig. 484. Fig. 485.

für die Linie	C	D	F
$\omega =$	1,4697	1,4715	1,4759
$\varepsilon =$	1,4703	1,4721	1,4762

Drehung der Polarisationsebene des Natriumlichtes nach Wulff 2°,8, nach Traube 3°,44; beide Werte wahrscheinlich zu niedrig, weil es kaum möglich ist, basische Platten herzustellen, welche frei von eingelagerten Lamellen von entgegengesetzter Drehung sind; bei gleicher Gesamtdicke beider Arten von Schichten findet natürlich keine Drehung statt.

Hierher gehören ferner die isomorphen Salze SO_4RbLi und $SO_4(NH_4)Li$, an welchen Wyrouboff das Drehungsvermögen nachwies, und SeO_4KLi, dessen Krystalle nach Traube ähnliche unsymmetrische Ätzfiguren zeigen, wie das analoge Sulfat, endlich in isomorphen Mischungen mit SO_4KLi auch CrO_4KLi und MoO_4KLi. Alle diese Salze zeigen oft optische Anomalien, welche auf einen mimetischen Aufbau hindeuten.

Nephelin $= Si_9O_{34}Al_8Na_8$. $a : c = 1 : 0,8390$ (v. Kokscharow). Combination von $\{10\bar{1}0\}$ und $\{0001\}$, nicht selten auch mit $\{10\bar{1}1\}$, ähnlich Fig. 484. Nach Baumhauer werden durch Ätzung mit Flußsäure matte Flächen eines hexagonalen Prismas dritter Art und auf $\{10\bar{1}0\}$ unsymmetrische Ätzfiguren erzeugt; s. Fig. 486[1]). Gewöhnlich sind die Krystalle jedoch Durchwachsungs-Zwillinge bzw. -Vierlinge nach zwei Gesetzen: »Zwillingsebene $\{10\bar{1}0\}$« und »Zwillingsebene $\{0001\}$«, so daß auf verschiedenen, durch deutliche Grenzlinien getrennten Partien der Prismenflächen die Ätzfiguren in vier verschiedenen Stellungen α, β, γ, δ auftreten, wie dies in schematischer Weise Fig. 487, die Abbildung eines Krystalles der Combination


Fig. 486. Fig. 487.

1) Diese und die folgende Figur sind dem Werke von H. Baumhauer, Die Resultate der Ätzmethode in der krystallographischen Forschung, Leipzig 1894, entnommen.

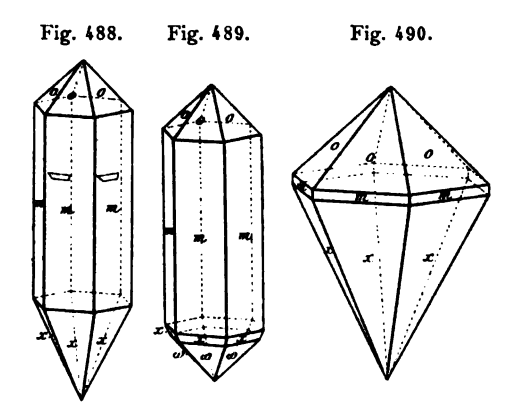
{0001}, {10$\bar{1}$0}, {11$\bar{2}$0} zeigt. Spaltbarkeit unvollkommen nach {10$\bar{1}$0} und {0001}. $\omega = 1,5427$, $\varepsilon = 1,5378$ (Wodworth).

Trimesinsäuretriäthylester $= C_6H_3(CO_2 . C_2H_5)_3$. $a : c = 1 : 1,7820$ (Muthmann). Spitze hexagonale Pyramiden, nach unten durch treppenförmige Wiederholung in Prismenflächen übergehend, oder scheinbare spitze Bipyramiden; nach Vernadsky entsprechen diese Formen einer Combination einer oberen und einer gegen die erstere etwas gedrehten unteren Pyramide dritter Art, beide vicinal zu {10$\bar{1}$1} bzw. {10$\bar{1}\bar{1}$}. Basische Platten sind optisch anomal, nämlich zweiaxig mit wechselndem Axenwinkel und schiefwinkelig gekreuzten Axenebenen, daher jedenfalls ein mimetischer Aufbau der Krystalle vorliegt.

Optisch active Körper.

Rechtsweinsaures Antimonyl-Strontium $= (C_4H_4O_6)_2(SbO)_2Sr$. $a : c = 0,8442$ (Traube). Combination (Fig. 488): $m = \{10\bar{1}0\}$, $o = \{10\bar{1}1\}$, $x = \{20\bar{2}\bar{1}\}$; bei langsamem Fortwachsen der Krystalle tritt hierzu noch $\omega = \{10\bar{1}\bar{1}\}$ Fig. 489. Ätzfiguren auf m (Fig. 488) trapezförmig (auf benachbarten Flächen durch Drehung von 60° um die Hauptaxe congruent). Starke Pyroelektricität; der obere Pol der Hauptaxe ist der antiloge. Doppelbrechung negativ. Drehungsvermögen nicht beobachtet.

Fig. 488. Fig. 489. Fig. 490.

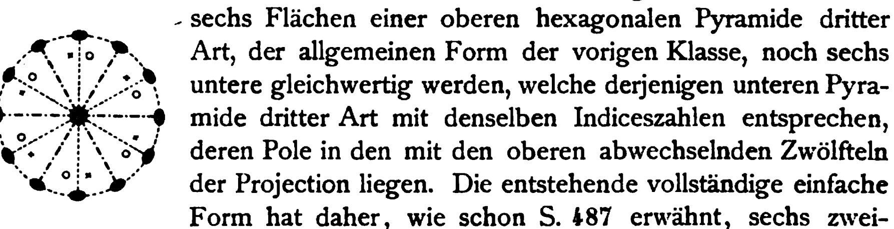


Rechtsweinsaures Antimonyl-Blei $= (C_4H_4O_6)_2(SbO)_2Pb$. $a : c = 1 : 0,8526$ (Traube). Isomorph mit dem vorigen. Beobachtete Formen (Fig. 490): $o = \{10\bar{1}1\}$, $m = \{10\bar{1}0\}$, $x = \{20\bar{2}\bar{1}\}$. Ätzfiguren, elektrische und optische Eigenschaften = vorigem.

24. Hexagonal-trapezoedrische Klasse.

(Trapezoedrisch-hemiedrische Klasse.)

Wie aus der hier wiederholten Fig. 477 hervorgeht, bewirkt die Symmetrie nach einer zur Hauptaxe senkrechten zweizähligen Axe, daß zu den sechs Flächen einer oberen hexagonalen Pyramide dritter Art, der allgemeinen Form der vorigen Klasse, noch sechs untere gleichwertig werden, welche denjenigen unteren Pyramide dritter Art mit denselben Indiceszahlen entsprechen, deren Pole in den mit den oberen abwechselnden Zwölfteln der Projection liegen. Die entstehende vollständige einfache Form hat daher, wie schon S. 487 erwähnt, sechs zweizählige Symmetrieaxen und heißt wegen der Gestalt ihrer Flächen **hexagonales Trapezoeder**. Das von den in vorstehender Projection



eingetragenen Flächen gebildete $\{hikl\}$ ist in Fig. 491 *a* abgebildet; es wird ein rechtes Trapezoeder genannt, weil ihm die Flächen der rechten oberen hexagonalen Pyramide dritter Art (s. S. 489) angehören. Denkt man sich in der Projection alle oberen Pole durch untere, und umgekehrt, ersetzt, so erhält man das enantiomorphe linke hexagonale Trapezoeder Fig. 491 *b*. Diese Formen besitzen je zwölf gleiche Polkanten und ebensoviele Mittelkanten, von denen sechs einen größeren, sechs einen kleineren Flächenwinkel besitzen; wenn, wie in den Figuren angenommen, das Verhältnis der Parameter zweier benachbarter Nebenaxen = 3 : 2, so steigen die stumpferen Mittelkanten nach rechts an bei dem rechten, nach links bei dem linken Trapezoeder; ist jenes Verhältnis dagegen kleiner, z. B. 4 : 3, so ist das Umgekehrte der Fall; die Gleichheit der Flächenwinkel aller Mittelkanten entspricht einem irrationalen Verhältnisse (1,366...) jener Indices und ist daher ausgeschlossen.

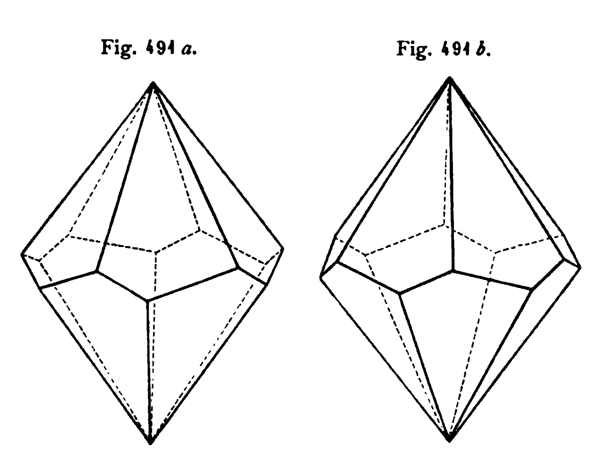
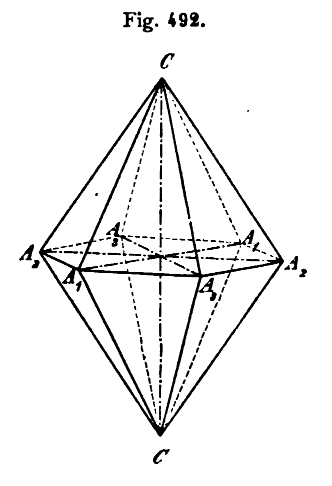


Fig. 491 *a*. Fig. 491 *b*.

Je nachdem der Pol einer beliebigen Fläche in der Projection auf einer der drei Seiten oder in einem Eckpunkte des sphärischen Dreieckes liegt, welches von einem Zwölftel der Fläche des Grundkreises gebildet wird, ergeben sich sechs verschiedene specielle Fälle: 1. Liegen die Pole in den punktierten Durchmessern, so gelangen offenbar je ein oberer mit einem unteren zur Deckung, und das Trapezoeder verwandelt sich in eine hexagonale Bipyramide erster Art (Fig. 492) mit gleichen Parametern zweier benachbarter Nebenaxen ($k = -h$). 2. Liegen die Pole dagegen auf den strichpunktierten Durchmessern der Projection, so resultiert eine hexagonale Bipyramide zweiter Art (Fig. 442 S. 476), deren Flächen auf zwei benachbarten Nebenaxen Parameter abschneiden, welche in dem Verhältnisse 2 : 1 stehen (vgl. S. 443). 3. Liegen endlich die Pole auf dem Grundkreise irgendwo zwischen je zwei benachbarten Polen von Symmetrieaxen, so entsteht ein aus zwölf der Hauptaxe parallelen Flächen

Fig. 492.



zusammengesetztes dihexagonales Prisma (Fig. 443, S. 476). 4. Die letztere Form nähert sich um so mehr dem hexagonalen Prisma erster Art (Fig. 444 ebenda), je weniger sich das Verhältnis $k : -h$ von dem der Gleichheit unterscheidet. 5. Andererseits geht dieselbe Form in das hexagonale Prisma zweiter Art (Fig. 445 a. a. O.) über, wenn das Verhältnis zweier benachbarter Parameter seinen größtmöglichen Wert 2 : 1 annimmt. 6. Während die drei Arten von Prismen die Grenzglieder entsprechender Reihen von Trapezoedern, bzw. Bipyramiden sind, denen diese sich um so mehr nähern, je spitzer sie werden, ist das entgegengesetzte Endglied aller dieser Reihen ein und dasselbe, das basische Pinakoid. Hiernach sind in der vorliegenden Klasse folgende Formen möglich:

$\{0001\}$ Basis
$\{10\bar{1}0\}$ hexagonales Prisma erster Art
$\{11\bar{2}0\}$ hexagonales Prisma zweiter Art
$\{hik0\}$ dihexagonales Prisma
$\{h0\bar{h}l\}$ hexagonale Bipyramide erster Art
$\{h.h.\bar{2h}.l\}$ hexagonale Bipyramide zweiter Art
$\{hikl\}$ hexagonales Trapezoeder.

Beispiele.

Rechtsweinsaures Antimonyl-Baryum + salpetersaures Kalium $= (C_4H_4O_6)_2(SbO)_2Ba.NO_3K$. $a : c = 1 : 3{,}0289$ (Traube). Combination $\{10\bar{1}0\}$, $\{0001\}$, $\{10\bar{1}1\}$, ähnlich Fig. 484, oder die sehr spitze primäre Bipyramide $\{10\bar{1}1\}$ vorherrschend und zwischen ihr und dem Prisma untergeordnet eine noch spitzere, z. B. $\{20\bar{2}1\}$. Spaltbar nach $\{0001\}$ ziemlich deutlich. Die mit Wasser erzeugten Ätzfiguren auf $\{10\bar{1}0\}$ sind Rhomben, deren Orientierung der Existenz zweizähliger Symmetrieaxen und dem Mangel jeglicher Ebene der Symmetrie an den Krystallen entspricht.

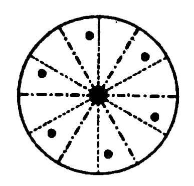
Das analoge Bleisalz: $(C_4H_4O_6)_2(SbO)_2Pb.NO_3K$ ($a : c = 1 : 3{,}5927$ Traube) zeigt dieselben Formen und die gleichen Ätzfiguren. Optisch verhalten sich beide Salze in hohem Grade anomal, optisch zweiaxig mit verschiedener Orientierung der Axenebene an verschiedenen Stellen; local weisen die sehr complicierten Erscheinungen auf einen lamellaren Aufbau aus basischen Platten hin, deren Axenebenen 30° gegeneinander gedreht sind (analog den Glimmercombinationen mit 60° Drehungswinkel S. 151). Dieses Verhalten verhindert die Feststellung des Drehungsvermögens der Krystalle der beiden optisch activen Körper.

25. Hexagonal-bipyramidale Klasse.

(Pyramidal-hemiedrische Klasse.)

Tritt zu der Symmetrie nach der hexagonalen Axe noch eine solche nach der zu dieser senkrechten Ebene, der Basis, hinzu, so entsprechen

den sechs Flächen einer rechten oder linken hexagonalen Pyramide dritter Art noch sechs dem entgegengesetzten Pole der Hauptaxe angehörige Flächen, welche mit jenen eine **hexagonale Bipyramide dritter Art** als allgemeine einfache Form bilden. In Fig. 495 ist die rechte derartige Bipyramide $\{hikl\}$, d. h. diejenige, deren Pole in der darüber befindlichen Projection (= Fig. 478) markiert sind, abgebildet. Die linke $\{k\bar{i}hl\}$ mit denselben Zahlenwerten der Indices hat die gleiche Gestalt, aber eine um den doppelten Winkelabstand der Pole ⊗ von den punktierten Durchmessern (den Zwischenaxen) um die Hauptaxe gedrehte Stellung.



In dem speciellen Falle, daß die Doppelpole in der Projection in den Zwischenaxen gelegen sind, fallen die rechte und die ihr entsprechende linke hexagonale Bipyramide zu einer gemeinsamen Grenzform, der hexagonalen Bipyramide erster Art (Fig. 493) zusammen, während, wenn die

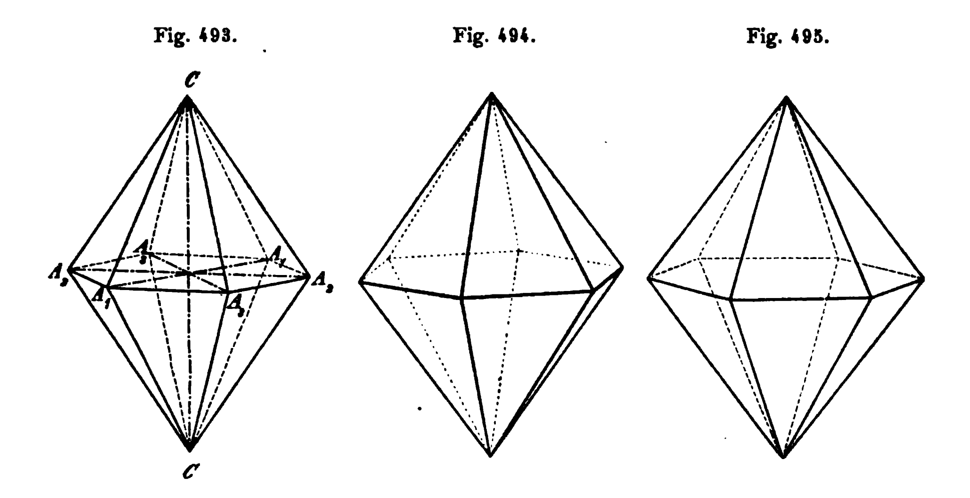


Fig. 493. Fig. 494. Fig. 495.

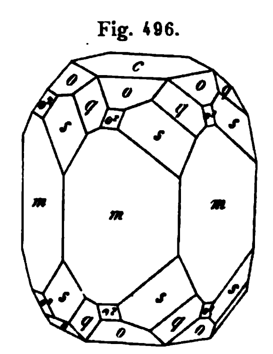
Pole in den Nebenaxen liegen, d. h. wenn die Parameter zweier benachbarter Nebenaxen sich wie 1 : 2 verhalten, die Bipyramide dritter Art sich in eine solche zweiter Art (Fig. 494) verwandelt, welche die andere gemeinsame Grenzform der rechten und linken Bipyramiden dritter Art darstellt. Den drei Arten von Bipyramiden entsprechen ebensoviele Arten von **hexagonalen Prismen**, von welchen die der dritten Art rechte oder linke sind, je nachdem sie die Basiskanten der rechten oder der linken Bipyramiden dritter Art mit den gleichen Werten der Indices hik gerade abstumpfen, während dasjenige der ersten bzw. zweiten Art in der gleichen Beziehung zu den Bipyramiden erster und zweiter Art stehen. Mit Einschluß des basischen Pinakoides ergibt sich also folgende Zusammenstellung:

$\{0001\}$ Basis
$\{10\bar{1}0\}$ hexagonales Prisma erster Art
$\{11\bar{2}0\}$ hexagonales Prisma zweiter Art
$\{hik0\}$ hexagonales Prisma dritter Art
$\{h0\bar{h}l\}$ hexagonale Bipyramide erster Art
$\{h.h.2\bar{h}.l\}$ hexagonale Bipyramide zweiter Art
$\{hikl\}$ hexagonale Bipyramide dritter Art.

Beispiele.

Apatit $= (PO_4)_3ClCa_5$ bzw. $(PO_4)_3FCa_5$. $a : c = 1 : 0{,}7346$ (v. Kokscharow). Eine häufig vorkommende Combination zeigt Fig. 496, nämlich $m = \{10\bar{1}0\}$, $c = \{0001\}$, $o = \{10\bar{1}1\}$, $o^2 = \{20\bar{2}1\}$, $q = \{11\bar{2}1\}$, $s = \{21\bar{3}1\}$. Die Zeichen dieser Flächen sind sämtlich gegeben durch Zonen, wenn wir von o als $\{10\bar{1}1\}$ ausgehen; denn q liegt in zwei Zonen $o : m$ von links nach rechts und von rechts nach links; o^2 dadurch, daß q seine Polkanten abstumpft; endlich s durch die Zonen $oqsm$ und qo^2sm. Die Ätzfiguren auf $\{0001\}$ werden von einer Bipyramide dritter Art gebildet; diejenigen auf $\{10\bar{1}0\}$ sind Trapeze, welche nach oben und unten, nicht aber nach rechts und links symmetrisch sind, entsprechend der Symmetrie des Krystalles (Baumhauer). Doppelbrechung —. Die Brechungsindices des Apatites schwanken, je nach der chemischen Zusammensetzung aus der Chlor- bzw. Fluorverbindung, zwischen den Grenzen:

Fig. 496.



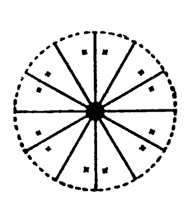
$\omega = 1{,}6355 - 1{,}6482$, $\varepsilon = 1{,}6316 - 1{,}6431$ für Na (Zimányi).

Pyromorphit $= (PO_4)_3ClPb_5$
und Mimetesit $= (AsO_4)_3ClPb_5$,
mit Apatit isomorph, zeigen nur $\{10\bar{1}0\}$, $\{0001\}$, $\{10\bar{1}1\}$; ihre Prismenflächen verhalten sich beim Ätzen, wie die des Apatit, daher die Krystalle unzweifelhaft ebenfalls in diese Klasse gehören.

26. Dihexagonal-pyramidale Klasse.

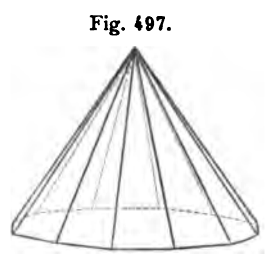
(Hexagonal-hemimorphe Klasse.)

Diese ist charakterisiert durch sechs, einander in der sechszähligen Hauptaxe schneidende Ebenen der Symmetrie, von denen drei gleichwertige senkrecht zu den sog. Nebenaxen sind, die drei andern die Winkel derselben halbieren (s. nebenstehende Projection). Ein beliebiger oberer Pol × liefert dann durch Spiegelung nach den Symmetrieebenen elf gleichwertige, daher die dieser Symmetrie entsprechende allgemeine Form aus zwölf, derselben Seite der Hauptaxe angehörigen Flächen besteht, deren Pole in der Projection abwechselnd einen größeren und kleineren Abstand besitzen müssen; denn wenn jeder derselben vom folgenden um gleich viel, d. i. um 30°, abstände, wäre die



Hauptaxe eine zwölfzählige Symmetrieaxe, was nach S. 321 unmöglich ist. Die Form wäre dann eine reguläre zwölfseitige Pyramide mit zwölf gleichen Polkanten, deren Flächen die beiden Nebenaxen in dem Parameterverhältnisse $\sqrt{2}.\sin 75^\circ = 1,366\ldots$ schneiden würden, deren Indices hik also irrational wären. Ist das Verhältnis $h:\bar{k}$ kleiner, z. B. $5:4 = 1,25$, und dieser Fall liegt in der Projection vor, so sind die nach den sog. Zwischenaxen herablaufenden Polkanten stumpfer, als die nach den Nebenaxen herablaufenden, im andern Falle, z. B. $h:\bar{k} = 3:2 = 1,5$, umgekehrt. Da diese Formen somit zweierlei Polkanten besitzen, werden sie dihexagonale Pyramiden genannt. Die in nebenstehender Fig. 497 abgebildete ist eine obere $\{hikl\}$, deren einzelne Flächensymbole man erhält, wenn man mit den drei Indiceszahlen hik alle möglichen (12) Vertauschungen ihrer Reihenfolge vornimmt. Dieselben Werte der Indices kommen einer zweiten unteren Pyramide $\{hik\bar{l}\}$ mit den gleichen Flächenwinkeln zu, deren vierter Index jedoch negativ ist.

Fig. 497.



Je nach dem Werte jenes Verhältnisses $h:\bar{k}$ nähern sich die dihexagonalen Pyramiden einerseits den hexagonalen Pyramiden erster Art (Fig. 483, S. 490), andererseits denen zweiter Art (Fig. 432, S. 472), und je eine bestimmte Pyramide der einen und andern Stellung bilden die beiden Endglieder einer Reihe dihexagonaler. Die drei Arten von Pyramiden gehen schließlich, wenn sie der Hauptaxe parallel werden, in drei Arten von Prismen, dihexagonale und hexagonales erster und zweiter Art (Fig. 443—445, S. 476), über, welche gemeinsame Grenzformen der oberen und unteren Pyramiden für den Fall $l = 0$ sind, während im entgegengesetzten Falle, $h = i = k = 0$, die oberen zu dem Pedion $\{0001\}$, die unteren zu $\{000\bar{1}\}$ führen. Diese sechs speciellen und der allgemeine Fall entsprechen also folgenden einfachen Formen:

$\{0001\}$ obere (positive) Basis; $\{000\bar{1}\}$ untere (negative) Basis
$\{10\bar{1}0\}$ hexagonales Prisma erster Art
$\{11\bar{2}0\}$ hexagonales Prisma zweiter Art
$\{hik0\}$ dihexagonales Prisma
$\{h0\bar{h}l\}$ hexagonale Pyramide erster Art
$\{h.h.\bar{2h}.l\}$ hexagonale Pyramide zweiter Art
$\{hikl\}$ dihexagonale Pyramide.

Beispiele.

Zinkoxyd = ZnO. $a:c = 1:1,6077$ Traube. Die Krystalle dieses häufigen Hüttenproductes zeigen meist nur die Form hexagonaler Prismen, oft an einem Ende verjüngt durch eine spitze hexagonale Pyramide, doch kommt auch häufig $\{10\bar{1}1\}$ vor, ferner sind noch andere hexagonale Pyramiden erster Art, solche zweiter Art und auch dihexagonale beobachtet

worden. Die natürlichen (manganhaltigen) Krystalle des Rotzinkerzes zeigen die Combination Fig. 432 S. 472. Spaltb. $\{10\bar{1}0\}$ u. $\{0001\}$. Doppelbrechung +.

Zinksulfid = ZnS. $a:c = 1{,}6354$ Friedel. Dieser beobachtete an den von Sidot dargestellten Krystallen die Formen: $\{10\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{0001\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{10\bar{1}2\}$, Förstner an einem Hüttenproducte die in Fig. 498 abgebildete Combination: $m = \{10\bar{1}0\}$, $o = \{10\bar{1}1\}$, $c = \{0001\}$, $x = \{20\bar{2}5\}$ (mit Flächen von $o\,(10\bar{1}\bar{1})$ alternierend), $\{000\bar{1}\}$. Doppelbrechung +, schwach.

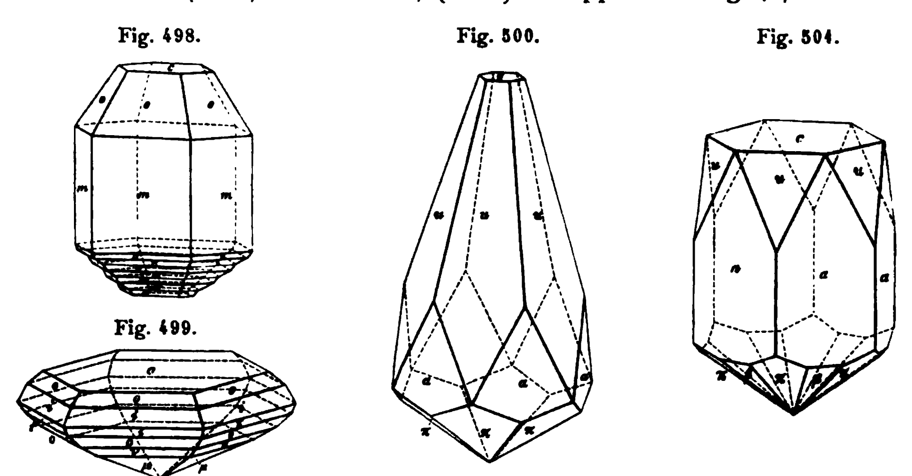


Fig. 498. Fig. 499. Fig. 500. Fig. 501.

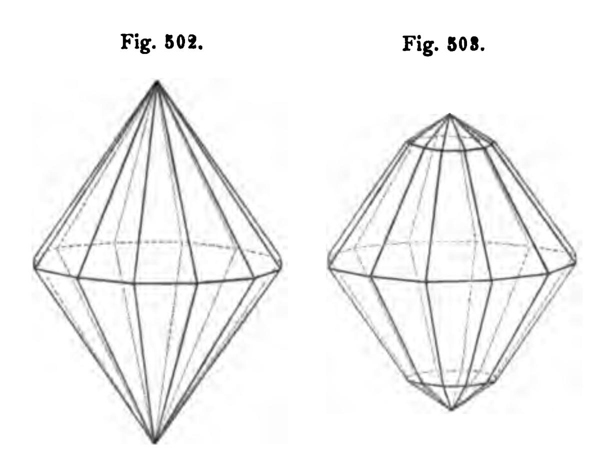
Jodsilber AgJ. $a:c = 1:0{,}8196$ (v. Zepharovich). Aus jodwasserstoffsaurer Lösung erhaltene Krystalle zeigen folgende Combinationen: Fig. 499: $c = \{0001\}$, $o = \{10\bar{1}1\}$ und $\{10\bar{1}\bar{1}\}$, $i = \{20\bar{2}1\}$ und $\{20\bar{2}\bar{1}\}$, $\nu = \{20\bar{2}3\}$, $\mu = \{10\bar{1}2\}$; Fig. 500: $c = \{0001\}$, $u = \{40\bar{4}1\}$, $a = \{11\bar{2}0\}$, $\pi = \{40\bar{4}5\}$; Fig. 501: dieselben Formen mit $\beta = \{9.9.\bar{18}.\bar{20}\}$. Da hiernach an den Krystallen keine dihexagonalen Pyramiden oder Prismen beobachtet wurden, könnten dieselben auch der 23., der hexagonal-pyramidalen, Klasse angehören; Ätzfiguren, welche diese Frage entscheiden würden, sind ebenfalls noch nicht dargestellt worden. Spaltbarkeit nach $\{0001\}$ vollkommen. Doppelbrechung +.

27. Dihexagonal-bipyramidale Klasse.

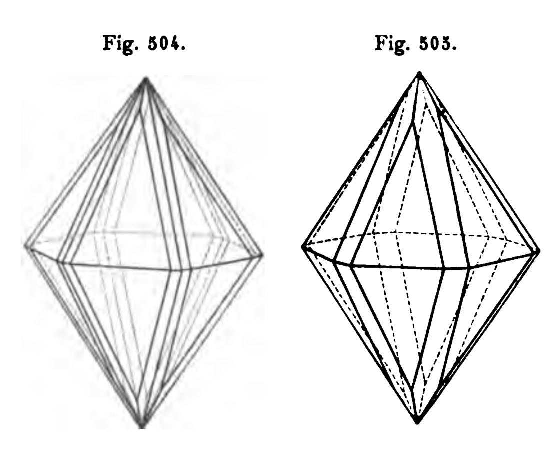
(Holoedrisch-hexagonale Klasse).

Die letzte Klasse repräsentiert die Vereinigung der Symmetrieverhältnisse aller vorhergehenden Klassen des hexagonalen Systemes und damit den höchsten Grad von Symmetrie, welcher mit einer einzigen sechszähligen Axe verbunden sein kann, nämlich deren Combination mit sechs ihr parallelen und einer zu ihr senkrechten Ebene, sowie sechs zu ihr senkrechten zweizähligen Axen der Symmetrie (s. nebenstehende Projection = Fig. 480). Jede weitere Symmetrieebene würde eine mehr als sechszählige Axe oder mehrere hexagonale

Axen erfordern, und das letztere wäre auch der Fall, wenn eine der in der Basis liegenden Symmetrieaxen mehr als zweizählig wäre oder noch andere Symmetrieaxen hinzuträten. Die dieser Klasse entsprechende allgemeine Form ist eine dihexagonale Bipyramide $\{hikl\}$ (Fig. 502) und besteht aus der Gesamtheit aller Flächen mit den gleichen Indiceszahlen, deren Symbole man erhält, wenn man alle beliebigen Vertauschungen der Werte h, i, k und $\bar{h}$, $\bar{i}$, $\bar{k}$ vornimmt und l sowohl positiv als negativ hinzufügt. Diese Form ist gleichsam die Combination zweier gleichgestalteter dihexagonaler Pyramiden der vorigen Klasse, und es gilt daher für sie das über die Flächenwinkel der Polkanten daselbst Gesagte ebenfalls, nur mit dem Unterschiede, daß zu den zweierlei Polkanten noch die zwölf Basiskanten hinzutreten, daß die dihexagonale Bipyramide also dreierlei Kanten besitzt. Zwei derartige Formen, deren Verhältnis $h:i:k$ das gleiche ist, erscheinen so miteinander combiniert, wie es Fig. 503 zeigt, in welcher die entsprechenden Flächen beider einander in horizontalen Kanten schneiden.


Fig. 502. Fig. 503.

Diejenigen dihexagonalen Bipyramiden, welche den gleichen Parameter auf der Hauptaxe abschneiden, aber verschiedenes Verhältnis der Parameter auf den Nebenaxen besitzen, lassen sich in eine Reihe ordnen, deren beide Grenzglieder, wie in der vorigen Klasse von je einer Pyramide, so von je einer hexagonalen Bipyramide erster bzw. zweiter Art gebildet werden. Dementsprechend liegt eine solche dihexagonale Form in der Zone der Polkanten der zugehörigen hexagonalen Bipyramide erster Art, wie es Fig. 504 darstellt; die zweite Grenzform der Reihe würde die Polkanten der letzteren mit je nur einer Fläche gerade abstumpfen (Fig. 505). Wird die in den beiden letzten Figuren vorherrschende hexagonale Bipyramide erster Art als »primäre«


Fig. 504. Fig. 505.

{10$\bar{1}$1} angenommen, so muß in dem Symbole der ihre Polkanten zuschärfenden dihexagonalen $k = l$ sein, und die Abstumpfung, die sogenannte »primäre Bipyramide zweiter Art«, erhält das Symbol {11$\bar{2}$2}. Ist dagegen der Parameter der Hauptaxe einer hexagonalen Bipyramide größer, l also kleiner, wie z. B. Fig. 506, als derjenige einer dihexagonalen, so erscheint letztere als »Zuspitzung« der Polecken an ersterer, wie es Fig. 507 darstellt. Zwei hexagonale Pyramiden erster Art mit verschiedenem Werte von l bilden die analoge Combination Fig. 508, in welcher die flachere von beiden als »Zuspitzung« der Polecken der spitzeren erscheint. Tritt mit einer hexagonalen Bipyramide erster Art eine solche zweiter Art, welche nicht wie in Fig. 505 das gleiche Verhältnis $k:l$ besitzt, in Combination, so erscheint dieselbe, wenn sie flacher ist als jene, als »Zuspitzung« der Polecken (Fig. 509), wenn sie

Fig. 506. Fig. 507.

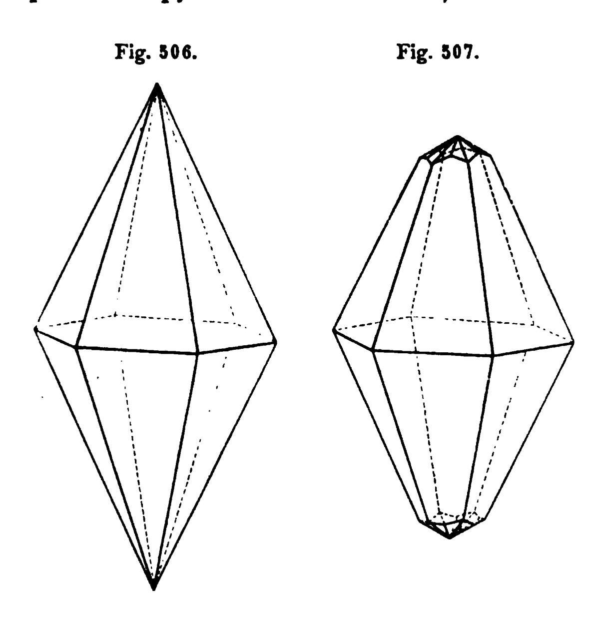
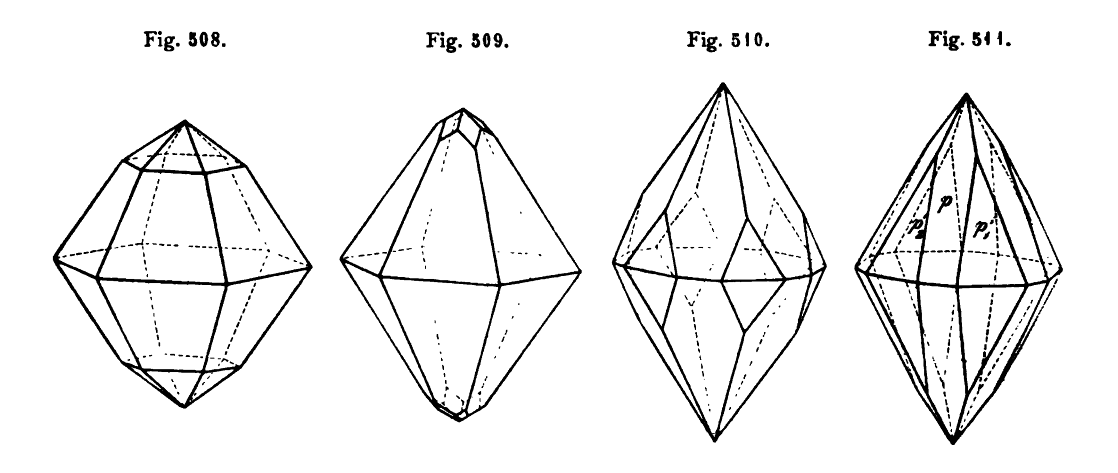


Fig. 508. Fig. 509. Fig. 510. Fig. 511.

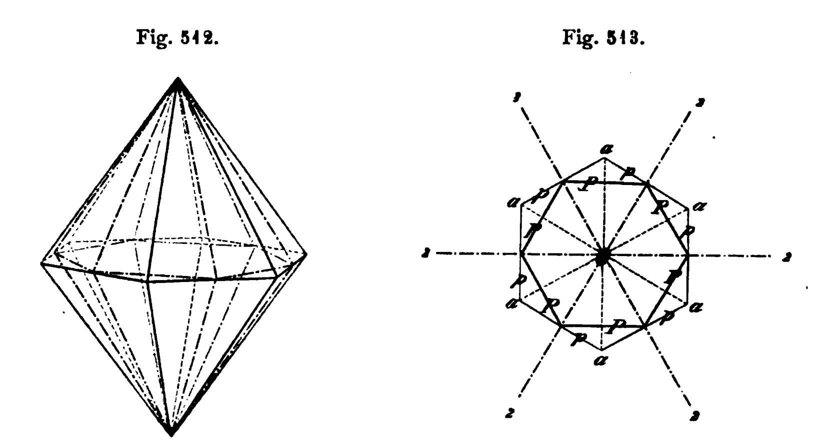


dagegen spitzer ist, als »Zuschärfung« der Basisecken (Fig. 510) der Bipyramide erster Art; in der letzteren Figur ist der Fall dargestellt, daß die Combinationskanten beider Bipyramiden den Polkanten der vorherrschenden

parallel sind; wird diese als $\{10\bar{1}1\}$ angenommen, so ergibt sich hieraus das Symbol der andern als $\{11\bar{2}1\}$. Einen weiteren speciellen Fall stellt Fig. 511 dar, nämlich denjenigen, in welchem die Combinationskanten der Bipyramide zweiter Art p' und derjenigen erster Art p mit den Basiskanten der letzteren einen rechten Winkel bilden, so daß p die Polkanten von p' gerade abstumpft; sei z. B. das Symbol von $p = \{10\bar{1}1\}$, so findet man dasjenige von p', wenn man die Indices zweier Flächen p_1' und p_2', bezogen auf zwei Nebenaxen und die Hauptaxe, als Unbekannte ansieht und in die aus ihnen berechnete Zonengleichung die Indices von p einsetzt; es ergibt sich dann das Verhältnis der beiden Unbekannten $= 4:3$, d. h. das Symbol $\{22\bar{4}3\}$ für p'.

Die zuletzt erwähnte Combination ist offenbar identisch mit der in Fig. 505 abgebildeten, wenn man sich dieselbe 30° um die Hauptaxe gedreht denkt, d. h. p' als Bipyramide erster, p als solche zweiter Art betrachtet. Dies ist gleichbedeutend mit einer Vertauschung der Nebenaxen mit den sog. Zwischenaxen. Nach den S. 442 angestellten Betrachtungen ist es nun aber offenbar gleichgültig, von welchen drei gleichwertigen, in der Basis einander unter 60° schneidenden Richtungen als »Nebenaxen« bei der Orientierung eines hexagonalen Krystalles ausgegangen wird; es können also der obigen Combination beide Stellungen mit gleichem Rechte gegeben werden. Dieselben entsprechen aber verschiedenen Elementen,

Fig. 512. Fig. 513.



d. h. einem verschiedenen Verhältnisse $a:c$. Werde die in Fig. 512 strichpunktiert eingezeichnete Bipyramide, deren Durchschnitt mit der horizontalen Axenebene in Fig. 513 mit P bezeichnet ist, als primäre erster Art $\{10\bar{1}1\}$ genommen, so ist $a:c$ das Verhältnis einer Diagonale dieses Sechseckes zur gesamten Höhe der Bipyramide. Wird dagegen die umschriebene, in Fig. 513 mit p bezeichnete Bipyramide, welche die Nebenaxen der vorigen in dem doppelten Abstande (2, 2, 2) von der Mitte schneiden würde, als primäre betrachtet, so muß die Länge $Oa = 1$ gesetzt werden, und man erhält dann für die verticale Hauptaxe einen Wert, welcher $\sqrt{\frac{3}{4}}$ des vorigen c (da sich die gewählten Einheiten der jedesmaligen Nebenaxen verhalten wie $1:\sqrt{\frac{3}{4}}$).

Den drei Arten von Bipyramiden entsprechen auch in dieser Klasse die drei in den Figuren 443—445 (S. 476) abgebildeten Arten von Prismen, von

denen natürlich die beiden hexagonalen die weitaus häufigsten sind. Fig. 514 stellt die Combination einer Bipyramide erster Art mit dem Prisma der gleichen Stellung als Abstumpfung der Basiskanten, Fig. 515 diejenige derselben Bipyramide mit dem Prisma zweiter Art als gerade Abstumpfung der Basisecken jener dar. Das basische Pinakoid, gleichsam die flachste aller Bipyramiden, bildet die gerade Abstumpfung der Polecken derselben. Die möglichen Formen dieser Klasse sind also die folgenden:

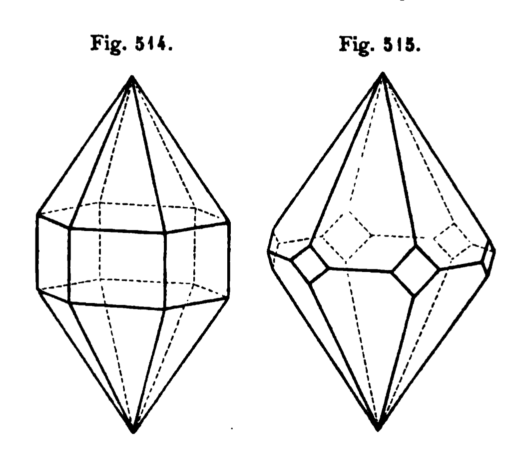


Fig. 514. Fig. 515.

$\{0001\}$ Basis
$\{10\bar{1}0\}$ hexagonales Prisma erster Art
$\{11\bar{2}0\}$ hexagonales Prisma zweiter Art
$\{hik0\}$ dihexagonales Prisma
$\{h0\bar{h}l\}$ hexagonale Bipyramide erster Art
$\{h.h.\overline{2h}.l\}$ hexagonale Bipyramide zweiter Art
$\{hikl\}$ dihexagonale Bipyramide.

Beispiele.

Magnesium = *Mg*. $a : c = 1 : 1,6242$ (Hlawatsch). Combination (Fig. 516): $\{10\bar{1}0\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{0001\}$; die eingezeichneten Ätzfiguren entsprechen der Symmetrie dieser Klasse. Gleitfläche $\{0001\}$.

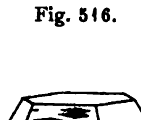


Fig. 516.

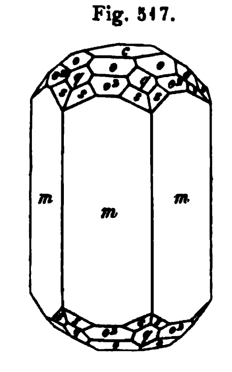


Fig. 517.

Beryllium = *Be*. $a : c = 1 : 1,5802$ (Brögger). Wahrscheinlich isomorph mit vor. Äußerst kleine Krystalle mit den Formen: $\{0001\}$, $\{10\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{10\bar{1}2\}$.

Zink = *Zn*. $a : c = 1 : 2,0346$ (Williams und Burton). Durch Sublimation erhielten die Genannten hexagonale Tafeln mit einer großen Reihe schmaler Randflächen: $\{20\bar{2}3\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{40\bar{4}1\}$ u. a. Die auf Hütten durch Destillation entstehenden Krystalle sind nach G. Rose horizontal gestreifte, hexagonale Prismen mit $\{0001\}$ und untergeordnetem $\{10\bar{1}1\}$. Das Metall ist wohl als isomorph mit Magnesium zu betrachten. Spaltbarkeit nach $\{0001\}$ sehr vollkommen.

Beryll (wenn grün gefärbt, »Smaragd«) = $(SiO_3)_6Al_2Be_3$. $a:c = 1:0{,}4989$ (N. von Kokscharow). Häufig nur $\{10\bar{1}0\}$, $\{0001\}$ in prismatischer Ausbildung, nicht selten auch die flächenreichere Combination Fig. 517: $m = \{10\bar{1}0\}$, $o = \{10\bar{1}1\}$, $c = \{0001\}$, $o^2 = \{20\bar{2}1\}$, $q = \{11\bar{2}1\}$, $s = \{3\bar{2}\bar{1}1\}$. Von diesen Formen liegen die dihexagonale Bipyramide s, sowie q in der Zone einer Fläche von o und einer seitlich anstoßenden m. Doppelbrechung negativ, schwach. Brechungsindices:

	ω	ε
Linie B	$\omega = 1{,}5663$	$\varepsilon = 1{,}5616$
- D	1,5703	1,5659
- E	1,5743	1,5697

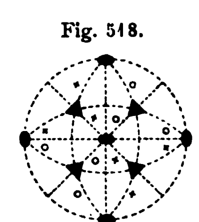
(Schrauf). Häufig optisch anomal.



VII. Kubisches Krystallsystem.

In den zuletzt betrachteten, die optisch einaxigen Krystalle umfassenden, drei Systemen sind alle Symmetrieklassen inbegriffen, in welchen mit zweizähligen Symmetrieaxen eine einzige Axe höherer Symmetrie combiniert ist. Es bleiben nun diejenigen Fälle zu betrachten übrig, in welchen mehrere Axen letzterer Art vorhanden sind, und zwar möge mit solchen trigonaler Symmetrie begonnen werden. Gesetzt, es seien zwei dreizählige Symmetrieaxen vorhanden, so bedingt die eine derselben, daß zur zweiten noch zwei weitere, gleichwertige, existieren, mit welchen dieselbe nach einer Drehung von 120° um die erste Axe zur Deckung gelangt: wenn keine ferneren vorhanden sein sollen, so muß der Winkel zwischen der ersten und zweiten so groß sein, daß die Drehung von 120° um eine jede der vier trigonalen Axen die drei andern miteinander zur Deckung gelangen läßt; dies ist offenbar nur dann der Fall, wenn alle vier gleiche Winkel miteinander bilden. Wir können uns diese vier Symmetrieaxen denken als die Normalen der vier Flächen eines regulären Tetraeders; da dessen Kantenwinkel = 60°, so folgt durch eine einfache Rechnung für die Flächenwinkel 109°28′, und dies ist der Winkel, welchen je zwei der trigonalen Axen einschließen. Die geringste Anzahl dreizähliger Axen, wenn überhaupt deren mehrere vorhanden sind, ist demnach vier; die Pole dieser vier gleichwertigen und einander unter gleichen Winkeln schneidenden Richtungen mögen in Fig. 518 durch die Zeichen ▲ angegeben sein, und × sei irgendein Flächenpol im rechten unteren (d. h. vorderen) Quadranten der oberen Hälfte der Projection. Alsdann erzeugen zunächst die Drehungen 120° und 240° um die in demselben Quadranten durch ▲ markierte dreizählige Axe zwei jenem gleichwertige Pole ××. Dreht man nun das Gebilde um eine der andern trigonalen Axen, z. B. die im benachbarten Quadranten links markierte, um 120°, so gelangt der vorige Quadrant der oberen Kugelhälfte mit dem links benachbarten der unteren Hälfte zur Deckung; dort müssen also drei gleichwertige Flächenpole o so liegen, wie sie in der Figur eingetragen sind; eine zweite Drehung von 120° in demselben Sinne erzeugt wieder drei obere Pole, in der Projection links oben bezeichnet, während eine dritte Wiederholung zu den drei zuerst erwähnten Polen im rechten unteren Quadranten der Projection zurückführt. Die in der Mitte des

Fig. 518.



letzteren Quadranten mündende dreizählige Axe bedingt aber, daß auch in dem rechten oberen Quadranten der Projection drei gleichwertige Pole o liegen müssen, womit die Gesamtzahl (zwölf) der durch die vier trigonalen Axen erforderten gleichwertigen Flächenpole erfüllt ist[1]).

Die nähere Betrachtung der in Fig. 518 eingetragenen Pole gleichwertiger Flächen lehrt nun aber, daß das aus ihnen bestehende geometrische Gebilde noch drei, zueinander senkrechte, zweizählige Symmetrieaxen besitzt, welche in der Figur durch die Zeichen ⬬ markiert sind, indem eine halbe Umdrehung um eine derselben einen beliebigen Pol in einen gleichwertigen überführt. Da diese drei Axen bei einer Drehung von 120° oder 240° um eine der trigonalen miteinander vertauscht werden, so müssen sie einander gleichwertig sein; es liegt also hier der bereits S. 323 betrachtete Fall eines einfachbrechenden Krystalles vor, in welchem die drei zweizähligen Axen den Normalen der Flächen des regulären Würfels, die vier dreizähligen den Normalen der Ebenen des regulären Oktaeders entsprechen. Zu diesen Symmetrieaxen können aber noch weitere hinzutreten, und dadurch entsteht eine neue Symmetrieklasse, welche durch die Projection Fig. 519 repräsentiert wird; hier sind die sechs Halbierenden des Winkels zwischen je zwei Würfelnormalen, d. h. die Normalen der Ebenen des Rhombendodekaeders, zweizählige Symmetrieaxen. Eine halbe Umdrehung um irgendeine dieser Richtungen, z. B. um eine der beiden diagonalen Durchmesser der Projection, bringt zu jedem oberen Pole der Fig. 518 noch einen unteren gleichwertigen, und ebenso zu jedem unteren einen oberen, hervor, so daß alsdann sämtliche 24 in Fig. 519 eingetragenen Flächenpole gleichwertig sind und eine Form bilden, welche schon bei einer Drehung von 90° um die Würfelnormalen mit sich selbst zur Deckung gelangt; die letzteren sind daher in der Figur mit dem Zeichen vierzähliger Symmetrieaxen versehen. Weitere, als diese drei tetragonalen, vier trigonalen und sechs digonalen Axen der Symmetrie sind überhaupt an einem krystallographischen Polyeder unmöglich, denn schon die Hinzufügung einer einzigen zweizähligen Axe als Halbierende des Winkels zwischen einer tetragonalen und einer digonalen würde diese beiden gleichwertig und damit die zu ihnen senkrechte Symmetrieaxe zu einer achtzähligen

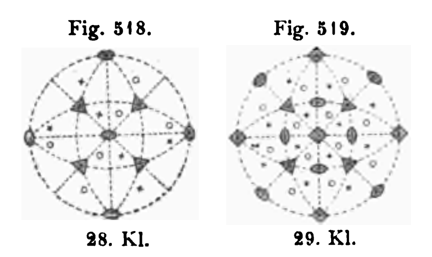


Fig. 518. 28. Kl. Fig. 519. 29. Kl.

1) Dies, sowie überhaupt die vorhergehende Betrachtung, sieht man noch leichter ein, wenn man eine Kugel in acht gleich große Oktanten einteilt durch drei größte Kreise, welche in Fig. 518 durch den horizontalen, den verticalen Durchmesser und den Grundkreis wiedergegeben sind, ferner in der Mitte jedes Oktanten den Pol einer trigonalen Axe bezeichnet und endlich alle in der Projection markierten Flächenpole einträgt. Alsdann gelangt das Gebilde jedesmal durch Drehung von 120° um irgendeine der vier trigonalen Axen zur vollständigen Congruenz mit sich selbst.



machen. Wohl aber können zu den genannten Axen Ebenen der Symmetrie hinzutreten, und alsdann sind drei verschiedene Fälle möglich, welche in den folgenden drei Figuren zum Ausdrucke gebracht sind. Fig. 520: Die drei Ebenen des regulären Würfels sind Symmetrieebenen; die durch Spiegelung der Pole von Fig. 518 nach jenen Ebenen entstehenden weiteren zwölf gleichwertigen Pole entsprechen den entgegengesetzten (parallelen) Flächen der in letzterer Figur dargestellten Krystallform; infolgedessen sind die dreizähligen Axen zugleich sechszählige der zusammengesetzten Symmetrie. Fig. 521: Die sechs Ebenen des Rhombendodekaeders sind

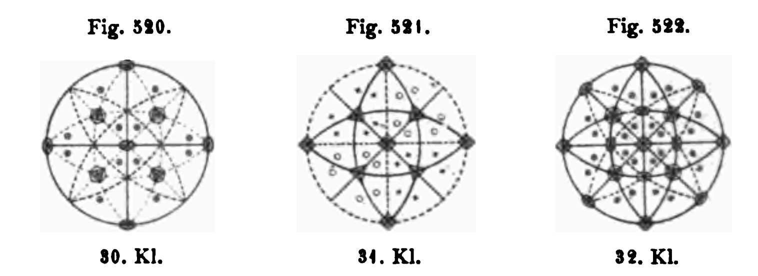


Fig. 520. 30. Kl. — Fig. 521. 31. Kl. — Fig. 522. 32. Kl.

diejenigen der Symmetrie; dann liegen in jedem Quadranten der Projection außer den in Fig. 518 markierten Polen noch drei nach jenen Ebenen dazu symmetrische, und die Normalen der Würfelflächen werden vierzählige Axen der zusammengesetzten Symmetrie. Werden endlich die Symmetrieverhältnisse sämtlicher aufgezählter Fälle vereinigt, so ergeben sich die in Fig. 522 dargestellten, d. h. drei tetragonale, vier trigonale (zugleich sechszählige der zusammengesetzten Symmetrie) und sechs digonale Axen, ferner drei zueinander senkrechte und sechs, den Winkel je zweier der vorhergehenden halbierende, Ebenen der Symmetrie. Dieser Fall repräsentiert den höchsten Grad der Symmetrie, welcher an einem krystallographischen Polyeder möglich ist, da die Hinzufügung irgendeiner weiteren Symmetrieebene die Gleichwertigkeit zweier verschiedenartiger Axen, z. B. einer tetragonalen und einer digonalen, und dadurch die Achtzähligkeit der zu beiden senkrechten Symmetrieaxe bewirken würde. Hiernach gibt es nur noch fünf Symmetrieklassen der Krystalle, welche das kubische (oft auch das reguläre oder tesserale genannte) Krystallsystem bilden.

Die allgemeinen Formen dieser fünf Klassen, deren Pole in den obigen Projectionen eingetragen sind, bestehen aus Flächen, für welche sich die gleichen Indiceszahlen ergeben, wenn man die drei Ebenen des Würfels (Kubus, daher der Name des Systemes) als Axenebenen — d. h. als Krystallaxen die drei aufeinander senkrechten Würfelkanten, welche zwei- oder vierzählige Symmetrieaxen sind — und als Grundform die zu einer trigonalen Axe senkrechte Ebene, welche ebenfalls eine mögliche Krystallfläche ist, wählt. Da die letztere Ebene (eine Fläche des regulären Oktaeders) gleiche Winkel mit den drei Axen einschließt, schneidet sie auf ihnen

gleich große Parameter ab, und die Elemente eines kubischen Krystalles sind daher die folgenden:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ. \qquad a : b : c = 1 : 1 : 1,$$

d. h. dieselben bedürfen zu ihrer Bestimmung keinerlei Messung, da sie durch die Symmetrieverhältnisse gegeben sind. Die in den Projectionen eingetragenen Pole entsprechen Krystallflächen, welche gegen die drei Axen ungleiche Neigung besitzen, deren drei Indices h, k, l daher verschieden sind; da letztere aber rationale Zahlen sind, so stehen auch ihre reciproken Werte, d. h. die drei Parameter jeder beliebigen Fläche (hkl), zueinander in einem rationalen Verhältnisse (vgl. den für zwei gleichwertige Axen S. 415 angeführten Satz).

Aus den Fig. 518 bis 522 ist ferner zu ersehen, daß die tetragonalen und digonalen Symmetrieaxen niemals, die trigonalen nur in der 28. und 31. Klasse (Fig. 518 und 521) polar sind, während in den übrigen Klassen den entgegengesetzten Oktanten (vgl. S. 299), welche den beiden entgegengesetzten Polen einer trigonalen Axe entsprechen, gleich viele und zueinander gleichgestellte Flächen einer und derselben einfachen Krystallform angehören. Die Krystalle jener beiden Klassen sind daher vectorieller Eigenschaften fähig; z. B. können ihre trigonalen Axen zugleich elektrische Axen sein, deren dann vier vorhanden sind (s. unter den Beispielen Zinkblende und Boracit). Ferner ist innerhalb der 28. und der 29. Klasse (Fig. 518 und 519), der beiden einzigen, welche nur Axen der einfachen Symmetrie besitzen, die Möglichkeit eines Drehungsvermögens der Krystalle gegeben, ebenso wie nach den bisherigen Erfahrungen Körper, welche in Lösung optisch activ sind, wenn sie kubisch krystallisieren, einer dieser Klassen angehören und ebenfalls Drehungsvermögen besitzen müssen. Betreffs aller übriger physikalischer Eigenschaften muß dagegen Übereinstimmung sämtlicher kubischer Krystalle herrschen.

Was zunächst das optische Verhalten betrifft, so folgt aus der Gleichwertigkeit der drei zueinander senkrechten Axen die Gleichheit der drei Hauptaxen des Indexellipsoides für jede Farbe, d. h. für optisch normale (homogene) Krystalle vollständige Abwesenheit der Doppelbrechung, ebenso Unabhängigkeit der Absorption des Lichtes von der Richtung im Krystalle. Im Falle einer Drehung der Polarisationsebene muß daher deren numerische Größe ebenfalls für alle Richtungen im Krystalle die gleiche sein.

Für die thermischen Eigenschaften gilt das gleiche: die Sénarmontsche Schmelzfigur ist auf jeder, irgendwie orientierten, Fläche eines kubischen Krystalles ein Kreis; die Ausdehnung durch die Wärme ist für alle Richtungen dieselbe, daher die Winkel und folglich auch die Elemente eines kubischen Krystalles Größen darstellen, welche von der Temperatur vollständig unabhängig sind (vgl. S. 182). Über die Änderungen, welche Krystalle dieses Systemes durch eine Temperaturänderung in bezug auf ihr optisches Verhalten erfahren können, s. S. 192 (betreffs der magnetischen und elektrischen Eigenschaften s. S. 197, 200f., 240).



Während in bezug auf sämtliche eben erwähnten Eigenschaften die kubischen Krystalle sich wie amorphe Körper verhalten, unterscheiden sie sich von ihnen in bezug auf ihr Verhalten gegenüber der Einwirkung bestimmt gerichteter mechanischer Kräfte[1]). Wie S. 220 angegeben, ist ihre Elasticität bestimmt durch drei verschiedene Constanten, und hieraus ergibt sich eine gesetzmäßige Abhängigkeit der elastischen Dehnung von der Richtung; die allgemeinen Symmetrieverhältnisse der dadurch bestimmten Oberfläche der Dehnungscoefficienten sind aber für alle kubischen Krystalle die gleichen und stimmen mit denjenigen der letzten (32.) Klasse überein. Das gleiche gilt für die Cohäsion, deren Verhältnisse bereits S. 211 vollständig angegeben sind, und für die davon abhängige Härte (s. S. 242).

Der Structur sämtlicher Krystalle dieses Systemes liegt ein kubisches Raumgitter zugrunde (s. Fig. 160*a*, S. 280, bzw. Fig. 160*b* und *c*, welche aus zwei bzw. vier ineinandergestellten Raumgittern von der Art der Fig. 160*a* bestehen). Dieses besitzt alle Symmetrieelemente der 32. Klasse (Fig. 522). Wie S. 289 bereits auseinandergesetzt wurde, gilt das gleiche für die aus kubischen Raumgittern zusammengesetzten regelmäßigen Punktsysteme nur zum Teile, sondern es sind unter diesen sämtliche durch die Fig. 518—522 dargestellten Symmetrieverhältnisse vertreten.

Zwillinge mit einer Axenebene, d. h. einer Würfelfläche, als Zwillingsebene sind, den Symmetrieverhältnissen der verschiedenen Klassen entsprechend, in denjenigen dreien möglich, in welchen jene Flächen nicht Symmetrieebenen sind; in den beiden enantiomorphen Klassen führt dieses Gesetz zu einer nach (100) symmetrischen Verwachsung eines rechten und eines linken Krystalles, während es in der 31. Klasse auch definiert werden kann »Zwillingsaxe die Normale zu einer Würfelfläche«, welches Gesetz in den beiden ersten Klassen eine regelmäßige Verwachsung zweier gleichartiger Krystalle bedingen würde. Ebenso, wie in diesen Fällen, besitzen die beiden miteinander verbundenen Krystalle parallele Axensysteme, wenn eine Fläche des Rhombendodekaeders, d. h. eine den Winkel zweier Würfelflächen halbierende Ebene, Zwillingsebene (28., 29., 30. Kl.) oder deren Normale Zwillingsaxe ist, was in den beiden ersten Klassen zu verschiedenen Resultaten führt. Da außer den Würfel- und Dodekaederflächen keine Symmetrieebenen kubischer Krystalle existieren, so kann jede andere Fläche Zwillingsebene sein, welcher Klasse der Krystall auch angehöre; unter allen möglichen Arten der Zwillingsbildung muß aber nach den Betrachtungen S. 268f. diejenige nach einer Ebene maximaler tangentialer Cohäsion am meisten bevorzugt sein, und da dichteste Anordnung, außer nach den Flächen des Würfels und des Dodekaeders, nur nach denen des Oktaeders stattfinden kann, so müssen letztere als Zwillingsebenen weitaus am häufigsten vorkommen. In der Tat ist dieses Zwillingsgesetz, namentlich in der letzten

1) Dementsprechend pflanzt sich der Schall nicht, wie das Licht, nach allen Richtungen in einem kubischen Krystalle gleich schnell fort (s. S. 219).



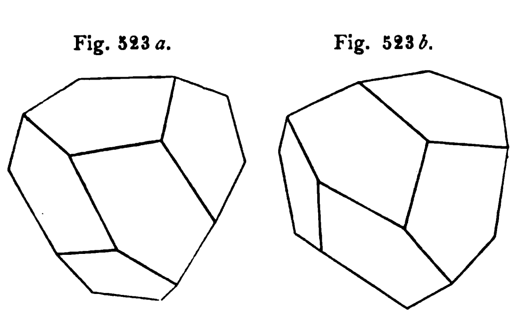
Klasse, in welcher sowohl die regelmäßigen Verwachsungen nach dem Würfel, als die nach den Dodekaederflächen ausgeschlossen sind, weitaus am häufigsten zu beobachten. Dasselbe kann in der 30. und 32. Klasse auch definiert werden »Zwillingsaxe die Normale zu einer Oktaederfläche«, weil hier eine derartige Richtung, d. h. eine trigonale Axe, zugleich eine sechszählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie ist (daher das Zeichen ◈ in den Figuren 520 und 522) und infolgedessen eine Drehung von 180° (= 3·60°) um dieselbe zu dem gleichen Resultate führt, wie eine Spiegelung nach der zu ihr senkrechten Ebene. In den übrigen Klassen entsprechen diese beiden Definitionen naturgemäß zwei verschiedenen Zwillingsgesetzen.

28. Tetraedrisch-pentagondodekaedrische Klasse.

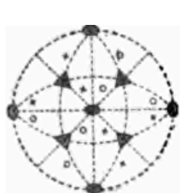
(Tetartoedrie des regulären oder tesseralen Krystallsystemes.)

In nebenstehender, die Symmetrieverhältnisse dieser Klasse repräsentierenden Projection (Fig. 518) sind außer dem Grundkreise, dessen horizontalem und verticalem Durchmesser, welche den drei Durchschnitten der Kugeloberfläche mit den Ebenen des Würfels entsprechen, noch diejenigen sechs größten Kreise eingetragen, in welchen die Ebenen des Rhombendodekaeders die Kugeloberfläche schneiden, und von denen zwei natürlich als diagonale Durchmesser projiciert erscheinen. Durch diese wird jeder Oktant der Kugeloberfläche in sechs rechtwinkelige sphärische Dreiecke zerlegt, deren Hypotenuse der Bogen zwischen dem Pole einer zweizähligen und dem einer trigonalen Axe (= 54°44′), deren längere Kathete die Hälfte (= 45°) des Bogens zwischen den Polen zweier digonaler Axen, und deren kürzere Kathete die Hälfte (= 35°16′) des Abstandes zweier dreizähliger Axenpole ist. Liegt nun der Pol einer zu einer kubischen Krystallform gehörigen Fläche innerhalb eines solchen Dreieckes, so repräsentiert die betreffende Form den allgemeinsten Fall, den der Ungleichheit aller dreier Parameter, d. h. den dreier verschiedener Indices, während, wenn der Pol auf einer der Seiten oder in einem der drei Eckpunkte gelegen ist, sich sechs specielle Fälle der allgemeinen Form ergeben. Die aus denjenigen Flächen, deren Pole in der obigen Projection eingetragen sind, bestehende Form ist nun in Fig. 523*a* abgebildet und würde nach Gestalt und Zahl ihrer Flächen als ein »Pentagondodekaeder« zu bezeichnen sein; da aber auch eine derartige

Fig. 523 *a*. Fig. 523 *b*.



Form existiert, deren Flächen symmetrische Pentagone sind, während es sich hier um unsymmetrische Fünfecke mit fünf verschiedenen Kantenwinkeln handelt, so nennt man diese Form zum Unterschiede von jener tetraedrisches Pentagondodekaeder. Dieselbe besitzt dreierlei Kanten: a) sechs, zu denen je eine Würfelnormale senkrecht steht, b) zwölf in vier dreikantigen Ecken in den vier abwechselnden Oktanten zusammentreffende, und c) ebensoviele, in den vier andern Oktanten spitzere trigonale Pyramiden bildend; dementsprechend kann man sich die Form bestehend denken aus sechs Sphenoiden (je zwei Flächen, auf deren Kante eine zweizählige Symmetrieaxe senkrecht steht), oder aus vier trigonalen Pyramiden der einen Art oder endlich aus vier trigonalen Pyramiden der andern Art. Setzt man stets $h > k > l$, so erhält die in Fig. 523 *a* abgebildete Form das Symbol $\{hkl\}$, d. h. zu ihr gehört von den beiden, an einer nach oben gerichteten Axe des Krystalles zunächst anliegenden Flächen jedesmal die linke, und da drei ihrer Flächen nur positive Indices besitzen, so wird sie das »linke positive tetraedrische Pentagondodekaeder« genannt. Die Form $\{khl\}$, deren Pole an entsprechenden Punkten der zwölf leer gebliebenen sphärischen Dreiecke in der Projection liegen würden, ist in Fig. 523 *b* abgebildet und heißt das »rechte positive tetraedrische Pentagondodekaeder«. Beide Formen, von denen die eine aus der andern durch eine Spiegelung nach einer Dodekaederfläche (z. B. einem diagonalen Durchmesser der Projection) hervorgeht, sind natürlich enantiomorph. Durch Spiegelung nach einer Würfelebene (z. B. dem senkrechten Durchmesser der Projection) liefert das erstere ein sogenanntes negatives rechtes tetraedrisches Pentagondodekaeder $\{h\bar{k}l\}$, dessen Pole in der Projection man erhält, wenn alle Zeichen $\times$ und $\circ$ vertauscht werden, während auf demselben Wege aus dem rechten positiven ein linkes negatives $\{k\bar{h}l\}$ resultiert. Diese vier Formen, von denen je die rechte und linke enantiomorph sind, die beiden rechten aber, wie die beiden linken, durch eine Drehung von 90° um eine der drei Krystallaxen zur Deckung gebracht werden können, stellen die Gesamtheit aller Flächen mit den gleichen Indiceszahlen h, k, l dar, wenn diese auf gleichwertige Axen bezügliche Größen auf alle möglichen Arten vertauscht und ihnen sowohl positives als negatives Vorzeichen gegeben wird, denn alsdann erhält man für den rechten oberen vorderen Oktanten die Flächen:



$$(hkl),\ (hlk),\ (khl),\ (klh),\ (lhk),\ (lkh),$$

in dem links oben vorn befindlichen Oktanten:

$$(h\bar{k}l),\ (h\bar{l}k),\ (k\bar{h}l),\ (k\bar{l}h),\ (l\bar{h}k),\ (l\bar{k}h)$$

usf. in den übrigen sechs Oktanten, im ganzen also 48 mögliche Flächen, entsprechend den 48 Krystallräumen, welche durch die a. vor. S. erwähnten sphärischen Dreiecke auf der Kugeloberfläche begrenzt werden.

Die sechs möglichen speciellen Fälle, auf welche daselbst bereits hingewiesen wurde, sollen nun in dieser, wie in den übrigen vier Klassen, in der folgenden Anordnung betrachtet werden:

1. Die Pole der Flächen liegen in den Hypotenusen der sphärischen Dreiecke. Dies ist der Fall, wenn $k = l$. Wie aus der Projection zu ersehen, fallen dann die Pole des rechten und des linken positiven tetraedrischen Pentagondodekaeders zusammen; die resultierende Form ist das in Fig. 524 *a* abgebildete »positive Triakistetraeder« (auch »Pyramidentetraeder« oder »Trigondodekaeder« genannt), während die entsprechende gemeinschaftliche Grenzform der beiden enantiomorphen negativen Formen $\{h\bar{k}l\}$ und $\{k\bar{h}l\}$ für den Fall $k = l$ das »negative Triakistetraeder« Fig. 524 *b* ist, welches aus dem vorigen durch Drehung von 90° um eine der zweizähligen Axen hervorgeht. Diese Formen besitzen nur zweierlei Kanten, welche in vier dreikantigen und vier 3 + 3-kantigen (ditrigonalen) Ecken zusammentreffen.

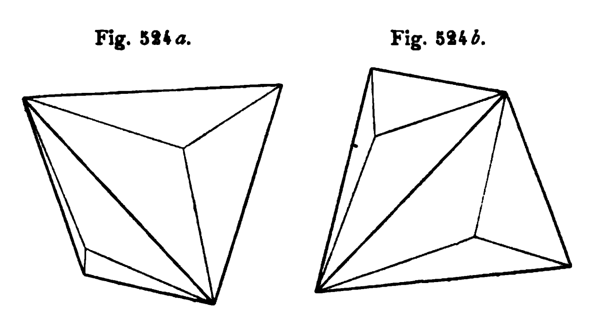


Fig. 524 *a*. Fig. 524 *b*.

2. Die Flächenpole liegen in den kürzeren Katheten der sphärischen Dreiecke, d. h. die beiden größeren Indiceszahlen h und k besitzen den gleichen Wert. Alsdann existiert wieder eine gemeinsame Grenzform der positiven rechten und linken tetraedrischen Pentagondodekaeder, welche die in Fig. 525 *a* abgebildete Gestalt hat und das »positive Deltoiddodekaeder« (nach dem symmetrisch viereckigen Umrisse ihrer Flächen) heißt, und eine zweite gemeinsame Grenzform der beiden enantiomorphen negativen Formen $\{h\bar{k}l\}$ und $\{k\bar{h}l\}$, das »negative Deltoiddodekaeder« Fig. 525 *b*. Auch diese beiden Formen haben zweierlei Kanten, welche aber in acht trigonalen, vier stumpferen und vier spitzeren, zusammentreffen, und unterscheiden sich ebenfalls voneinander nur durch ihre Stellung.

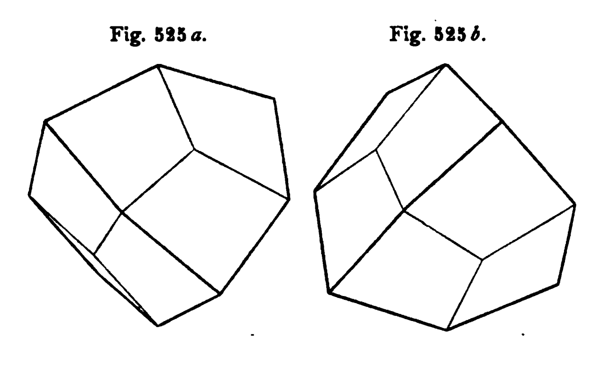
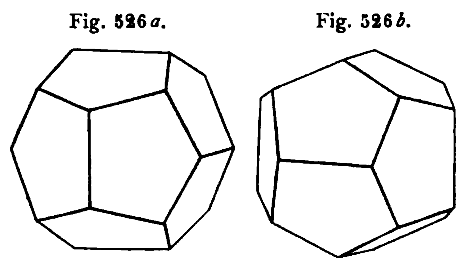


Fig. 525 *a*. Fig. 525 *b*.

3. Die Pole der Flächen liegen auf den längeren Katheten, d. h. auf einem der beiden die Pole der zweizähligen Axen verbindenden Durchmesser

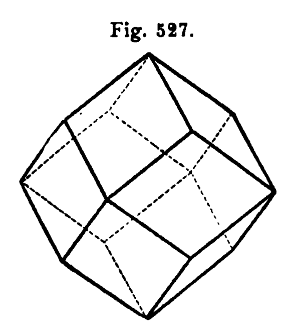
oder auf dem Grundkreise der Projection. Dieser Fall ist offenbar gleichbedeutend mit demjenigen des Parallelismus der Flächen mit einer Krystallaxe und tritt ein, wenn der kleinste Index $l = 0$. Alsdann fallen die Pole des linken positiven und des rechten negativen tetraedrischen Pentagondodekaeders in der Projection zusammen und entsprechen dem in Fig. 526*a* dargestellten »linken Pentagondodekaeder«, dessen Flächen symmetrische Fünfecke sind, während die gemeinschaftliche Grenzform der rechten positiven und linken negativen tetraedrischen Pentagondodekaeder das »rechte Pentagondodekaeder« Fig. 526*b* ist. Beide Formen, nur durch ihre Stellung verschieden, haben zweierlei Kanten: 6 sog. hexaedrische, den zweizähligen Axen parallele, und 24, welche acht gleichartige trigonale Ecken bilden.

Fig. 526*a*. Fig. 526*b*.



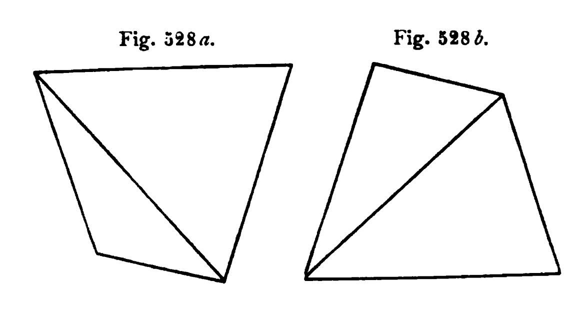
4. Die Pole fallen in den Eckpunkt des rechten Winkels eines jeden sphärischen Dreieckes, d. h. in die Mitte zwischen die Pole zweier digonaler Axen. Alsdann sind die entsprechenden Flächen zu den beiden letzteren Axen gleich geneigt und der dritten krystallographischen Axe parallel ($h = k$, $l = 0$) und halbieren folglich den Winkel zweier Axenebenen; die resultierende Form ist das Rhombendodekaeder Fig. 527, die Grenzform, zu welcher man in diesem speciellen Falle der Orientierung der Pole gelangt, sei es, daß man von einem rechten oder linken, positiven oder negativen tetraedrischen Pentagondodekaeder ausgeht. Dasselbe hat 24 gleiche Kanten mit dem Flächenwinkel 60°.

Fig. 527.



5. Liegen die Pole in demjenigen Eckpunkte des Krystallraumes, in welchem sich die Pole der dreizähligen Axen befinden, so fallen die drei Flächen eines Oktanten in eine einzige mit drei gleich großen Indices ($h = k = l$) zusammen, und zwar resultiert als gemeinschaftliche Grenzform der rechten und linken positiven tetraedrischen Pentagondodekaeder das »positive« reguläre Tetraeder Fig. 528*a*, als diejenige der rechten und linken negativen tetraedrischen Pentagondodekaeder das

Fig. 528*a*. Fig. 528*b*.

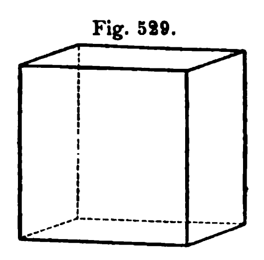




»negative« Tetraeder Fig. 528*b*. Beide, nur durch ihre Stellung verschieden, haben je sechs gleiche Kanten mit 109° 28′ Flächenwinkel und vier gleiche trigonale Ecken; ihre Flächen sind gleichseitige Dreiecke.

6. Wie das Rhombendodekaeder die einzige gemeinsame Grenzform für alle vier Arten der allgemeinen Form, $\{hkl\}$, $\{khl\}$, $\{h\bar{k}l\}$ und $\{k\bar{h}l\}$ ist, so gilt das gleiche auch für den letzten speciellen Fall, denjenigen der Coincidenz der Flächenpole mit den Polen der zweizähligen Axen ($k = l = 0$). Alsdann entsprechen dieselben den drei Axenebenen, und es ergibt sich als die von den letzteren umschlossene Krystallform der reguläre Würfel oder das Hexaeder (Fig. 529) mit 12 rechtwinkeligen Kanten und 8 ebensolchen Ecken.

Fig. 529.



Daß die kubischen Krystalle naturgemäß auf die Ebenen der letzterwähnten Form als Axenebenen zu beziehen sind, beweist die Erfahrung (die in ähnlicher Weise auch bei den andern Krystallsystemen gemacht wurde), daß den Krystallflächen um so günstigere Bedingungen zur Bildung zukommen, je kleiner die Summe der absoluten Werte ihrer Indiceszahlen (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen) ist, d. h. daß die durch ihre Häufigkeit, durch Spaltbarkeit usw. wichtigsten Flächen die mit der Indicessumme 1, nämlich (100) usw., sind, dann die mit der Summe 2, wie (110) usw., mit der Summe 3, wie (111), (210), mit der Summe 4 usw. folgen. Ordnet man dementsprechend die in dieser Klasse möglichen Formen nach ihrer krystallographischen Wichtigkeit, so ergibt sich folgende Übersicht:

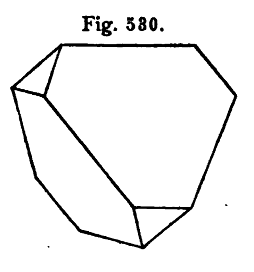
$\{100\}$ Hexaeder
$\{110\}$ Rhombendodekaeder
$\{111\}$ positives Tetraeder; $\{1\bar{1}1\}$ negatives Tetraeder
$\{hk0\}$ linke Pentagondodekaeder; $\{kh0\}$ rechte Pentagondodekaeder
$\{hkk\}$ positive Triakistetraeder, $\{h\bar{k}l\}$ negative Triakistetraeder
$\{hhl\}$ positive Deltoiddodekaeder; $\{h\bar{h}l\}$ negative Deltoiddodekaeder
$\{hkl\}$ linke, $\{khl\}$ rechte positive, $\{h\bar{k}l\}$ bzw. $\{k\bar{h}l\}$ rechte bzw. linke negative tetraedrische Pentagondodekaeder.

Beispiele.

Optisch inactive Körper (Krystalle ohne Drehungsvermögen).

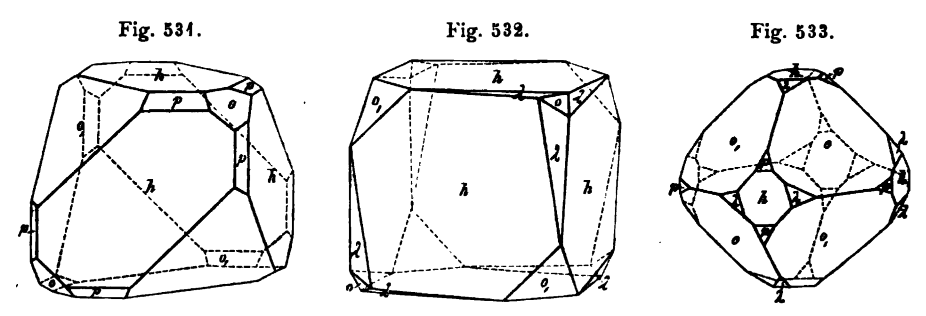
Baryumnitrat $= [NO_3]_2Ba$. Die gewöhnliche Form der aus wäßriger Lösung entstehenden Krystalle ist eine Combination der beiden Tetraeder (Fig. 530), oft auch beide ungefähr gleich groß und mit $\{100\}$. Scacchi, welcher auch im Glanze der Flächen beider Tetraeder einen Unterschied fand, wies die Zugehörigkeit zu dieser Klasse zuerst nach durch Beobachtung einer Combination derselben Formen mit einem

Fig. 530.



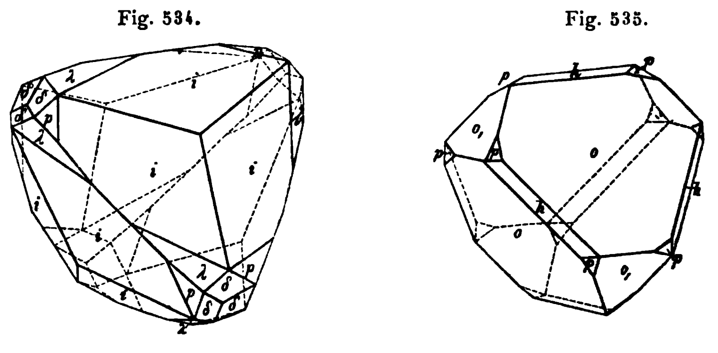
Pentagondodekaeder und einem $\{hkl\}$. Baumhauer beobachtete auf den Hexaederflächen von Krystallen, welche beide Tetraeder mit einem Pentagondodekaeder combiniert zeigten, unsymmetrische Streifen und Ätzfiguren, welche einem linken positiven tetraedrischen Pentagondodekaeder entsprechen. Ausführliche Untersuchungen über die Krystallisation dieses Salzes stellte L. Wulff an. Derselbe erhielt aus reiner wäßriger Lösung die in Fig. 531 dargestellte Combination: $h = \{100\}$, $o_{,} = \{1\bar{1}1\}$, $o = \{111\}$, $p = \{201\}$, in welcher die Stellung des herrschenden Tetraeders zum Pentagondodekaeder die gleiche ist, wie sie Scacchi und Baumhauer fanden. In derselben Lösung bildeten sich aber auch würfelförmige Krystalle, Fig. 532, mit

Fig. 531. Fig. 532. Fig. 533.



Flächen eines linken positiven tetraedrischen Pentagondodekaeders λ. Gestalten, welche den von Scacchi beobachteten im Habitus ähnlich waren, wurden aus einer mit Natronsalpeter versetzten Lösung erhalten, nämlich Combinationen (Fig. 533) der nur wenig verschiedenen Tetraeder mit untergeordnetem Hexaeder, Pentagondodekaeder p $\{201\}$ und einem linken positiven tetraedrischen Pentagondodekaeder λ, welches ungefähr die Lage von $\{421\}$ hatte. Die compliciertesten Formen lieferten Lösungen, welche gleichzeitig mit Kalisalpeter, Natronsalpeter und Zucker versetzt waren; dieselben zeigten vorherrschend das positive Triakistetraeder $i = \{211\}$, das linke positive tetraedrische Pentagondodekaeder λ und das rechte

Fig. 534. Fig. 535.



Pentagondodekaeder $p = \{201\}$, ein Krystall auch das negative Deltoiddodekaeder $\delta = \{2\bar{2}1\}$, s. Fig. 534. In allen diesen Fällen sind die beobachteten tetraedrischen Pentagondodekaeder solche, daß sie im Grenzfall

des Parallelismus mit einer Axe (d. h. wenn ein Index = 0 wird) in dasjenige Pentagondodekaeder übergehen, welches dem gleichzeitig beobachteten entgegengesetzt ist. Eine der Lösungen lieferte Krystalle von abweichender Form (Fig. 535), insofern das herrschende Tetraeder gegen das Pentagondodekaeder die umgekehrte Stellung hatte, als in Fig. 531 f. Die flächenreichste bisher beobachtete Combination des salpetersauren Baryum fand Lewis an einem zufällig gebildeten Krystalle. Derselbe ist in Fig. 536 in senkrechter Projection auf die vordere Hexaederfläche (100)

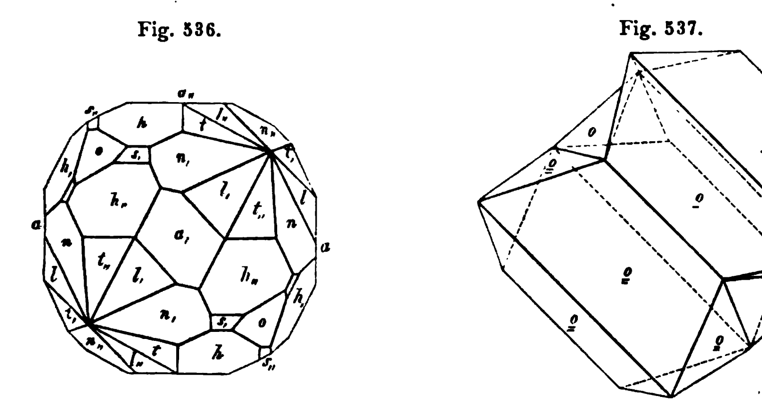


Fig. 536. Fig. 537.

dargestellt und zeigt folgende Formen: $a = \{100\}$, $o = \{1\bar{1}1\}$, $l = \{311\}$, $s = \{2\bar{1}1\}$, $t = \{214\}$, $n = \{351\}$, $h = \{2\bar{1}4\}$. Es erscheinen also in den positiven Oktanten ein rechtes und ein linkes tetr. Pentagondodekaeder, aber von verschiedenem Zeichen, und in den negativen eines, h, welches einem der beiden positiven, t, enantiomorph ist. — Häufig Zwillinge nach $\{111\}$, zuweilen mit Wiederholung der Zwillingsbildung zu Drillingen, Fig. 537, wobei die Krystalle nach denjenigen Combinationskanten der beiden, gleich groß ausgebildeten, Tetraeder verlängert sind, welche der Zwillingsebene parallel gehen. — Brechungsindex für *Na*-Licht: $n = 1,5711$ Topsøe und Christiansen, 1,5716 Fock. Die Krystalle zeigen eine schwache anomale Doppelbrechung, indem sie, durch zwei gegenüberliegende Tetraederflächen gesehen, zwischen gekreuzten Nicols in keiner Stellung vollständig dunkel erscheinen.

Strontiumnitrat $= [NO_3]_2Sr$. Combination der beiden Tetraeder, an Größe wenig verschieden, mit dem Hexaeder, seltener mit kleinen Flächen des rechten Pentagondodekaeders (Fig. 535). Brechungsindex für *Na*-Licht: $n = 1,5667$ Fock. Optisches Verhalten wie beim vorigen Salze.

Bleinitrat $= [NO_3]_2Pb$. Bei schneller Verdunstung wäßriger Lösungen entstehen trübe, milchweiße Oktaeder (Combinationen beider Tetraeder in gleicher Größe), bei ziemlich langsamer Verdunstung dagegen durchsichtige Krystalle der Combination Fig. 535 (s. vor. S.): $o = \{111\}$, $o_{,} = \{1\bar{1}1\}$, $h = \{100\}$, $p = \{201\}$, an denen gewöhnlich die Flächen $o_{,}$ kleiner sind als o und außerdem sich dadurch von letzteren unterscheiden, daß sie

matter sind und eine Trübung von ihnen ausgehend sich in das Innere des Krystalles erstreckt. Durch oberflächliches Lösen runden sich die Combinationskanten des Hexaeders mit dem positiven Tetraeder stärker ab, als diejenigen mit dem negativen, und läßt man alsdann die Krystalle wieder wachsen, so bilden sich an ersteren Kanten schmale Flächen eines Triakistetraeders und einzelne Flächen eines rechten positiven tetraedrischen Pentagondodekaeders $\varrho = \{10.5.6\}$ (Fig. 538). Bei niedriger Temperatur

Fig. 538.

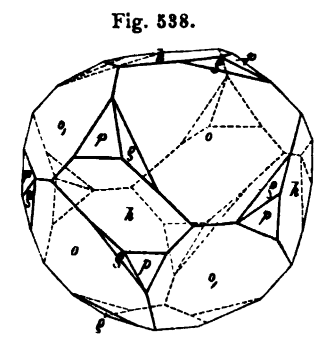
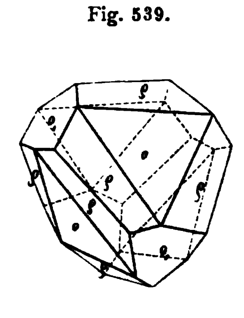


Fig. 539.



erhaltene Krystallisationen zeigen die letztere Form auch ziemlich vorherrschend, wie es Fig. 539 darstellt. In bezug auf die relative Entwickelung der beiden Tetraeder verhalten sich also alle diese Combinationen umgekehrt, wie die gewöhnlichen Formen des Barytsalpeters. Doch bilden sich auch zuweilen bei gewöhnlicher Temperatur Krystalle, welche den letzteren entsprechen, wie der Umstand beweist, daß an solchen beim Weiterwachsen, nachdem die Kanten durch Auflösen abgerundet waren, die Ausbildung der Triakistetraeder am kleiner ausgebildeten Tetraeder erfolgte; Formen einer derartigen Krystallisation sind in Fig. 540 und 541

Fig. 540.

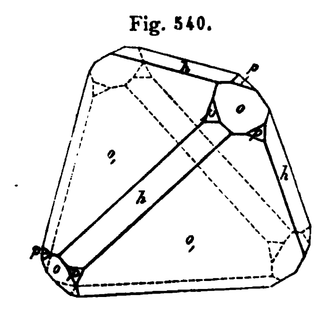
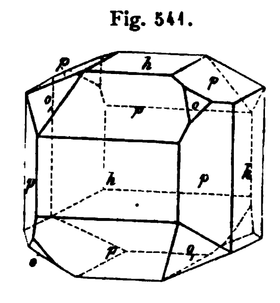


Fig. 541.



dargestellt. Beide Ausbildungsarten des Salzes zeigen also das gleiche, das rechte Pentagondodekaeder. Die beiden Tetraeder unterscheiden sich auch durch ihre Ätzfiguren, welche einem tetraedrischen Pentagondodekaeder entsprechen und auf dem positiven Tetraeder gegen die symmetrische Lage zu den Kanten nach links, auf dem negativen Tetraeder nach rechts gedreht erscheinen (L. Wulff). Brechungsindices nach Topsøe und Christiansen:

Linie	C	$n = 1{,}7730$
-	D	$- = 1{,}7820$
-	F	$- = 1{,}8065$

Anomale Doppelbrechung meist sehr deutlich; eine Platte || (111) zerfällt in sechs Sectoren, deren Schwingungsrichtungen parallel und senkrecht zu den Seiten sind und deren Doppelbrechung von der Mitte nach dem Rande hin zunimmt; im convergenten Lichte zeigt die Mitte ein einaxiges Interferenzbild, welches nach dem Rande zu in ein zweiaxiges mit zunehmendem Axenwinkel übergeht (Klocke).

Natrium-Strontiumarseniat $= AsO_4SrNa.9H_2O$. Dieselben Combinationen wie Natriumchlorat (Fig. 542*a* oder *b*), aber ohne Wirkung auf das polarisierte Licht (Dufet).

Optisch inactive Körper (Krystalle mit Drehungsvermögen).

Natriumchlorat $= ClO_3Na$. Aus wäßrigen Lösungen bei gewöhnlicher Temperatur große Krystalle, Combinationen des Hexaeders mit dem Rhombendodekaeder, einem Pentagondodekaeder {201} und einem Tetraeder. Die Krystalle zeigen stets Drehungsvermögen[1]), und zwar bilden sich aus derselben Lösung nebeneinander (unter normalen Verhältnissen in gleicher Menge) rechtsdrehende und linksdrehende (s. S. 281), welche sich stets durch die gegenseitige Stellung des Pentagondodekaeders zum Tetraeder unterscheiden: betrachtet man das letztere als negatives, so erscheint an den rechtsdrehenden Krystallen das »rechte« Pentagondodekaeder, dessen hexaedrische Kante vorn horizontal verläuft, an den linksdrehenden jedoch das entgegengesetzte, mit verticaler vorderer Kante. Fig. 542*a* stellt somit die Form eines rechtsdrehenden, Fig. 542*b* die eines linksdrehenden Krystalles dar. Noch niemals sind bisher an einer der beiden Formen zugleich Flächen des entgegengesetzten Pentagondodekaeders beobachtet worden, und da das Auftreten des einen regelmäßig mit Rechtsdrehung, das des andern mit Linksdrehung verbunden ist, Krystalle ohne Drehungsvermögen aber nicht beobachtet werden, so ist hieraus zu schließen, daß die beiden Formen einander in bezug auf ihr Vorkommen an demselben Krystalle ausschließen. Da das rechte Pentagondodekaeder die gemeinsame Grenzform des rechten positiven und des linken negativen tetraedrischen Pentagondodekaeders darstellt, so ist anzunehmen, daß auch nur diese

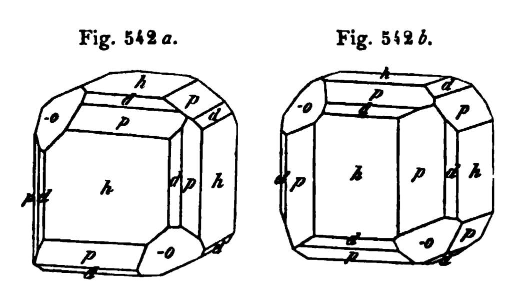
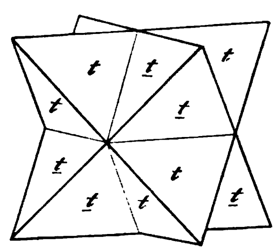


Fig. 542 *a*. Fig. 542 *b*.

1) Diese Eigenschaft und ihre gesetzmäßige Beziehung zu den enantiomorphen Formen der Krystalle wurde von Marbach entdeckt.

beiden Formen an rechtsdrehenden Krystallen auftreten können, dagegen linke positive und rechte negative, deren gemeinsame Grenzform für $l = 0$ das linke Pentagondodekaeder, nur an linksdrehenden. Obgleich diese Annahme, da noch keine Formen $\{hkl\}$ am chlorsauren Natrium beobachtet wurden, noch nicht bewiesen ist, gewinnt dieselbe doch an Wahrscheinlichkeit, wenn die daraus zu ziehenden Folgerungen berücksichtigt werden. Jedes der beiden Tetraeder ist die gemeinschaftliche Grenzform der rechten und der linken tetraedrischen Pentagondodekaeder desselben Oktanten (vgl. S. 512), welche entgegengesetzten Drehungen entsprechen, also würde jedes der beiden Tetraeder an Krystallen beider Arten auftreten können. In der Tat beobachtet man zuweilen, wenn auch selten, Combinationen beider Tetraeder sowohl an rechts- wie an linksdrehenden Krystallen. Genau der gleiche Schluß gilt auch für die Triakistetraeder und die Deltoiddodekaeder. Damit übereinstimmend sind Krystalle, welche sich bei sehr niedriger Temperatur bilden und das Deltoiddodekaeder {332} allein oder mit {111} zeigen, teils rechts- teils linksdrehend. Dasselbe gilt für die Combinationen des Hexaeders mit dem Deltoiddodekaeder, welche sich aus ziemlich stark abgekühlter Lösung absetzen. — Die unter 0° erhaltenen Krystalle des Natriumchlorates, Deltoiddodekaeder oder Combinationen mit dem Tetraeder derselben Stellung oder reine Tetraeder, bilden sehr regelmäßige Durchkreuzungszwillinge nach dem Hexaeder (Fig. 543), und zwar sind die beiden Krystalle nicht nur geometrisch, sondern auch in physikalischer Beziehung symmetrisch zueinander in bezug auf die Zwillingsebene, d. h. entgegengesetzt; es ist nämlich stets ein rechtsdrehender Krystall mit einem linksdrehenden verwachsen. — Die Ätzfiguren auf {100} gehören Pentagondodekaedern an und haben daher bei rechts- und linksdrehenden Krystallen entgegengesetzte Lage: noch schärfer sind diejenigen auf $\{1\bar{1}1\}$, welche von den drei angrenzenden Flächen des Pentagondodekaeders gebildet werden, und deren Orientierung gegen die Kanten rechtsdrehende Krystalle von linksdrehenden zu unterscheiden gestattet, auch wenn das Pentagondodekaeder in der Combination fehlt (Baumhauer). — Sehr starke piezo- und pyroelektrische Erregbarkeit; die vier polaren trigonalen Axen sind zugleich die elektrischen Axen, und zwar werden nach Hankel und Lindenberg die Flächen $-o$ der Combination Fig. 542 (S. 517) beim Erkalten negativ, entsprechen also den analogen Polen, während die Flächen {111} und {332} der bei niedriger Temperatur entstehenden Krystalle positiv werden. —

Fig. 543.

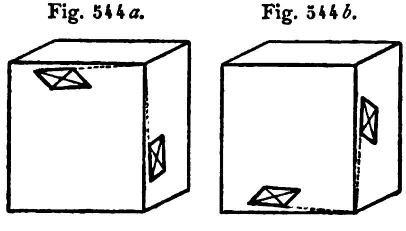


Cohäsion nach verschiedenen Richtungen so wenig verschieden, daß keine Spaltbarkeit zu beobachten ist und die Härtecurve auf allen Flächen als ein Kreis erscheint. Elasticitätsconstanten (s. S. 220) nach Voigt: $c_1 = 6{,}33 . 10^6$, $c_2 = -2{,}14 . 10^6$, $c_3 = 1{,}22 . 10^6$. Aus diesen Werten folgt, daß

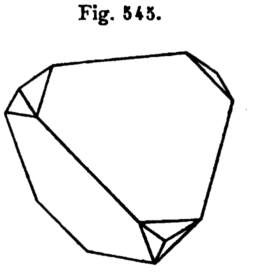
ein Cylinder, dessen Axe ⊥ (100) ist, wenn er parallel dieser Richtung gedehnt wird, nicht eine Quercontraction, sondern eine Querdilation erfährt. Brechungsindices nach Dussand (für die ultraviolette Linie *Cd* 18 nach Borel) und Drehungsvermögen α nach Guye (vgl. auch S. 154 und 192):

	bei 0°	bei 23°	bei 20°
Linie *B*:	n = 1,5129	1,5116	α = 2°,27
- *C*	1,5141	1,5127	2 50
- *D*	1,5165	1,5151	3 13
- *F*	1,5232	1,5216	4 67
- *Cd* 18	—	(1,5861)	14 73

Natriumbromat = BrO_3Na. Beobachtete Formen: {111}, {1$\bar{1}$1}, {100}, {110}, {120}, {130} u. a.; an Krystallen aus warmer Lösung herrscht {100} vor, auf dessen Flächen Ätzfiguren leicht zu erhalten sind, bei linksdrehenden Krystallen von der in Fig. 544*a*, an den rechtsdrehenden von der in Fig. 544*b* dargestellten Form und Orientierung (Loury). Drehung für 1 m = 2°,8 im weißen Lichte (mittlere Wellenlänge).


Fig. 544*a*. Fig. 544*b*.

Essigsaures Uranylnatrium = $[C_2H_3O_2]_3UO_2Na$. Combination eines Tetraeders mit dem Rhombendodekaeder (Fig. 545). Drehung für 1 mm und weißes Licht 1°,8.


Fig. 545.

Natriumsulfantimoniat (Schlippesches Salz) = $SbS_4Na_3 . 9H_2O$. Combination eines vorherrschenden Tetraeders {111} mit untergeordneten {1$\bar{1}$1}, {110} und einem rechten oder linken Pentagondodekaeder {201} oder {210}, zuweilen auch beide, aber von verschiedener Größe. Drehung der Polarisationsebene für mittlere Farben 2°,7. Beziehung zwischen dem Sinne der Drehung und der enantiomorphen Krystallform wie beim Natriumchlorat, wenn nur ein Pentagondodekaeder auftritt; die wenigen Krystalle mit beiden zeigen meist die dem größer ausgebildeten entsprechende Drehung (Marbach).

Optisch active Körper.

act.-Amylamin-Alaun = $(SO_4)_2AlN(H_3 . C_5H_{11}) . 12H_2O$, dreht nach Le Bel die Polarisationsebene des Lichtes auch im krystallisierten Zustande.

Coniin-Alaun = $(SO_4)_2AlN(H_3 . C_8H_{15}) . 12H_2O$. Oktaeder, deren Ätzfiguren die Zugehörigkeit zu dieser Klasse beweisen; Drehungsvermögen nicht nachweisbar (Traube).

29. Pentagon-ikositetraedrische Klasse.

(Plagiedrische oder gyroedrische Hemiedrie des regulären Systemes.)

Wenn zu den Symmetrieaxen der Krystalle der vorigen Klasse noch die Dodekaedernormalen als zweizählige hinzutreten und infolgedessen (vgl. S. 505) die Normalen des Hexaeders tetragonale Axen werden, so existieren im allgemeinsten Falle 24 gleichwertige Flächen von der Verteilung, wie in untenstehend wiederholter Fig. 519. Dieselben bilden das in Fig. 546*a* dargestellte »linke« Pentagonikositetraeder, so genannt,

Fig. 546*a*.

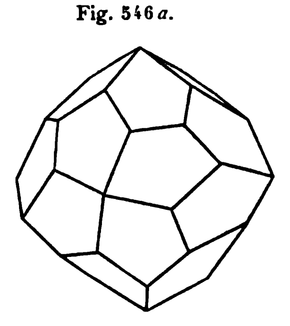
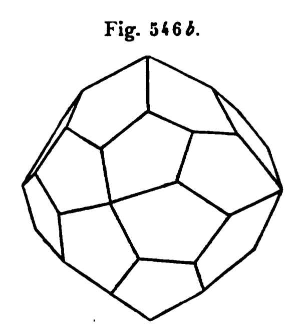


Fig. 546*b*.



weil es aus den Flächen des linken positiven und linken negativen tetraedrischen Pentagondodekaeders (s. S. 510) besteht. Ersetzt man alle Pole × durch o und umgekehrt, so erhält man das enantiomorphe, aus den 24 entgegengesetzten Flächen bestehende »rechte« Pentagon-Ikositetraeder Fig. 546*b*. Wie die allgemeine Form der ersten Klasse des kubischen Systemes, haben auch die Flächen dieser die Gestalt ungleichseitiger Fünfecke; während aber die gleichen trigonalen Ecken bei jener nur in den vier abwechselnden Oktanten wiederkehrten, ist dies hier in sämtlichen acht Oktanten der Fall, so daß die Polarität der dreizähligen Axen hier wegfällt.

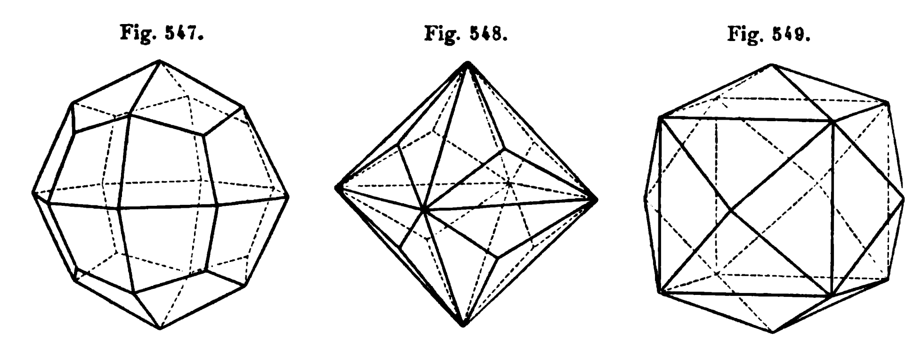
Diese allgemeine Form $\{hkl\}$ geht nun in speciellen Fällen der Indices in sechs besondere Formen über, welche in derselben Reihenfolge betrachtet werden sollen, wie S. 511 f.:

1. Wenn $k = l$, so fallen die Pole des rechten und linken Pentagonikositetraeders zusammen, und es entsteht ein symmetrisch gestaltetes Ikositetraeder Fig. 547, dessen acht dreikantige Ecken von Kanten gebildet werden, welche in den Ebenen des Rhombendodekaeders gelegen sind, während die andern 24 Kanten, welche die sechs tetragonalen Ecken bilden, in den Ebenen des Hexaeders liegen.

2. Ist $h = k$, d. h. liegen die Pole auf den kürzeren Katheten der die Kugeloberfläche bildenden 48 sphärischen Dreiecke, so fallen wieder die rechte und linke allgemeine Form zu einer solchen von symmetrischer Gestalt zusammen; jetzt liegen aber die acht dreikantigen Ecken so, daß die Flächen zweier benachbarter Oktanten einander in Kanten schneiden,

welche den Oktaederkanten parallel gehen (wie unmittelbar aus der Projection zu ersehen, da ihre Pole in den Zonen zwischen den Polen je zweier Oktaederflächen liegen); die resultierende Form, Fig. 548, ist also ein Triakisoktaeder, d. h. ein reguläres Oktaeder mit einer trigonalen Pyramide an Stelle jeder Oktaederfläche (daher auch »Pyramidenoktaeder« genannt).

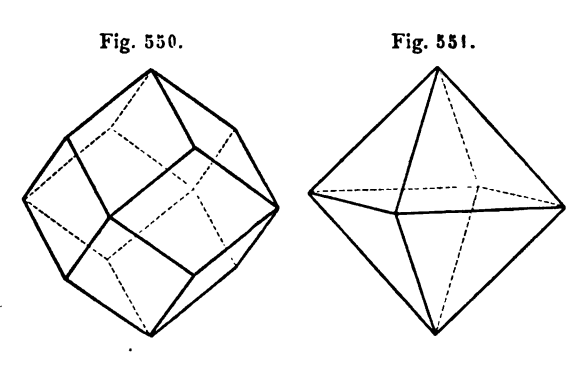
Fig. 547. Fig. 548. Fig. 549.



3. Auch der Fall $l = 0$ liefert eine gemeinsame Grenzform der rechten und linken Pentagonikositetraeder, bestehend aus 24 Flächen, deren jede einer Krystallaxe parallel ist und die beiden andern in einem einfachen rationalen Parameterverhältnisse schneidet. Infolgedessen liegen je acht Flächen in der Zone einer Hexaederkante, und die Gesamtheit aller bildet ein Tetrakishexaeder Fig. 549, d. h. einen Würfel mit tetragonalen Pyramiden an Stelle der Flächen (daher auch »Pyramidenwürfel« genannt). Die hexaedrischen Kanten dieser Form bilden mit den pyramidalen an Stelle der dreikantigen Ecken des Hexaeders ditrigonale Ecken, welche in dem besonderen, in der Figur dargestellten Falle {210} hexagonale sind, d. h. von sechs Kanten mit gleichen Flächenwinkeln gebildet werden.

4. Je kleiner die Flächenwinkel der hexaedrischen Kanten der letzterwähnten Formen sind, d. h. je näher die Pole der Mitte zwischen denen zweier vierzähliger Axen liegen, um so mehr nähern sich jene dem Rhombendodekaeder Fig. 550 (= Fig. 527 S. 512), da für $h = k$ und $l = 0$ je zwei Pole der allgemeinen Form zusammenfallen.

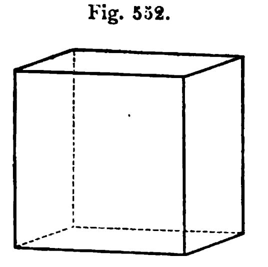
Fig. 550. Fig. 551.



5. Ist $h = k = l$, so fallen je drei Pole der allgemeinen Form mit den Polen der trigonalen Axen zusammen, und es entsteht das reguläre Oktaeder (Fig. 551), welcher Form sich sowohl die rechten und linken Pentagonikositetraeder, wie die Ikositetraeder (Fig. 547) und Triakisoktaeder (Fig. 548)

um so mehr in ihrer Gestalt nähern, je weniger die drei Indices voneinander verschieden sind. Das Oktaeder hat 12 gleiche Kanten, deren Flächenwinkel = 70°32', und seine Flächen sind gleichseitige Dreiecke.

Fig. 552.



6. Während das Rhombendodekaeder die eine Grenzform der Tetrakishexaeder bildet, ist die andere, welcher jene sich um so mehr nähern, je verschiedener h von k ist, das Hexaeder {100} Fig. 552 (= Fig. 529).

Die Übersicht der Formen dieser Klasse, der S. 513 gegebenen entsprechend geordnet, gestaltet sich also folgendermaßen:

{100} Hexaeder
{110} Rhombendodekaeder
{111} Oktaeder
$\{hk0\}$ Tetrakishexaeder
$\{hkk\}$ Ikositetraeder
$\{hhl\}$ Triakisoktaeder
$\{hkl\}$ linke, $\{khl\}$ rechte Pentagonikositetraeder.

Beispiele.

Kupferoxydul (Cuprit) = Cu_2O. Die natürlichen Krystalle zeigen {111}, {100}, {110}, {211}, selten und untergeordnet das Pentagonikositetraeder {896} (Miers).

Chlorammonium (Salmiak) = NH_4Cl. Die häufig beobachteten Formen sind: {211}, {110}, {100}, {111}, von denen namentlich die erste oft in auffallender Verzerrung ausgebildet erscheint, s. Fig. 553, 554 und 555,

Fig. 553.

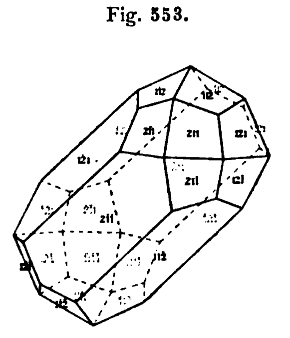


Fig. 554.

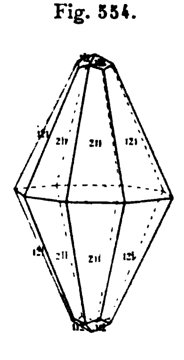
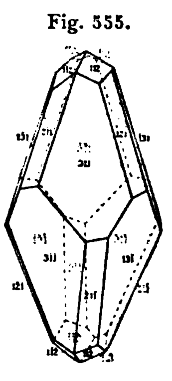


Fig. 555.



welche letztere die Combination der beiden unvollständig ausgebildeten Ikositetraeder {311} und {211} zeigt. Aus Lösung erhaltene große Krystalle, welche Tschermak untersuchte, zeigten {211} mit schmalen Abstumpfungen der Kanten (Fig. 556); diese erwiesen sich als schief und entsprachen ungefähr dem Pentagonikositetraeder {875}. Außerdem zeigten

die Flächen des Ikositetraeders Ätzfiguren (in Fig. 557 vergrößert dargestellt), deren Gestalt auch ohne das Auftreten der vorerwähnten Form beweisen würde, daß der Krystall keine Ebenen der Symmetrie besitzt.

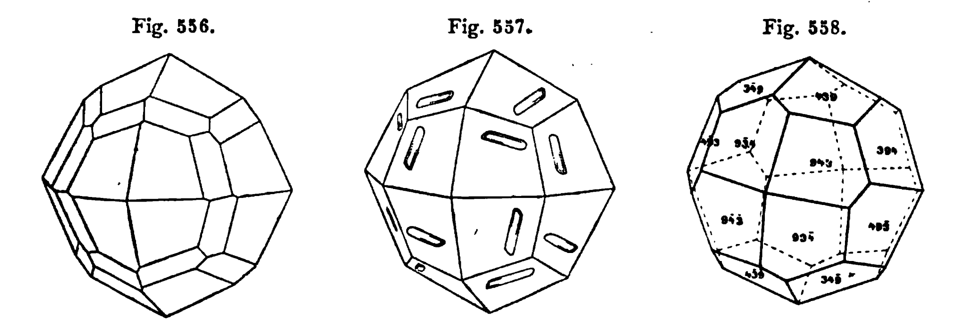


Fig. 556. Fig. 557. Fig. 558.

Endlich wurde das Pentagonikositetraeder {943} (Fig. 558) auch für sich allein beobachtet (Slavík). Spaltbarkeit nach {100} ziemlich vollkommen, aber wegen großer Plasticität schwer zu erhalten; Gleitflächen {110}, Gleitrichtung [001] (Johnsen).

Chlorkalium (Sylvin) $= KCl$. Aus wäßriger Lösung {100}, aus roher Potaschelösung {111}; die natürlichen Krystalle sind Combinationen von {100} mit {111}, Fig. 559, oder mit einzelnen unvollkommenen Flächen $\{hkl\}$ (Tschermak beobachtete {421}, {854}) u. a. Ätzfiguren auf {100} tetragonale Vertiefungen, welche gegen die Hexaederkanten gedreht sind und daher von den Flächen eines Pentagonikositetraeders gebildet werden (Brauns, Linck). Spaltbar {100} vollkommen. Gleitflächen {110}, Gleitrichtung $[1\bar{1}0]$ (Johnsen). Dehnungswiderstand C (s. S. 216) nach Koch parallel einer Hexaedernormale 4009, parallel einer Dodekaedernormale 2088, nach Voigt 3724 bzw. 1960 kg. Brechungsindices bei 20° nach Stefan:

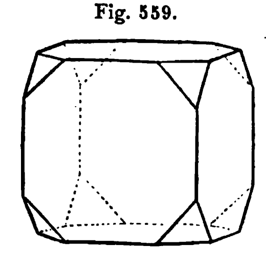


Fig. 559.

Linie	A:	$n = 1,4838$	Linie	E:	$n = 1,4946$
-	B:	1,4860	-	F:	1,4983
-	C:	1,4871	-	G:	1,5054
-	D:	1,4903	-	H:	1,5106

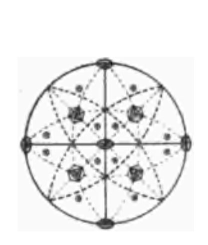
Für D nimmt der Brechungsindex bei Temperaturzunahme von 1° um 0,0000346 ab.

Die vorstehenden Beispiele gehören den optisch inactiven Körpern an. Bisher sind noch keine Repräsentanten dieser Klasse gefunden worden, welche im krystallisierten Zustande oder in Lösung die Polarisationsebene des Lichtes drehen.

30. Dyakisdodekaedrische Klasse.

(Pentagonal- oder parallelflächig-hemiedrische Klasse.)

Diese Klasse wird dadurch charakterisiert, daß die Krystalle nach den Ebenen des Hexaeders symmetrisch sind. Vergleicht man die beiden Projectionen Fig. 518 und 520 S. 505f., von denen die letztere untenstehend wiederholt ist, so sieht man, daß die zweite außer den in die erste eingetragenen Polen noch diejenigen enthält, welche daraus durch Spiegelung nach den drei Axenebenen hervorgehen, und daher eine Form resultiert, die gleichsam eine Combination des linken positiven und des rechten negativen tetraedrischen Pentagondodekaeders ist und als »linke« bezeichnet werden möge. Diese, $\{hkl\}$, ist in Fig. 560*a* abgebildet, während



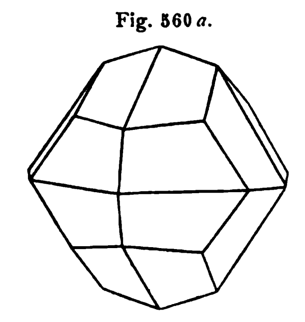


Fig. 560*a*.

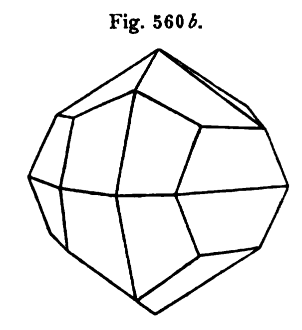


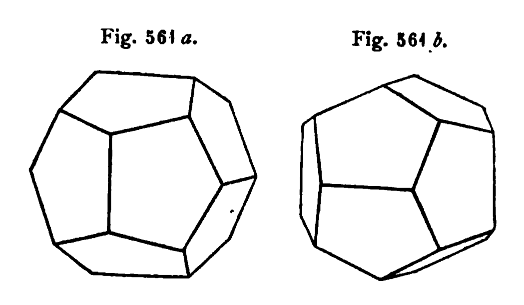
Fig. 560*b*.

560*b* die gleichgestaltete, aber durch ihre Stellung verschiedene »rechte« Form $\{khl\}$ darstellt, deren Pole in den frei gelassenen Dreiecken der Projection liegen würden. Da jede dieser Formen aus 12 Paaren paralleler Flächen besteht, werden sie Dyakisdodekaeder genannt. Dieselben besitzen dreierlei Kanten, von denen die längsten und kürzesten in den Symmetrieebenen liegen, während die mittleren in jedem Oktanten eine trigonale Ecke bilden, und zwar sind diese in zwei entgegengesetzten Oktanten von parallelen Flächen gebildet, also gleichsam einem Rhomboeder entsprechend, daher in diesem Falle die trigonalen Axen zugleich sechszählige Axen und die dazu senkrechten Flächen Ebenen der zusammengesetzten Symmetrie und demgemäß in der Projection bezeichnet sind. Bei besonderen Werten der Indices gehen die Dyakisdodekaeder in folgende Formen über:

1. Ikositetraeder Fig. 547 (S. 521), wenn $k = l$, d. h. wenn ihre trigonalen Ecken symmetrisch zu den drei Krystallaxen liegen, in welchem Falle das rechte Dyakisdodekaeder mit dem linken zusammenfällt, wie auch unmittelbar aus der Projection zu ersehen ist.

2. Triakisoktaeder Fig. 548 (S. 521), wenn $h = k$, d. i. wenn die Kanten der trigonalen Ecken nach den Polen der Krystallaxen hin laufen, was der zweiten möglichen symmetrischen Lage der Flächen gegen jene und ebenfalls einer gemeinsamen Grenzform der rechten und linken Dyakisdodekaeder entspricht.

3. Anders gestaltet sich die Sache in dem dritten speciellen Falle $l = 0$, denn hier liefern die linken Dyakisdodekaeder (Fig. 560 *a*) durch Verschwinden der Flächenwinkel der längsten Kanten, d. i. durch Vereinigung je zweier Pole in den Symmetrieebenen der Projection, ein »linkes« Pentagondodekaeder Fig. 561 *a*, die rechten Dyakisdodekaeder 560 *b* dagegen ein »rechtes« Pentagondodekaeder Fig. 561 *b*. Diese Formen sind natürlich geometrisch mit den S. 512 betrachteten identisch.


Fig. 561 *a*. Fig. 561 *b*.

Wie aus der Projection a. vor. S. ohne weiteres zu ersehen, führt die Coincidenz der Pole mit den drei Eckpunkten der bekannten sphärischen Dreiecke zu den drei einfachen S. 521 u. 522 abgebildeten Formen des Rhombendodekaeders, Oktaeders und Hexaeders.

Hiernach gehören dieser Klasse die folgenden Formen an:

{100} Hexaeder
{110} Rhombendodekaeder
{111} Oktaeder
$\{hk0\}$ linke, $\{kh0\}$ rechte Pentagondodekaeder
$\{hkk\}$ Ikositetraeder
$\{hhl\}$ Triakisoktaeder
$\{hkl\}$ linke, $\{khl\}$ rechte Dyakisdodekaeder.

In ganz analoger Weise, wie in der ersten Klasse des kubischen Krystallsystemes beim Natriumchlorat (S. 517), können nach obigem auch hier zwei Reihen von Formen unterschieden werden, von denen die eine die »rechten« Dyakisdodekaeder und Pentagondodekaeder, die andere die »linken« Formen derselben Art umfaßt, während die Ikositetraeder, Triakisoktaeder und die drei zuletzt genannten, einfachsten Formen beiden Reihen gemeinsam sind. Die Formen dieser beiden Reihen stehen aber nicht, wie es beim Natriumchlorat der Fall ist, im Verhältnisse der Enantiomorphie zueinander, und ebensowenig zeigen die regelmäßigen Punktsysteme, welche der Krystallstructur der vorliegenden Klasse entsprechen, eine Enantiomorphie. Dadurch ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß die chemischen Moleküle einer hierher gehörigen Substanz in zweierlei Modificationen existieren können, welche sich durch gewisse elektrische Eigenschaften unterscheiden, und daß aus diesen alsdann zweierlei Krystalle entstehen, deren Formen jenen beiden Reihen entsprechen (s. f. S. Pyrit, Kobaltin und Smaltin). Anders liegt die Sache, wenn eine Substanz optisch activ ist, also in zwei Modificationen existiert, deren Moleküle im Verhältnisse der Enantiomorphie stehen; alsdann werden auch jene beiden Reihen von Formen enantiomorph,

und die Substanz gehört der 28. Klasse an. Diese Beziehung zwischen der 28. und der 30. Klasse tritt besonders hervor in der Gruppe der Alaune, welche unzweifelhaft sämtlich eine analoge Krystallstructur besitzen, von welchen aber diejenigen Glieder, welche optisch activ sind, der 28. Klasse (s. S. 519), alle übrigen der vorliegenden Symmetrieklasse angehören.

Beispiele.

Zinnjodid $= SnJ_4$. Aus Schwefelkohlenstoff Combinationen von {111} und {210} (Fig. 562 und 563, von denen die letztere beide Formen in ungefähr gleicher Größe darstellt), ferner untergeordnet {100} und {211}.

Fig. 562.

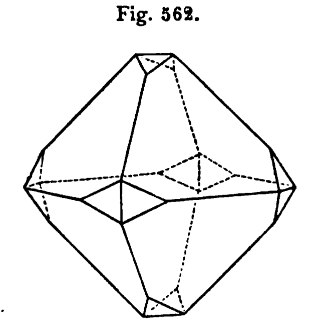
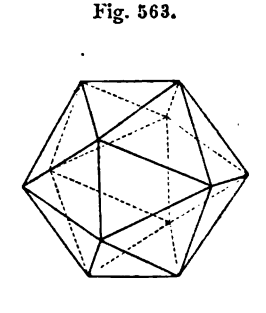


Fig. 563.



Pyrit (Eisenkies) $= FeS_2$. Hexaeder, Oktaeder, Combinationen beider (Fig. 559 S. 523), ferner sehr häufig Pentagondodekaeder {210} oder {201} (Fig. 561 *a*, *b*), seltener ein Dyakisdodekaeder {321} oder {231} (Fig. 560 *a*, *b*), welche Formen dagegen häufiger in Combinationen auftreten, und zwar rechte $\{khl\}$ nur mit rechten Pentagondodekaedern, linke $\{hkl\}$ nur mit linken $\{kh0\}$. Im folgenden sind einige der häufigsten Combinationen dieses Minerales abgebildet: Fig. 564: {100}, {210}; Fig. 565: {111}, {201};

Fig. 564.

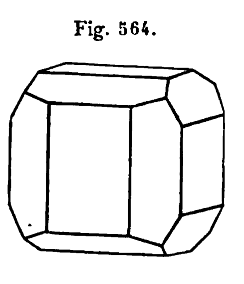


Fig. 565.

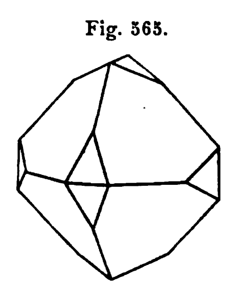


Fig. 566.

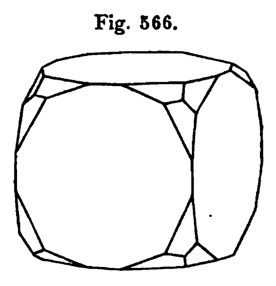
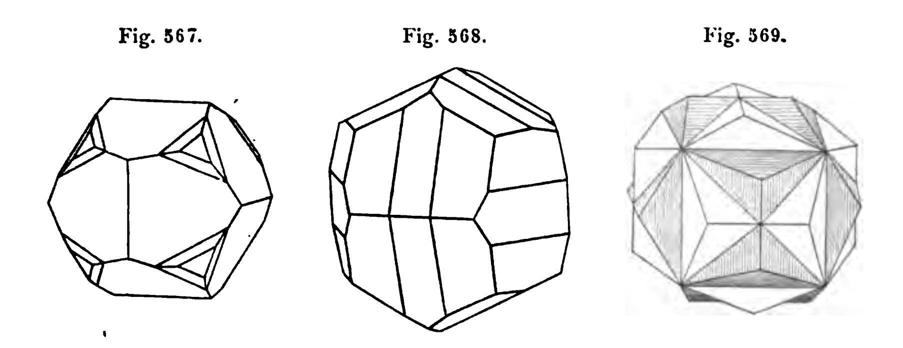


Fig. 566: {100}, {321}, daher letzteres der Fig. 560 *a* entsprechend; Fig. 567: {210}, {111} und in der Zone beider dasselbe Dyakisdodekaeder {321}, wie in der vorigen Combination; Fig. 568: {201}, {412}, von denen erstere Form die längsten Kanten der zweiten gerade abstumpft. Häufig Durchwachsungszwillinge nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Normale zu einer Dodekaederebene, von der Ausbildung der Fig. 569, in welcher der eine der beiden

Krystalle durch Schraffierung von dem andern unterschieden ist. Wie aus den angeführten Beispielen hervorgeht, zeigen die Krystalle des Pyrit nur Formen einer der beiden S. 525 erwähnten Reihen miteinander combiniert;

Fig. 567. Fig. 568. Fig. 569.



bestimmt man nun die Zugehörigkeit derselben zu den beiden, thermoelektrisch verschiedenen Arten dieser Substanz (s. S. 202), so ergibt sich (wie G. Rose und später Curie gezeigt haben), daß dieselben sich auch krystallographisch unterscheiden lassen, namentlich dadurch, daß das gewöhnliche Pentagondodekaeder der thermoelektrisch positiven Krystalle eine Streifung parallel den hexaedrischen Kanten zeigt (wie sie auf einem der beiden Krystalle des Zwillings Fig. 569 gezeichnet ist), während dasjenige der negativen Krystalle senkrecht dazu, d. i. parallel der Symmetrielinie der Pentagone, gestreift ist. Letztere Streifung entspricht einer alternierenden Ausbildung der in Fig. 568 abgebildeten Formen {201} und {412} oder einer solchen von {201} mit dem Ikositetraeder {211}, und dementsprechend finden sich die Formen {412} und {211} vorherrschend bei den thermoelektrisch negativen Krystallen. Andererseits charakterisieren das Dyakisdodekaeder {321} und das Hexaeder besonders die positiven Krystalle, und hiermit stimmt die positive Natur der horizontal gestreiften Pentagondodekaeder überein, denn diese entsteht durch Alternieren der Flächen desselben mit denen des Würfels. Danach sind also die Combinationen Fig. 566 und 567 einerseits und die in Fig. 568 dargestellte andererseits als zwei verschiedenen Arten von Krystallen angehörig zu betrachten, und dementsprechend die beiden Pentagondodekaeder {210} in Fig. 567 und {201} in Fig. 568 nicht als identisch anzusehen; in der Tat können dieselben auch, obgleich ihre geometrische Form die gleiche ist, ihrer verschiedenen Streifung wegen nicht zur Congruenz gebracht werden. Scheinbare Ausnahmen von diesen Gesetzmäßigkeiten werden durch regelmäßige Verwachsungen von thermoelektrisch positivem und negativem Pyrit verursacht, und zwar findet, wie Curie nachgewiesen hat, diese Verwachsung genau wie beim Quarze in dünnen, der Außenform parallelen, entgegengesetzten Schichten statt, so daß anscheinend einfache Krystalle entstehen.

Kobaltin (Kobaltglanz) = $CoAsS$ (ein Teil des Co gewöhnlich durch Fe isomorph vertreten). Dieselben Formen und dieselben physikalischen Eigenschaften wie Pyrit; doch ist wegen der seltener deutlich auftretenden Streifung der Pentagondodekaeder die Unterscheidung der beiden Arten von Krystallen ohne thermoelektrische Untersuchung meist nicht möglich.

Smaltin (Speiskobalt) = $CoAs_2$. Gewöhnliche Combination: {100}, {111}, weniger häufig mit {110} und {211}; äußerst selten Pentagondodekaeder, wie {310}, {510} und Dyakisdodekaeder. Die Krystalle sind thermoelektrisch gegen Kupfer teils positiv, teils negativ, wie die vorigen.

Kalium-Aluminium-Alaun = $[SO_4]_2AlK.12H_2O$. Aus wäßriger Lösung {111}, untergeordnet {110}, {100}; aus alkalischer Lösung {100}; aus salzsaurer Lösung dieselben Formen mit {210}. Die Vicinalflächen, welche an Stelle der Oktaederflächen erscheinen, gehören einem sehr flachen Triakisoktaeder an (s. S. 268), ebenso die Ätzfiguren auf {111}, während die Ätzfiguren auf {100} flachen Ikositetraedern entsprechen. Dehnungswiderstand (s. S. 216) nach Beckenkamp:

parallel einer Würfelnormale . .	1886 kg
parallel einer Dodekaedernormale	2009 -

Brechungsindices nach Ch. Soret:

Linie	B	n = 1,45284
-	C	1,45383
-	D	1,45634
-	E	1,45919
-	F	1,46167
-	G	1,46615

Isomorph mit dem gewöhnlichen Alaun sind u. a. noch folgende analog zusammengesetzte Verbindungen:

Natrium-Aluminium-Alaun = $[SO_4]_2AlNa.12H_2O$. Combination {111}, {100}.

Kaliumeisen-Alaun = $[SO_4]_2FeK.12H_2O$. Beobachtete Formen: {111}, {100}.

Kalium-Chrom-Alaun = $[SO_4]_2CrK.12H_2O$. Leicht in sehr großen Oktaedern zu erhalten.

Cäsium-Aluminium-Alaun = $[SO_4]_2AlCs.12H_2O$. Combination: {111}, {100}, {210}.

Thallium-Aluminium-Alaun = $[SO_4]_2AlTl.12H_2O$. Oktaeder. Brechungsindex für Na-Gelb: n = 1,4888 (Fock).

Ammonium-Aluminium-Alaun = $[SO_4]_2AlNH_4.12H_2O$. Damit isomorph auch die substituierten Alaune, d. h. solche, in denen der Wasserstoff des Ammoniums durch organische Radicale ersetzt ist. Besonders schön krystallisiert:

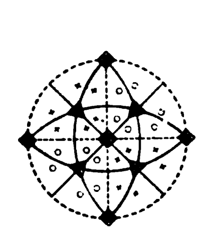
Trimethylamin-Alaun = $[SO_4]_2AlNH[CH_3]_3.12H_2O$. Combination (Fig. 563 S. 526): {111}, {210}.

Die Alaune bilden nach Brauns (vgl. auch S. 235 und 236) vollkommen einfachbrechende Krystalle, wenn sie chemisch rein sind, d. h. nur aus einem der obengenannten Salze bestehen, während die isomorphen Mischungen auch bei einem geringen Gehalte eines zweiten Alaunes doppeltbrechend sind, wie z. B. der gewöhnliche natronhaltige käufliche Alaun. Platten nach einer Hexaederfläche zeigen vier, durch einfachbrechende, den beiden andern Würfelflächen parallele Zonen getrennte Felder; sechsseitige oktaedrische Platten dagegen sechs Felder, deren Schwingungsrichtungen den Randkanten der Platte parallel sind.

31. Hexakistetraedrische Klasse.

(Tetraedrische oder geneigtflächige Hemiedrie.)

Wenn zu den Symmetrieverhältnissen der ersten Klasse des kubischen Systemes (Fig. 518) noch die Symmetrie nach den Ebenen des Rhombendodekaeders hinzutritt (Fig. 521, untenstehend wiederholt), so bedingt dies zu je drei Flächen des tetraedrischen Pentagondodekaeders drei in dem gleichen Oktanten liegende gleichwertige, so daß eine Form entsteht, welche in den vier abwechselnden (einem Tetraeder entsprechenden) Oktanten je sechs Flächen besitzt und daher Hexakistetraeder genannt wird. In Fig. 570*a* ist



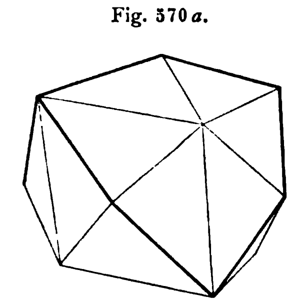


Fig. 570*a*.

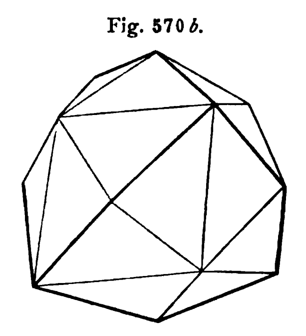


Fig. 570*b*.

das »positive« Hexakistetraeder $\{hkl\}$, dessen Pole in der obigen Projection eingetragen sind, in Fig. 570*b* das negative $\{h\bar{k}l\}$, welches, wenn die Indiceszahlen beider die gleichen sind, nur durch seine Stellung von dem ersten verschieden ist, abgebildet. Jede dieser Formen geht, wie auch aus der Projection zu ersehen, durch Drehung von 90° um eine der zweizähligen Axen und gleichzeitige Spiegelung nach der dazu senkrechten Würfelebene in sich selbst über, also sind jene Axen zugleich vierzählige der zusammengesetzten Symmetrie und als solche in der Projection bezeichnet. Die Hexakistetraeder besitzen dreierlei Kanten, von denen die längsten und die kürzesten in den abwechselnden vier Oktanten je eine ditrigonale (bei gewissen Verhältnissen der Indices eine hexagonale) Ecke bilden, während die längsten und mittleren in den vier entgegengesetzten

Oktanten zu je einer spitzeren ditrigonalen Ecke zusammentreffen, daher die dreizähligen Axen polar sind.

1. Ist $k = l$, so fallen die beiden in einer kürzesten Kante zusammenstoßenden Flächen in eine Ebene, und das positive Hexakistetraeder geht in

Fig. 571 *a*.

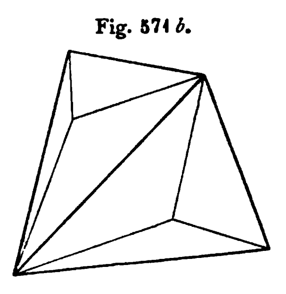


Fig. 571 *b*.

ein positives Triakistetraeder (Fig. 571*a*), die negative allgemeine Form in die negative besondere (Fig. 571*b*) über, welche mit den bereits S. 511 betrachteten geometrisch übereinstimmen.

2. Ist $h = k$, so verschwinden die längsten Kanten, und es entstehen aus den beiden Hexakistetraedern das positive bzw. negative Deltoiddodekaeder Fig. 572*a*, *b* (vgl. S. 511).

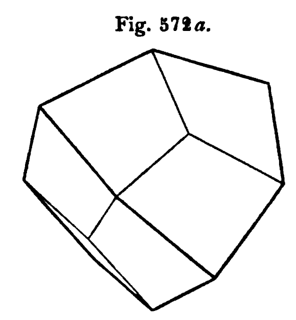


Fig. 572*a*.

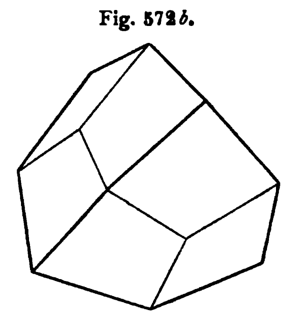
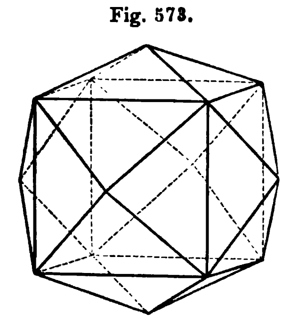


Fig. 572*b*.

3. Während in den beiden vorhergehenden Fällen die positiven und negativen allgemeinen Formen zu verschiedenen besonderen führen, tritt im Falle $l = 0$ das Gegenteil ein, denn wenn man sich zu der Projection a. vor. S. die des negativen Hexakistetraeders denkt (indem man alle Pole × durch ∘ ersetzt und umgekehrt), so werden beide identisch, sobald man die Pole in die punktierten Durchmesser bzw. in den Grundkreis rückt. Daß das so entstehende Tetrakishexaeder Fig. 573 in der Tat die gemeinsame Grenzform der positiven und negativen Hexakistetraeder für den Fall des Parallelismus der Flächen mit den Krystallaxen darstellt, geht unmittelbar aus der Vergleichung der Fig. 570*a*, *b* mit Fig. 573 hervor, denn in diesem Falle

Fig. 573.



geht der von je vier der längsten Kanten gebildete Rhombus der beiden ersteren in das von den hexaedrischen Kanten gebildete Quadrat der letzteren und die dem Pole einer Krystallaxe entsprechende didigonale Ecke beider Hexakistetraeder in die gleiche vierkantige Ecke des Tetrakishexaeders über.

4. Die letzteren Formen fallen mit dem Rhombendodekaeder zusammen, wenn das Verhältnis $h:k$ den speciellen Wert 1 annimmt.

5. Ist $h=k=l$, so gehen die positiven Hexakistetraeder in das positive Tetraeder (Fig. 528*a* S. 512), die negativen in das negative (Fig. 528*b* a. a. O.) über.

6. Fallen endlich die Pole der Flächen mit denen der Krystallaxen zusammen, so entsteht das Hexaeder als gemeinsame Grenzform der positiven und negativen Formen.

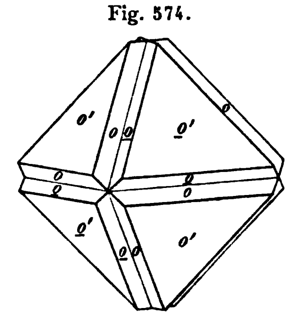
Somit ergibt sich die folgende Übersicht:

$\{100\}$ Hexaeder
$\{110\}$ Rhombendodekaeder
$\{111\}$ positives, $\{1\bar{1}1\}$ negatives Tetraeder
$\{hk0\}$ Tetrakishexaeder
$\{hkk\}$ positive, $\{h\bar{k}l\}$ negative Triakistetraeder
$\{hhl\}$ positive, $\{h\bar{h}l\}$ negative Deltoiddodekaeder
$\{hkl\}$ positive, $\{h\bar{k}l\}$ negative Hexakistetraeder.

Beispiele.

Kohlenstoff (Diamant). Einfache Tetraeder oder Hexakistetraeder selten; meist Zwillinge, wie Fig. 574. $o=\{111\}$, $o'=\{1\bar{1}1\}$; Zwillingsebene $\{100\}$; infolge der Durchkreuzung erscheinen die Krystalle als Oktaeder, deren Kanten durch Rinnen ersetzt sind (derartige Formen könnten auch als Wachstumserscheinungen gedeutet und der Diamant als der 32. Klasse angehörig betrachtet werden; eine Entscheidung darüber würde der noch nicht erfolgte Nachweis elektrischer Polarität der Oktaedernormalen liefern). Weniger häufige Formen sind $\{100\}$ und $\{110\}$. Spaltbarkeit $\{111\}$ vollkommen. Brechungsindex s. S. 34 Anmerk. Optische Anomalien s. S. 234 unten. Ausdehnung durch die Wärme sehr gering (kub. Ausdehnungscoeff. = 0,000 003 54).

Fig. 574.



Zinksulfid (Zinkblende) $= ZnS$. Fig. 575 stellt die folgende Combination gewisser Krystalle dieses Minerales dar: $d=\{110\}$, $t=\{111\}$ glänzend, $-t=\{1\bar{1}1\}$ meist matter, $y=\{311\}$, $-i=\{2\bar{1}1\}$, $h=\{100\}$. Sehr häufig Zwillinge, meist von ähnlicher Ausbildung, wie Fig. 576, so daß an der Zwillingsgrenze positive (o') und negative (o) Tetraederflächen einander gegenüberliegen; infolgedessen erhält man die Stellung des einen

Kystalles, indem man ihn aus der mit dem zweiten parallelen Orientierung um die Normale zu {111} als Zwillingsaxe um 180° dreht; man kann dieses Zwillingsgesetz aber auch folgendermaßen definieren: Zwillingsebene eine Fläche von {211}, denn nach der der Zone der Zwillingsaxe angehörigen Fläche ($\bar{1}12$) sind die beiden Krystalle vollständig symmetrisch, wie man

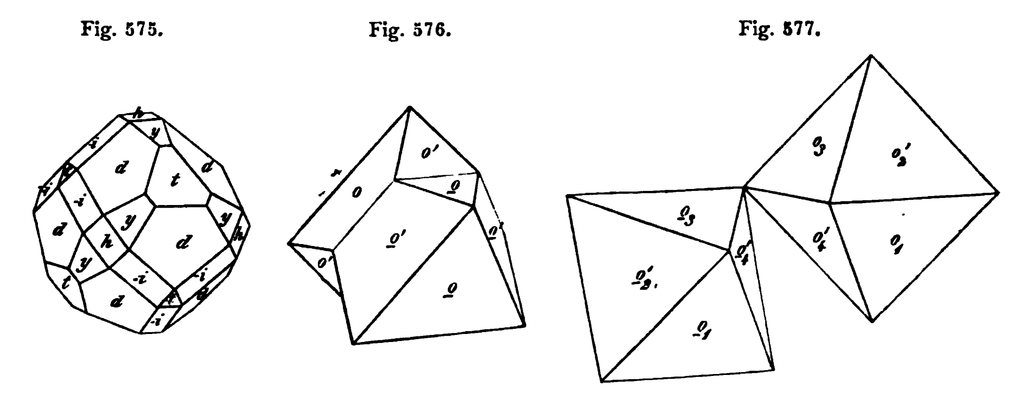


Fig. 575. Fig. 576. Fig. 577.

leicht aus Fig. 577 ersieht, in welcher dieselben genau die gleiche Orientierung besitzen, wie in Fig. 576, und in welcher die Flächen des positiven Tetraeders ebenfalls durch Accente an *o* unterschieden sind. — Spaltbar vollkommen nach {110}. Diatherman. Die entgegengesetzten Enden jeder der vier trigonalen Axen werden entgegengesetzt elektrisch sowohl durch Temperaturänderung, als durch Druck (Friedel und Curie). Brechungsindices: $n = 2{,}341$ rot, 2,369 gelb.

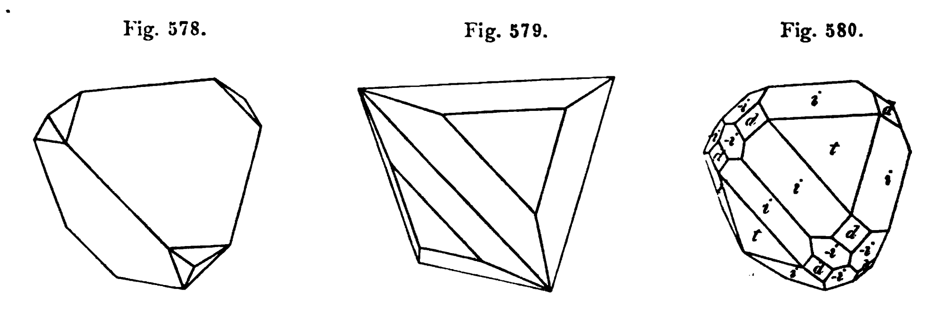


Fig. 578. Fig. 579. Fig. 580.

Tetraedrit (Fahlerz) $= (As,Sb)_2S_7(Cu_2,Fe,Zn)_4$. Die häufigsten Combinationen sind Fig. 578: {111}, {110}; Fig. 579: {111}, {211}; nicht selten auch die in Fig. 580 dargestellte compliciertere Combination: $t = \{111\}$, $i = \{211\}$, $d = \{110\}$, $-i = \{2\bar{1}1\}$.

Boracit $= B_{16}O_{30}Cl_2Mg_7$. Combinationen: Fig. 581: Tetraeder mit untergeordnetem Hexaeder; Fig. 582: {100}, {111}; dieselben Formen mit {110} und {1$\bar{1}$1} Fig. 11 Taf. III; Fig. 583: $h = \{100\}$, $d = \{110\}$, $t = \{111\}$ glänzend, $-t = \{1\bar{1}1\}$ klein und matt, $-i = \{2\bar{1}1\}$ als sehr schmale Abstumpfung, endlich das nicht häufige Hexakistetraeder $a = \{531\}$. Die

natürlichen Boracitkrystalle, obgleich in ihren Formen vollkommen kubisch und lange als ausgezeichnetes Beispiel für die Symmetrie der vorliegenden Klasse betrachtet, sind nur pseudokubisch (mimetisch) und in Wirklichkeit sehr complicierte Verwachsungen rhombischer Krystalle. Bei 265° C. verlieren dieselben jedoch plötzlich ihre Doppelbrechung und wandeln sich in einfachbrechende Krystalle um, so daß von da ab bis zum Schmelzpunkte äußere Form und optisches Verhalten übereinstimmen. Hiernach ist die Boracitsubstanz dimorph, und ihre rhombische Form besitzt Dimensionen,

Fig. 581. Fig. 582. Fig. 583.

welche es gestatten, daß die Krystalle in ihren regelmäßigen Verwachsungen pseudokubische Gestalten hervorbringen, welche durch Messung nicht von kubischen zu unterscheiden sind. Der früher als »optisch anomal« betrachtete Boracit war es, an welchem zuerst Mallard die Richtigkeit seiner Erklärung derartiger mimetischer Gebilde (s. S. 236) nachwies. Auch die Ätzfiguren stehen nach Baumhauer mit einer Zusammensetzung aus rhombischen Einzelkrystallen im Einklange. Diese Einzelkrystalle müssen aber, um einen Aufbau von den Symmetrieverhältnissen der Boracitkrystalle hervorzubringen, eine polare zweizählige Axe besitzen; da nun in der regelmäßigen Verwachsung die beiden entgegengesetzten Pole derselben in ihrer Orientierung entgegengesetzten Polen der trigonalen Axen des mimetischen Gebildes entsprechen, so muß das letztere diese Polarität nicht nur krystallographisch (durch die erwähnte Verschiedenheit der Tetraederflächen), sondern auch physikalisch, namentlich in pyroelektrischer Beziehung, zeigen. In der Tat sind die trigonalen Axen des B. in ausgezeichneter Weise elektrische Axen, wie aus Fig. 11 Taf. III zu ersehen, welche das Resultat der Bestäubung eines sich abkühlenden Krystalles (nach Mack) darstellt.

Oxalsaures Aluminiumnatriumkalium $= (C_2O_4)_3AlNa_2K.4H_2O$[1]. $\{211\}$, Fig. 571 *a*, oder mit untergeordnetem $\{2\bar{1}1\}$. Pseudokubisch mit einem dem des Boracit sehr ähnlichen optischen Verhalten; beim Erwärmen werden die Krystalle einfachbrechend (Wyrouboff).

---

1) Nach Kehrmann; Wyrouboff fand für das Salz die Formel: $(C_2O_4)_{24}Al_8Na_{19}K_5 . 32H_2O$.



32. Hexakisoktaedrische Klasse.

(Holoedrie des regulären Krystallsystemes.)

Sind außer den Flächen des Rhombendodekaeders auch diejenigen des Hexaeders Symmetrieebenen, so werden die Flächen des negativen Hexakistetraeders (s. vor. Klasse) denen des positiven gleichwertig, und die vollständige einfache Form (s. beistehende Projection) besitzt 48 Flächen, die höchste mögliche Zahl, entsprechend dem hier vorliegenden höchsten, an einem krystallographischen Polyeder möglichen Grade der Symmetrie (s. S. 505, 506). Da zu jedem der acht Oktanten sechs Flächen, deren Symbole man durch alle möglichen Vertauschungen der drei Indices erhält, gehören, so werden diese Formen $\{hkl\}$ **Hexakisoktaeder** genannt, deren für bestimmte Werte der Indices, z. B. das in Fig. 584 dargestellte {321}, natürlich nur eines existieren kann. Aus der Gleichwertigkeit der entgegengesetzten Flächen geht hervor, daß die trigonalen Axen zugleich sechszählige Axen der zusammengesetzten Symmetrie sind, daher die zu ihnen senkrechten Ebenen in der Projection entsprechend bezeichnet sind, während die Hexaedernormalen tetragonale Symmetrieaxen und die Dodekaedernormalen digonale (auch »rhombische Axen« genannt) sind. Die Hexakisoktaeder besitzen dreierlei Kanten, mittlere (a) in den Hexaederebenen gelegene, längste (b) und kürzeste (c), welche in den sechs, die Winkel der ersteren halbierenden Symmetrieebenen gelegen sind; ebenso sind die Ecken von drei Arten: ditetragonale (a, b) an den Polen der drei Krystallaxen, ditrigonale (b, c) an den Polen der Oktaedernormalen und didigonale oder rhombische (a, c) an den Polen der Dodekaedernormalen. Das oben abgebildete {321} hat gleiche Flächenwinkel der Kanten b und c, da die gerade Abstumpfung der entsprechenden Ecken, {111}, kein Ditrigon, sondern ein Hexagon liefert (wie sich leicht aus der Zugehörigkeit der Fläche (111) zur Zone [321, 123] ergibt); ferner sind seine Kanten b parallel denen des Rhombendodekaeders, denn die Indices je zweier Flächen, z. B. (321) und (312), entsprechen der Zone [110, 101]. In Fig. 585 ist dagegen das Hexakisoktaeder {421} dargestellt, welches keine der beiden eben angeführten Eigenschaften und infolge der größeren Verschiedenheit der Parameter stumpfere ditetragonale und spitzere ditrigonale und rhombische Ecken hat. Die dreierlei Flächenwinkel der beiden abgebildeten Formen sind folgende:

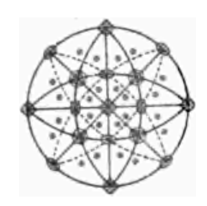


Fig. 584.

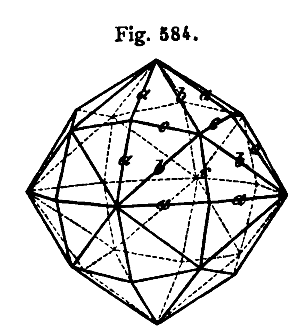


Fig. 585.



	a	*b*	*c*
{321}	31° 1′	21°47′	21°47′
{421}	25 13	17 45	35 57

Die Hexakisoktaeder nähern sich um so mehr einem Ikositetraeder (Fig. 547 S. 521), je stumpfer die Kanten b werden, einem Triakisoktaeder (Fig. 548 ebenda), je kleiner der Flächenwinkel der Kanten c ist, endlich einem Tetrakishexaeder (Fig. 549), je weniger die in den Kanten a zusammentreffenden Flächen sich in ihrer Stellung voneinander unterscheiden. Diese drei Arten von Grenzformen führen endlich, wie früher bereits erörtert, zu den drei einfachsten Formen des kubischen Systemes (Fig. 550, 551, 552 S. 521 f.), welche man somit auch als specielle Fälle der Hexakisoktaeder, für $h = k$, $l = 0$, für $h = k = l$ und für $k = l = 0$, ansehen kann. So ergeben sich die folgenden Formen als dem höchsten krystallographisch möglichen Grade der Symmetrie entsprechend:

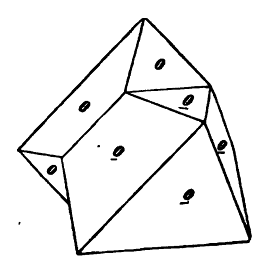
{100} Hexaeder
{110} Rhombendodekaeder
{111} Oktaeder
$\{hk0\}$ Tetrakishexaeder
$\{hkk\}$ Ikositetraeder
$\{hhl\}$ Triakisoktaeder
$\{hkl\}$ Hexakisoktaeder.

Beispiele.

Phosphor. Krystallisiert aus Chlorschwefel u. a. Lösungsmitteln in Rhombendodekaedern, bei der Sublimation im Vacuum oder in sauerstofffreien Gasen in Combinationen von {110}, {111}, {100}, {311}, {421}.

Silicium. Schwarze, metallglänzende Oktaeder, meist Zwillinge nach {111} (Fig. 586), aber parallel einer Kante $o : \underline{o}$ zu Stäben mit rinnenförmig einspringenden Winkeln verlängert (ähnlich dem Drilling Fig. 537, S. 515).

Fig. 586.



Eisen. Kleine oktaedrische, nach den vierzähligen Axen aneinander gereihte Krystalle in porös erstarrtem Roheisen; hexaedrische Spaltbarkeit sehr deutlich in manchen Meteoreisen.

Fig. 587.

Fig. 588.

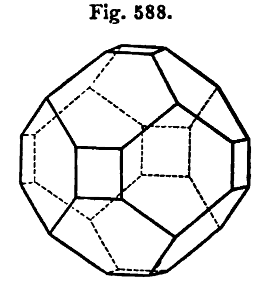
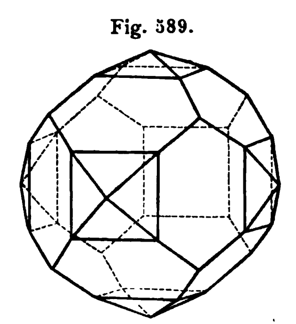


Fig. 589.



Kupfer. In Schlacken abgeschiedenes und galvanisch gefälltes zeigt meist {111}, die natürlichen Krystalle dagegen außer den einfachen Formen

{100}, {110}, {210}, {310} u. a. sehr mannigfache Combinationen, wie Fig. 587: {100}, {110}; Fig. 588: {110}, {100}; Fig. 597 (S. 537): {100}, {310}; Fig. 589: {210}, {110} usf. — Zwillinge nach {111}.

Fig. 590.

Blei erstarrt aus dem geschmolzenen Zustande in Oktaedern oder Combinationen von {111} und {100}.

Quecksilber erstarrt in Oktaedern.

Silber. Galvanisch abgeschiedene und natürliche Krystalle: {100}, {111}, {110}, {311} (Fig. 590) usf. — Zwillinge nach {111}.

Gold zeigt dieselben Formen und Zwillinge.

Platin. Beobachtete Formen: {111}, {100}, {110}, Zwillinge nach {111} (Törnebohm). Die natürlichen (eisenhaltigen) Krystalle zeigen nur {100}.

Bleisulfid (Bleiglanz) = PbS. Künstliche {100}, natürliche Krystalle meist Combinationen von {100} und {111} (Fig. 559 S. 523 und Fig. 591);

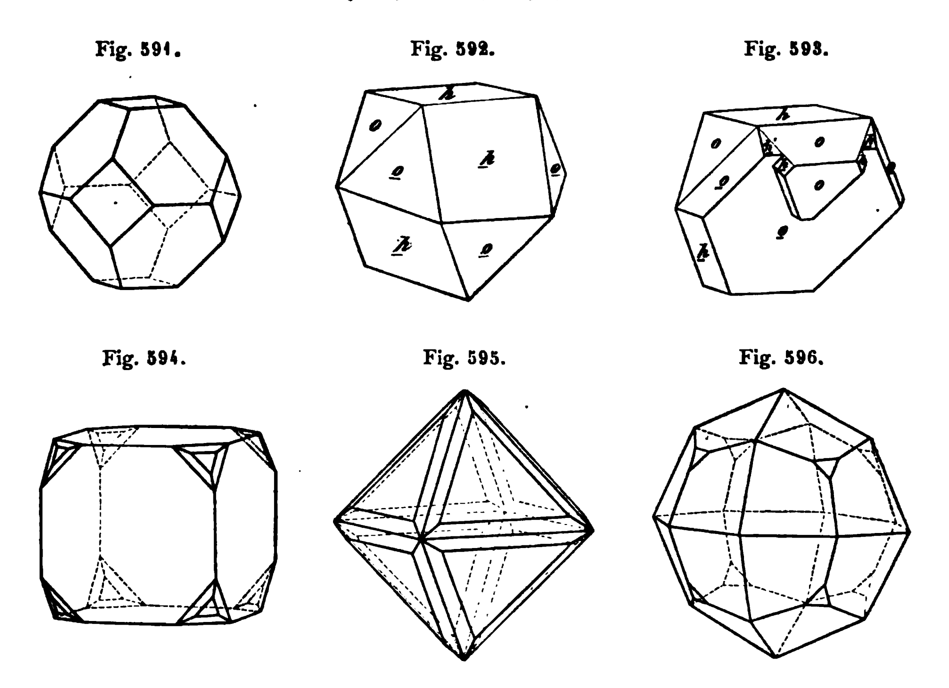


Fig. 591. Fig. 592. Fig. 593.

Fig. 594. Fig. 595. Fig. 596.

oft Zwillinge nach {111}, Fig. 592 und 593; h = {100}, o = {111}. Ferner: {100}, {211}, {111} Fig. 594; {111}, {221} Fig. 595. Spaltbar {100} vollkommen.

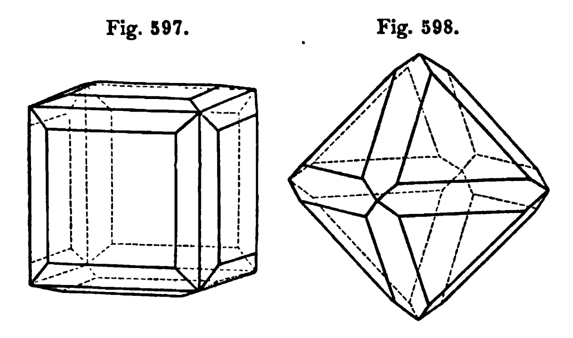
Silbersulfid (Silberglanz) = Ag_2S. Natürliche Krystalle {100}, {111}, {110}, {211} und Combinationen derselben wie Fig. 596: {211}, {111}.

Arsentrioxyd = As_2O_3. Aus Lösungen und sublimiert {111}.

Antimontrioxyd (Senarmontit) = Sb_2O_3. Dieselbe Krystallform. Anomal doppeltbrechend.

Chlornatrium (Steinsalz) = $NaCl$. Aus reiner wässeriger Lösung nur {100}, aus Ätznatron- oder Harnstoff-haltiger {111}; die natürlichen Krystalle sind meist nur Hexaeder, selten Combinationen {100} {210} Fig. 597; die aus den Natronseen Ägyptens zeigen {111} {110} Fig. 598. Die Ätzfiguren auf {100} werden von Tetrakishexaedern gebildet. Spaltbar {100} sehr vollkommen (vgl. S. 211); Gleitflächen {110} s. S. 245. Die Härtecurve auf {100}, s. S. 242, hat maximale und minimale Durchmesser, deren Verhältnis 1,3 : 1. Dehnungswiderstand (s. S. 216) nach Voigt:

Fig. 597. Fig. 598.



$\perp$ {100} 4170, $\perp$ {110} 3400, $\perp$ {111} 3180 kg.

Brechungsindices bei 24° nach Langley:

Linie A:	$n = 1,5367$		Linie F:	$n = 1,5532$
- B:	1,5392		- G:	1,5613
- C:	1,5405		- H:	1,5683
- D:	1,5442			

Abnahme für 1° Temperaturerhöhung: 0,000035 (Baille). Größte beobachtete Diathermansie (s. S. 177).

Chlorsilber = $AgCl$. Isomorph mit vorigem. Gewöhnliche Formen: {111}, {100}. Infolge der großen Plasticität entstehen hier, wie beim Steinsalze, leicht wahre optische Anomalien (vgl. S. 235).

Fluorcalcium (Flußspat) = CaF_2. Die gewöhnlichste Form dieses Minerales ist {100}, häufig in Zwillingen nach {111} Fig. 599. Nicht selten sind dessen Combinationen mit {310} (ähnlich Fig. 597) und mit dem Hexakisoktaeder {421} (Fig. 600), während die gleichen Formen mit {111} combiniert (Fig. 601 und 602) seltener vorkommen. Spaltbar nach {111}.

Fig. 599.

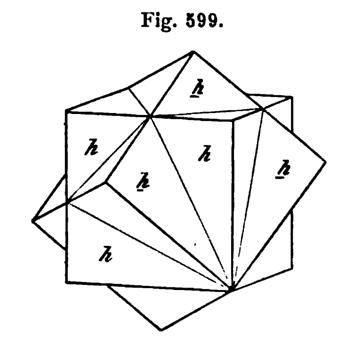


Fig. 600.

Kaliumplatinchlorid = $PtCl_6K_2$. Oktaeder. Dieselbe Form hat das analoge Ammoniumsalz, auch wenn der Wasserstoff des NH_4 durch organische Radicale ersetzt ist.

Spinell = Al_2O_4Mg. {111} oder Combination {111}, {311}, Fig. 603. Zwillinge nach {111}, Fig. 586 (S. 535).

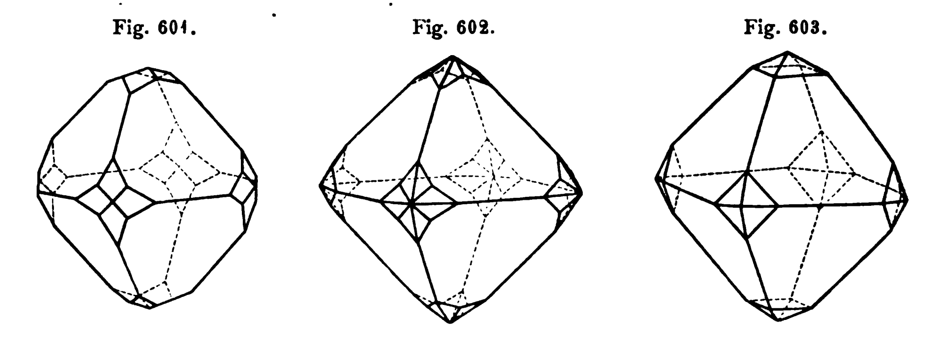


Fig. 601. Fig. 602. Fig. 603.

Eisenoxydoxydul (Magneteisenerz) = Fe_2O_4Fe. {111} oder {110}, {111} (Fig. 604), ferner: {110}, {311} (Fig. 605); selten die Combination {110} {311} {531} {111} Fig. 606. Häufig Zwillinge gleich denen des Spinell.

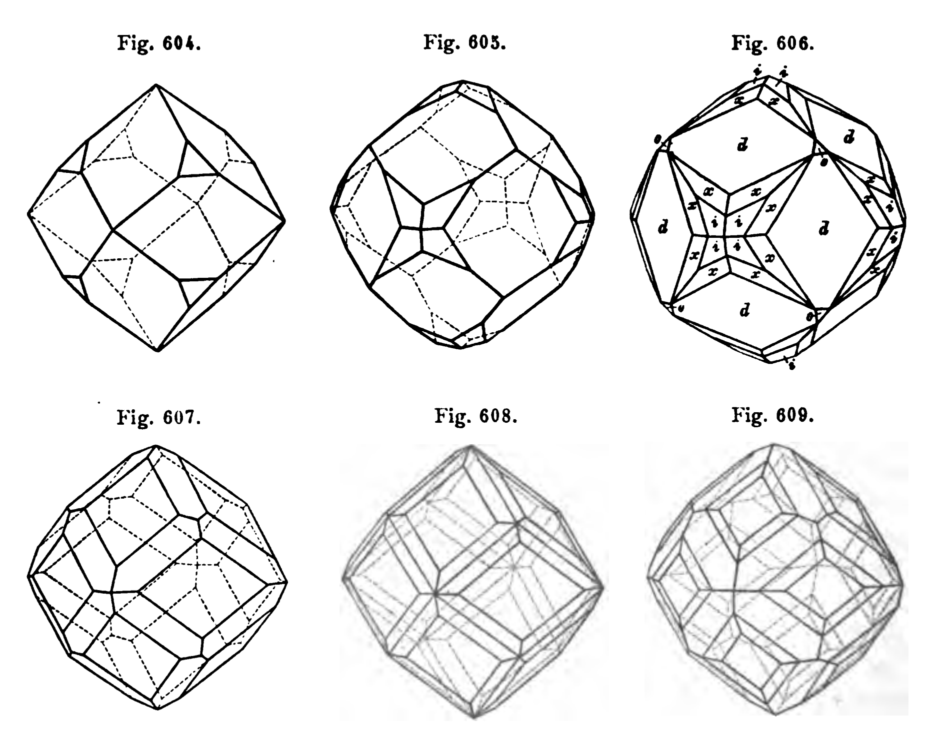


Fig. 604. Fig. 605. Fig. 606.

Fig. 607. Fig. 608. Fig. 609.

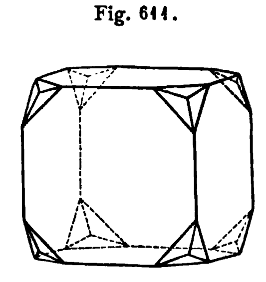
Granat = $Si_3O_{12}\overset{'''}{R}_2\overset{''}{R}_3$, worin $\overset{'''}{R} = Al$, Fe oder Cr, $\overset{''}{R} = Ca$, Mg, Fe oder Mn. Häufigste Formen: {110}, Fig. 527; {110}, {211} Fig. 607;

{110} {321} Fig. 608; {110} {211} {321} Fig. 609. Brechungsindex $n = 1{,}77$ (rot) bei roten Granaten. Oft anomal doppeltbrechend (C. Klein).

Leucit = $(SiO_3)_2Al(K,Na)$. Aus dem Schmelzflusse vulkanischer Gesteine krystallisiert dieses Mineral in Ikositetraedern {211}, wandelt sich aber während der Abkühlung in eine zweite dimorphe Modification um unter Erhaltung der äußeren Form, welche nun ein mimetisches Gebilde, zusammengesetzt aus zahlreichen doppeltbrechenden Zwillingslamellen nach {110}, darstellt. Durch Erhitzen auf über 400° kann man die umgekehrte Umwandlung in die einfachbrechende, kubische Modification hervorrufen (C. Klein).

Fig. 610.

Fig. 611.



Analcim = $[SiO_3]_2AlNa.H_2O$. Combination: {211}, {100} [Fig. 610 oder 611. Optisch anomal, ähnlich dem Alaun (S. 529).

Anhang.

Vergleichungstabelle der Systematik, Nomenclatur und Bezeichnung der Krystallformen

von

Miller, Weiss, Naumann und **Lévy.**

Die im vorhergehenden erfolgte systematische Behandlung der Krystallographie ging von den einfachsten Krystallformen, d. h. denjenigen mit dem niedrigsten Grade der Symmetrie, aus und gelangte durch Hinzufügung weiterer Symmetrieelemente nach und nach zu der höchstsymmetrischen jener 32 Klassen, deren jede ein für sich bestehendes, durch bestimmte Symmetrieverhältnisse charakterisiertes Ganze darstellt. Die Zusammenfassung bestimmter Symmetrieklassen zu einer Gruppe (»Krystallsystem«), welche der leichteren Übersicht wegen benutzt wurde, beruht auf rein praktischen Erwägungen und ist in gewissem Sinne sogar willkürlich. Diese Gruppen bildeten nun die Grundlage der früheren Darstellungen der Krystallographie, welche von der Betrachtung der höchstsymmetrischen Klasse eines Krystallsystemes, d. h. von der flächenreichsten einfachen Krystallform desselben, ausgingen, diese als »holoedrische« (gänzflächige) bezeichneten und aus ihr die Formen der folgenden Klassen durch »Hemiedrie« (Halbflächigkeit) ableiteten, indem die nach einem bestimmten Gesetze ausgewählte Hälfte der Flächen als »vollständige einfache Form« betrachtet wurde; durch Combination zweier derartiger Gesetze konnte dann eine »tetartoedrische« Form, welche ein Viertel der Flächen der holoedrischen enthielt, construiert werden usf. Waren die den beiden entgegengesetzten Polen einer Symmetrieaxe angehörigen Flächen ungleichwertig, so bezeichnete man diese Eigenschaft der betreffenden Krystallform als »Hemimorphie«, deren Combination mit der Hemiedrie einen niedrigeren Grad der Symmetrie hervorbrachte, wie ihn gewisse Krystalle in der Tat zeigten; solche Formen konnte man jedoch erhalten, wenn man von verschiedenen Gesetzen der Hemiedrie ausging, daher Zweifel über die richtige Auffassung derselben entstanden, verursacht dadurch, daß der Herleitung der Krystallformen auf diesem Wege überhaupt kein bestimmtes Princip zugrunde lag, und daher

in krystallographischen Lehrbüchern Gesetze der Hemiedrie, d. h. Krystallformen, als möglich angegeben wurden, deren Unmöglichkeit schon 1830 in der S. 330 erwähnten Abhandlung Hessels nachgewiesen worden war.

Auf der soeben erwähnten, eines Principes entbehrenden Systematik beruht nun auch die hauptsächlich von Naumann eingeführte Nomenclatur der Krystallformen, welche z. Z. noch in vielen krystallographischen und mineralogischen Werken benutzt wird, obgleich seit langem erkannt ist, daß ein großer Teil der Namen nicht nur überflüssig, sondern sogar höchst ungeeignet sei, weil dieselben (wie Hemipyramide, Tetartopyramide u. a.) zu ganz falscher Auffassung von seiten des Lernenden führen. Von dieser Nomenclatur ist in der vorliegenden Behandlung nur der kleinere Teil, welcher wirklich einwandfrei ist, beibehalten, und die übrige durch die weit einfachere, welche Fedorow vorgeschlagen hat und die im wesentlichen der Verf. schon in seinen Vorlesungen benutzte, ersetzt worden. Die Zahl der dem Gedächtnisse einzuprägenden termini technici der Krystallographie ist dadurch nahezu auf die Hälfte reduciert worden.

Auch für die Bezeichnung der Krystallformen durch Symbole ist noch keine Gleichmäßigkeit erzielt, wenn auch die in vorliegendem Lehrbuche benutzten, sog. Millerschen, welche (wie schon aus der Behandlung der Zonenlehre, besonders S. 310f., ferner aus S. 552f. hervorgeht und in der III. Abteil. noch eingehender gezeigt werden wird) die einzigen für eine rationelle Bestimmung der Krystallformen brauchbaren sind, von Jahr zu Jahr allgemeineren Eingang finden[1]). Weiss, welcher zuerst den Begriff der krystallographischen Axen in die Wissenschaft einführte, bezeichnete eine Fläche durch ihr Parameterverhältnis, die Grundform im Falle dreier ungleichwertiger Axen mit $(a : b : c)$, eine davon abgeleitete Form mit $(a : nb : mc)$ oder $(na : b : mc)$, wo n und m rationale Zahlen oder Zahlenverhältnisse > 1, z. B. $\frac{3}{2}$, 2, 3 ... ∞ (im Falle des Parallelismus der Flächen mit der betr. Axe) waren. Später wurden die Weissschen Symbole, z. B. von G. Rose, auch so geschrieben, daß die Coefficienten, mit denen die Axen der Grundform multipliciert wurden, Brüche mit dem Zähler 1 waren, also $\left(\frac{1}{mn} a : \frac{1}{m} b : \frac{1}{n} c\right)$ oder $\left(\frac{1}{m} a : \frac{1}{mn} b : \frac{1}{n} c\right)$; alsdann kann aus denselben unmittelbar das Millersche Symbol abgeschrieben werden, denn die Nenner jener Brüche sind offenbar die Indices der betr. Fläche (s. S. 299). Zur Abkürzung der unbehilflich langen Weissschen Symbole führte nun Naumann die nach ihm benannte und noch vielfach, namentlich in deutschen mineralogischen Werken, benutzte Bezeichnung ein. Nach dieser erhält die Grundform das Zeichen P (Pyramide), im kubischen Krystallsysteme O (Oktaeder), und mit diesem werden die obigen Coefficienten m und n, sobald sie von 1 verschieden sind, verbunden, z. B. mOn, mPn,

1) Neben ihnen werden von Goldschmidt und dessen Schülern auch zweistellige Symbole verwendet, welche durch Division mit dem dritten Index erhalten werden, z. B. $\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}$ st. (123), $0\,\infty$ st. (010) usf.



∞On usw. Durch besondere Zeichen werden die Axen charakterisiert, auf welche sich die betreffenden Coefficienten beziehen, eine Bezeichnung, welche bei verschiedener Orientierung der Krystalle zu mannigfachen Verwirrungen Anlaß gegeben hat[1]). Ein solches Naumannsches Symbol bezeichnet nun eine vollständige »holoedrische« Form; zur Charakterisierung einer hemiedrischen, hemimorphen oder tetartoedrischen werden Symbole, wie $\frac{mOn}{2}$, $\frac{mOn}{4}$ benutzt, welche aber noch durch Zusätze von [ ] u. a. Zeichen compliciert werden müssen, um anzugeben, welche Art von Hemiedrie usw. gemeint sei[2]). Endlich sind in Frankreich noch vielfach die von Lévy eingeführten, im wesentlichen auf den Bezeichnungsmethoden Hauys begründeten Symbole im Gebrauch. Diese beruhen darauf, daß an der Primitivform (d. i. dem Elementarparallelepiped S. 277) die dreierlei Flächen mit p, m, t, die sechs Kanten mit den Consonanten b, c, d, f, g, h, die vier Ecken mit den Vocalen a, e, i, o (im Falle der Gleichwertigkeit mehrerer nur mit den ersten Buchstaben), ferner die Abstumpfung einer Kante z. B. b, mit $b^{\frac{y}{x}}$ ($y : x$ = dem Verhältnis der beiden andern Parameter), und die einer Ecke, wenn diese z. B. von den Kanten d, f, h gebildet wird, mit $\left(d^{\frac{1}{x}} f^{\frac{1}{y}} h^{\frac{1}{z}}\right)$, wo $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$ das Verhältnis der auf den Kanten abgeschnittenen Längen bedeutet, bezeichnet werden.

In der folgenden Tabelle ist nun eine Vergleichung dieser verschiedenen Symbole und Benennungen gegeben, welche dazu dienen soll, die verschiedenen z. Z. noch im Gebrauche befindlichen Bezeichnungen leicht und rasch auf die im vorliegenden Lehrbuche benutzten zu beziehen, und ist hierbei die Reihenfolge gewählt worden, welche, der früheren Methode der Ableitung der Krystallformen entsprechend, z. Z. noch ziemlich allgemein üblich ist, nämlich (gerade umgekehrt, wie in der vorhergehenden Behandlung des Gegenstandes) mit denjenigen Formen beginnend, welche den höchsten Grad der Symmetrie besitzen.

1) Z. B. wird das Prisma eines rhombischen Krystalles, welches der Axe b parallel ist, als »Makrodoma« mit $m\bar{P}\infty$ bezeichnet, wenn $a < b$, dagegen als »Brachydoma« mit $m\breve{P}\infty$, wenn $a > b$. Welches Zeichen erhält nun diese Form, wenn a so wenig von b verschieden ist, daß bei verschiedenen Temperaturen $a \lesseqgtr b$ ist? Wie ungeeignet in gewissen Fällen die Naumannschen (und Lévyschen) Symbole sind, lehrt auch der folgende Fall: Luteokobaltchlorosulfat und das entsprechende Seleniat sind vollkommen isomorph; da aber der Winkel des rhombischen Prismas {110} bei dem einen 89° 55′, beim andern 90° 4½′ beträgt, so erhalten die correspondierenden Formen beider Salze nach jenen Bezeichnungsweisen verschiedene Symbole!

2) Welche man früher z. T. auch den Millerschen Zeichen in der in der Tabelle angegebenen Weise zu dem gleichen Zwecke hinzufügte.



I. Kubisches Krystallsystem.

(Reguläres, tesserales oder isometrisches[1]) Krystallsystem.)

	Zeichen nach			
Holoedrische Formen:	Miller:	Weiss:	Naumann:	Lévy:
Oktaeder	$\{111\}$	$(a:a:a)$	O	a^1
Hexaeder	$\{100\}$	$(a:\infty a:\infty a)$	$\infty O \infty$	p
Rhombendodekaeder	$\{110\}$	$(a:a:\infty a)$	∞O	b^1
Tetrakishexaeder	$\{hk0\}$	$(a:na:\infty a)$	$\infty O n$	$b^{\frac{h}{k}} = b^n$
Triakisoktaeder	$\{hhl\}_{(h>l)}$	$(a:a:ma)$	mO	$a^{\frac{l}{h}} = a^{\frac{1}{m}}$
Ikositetraeder	$\{hkk\}_{(h>k)}$	$(a:ma:ma)$	$m O m$	$a^{\frac{h}{l}} = a^m$
Hexakisoktaeder	$\{hkl\}$	$(a:na:ma)$	mOn	$\left(b^{\frac{1}{h}} b^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{mn}}\right)$
Hemiedrische Formen[2]):				
Hexakistetraeder	$\varkappa\{hkl\}$	$\frac{1}{2}(a:na:ma)$	$\frac{mOn}{2}$	
Dyakisdodekaeder.	$\pi\{hkl\}$	$\mp\frac{1}{2}(a:na:ma)$	$\left[\frac{mOn}{2}\right]$	$\frac{1}{2}\left(b^{\frac{1}{h}} b^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{l}}\right)$.
Pentagon-Ikositetraeder	$\gamma\{hkl\}$	$\frac{1}{2}(a:na:ma)r, l$	$\frac{mOn}{2} r, l$	
Tetartoedrische Formen:				
Tetraedrische Pentagondodekaeder . . .	$\varkappa\pi\{hkl\}$	$\frac{1}{4}(a:na:ma)$	$\frac{mOn}{4}$	$\frac{1}{4}\left(b^{\frac{1}{h}} b^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{l}}\right)$
usw.				

1) Dieser Name ist besonders ungeeignet, weil auch das trigonale Sxstem »isometrisch« ist.

2) Die Namen der einzelnen Arten der Hemiedrie sind unter denjenigen der betreffenden Symmetrieklassen im vorhergehenden jedesmal mit angeführt worden.

II. Hexagonales Krystallssytem.

(Sechsgliedriges System.)

	Zeichen nach Bravais:	Weiss:	Naumann:	Lévy:
Holoedrische Formen:				
Basis	$\{0001\}$	$(\infty a : \infty a : \infty a : c)$	$0P$	p
Hexagonale Bipyramiden 1. Art	$\{h0\bar{h}l\}$	$(a : a : \infty a : mc)$	mP	$b^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{l}{h}}$
Hexagonale Bipyramiden 2. Art	$\{h.h.\overline{2h}.l\}$	$(a : 2a : 2a : mc)$	$mP2$	$a^{\frac{2}{m}} = a^{\frac{l}{h}}$
Dihexagonale Bipyramiden .	$\{hikl\}$	$(a : na : \frac{n}{n-1} a : mc)$	mPn	$\left(b^1\, b^{n-1}\, h^{\frac{m(n-1)}{n}}\right) = \left(b^{\frac{1}{i}}\, b^{\frac{1}{k}}\, h^{\frac{1}{l}}\right)$
Hexagonales Prisma 1. Art .	$\{10\bar{1}0\}$	$(a : a : \infty a : \infty c)$	∞P	m
Hexagonales Prisma 2. Art .	$\{11\bar{2}0\}$	$(a : 2a : 2a : \infty c)$	$\infty P2$	h^1
Dihexagonale Prismen	$\{hik0\}$	$(a : na : \frac{n}{n-1} a : \infty c)$	∞Pn	$h^{\frac{1}{n-1}} = h^{\frac{h}{i}}$
Hemiedrische Formen:				
Hexagonale Bipyramiden 3. Art	$\pi\{hikl\}$	$\frac{1}{2}(a : na : \frac{n}{n-1} a : mc)$	$\frac{mPn}{2}$	$\frac{1}{2}\left(b^{\frac{1}{i}}\, b^{\frac{1}{k}}\, h^{\frac{1}{l}}\right)$
Hexagonale Trapezoeder . .	$\tau\{hikl\}$	$\frac{1}{2}(a : na : \frac{n}{n-1} a : mc) r, l$	$\frac{mPn}{2} r, l$	
Tetartoedrische Formen:				
Rhomboeder 3. Art.	$\varkappa\pi\{hikl\}$	$\frac{1}{4}(a : na : \frac{n}{n-1} a : mc) \frac{r}{l}, \frac{l}{r}$	$\frac{mPn}{4} \frac{r}{l}, \frac{l}{r}$	$\frac{1}{4}\left(b^{\frac{1}{i}}\, b^{\frac{1}{k}}\, h^{\frac{1}{l}}\right)$
Trigonale Trapezoeder . . .	$\varkappa\tau\{hikl\}$	$\frac{1}{4}(a : na : \frac{n}{n-1} a : mc) r, l$	$\frac{mPn}{4} r, l$	

III. Trigonales Krystallsystem.

(Rhomboedrisches Krystallsystem.)

Die wichtigste Klasse dieses Systemes, die skalenoedrische, wurde von den älteren Autoren meist als hemiedrische Abteilung des hexagonalen Krystallsystemes aufgefaßt, die Formen derselben aber von Naumann als holoedrische, mit dem primären Rhomboeder (R) als Grundform, bezeichnet; dabei ist mR ein Rhomboeder von m-facher Hauptaxe, mRn ein Skalenoeder, dessen Mittelkanten die Richtungen derjenigen des Rhomboeders mR besitzen, dessen Hauptaxe aber die n-fache des letzteren ist.

	Miller:	Naumann:	Lévy:
Basis	$\{111\}$	$0R$	a^1
Positive Rhomboeder, flacher als $R\{100\}$	$\{pqq\}$ $(p>q)$	mR $(m<1)$	$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{2m+1}{1-m}}$
Positive Rhomboeder, spitzer als $R\{100\}$	$\{p\bar{q}\bar{q}\}$ $(p>q)$	mR $(m>1)$	$e^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{2m+1}{m-1}}$
Negative Rhomboeder, flacher als $-\frac{1}{2}R\{110\}$	$\{pqq\}$ $(p<q)$	$-mR$ $(m<\frac{1}{2})$	$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1-2m}{1+m}}$
Negative Rhomboeder, spitzer als $-\frac{1}{2}R\{110\}$	$\{\bar{p}qq\}$ $(p<q)$	$-mR$ $(m>\frac{1}{2})$	$c^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{2m-1}{1+m}}$
Positive Skalenoeder	$\{pqr\}$ $p = 2+3mn+m$, $q = 2-3mn+m$, $r = 2(1-m)$	mRn	$\left(b^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{r}}\right)$ wenn p, q, r positiv; $\left(d^{\frac{1}{p}} d^{\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{r}}\right)$ wenn r negativ, — wird $b^{\frac{p}{q}}$, wenn $r = 0$,
Negative Skalenoeder	$\{pqr\}$ $p = 2+3mn-m$, $q = 2-3mn-m$, $r = 2(1+m)$	$-mRn$	$\left(b^{\frac{1}{p}} d^{\frac{1}{q}} d^{\frac{1}{r}}\right)$ wenn q und r negativ. — wird $d^{\frac{p}{q}}$, wenn $r = 0$,
Hexagonales Prisma 1. Art	$\{2\bar{1}\bar{1}\}$	∞R	e^2
Hexagonales Prisma 2. Art	$\{10\bar{1}\}$	$\infty P2$	d^1
Dihexagonale Prismen	$\{p\bar{q}\bar{r}\}$ $(p = q+r)$ $p = n+1$, $q = 1-2n$, $r = n-2$	∞Pn	$\left(b^{\frac{1}{p}} d^{\frac{1}{q}} d^{\frac{1}{r}}\right) = \left(b^{\frac{1}{n+1}} d^{\frac{1}{n-2}} d^{\frac{1}{1-2n}}\right)$

IV. Tetragonales Krystallsystem.

(Quadratisches System, viergliedriges System, pyramidales System, Système du prisme droit à base carrée.)

	Miller:	Weiss:	Naumann:	Lévy:
Basis	$\{001\}$	$(\infty a:\infty a:c)$	$0P$	p
Primäre tetragonale Bipyramide 1. Art . . .	$\{111\}$	$(a:a:c)$	P	$b^{\frac{1}{2}}$
Tetragonale Bipyramiden 1. Art	$\{hhl\}$	$(a:a:mc)$	mP	$b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}}$
Ditetragonale Bipyramiden	$\{hkl\}$	$(a:na:mc)$	mPn	$\left(b^{\frac{1}{h-k}}\, b^{\frac{1}{h+k}}\, h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\, b^{\frac{1}{m(n+1)}}\, h^{\frac{1}{n}}\right)$
Primäre tetragonale Bipyramide 2. Art . . .	$\{101\}$	$(a:\infty a:c)$	$P\infty$	a^1
Tetragonale Bipyramiden 2. Art	$\{h0l\}$	$(a:\infty a:mc)$	$mP\infty$	$a^{\frac{l}{h}} = a^{\frac{1}{m}}$
Tetragonales Prisma 1. Art	$\{110\}$	$(a:a:\infty c)$	∞P	m
- - 2. Art	$\{100\}$	$(a:\infty a:\infty c)$	$\infty P\infty$	h^1
Ditetragonale Prismen	$\{hk0\}$	$(a:na:\infty c)$	∞Pn	$h^{\frac{h+k}{h-k}} = h^{\frac{n+1}{n-1}}$

Die Bezeichnung der hemiedrischen Formen ist analog der im vorigen Systeme. Das von den französischen Krystallographen angegebene Verhältnis $D:D:h$ ist unser $a:a:c$.

Anmerk. zu S. 547—551. Im vorliegenden Buche ist, entsprechend dem von Weiss eingeführten Gebrauche, die nach vorn gerichtete Axe mit a, die querlaufende mit b bezeichnet, während Miller dem umgekehrten Gebrauche folgte. In den auf folg. S. angeführten Millerschen Symbolen des rhombischen Systemes entspricht daher der zweite Index der Axe a, der Brachydiagonale der übrigen Autoren, welche diese als erste Axe betrachten. Im monoklinen und triklinen Krystallsysteme dagegen ist die Reihenfolge der Axen bei allen Autoren die gleiche. Unser Axenverhältnis: $a:b:c$ ist gleich $d:D:h$ der französischen Krystallographen.

V. Rhombisches Krystallsystem.

(Zweigliedriges System, prismatisches System, Système du prisme rhomboidal droit.)

	Miller:	Weiss:	Naumann:	Lévy:
Basis	$\{001\}$	$(\infty a : \infty b : c)$	$0P$	p
Primäre Bipyramide	$\{111\}$	$(a : b : c)$	P	$b^{\frac{1}{2}}$
Rhomb. Bipyramiden der vertikalen Reihe	$\{hhl\}$	$(a : b : mc)$	mP	$b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}}$
Rhomb. Bipyramiden der brachydiagonalen Reihe	$\{hkl\}_{(h<k)}$	$(na : b : mc)$	$m\breve{P}n$	$\left(b^{\frac{1}{h-k}} b^{\frac{1}{h+k}} g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}} b^{\frac{1}{m(n+1)}} g^{\frac{1}{n}}\right)$
Rhomb. Bipyramiden der makrodiagonalen Reihe	$\{hkl\}_{(h>k)}$	$(a : nb : mc)$	$m\bar{P}n$	$\left(b^{\frac{1}{k-h}} b^{\frac{1}{k+h}} h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}} b^{\frac{1}{m(n+1)}} h^{\frac{1}{n}}\right)$
Primäres Prisma	$\{110\}$	$(a : b : \infty c)$	∞P	m
Rhomb. Prismen der brachydiagonalen Reihe	$\{hk0\}_{(h<k)}$	$(na : b : \infty c)$	$\infty\breve{P}n$	$g^{\frac{k+h}{k-h}} = g^{\frac{n+1}{n-1}}$
Rhomb. Prismen der makrodiagonalen Reihe	$\{hk0\}_{(h>k)}$	$(a : nb : \infty c)$	$\infty\bar{P}n$	$h^{\frac{h+k}{h-k}} = h^{\frac{n+1}{n-1}}$
Brachydomen	$\{h0l\}\left(\frac{h}{l} = m\right)$	$(\infty a : b : mc)$	$m\breve{P}\infty$	$e^{\frac{l}{h}} = e^{\frac{1}{m}}$
Makrodomen	$\{0kl\}\left(\frac{k}{l} = m\right)$	$(a : \infty b : mc)$	$m\bar{P}\infty$	$a^{\frac{l}{k}} = a^{\frac{1}{m}}$
Brachypinakoid	$\{100\}$	$(\infty a : b : \infty c)$	$\infty\breve{P}\infty$	g^{1}
Makropinakoid	$\{010\}$	$(a : \infty b : \infty c)$	$\infty\bar{P}\infty$	h^{1}

VI. Monoklines Krystallsystem.

(Monosymmetrisches, zwei- und eingliedriges System, schief prismatisches oder klinorhombisches System, Système du prisme rhomboidal oblique.)

	Miller:	Weiss:	Naumann:	Lévy:
Basis	$\{001\}$	$(\infty a : \infty b : c)$	$0P$	p
Hintere primäre Hemipyramide	$\{\bar{1}11\}$	$(a' : b : c)$	$+P$	$b^{\frac{1}{2}}$
Vordere primäre Hemipyramide	$\{111\}$	$(a : b : c)$	$-P$	$d^{\frac{1}{2}}$
Hintere Hemipyramiden der vertikalen Reihe	$\{\bar{h}hl\}$	$(a' : b : mc)$	$+mP$	$b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}}$
Vordere - - - -	$\{hhl\}$	$(a : b : mc)$	$-mP$	$d^{\frac{l}{2h}} = d^{\frac{1}{2m}}$
Hintere Hemipyramiden der klinodiag. Reihe	$\{\bar{h}kl\}$ $(h<k)$	$(na' : b : mc)$	$+m$Ꝑn	$\left(b^{\frac{1}{k-h}} d^{\frac{1}{k+h}} g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}} d^{\frac{1}{m(n+1)}} g^{\frac{1}{n}}\right)$
Vordere - - - -	$\{hkl\}$ $(h<k)$	$(na : b : mc)$	$-m$Ꝑn	$\left(d^{\frac{1}{k-h}} b^{\frac{1}{k+h}} g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(d^{\frac{1}{m(n-1)}} b^{\frac{1}{m(n+1)}} g^{\frac{1}{n}}\right)$
Hintere - - orthodiag. -	$\{\bar{h}kl\}$ $(h>k)$	$(a' : nb : mc)$	$+m$Ꝑn	$\left(b^{\frac{1}{h-k}} b^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}} b^{\frac{1}{m(n+1)}} h^{\frac{1}{n}}\right)$
Vordere - - - -	$\{hkl\}$ $(h>k)$	$(a : nb : mc)$	$-m$Ꝑn	$\left(d^{\frac{1}{h-k}} d^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(d^{\frac{1}{m(n-1)}} d^{\frac{1}{m(n+1)}} h^{\frac{1}{n}}\right)$
Primäres Prisma	$\{110\}$	$(a : b : \infty c)$	∞P	m
Prismen der klinodiagonalen Reihe	$\{hk0\}$ $(h<k)$	$(na : b : \infty c)$	∞Ꝑn	$g^{\frac{k+h}{k-h}} = g^{\frac{n+1}{n-1}}$

	Miller:	Weiss:	Naumann:	Lévy:
Prismen der orthodiagonalen Reihe	$\{hk0\}_{(h>k)}$	$(a : nb : \infty c)$	$\infty \bar{P} n$	$h^{\frac{h+k}{h-k}} = h^{\frac{n+1}{n-1}}$
Klinodomen	$\{0kl\}$	$(\infty a : b : mc)$	$m \grave{P} \infty$	$e^{\frac{l}{k}} = e^{\frac{1}{m}}$
Hintere Hemidomen.	$\{\bar{h}0l\}$	$(a' : \infty b : mc)$	$+m \bar{P} \infty$	$a^{\frac{l}{h}} = a^{\frac{1}{m}}$
Vordere Hemidomen	$\{h0l\}$	$(a : \infty b : mc)$	$-m \bar{P} \infty$	$o^{\frac{l}{h}} = o^{\frac{1}{m}}$
Orthopinakoid	$\{100\}$	$(a : \infty b ; \infty c)$	$\infty \bar{P} \infty$	h^1
Klinopinakoid	$\{010\}$	$(\infty a : b : \infty c)$	$\infty \grave{P} \infty$	g^1

VII. Triklines Krystallsystem.

(Asymmetrisches System, klinorhomboidisches System, eingliedriges System, Système du prisme doublement oblique ou anorthique.)

	Miller:	Weiss:	Naumann:	Lévy:
Basis	$\{001\}$	$(\infty a : \infty b : c)$	$0P$	p
Rechte obere primäre Tetartopyramide. . .	$\{111\}$	$(a : b : c)$	P'	$f^{\frac{1}{2}}$
Linke - - - . . .	$\{1\bar{1}1\}$	$(a : b' : c)$	$'P$	$d^{\frac{1}{2}}$
Rechte untere - - . . .	$\{\bar{1}\bar{1}1\}$	$(a' : b' : c)$	$P_{,}$	$b^{\frac{1}{2}}$
Linke - - - . . .	$\{\bar{1}11\}$	$(a' : b : c)$	$_{,}P$	$c^{\frac{1}{2}}$
Rechte obere Tetartopyramiden d. vertic. Reihe	$\{hhl\}$	$(a : b : mc)$	mP'	$f^{\frac{l}{2h}} = f^{\frac{1}{2m}}$
Linke - - - - -	$\{h\bar{h}l\}$	$(a : b' : mc)$	$m'P$	$d^{\frac{l}{2h}} = d^{\frac{1}{2m}}$
Rechte untere - - - -	$\{\bar{h}\bar{h}l\}$	$(a' : b' : mc)$	$mP_{,}$	$b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}}$
Linke - - - - -	$\{\bar{h}hl\}$	$(a' : b : mc)$	$m_{,}P$	$c^{\frac{l}{2h}} = c^{\frac{1}{2m}}$

	Miller:	Weiss:	Naumann:	Lévy:
Rechtes primäres Hemiprisma	$\{1\,1\,0\}$	$(a:b:\infty c)$	$\infty P'_{,}$	t
Linkes - -	$\{1\,\bar{1}\,0\}$	$(a:b':\infty c)$	$\infty_{,}'P$	m
Rechte obere Tetartopyr. d. makrodiag. Reihe	$\{h\,k\,l\}_{(h>k)}$	$(a:nb:mc)$	$m\bar{P}'n$	$\left(f^{\frac{1}{h-k}}\,d^{\frac{1}{h+k}}\,h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(f^{\frac{1}{m(n-1)}}\,d^{\frac{1}{m(n+1)}}\,h^{\frac{1}{n}}\right)$
Linke - - - - -	$\{h\,\bar{k}\,l\}$	$(a:nb':mc)$	$m'\bar{P}n$	$\left(d^{\frac{1}{h-k}}\,f^{\frac{1}{h+k}}\,h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(d^{\frac{1}{m(n-1)}}\,f^{\frac{1}{m(n+1)}}\,h^{\frac{1}{n}}\right)$
Rechte untere - - - -	$\{\bar{h}\,\bar{k}\,l\}$	$(a':nb':mc)$	$m\bar{P}_{,}n$	$\left(b^{\frac{1}{h-k}}\,c^{\frac{1}{h+k}}\,h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\,c^{\frac{1}{m(n+1)}}\,h^{\frac{1}{n}}\right)$
Linke - - - - -	$\{\bar{h}\,k\,l\}$	$(a':nb:mc)$	$m_{,}\bar{P}n$	$\left(c^{\frac{1}{h-k}}\,b^{\frac{1}{h+k}}\,h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(c^{\frac{1}{m(n-1)}}\,b^{\frac{1}{m(n+1)}}\,h^{\frac{1}{n}}\right)$
Obere makrodiagonale Hemidomen	$\{h\,0\,l\}$	$(a:\infty b:mc)$	$m'\bar{P}'\infty$	$o^{\frac{l}{h}} = o^{\frac{1}{m}}$
Untere - -	$\{\bar{h}\,0\,l\}$	$(a':\infty b:mc)$	$m_{,}\bar{P}_{,}\infty$	$a^{\frac{l}{h}} = a^{\frac{1}{m}}$
Rechte obere Tetartopyr. d. brachydiag. Reihe	$\{h\,k\,l\}_{(h<k)}$	$(na:b:mc)$	$m\breve{P}'n$	$\left(f^{\frac{1}{h-k}}\,c^{\frac{1}{h+k}}\,g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(f^{\frac{1}{m(n-1)}}\,c^{\frac{1}{m(n+1)}}\,g^{\frac{1}{n}}\right)$
Linke - - - - -	$\{h\,\bar{k}\,l\}$	$(na:b':mc)$	$m'\breve{P}n$	$\left(d^{\frac{1}{h-k}}\,b^{\frac{1}{h+k}}\,g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(d^{\frac{1}{m(n-1)}}\,b^{\frac{1}{m(n+1)}}\,g^{\frac{1}{n}}\right)$

	Miller:	Weiss:	Naumann:	Lévy:
Rechte untere Tetartopyr. d. brachydiag. Reihe	$\{\bar{h}\bar{k}l\}_{(h<k)}$	$(na' : b' : mc)$	$m\breve{P}_{,}n$	$\left(b^{\frac{1}{k-h}} d^{\frac{1}{k+h}} g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}} d^{\frac{1}{m(n+1)}} g^{\frac{1}{n}}\right)$
Linke - - - - -	$\{\bar{h}kl\}$	$(na' : b : mc)$	$m_{,}\breve{P}n$	$\left(c^{\frac{1}{k-h}} f^{\frac{1}{k+h}} g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(c^{\frac{1}{m(n-1)}} f^{\frac{1}{m(n+1)}} g^{\frac{1}{n}}\right)$
Rechte obere brachydiagonale Hemidomen .	$\{0kl\}$	$(\infty a : b : mc)$	$m_{,}\breve{P}'\infty$	$i^{\frac{l}{k}} = i^{\frac{1}{m}}$
Linke - - -	$\{0\bar{k}l\}$	$(\infty a : b' : mc)$	$m'\breve{P}_{,}\infty$	$e^{\frac{l}{k}} = e^{\frac{1}{m}}$
Rechte Hemiprismen der makrodiag. Reihe.	$\{hk0\}_{(h>k)}$	$(a : nb : \infty c)$	$\infty\bar{P}_{,}'n$	$h^{\frac{h+k}{h-k}} = h^{\frac{n+1}{n-1}}$
Linke - - - - .	$\{h\bar{k}0\}$	$(a : nb' : \infty c)$	$\infty_{,}'\bar{P}n$	${}^{\frac{h+k}{h-k}}h = {}^{\frac{n+1}{n-1}}h$
Rechte - - brachydiag. - .	$\{hk0\}_{(h<k)}$	$(na : b : \infty c)$	$\infty\breve{P}_{,}'n$	$g^{\frac{k+h}{k-h}} = g^{\frac{n+1}{n-1}}$
Linke - - - - .	$\{h\bar{k}0\}$	$(na : b' : \infty c)$	$\infty'_{,}\breve{P}n$	${}^{\frac{k+h}{k-h}}g = {}^{\frac{n+1}{n-1}}g.$
Brachypinakoid	$\{010\}$	$(\infty a : b : \infty c)$	$\infty\breve{P}\infty$	g^1
Makropinakoid	$\{100\}$	$(a : \infty b : \infty c)$	$\infty\bar{P}\infty$	h^1

Tabellarische Darstellung der Beziehungen zwischen den kubisch-hexakisoktaedrischen und den ditrigonal-skalenoedrischen Formen.

Zu den wichtigsten Symmetrieklassen der Krystalle gehören die ditrigonal-skalenoedrische (s. S. 475f.) und die hexakisoktaedrische (S. 534f.), und diese beiden Klassen stehen in einer sehr nahen Beziehung zueinander. Der Structur sämtlicher ihnen angehöriger Krystalle liegt ein Raumgitter zugrunde, dessen Punkte auf drei, unter gleichen Winkeln einander schneidenden, Geraden gleiche, und zwar die kleinsten, Abstände besitzen. Der Unterschied der beiden Klassen besteht nur darin, daß in dem Raumgitter der einen, dem kubischen (Fig. 160*a* S. 280), jene Winkel unveränderlich rechte sind, während in dem Raumgitter der ditrigonal-skalenoedrischen Klasse, dem rhomboedrischen (Fig. 158 S. 279), die drei Seiten des Elementarparallelepipedes einen mit der Temperatur veränderlichen und daher im allgemeinen schiefen Winkel miteinander bilden. Denkt man sich in der ersteren Structur die eine der vier Hauptdiagonalen des Kubus um eine, sei es noch so kleine, Größe dilatiert oder comprimiert, so verwandelt sich das kubische Raumgitter in ein rhomboedrisches mit der betreffenden Diagonale als Hauptaxe. Die gleiche Umwandlung erfolgt durch jede homogene Deformation, bei welcher das Deformationsellipsoid (s. S. 205) ein Rotationsellipsoid mit jener Diagonale als Rotationsaxe ist. Da durch eine derartige Deformation keine Änderung der Zonenverhältnisse des Krystalles bewirkt wird (s. S. 310), so bleiben die Indices aller Flächen eines hexakisoktaedrischen Krystalles unverändert, wenn eine seiner vier trigonalen Axen durch die beschriebene Deformation zur Hauptaxe und der Krystall dadurch zu einem ditrigonal-skalenoedrischen wird. Hierbei verwandelt sich das Hexaeder {100} in das primäre Rhomboeder {100}, d. h. die drei rechtwinkeligen kubischen Axen verwandeln sich in die drei rhomboedrischen Axen, welche der sog. Millerschen Bezeichnung der Krystallflächen (s. S. 445) zugrunde liegen; alle übrigen hexakisoktaedrischen Formen liefern bei dieser Deformation Combinationen von mehreren ditrigonal-skalenoedrischen Formen. Entsprechend der aus dieser Betrachtung sich ergebenden Übereinstimmung der Beziehungen zwischen der Krystallstructur und den Symbolen der Krystallflächen für beide Klassen, muß in beiden in gleicher Weise die größere oder geringere Einfachheit der Indices ein Maß der Flächendichtigkeit darbieten (vgl. S. 449), und es müssen also die

ditrigonal-skalenoedrischen Formen in derselben Reihenfolge bei der Bildung der Krystalle mehr oder weniger begünstigt sein, wie die hexakisoktaedrischen Formen, welche mit ihnen die gleichen Symbole besitzen. Diese Reihenfolge erhält man nun nach S. 311 und 313 durch Ableitung der Indices aus denjenigen der Elementarflächen, und ihr entsprechend sind in der folgenden Tabelle die hexakisoktaedrischen Formen, deren Indices die Werte 0, 1, 2, 3, 4 besitzen, angeordnet und mit denjenigen ditrigonal-skalenoedrischen zusammengestellt, in welche sie durch die besprochene Deformation übergehen würden. Neben den Millerschen Symbolen der trigonalen Formen sind auch die Bravaisschen und die S. 545 erläuterten Naumannschen Symbole angegeben, von welchen die letzteren in bezug auf die Skalenoeder durch deren Ableitung von Rhomboedern sich mehr einer rationellen Bezeichnung nähern als die ersteren.

In der gleichen Beziehung zu den hexakisoktaedrischen Formen stehen auch diejenigen der übrigen Klassen des trigonalen Systemes (nur daß hier die hexakisoktaedrische Form einer Combination von noch mehr Einzelformen entspricht), und es muß daher für alle trigonalen Krystalle, deren Structur ein rhomboedrisches Raumgitter zugrunde liegt, die folgende Tabelle im allgemeinen[1]) die Reihenfolge angeben, in welcher die Wichtigkeit der Flächen für das Wachstum der Krystalle in derselben Weise abnimmt, wie für die kubischen Formen mit zunehmender Complication der Symbole. In der Tat lehrt die Vergleichung der Tabelle mit der Erfahrung an flächenreichen Krystallen von unzweifelhaft rhomboedrischer Structur, wie Calcit, Turmalin, Pyrargyrit, Phenakit u. a., daß die einzelnen Formen um so häufiger auftreten, je einfacher ihre Millerschen Symbole sind, und es kann daher aus dieser Übereinstimmung auf die rhomboedrische Structur eines Körpers geschlossen werden. Umgekehrt würde der Umstand, daß an einer krystallisierten Substanz häufig solche Formen auftreten, welche in der Tabelle an einer späteren Stelle erscheinen, gegen eine rhomboedrische Structur sprechen, z. B. die Combination von $\{100\}$ mit $\{22\bar{1}\}$, $\{4\bar{2}1\}$, $\{4\bar{2}\bar{1}\}$ und das häufige Auftreten des Rhomboeders $\{7\bar{2}\bar{2}\}$ $(3R)$ am Quarze, für welches Mineral in der Tat auch aus andern Gründen (s. S. 286f.) eine andere Structur anzunehmen ist. Besonders beweisend würde in dieser Beziehung die sogenannte »primäre hexagonale« Bipyramide $\{11\bar{2}2\}P2$ (s. S. 477) und das dihexagonale Prisma $\{21\bar{3}0\}\infty P\frac{3}{2}$ sein, welche Formen die Symbole $\{52\bar{1}\}$ bzw. $\{5\bar{1}\bar{4}\}$ erhalten würden, und deren Auftreten daher bei rhomboedrischer Structur sehr unwahrscheinlich wäre, wie es auch die Erfahrung lehrt. Die größte Wahrscheinlichkeit würde dagegen unter allen dihexagonalen Prismen $\{3\bar{2}\bar{1}\} = \{5\bar{4}\bar{1}0\}$ haben, und dieses ist in der Tat das einzige häufig vorkommende (Turmalin).

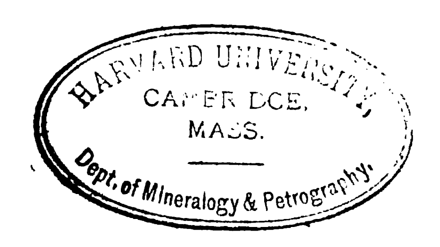
1) Im einzelnen wird es natürlich von der speciellen Krystallstructur und besonders von der Gestalt des Grundrhomboeders abhängen, ob z. B. das Prisma $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ häufiger ist als $\{10\bar{1}\}$, wie beim Calcit; niemals aber kann bei einem Krystalle von rhomboedrischer Structur eine Form, deren Symbol aus höheren Zahlen besteht, häufig auftreten.



Kubische (hexakis-oktaedrische) Form		Ditrigonal-skalenoedrische Formen	Millersche Symbole	Bravaissche Symbole	Naumannsche Symbole
Hexaeder	$\{100\}$	Prim. Rhomboeder	$\{100\}$	$\{10\bar{1}1\}$	R
Rhombendodekaeder	$\{110\}$	Rhomboeder	$\{110\}$	$\{01\bar{1}2\}$	$-\frac{1}{2}R$
		Hexag. Prisma 2. Art	$\{10\bar{1}\}$	$\{11\bar{2}0\}$	$\infty P2$
Oktaeder	$\{111\}$	Basis	$\{111\}$	$\{0001\}$	$0R$
		Rhomboeder	$\{11\bar{1}\}$	$\{02\bar{2}1\}$	$-2R$
Tetrakishexaeder	$\{201\}$	Hexag. Bipyram. 2. Art	$\{201\}$	$\{11\bar{2}3\}$	$\frac{2}{3}P2$
		Skalenoeder	$\{20\bar{1}\}$	$\{21\bar{3}1\}$	$R3$
Ikositetraeder	$\{211\}$	Rhomboeder	$\{211\}$	$\{10\bar{1}4\}$	$\frac{1}{4}R$
		Skalenoeder	$\{21\bar{1}\}$	$\{12\bar{3}2\}$	$-\frac{1}{2}R3$
		Hexag. Prisma 1. Art	$\{2\bar{1}\bar{1}\}$	$\{10\bar{1}0\}$	∞R
Tetrakishexaeder	$\{301\}$	Skalenoeder	$\{301\}$	$\{21\bar{3}4\}$	$\frac{1}{4}R3$
		-	$\{30\bar{1}\}$	$\{31\bar{4}2\}$	$R2$
Ikositetraeder	$\{311\}$	Rhomboeder	$\{311\}$	$\{20\bar{2}5\}$	$\frac{2}{5}R$
		Hexag. Bipyram. 2. Art	$\{31\bar{1}\}$	$\{22\bar{4}3\}$	$\frac{4}{3}P2$
		Rhomboeder	$\{3\bar{1}\bar{1}\}$	$\{40\bar{4}1\}$	$4R$
Tetrakishexaeder	$\{302\}$	Skalenoeder	$\{302\}$	$\{12\bar{3}5\}$	$-\frac{1}{5}R3$
		-	$\{30\bar{2}\}$	$\{32\bar{5}1\}$	$R5$
Triakisoktaeder	$\{221\}$	Rhomboeder	$\{221\}$	$\{01\bar{1}5\}$	$-\frac{1}{5}R$
		-	$\{22\bar{1}\}$	$\{01\bar{1}1\}$	$-R$
		Skalenoeder	$\{2\bar{2}1\}$	$\{13\bar{4}1\}$	$-2R2$
Tetrakishexaeder	$\{401\}$	Skalenoeder	$\{401\}$	$\{31\bar{4}5\}$	$\frac{2}{5}R2$
		-	$\{40\bar{1}\}$	$\{41\bar{5}3\}$	$R\frac{5}{3}$
Ikositetraeder	$\{411\}$	Rhomboeder	$\{411\}$	$\{10\bar{1}2\}$	$\frac{1}{2}R$
		Skalenoeder	$\{41\bar{1}\}$	$\{32\bar{5}4\}$	$\frac{1}{4}R5$
		Rhomboeder	$\{4\bar{1}\bar{1}\}$	$\{50\bar{5}2\}$	$\frac{5}{2}R$
Hexakisoktaeder	$\{321\}$	Hexag. Bipyram. 2. Art	$\{321\}$	$\{11\bar{2}6\}$	$\frac{1}{3}P2$
		Skalenoeder	$\{32\bar{1}\}$	$\{13\bar{4}4\}$	$-\frac{1}{2}R2$
		-	$\{3\bar{2}1\}$	$\{23\bar{5}2\}$	$-\frac{1}{2}R5$
		Dihexag. Prisma	$\{3\bar{2}\bar{1}\}$	$\{5\bar{4}\bar{1}0\}$	$\infty P\frac{5}{4}$
Triakisoktaeder	$\{331\}$	Rhomboeder	$\{331\}$	$\{02\bar{2}7\}$	$-\frac{2}{7}R$
		-	$\{33\bar{1}\}$	$\{04\bar{4}5\}$	$-\frac{4}{5}R$
		Skalenoeder	$\{3\bar{3}1\}$	$\{24\bar{6}1\}$	$-2R3$
Tetrakishexaeder	$\{403\}$	Skalenoeder	$\{403\}$	$\{13\bar{4}7\}$	$-\frac{2}{7}R2$
		-	$\{40\bar{3}\}$	$\{43\bar{7}1\}$	$R7$

Kubische (hexakis-oktaedrische) Form	Ditrigonal-skalenoedrische Formen	Millersche Symbole	Bravaissche Symbole	Naumannsche Symbole
Ikositetraeder . . . . {322}	Rhomboeder	{322}	$\{10\bar{1}7\}$	$\frac{1}{7}R$
	Skalenoeder	$\{32\bar{2}\}$	$\{14\bar{5}3\}$	$-R\frac{5}{3}$
	Rhomboeder	$\{3\bar{2}\bar{2}\}$	$\{05\bar{5}1\}$	$-5R$
Hexakisoktaeder . . {421}	Skalenoeder	{421}	$\{21\bar{3}7\}$	$\frac{1}{7}R3$
	-	$\{42\bar{1}\}$	$\{23\bar{5}5\}$	$-\frac{1}{5}R5$
	-	$\{4\bar{2}1\}$	$\{11\bar{2}1\}$	$2P2$
	-	$\{4\bar{2}\bar{1}\}$	$\{51\bar{6}1\}$	$4R\frac{3}{2}$
Triakisoktaeder . . . {332}	Rhomboeder	{332}	$\{01\bar{1}8\}$	$-\frac{1}{8}R$
	-	$\{33\bar{2}\}$	$\{05\bar{5}4\}$	$-\frac{5}{4}R$
	Skalenoeder	$\{3\bar{3}2\}$	$\{15\bar{6}2\}$	$-2R\frac{3}{2}$
Hexakisoktaeder . . {431}	Skalenoeder	{431}	$\{12\bar{3}8\}$	$-\frac{1}{8}R3$
	-	$\{43\bar{1}\}$	$\{14\bar{5}6\}$	$-\frac{1}{2}R\frac{5}{3}$
	-	$\{4\bar{3}1\}$	$\{34\bar{7}2\}$	$-\frac{1}{2}R7$
	Dihexag. Prisma . .	$\{4\bar{3}\bar{1}\}$	$\{7\bar{2}\bar{5}0\}$	$\infty P\frac{7}{5}$
Triakisoktaeder . . . {441}	Rhomboeder	{441}	$\{01\bar{1}3\}$	$-\frac{1}{3}R$
	-	$\{44\bar{1}\}$	$\{05\bar{5}7\}$	$-\frac{5}{7}R$
	Skalenoeder	$\{4\bar{4}1\}$	$\{35\bar{8}1\}$	$-2R4$
Hexakisoktaeder . . {432}	Hexag. Bipyram. 2. Art	{432}	$\{11\bar{2}9\}$	$\frac{2}{9}P2$
	Skalenoeder	$\{43\bar{2}\}$	$\{15\bar{6}5\}$	$-\frac{4}{5}R\frac{3}{2}$
	-	$\{4\bar{3}2\}$	$\{25\bar{7}3\}$	$-R\frac{7}{3}$
	-	$\{4\bar{3}\bar{2}\}$	$\{16\bar{7}1\}$	$-5R\frac{7}{5}$
Ikositetraeder . . . . {433}	Rhomboeder	{433}	$\{1.0.\bar{1}.10\}$	$\frac{1}{10}R$
	Skalenoeder	$\{43\bar{3}\}$	$\{16\bar{7}4\}$	$-\frac{5}{4}R\frac{7}{5}$
	Rhomboeder	$\{4\bar{3}\bar{3}\}$	$\{07\bar{7}2\}$	$-\frac{7}{2}R$
Triakisoktaeder . . . {443}	Rhomboeder	{443}	$\{0.1.\bar{1}.11\}$	$-\frac{1}{11}R$
	-	$\{44\bar{3}\}$	$\{07\bar{7}5\}$	$-\frac{7}{5}R$
	Skalenoeder	$\{4\bar{4}3\}$	$\{17\bar{8}3\}$	$-2R\frac{4}{3}$


HARVARD UNIVERSITY,
CAMBRIDGE,
MASS.
Dept. of Mineralogy & Petrography.

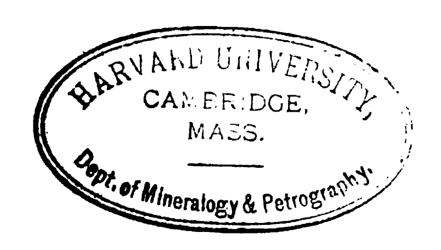


III.

Angewandte physikalische Krystallographie.

Die Methoden zur Untersuchung der Krystalle.


HARVARD UNIVERSITY
CAMBRIDGE,
MASS.
Dept. of Mineralogy & Petrography.



Berechnung und graphische Darstellung der Krystallformen.

Einleitung.

Zur Charakterisierung einer krystallisierten Substanz gehört die Bestimmung folgender Eigenschaften[1]):

1) Der Symmetrieklasse, welcher ihre Krystalle angehören. Diese Bestimmung kann erschwert werden durch unvollkommene Beschaffenheit der Krystallflächen und daraus folgende Ungenauigkeit der Messungen, welche alsdann auch für gleichwertige Kanten erheblich verschiedene Flächenwinkel liefern, so daß es unentschieden bleiben kann, ob zwei Kanten gleiche oder nur sehr ähnliche Winkel besitzen, ob zwei Flächen einen rechten oder einen nur wenig schiefen Winkel miteinander bilden usw. Falls nicht die Existenz sehr vollkommener Spaltungsflächen diesen Mangel zu ersetzen imstande ist, sind bei durchsichtigen Krystallen vor allem die optischen Eigenschaften zur Entscheidung herbeizuziehen; in sehr vielen Fällen genügt schon die Erkennung der schiefen Orientierung der Schwingungsrichtungen im parallelen polarisierten Lichte gegen eine Kante des Krystalles oder die unsymmetrische Lage des durch ein Paar paralleler Flächen gesehenen Interferenzbildes im convergenten Lichte, um bestimmte Symmetrieverhältnisse als unmöglich auszuschließen. Aber auch bei einer Flächenbeschaffenheit des Krystalles, welche die genauesten Messungen gestattet, kann die Bestimmung der Symmetrieverhältnisse eine zweifelhafte sein, wenn jener nämlich nur solche einfache Formen zeigt, welche mehreren Symmetrieklassen gemeinsam sind, z. B. das Hexaeder, in welchem Falle der Krystall jeder der fünf Klassen des kubischen Systemes angehören kann, oder ein hexagonales Prisma mit dazu senkrechter Basis, eine Combination, welche in nicht weniger als zehn Klassen des trigonalen und hexagonalen Krystallsystemes möglich ist. In solchen Fällen sind in erster Linie die Ätzfiguren zur Bestimmung der Symmetrieverhältnisse von praktischer Wichtigkeit, weil diese sehr häufig von Flächen mit weniger einfachen Indices gebildet werden, d. h. solchen

[1]) Im folgenden sind nur die (in der I. Abteilung behandelten) vectoriellen bzw. bivectoriellen Eigenschaften der Krystalle berücksichtigt. Es gibt aber auch eine scalare Eigenschaft, deren Bestimmung notwendig zu einer vollständigen krystallographischen Untersuchung gehört, d. i. das specifische Gewicht. Siehe hierüber des Verf. Einleitung in die chemische Krystallographie, Leipzig 1904, S. 25—31.

Formen entsprechen, welche für eine bestimmte Symmetrieklasse charakteristisch sind. Ergibt sich z. B. durch Behandlung eines hexaedrischen Krystalles mit verschiedenen Lösungsmitteln, daß eines derselben Ätzfiguren hervorruft, welche weder nach {100}, noch nach {110} symmetrisch sind, so kann der Krystall nur einer der beiden ersten Klassen des kubischen Systemes angehören; die Unterscheidung zwischen diesen beiden ist durch den Nachweis geliefert, ob die trigonalen Axen polar sind oder nicht; erweisen dieselben sich als elektrische Axen, oder zeigen die abwechselnden Ecken des Würfels deutlich verschiedene Lösungsgeschwindigkeit (ungleiche Prärosionsflächen, s. S. 256), so ist die Frage definitiv zugunsten der tetraedrisch-pentagondodekaedrischen Klasse entschieden. Bei dem zweiten angeführten Beispiele, dem eines hexagonalen Prismas mit Basis, würde zunächst schon die Existenz dreier zur Hauptaxe geneigter Ebenen der Spaltbarkeit genügen, um die fünf Klassen des hexagonalen Systemes auszuschließen, während die vollständige Bestimmung der Symmetrieverhältnisse des Krystalles meist die Verbindung der Ätzmethode mit der pyroelektrischen Untersuchung erfordert, wie aus zahlreichen Beispielen des trigonalen und hexagonalen Systemes hervorgeht. Da die erwähnten Krystallformen zu den mit den einfachsten Indices, d. h. zu denjenigen gehören, welche sich am leichtesten bilden (s. S. 305), so liegen derartige Fälle sehr häufig vor, besonders bei der krystallographischen Untersuchung von Substanzen, welche nur aus einem einzigen Lösungsmittel und innerhalb enger Temperaturgrenzen krystallisiert werden können, während es in andern Fällen gelingt, unter abweichenden Krystallisationsbedingungen auch flächenreichere Krystalle zu erhalten, welche eine directe Erkennung der Symmetrieverhältnisse gestatten.

2) Die zweite zur krystallographischen Charakterisierung einer Substanz zu lösende Aufgabe ist die Berechnung der Elemente. Diese erfordert, wie aus der II. Abteilung hervorgeht, im triklinen Systeme die Messung von mindestens fünf Winkeln, welche Zahl sich im monoklinen Systeme auf drei, im rhombischen auf zwei, im hexagonalen, tetragonalen und trigonalen auf eins reduciert, während endlich im kubischen Systeme die Elemente durch die Symmetrieverhältnisse selbst gegeben sind. Die vollständige Bestimmung derselben kann nun ebenso, wie diejenige des Symmetriegrades, unmöglich gemacht werden durch zu große Einfachheit der Ausbildung eines Krystalles, infolge deren nicht die erforderliche minimale Anzahl von Messungen an demselben vorgenommen werden kann. Besteht z. B. eine trikline Combination nur aus drei Pinakoiden, so können nur drei von den fünf Elementen bestimmt werden, z. B. die Größen α, β, γ, wenn jene drei Flächenpaare als {100}, {010} und {001} angenommen werden; die monokline Combination eines Prismas mit einem nicht dessen Zone angehörenden Pinakoide gestattet nur die Berechnung zweier Elemente, denn wenn man jene Formen als {110} und {001} auffaßt, so bleibt die Axe c unbestimmt; die rhombische Combination der drei Pinakoide {100}, {010} und {001}

liefert nur die drei Axenwinkel, und ein hinzutretendes Prisma würde nur das Verhältnis zweier Axenlängen zu bestimmen gestatten; im trigonalen, tetragonalen und hexagonalen Krystallsysteme endlich bleibt das Axenverhältnis $a:c$ (bzw. der charakteristische Winkel α der Axen) unbekannt, wenn nur Flächen auftreten, welche parallel oder senkrecht zur Hauptaxe sind. Andererseits können auch mehr Flächen an den zu untersuchenden Krystallen vorhanden sein, als zur vollständigen Bestimmung der Elemente erforderlich ist, und in solchen Fällen kann die Berechnung der letzteren auf zwei Wegen vorgenommen werden: a) unter Zugrundelegung nur der ausreichenden Anzahl von Winkeln, welche alsdann möglichst genau bestimmt werden müssen (als Mittel der Messungen an einer möglichst großen Zahl von Krystallen), oder b) mit Benutzung einer größeren Zahl beobachteter Winkel durch das sogenannte Ausgleichungsverfahren, welches weiterhin besprochen werden soll.

3) Die Bestimmung der Symbole der auftretenden Formen. Diese erfolgt für diejenigen Formen, welche der Berechnung zugrunde gelegt werden, gleichzeitig mit der Bestimmung der Elemente, für die übrigen nach Feststellung der letzteren. Sie erfordert in vielen Fällen nur den bei Gelegenheit der goniometrischen Untersuchung erbrachten Nachweis der Lage einer Fläche der betreffenden Form in zwei Zonen (s. S. 311); Formen, deren Flächen nur einer einzigen am Krystalle beobachteten Zone angehören, erfordern zur Bestimmung ihrer Indices die Messung je eines Winkels zu einer bereits bekannten Fläche dieser Zone, — während endlich solche, für die sich ein Kantenparallelismus mit bekannten Flächen nicht nachweisen läßt, sich aus den Winkeln ergeben, welche sie mit zwei Ebenen des Krystalles, deren Symbole vorher bestimmt sind, bilden. Da die aus den beobachteten Winkeln berechneten Verhältnisse des Indices natürlich nur angenäherte sind, so hat man stets nach S. 303 Anmerk. 1) zu verfahren und eventuell die gefundenen Werte der Indices auch noch dadurch zu controllieren, daß man diejenigen Zonenverhältnisse auf ihr Vorhandensein am Krystalle prüft, welche sich aus ihnen ergeben, aber infolge Nichterscheinens der betr. Kanten bei der vorhergehenden Untersuchung des Krystalles sich der Beobachtung entzogen haben. Sind so die Symbole sämtlicher beobachteter Formen festgestellt, so ist zur Charakterisierung der Substanz von besonderer Wichtigkeit der Nachweis, welche derselben unter bestimmten Krystallisationsbedingungen sich bilden, d. h. die Anordnung der beobachteten Formen nach ihrer Bedeutung für das Wachstum der Krystalle, weil diese Verhältnisse es sind, welche in erster Linie Anhaltspunkte für die Erkenntnis der Structur der betr. krystallisierten Substanz und für die rationelle Wahl der Elementarflächen darbieten (vgl. S. 305).

4) Wie ferner aus S. 294f. hervorgeht, sind für die zuletzt erwähnten Gesichtspunkte von wesentlicher Bedeutung die Cohäsionsverhältnisse, daher deren Bestimmung zu den wichtigsten Aufgaben einer krystallo-

graphischen Untersuchung gehört. Dazu kommt, daß nicht selten sehr vollkommene Spaltungsflächen eine genauere Bestimmung der Elemente gestatten, als die natürlichen Krystallflächen. Außer der Orientierung und dem Grade der Vollkommenheit der Spaltungsebenen sind etwa vorhandene Gleitflächen, endlich auch die Härte in den wichtigsten Richtungen zu bestimmen. Zu den mit der Cohäsion in naher Beziehung stehenden Eigenschaften gehört auch die Zwillingsbildung (s. S. 269), daher die Bestimmung der an einer Substanz vorkommenden Zwillingsgesetze für die Wahl der Elementarflächen von Wichtigkeit ist (s. S. 304); unter Umständen kann auch die Berechnung der als Krystallfläche nicht auftretenden Zwillingsebene zur vollständigeren bzw. genaueren Bestimmung der Elemente dienen.

5) Die optischen Eigenschaften einer krystallisierten Substanz sind diejenigen, mittels deren sie am häufigsten, besonders in mikroskopischen Krystallen, bestimmt wird, welche ferner die sicherste Entscheidung über die Symmetrieverhältnisse liefern, wenn diese aus den Winkelmessungen nicht mit völliger Sicherheit zu ermitteln sind (s. oben S. 559), und welche namentlich gestatten, äußerlich einfachen Krystallen gleichende Gebilde als Zwillingsverwachsungen zu erkennen und diese auch im Falle großer Complication zu entziffern. Mit jeder krystallographischen Untersuchung einer Substanz ist daher eine möglichst eingehende Bestimmung der optischen Constanten für mehrere Farben vorzunehmen, bei zweiaxigen Krystallen mindestens aber (falls die Kleinheit derselben Weiteres nicht gestattet) die angenäherte Messung des Winkels der optischen Axen und der Orientierung der drei Hauptschwingungsrichtungen für Natriumlicht, endlich die Prüfung der Dispersion der Axen im weißen Lichte. Von besonderer Wichtigkeit ist natürlich der Nachweis des Drehungsvermögens und die Messung des Betrages desselben, falls es sich um eine enantiomorph krystallisierende Substanz handelt.

6) Endlich kann es in einzelnen Fällen notwendig werden, auch die elektrischen, thermischen u. a. Eigenschaften bei krystallographischen Untersuchungen herbeizuziehen. Betreffs der Pyroelektricität wurde dies bereits unter 1) erwähnt, und ebenso könnten auch genaue Messungen der Änderung der Winkel mit der Temperatur, oder an Stelle der optischen Eigenschaften die Orientierung der Senarmontschen Schmelzfigur auf den Flächen eines undurchsichtigen (metallischen) Krystalles Anhaltspunkte zur Bestimmung der Symmetrieverhältnisse liefern.

Da man es in den weitaus meisten Fällen mit durchsichtigen Krystallen zu tun hat und daher die optischen Eigenschaften bei der Bestimmung zu Hilfe nehmen kann, so wird der Gang einer krystallographischen Untersuchung im allgemeinen am geeignetsten der folgende sein: Aus einer vorliegenden Krystallisation werden zunächst die am besten und vollständigsten ausgebildeten Krystalle ausgewählt und ihren Formen nach



dem Augenmaße, eventuell mit Hilfe der Lupe, eine bestimmte krystallographische Deutung zu geben versucht. Diese hypothetische Bestimmung wird dann auf optischem Wege geprüft, indem ein Krystall in das Polarisationsinstrument gebracht, und eine ungefähre Bestimmung der Auslöschungsrichtungen vorgenommen, sowie die Wahrnehmung etwaiger Interferenzbilder optischer Axen durch die vorherrschenden Flächen versucht wird[1]. Ist das Ergebnis dieser Prüfung in irgendeinem Punkte im Widerspruche mit der angenommenen Auffassung der Krystallform, zeigen z. B. die Flächen eines für rhombisch gehaltenen Prismas schiefe Auslöschungen, oder läßt eine vermeintlich zu einer Symmetrieebene senkrechte Fläche das Bild nur einer optischen Axe seitwärts von der vermuteten Symmetrieebene erkennen, so ist die erste Hypothese über die Krystallform als falsch erkannt und muß durch eine andere ersetzt werden. Stimmen dagegen alle optischen Beobachtungen, welche die Ausbildung der Krystalle ohne weiteres gestattet, mit der gemachten Hypothese überein, so kann dieselbe, als sehr wahrscheinlich richtig, vorläufig angenommen und zur Messung übergegangen werden. Von jedem der goniometrischen Untersuchung unterworfenen Krystalle (welcher, mit einer Nummer versehen, getrennt aufbewahrt wird, bis die ganze Untersuchung beendigt ist, um jederzeit noch eine nachträgliche Controlle zu ermöglichen) ist zunächst eine Skizze in der vorläufig adoptierten Orientierung zu zeichnen, in welcher die ungleiche relative Ausdehnung, etwaige Unvollkommenheiten usf. so weit zur Darstellung gebracht sind, daß mit deren Hilfe jede einzelne Fläche später wieder identificiert werden kann. Zu dem gleichen Zwecke werden die Flächen in der Zeichnung je durch einen Buchstaben bezeichnet, wobei die nach der vorläufigen Bestimmung angenommenen Beziehungen passend Berücksichtigung finden, z. B. die vier Flächen einer als Prisma betrachteten Form als m_1, m_2, m_3, m_4 unterschieden werden usw. Nach jeder Einstellung einer Fläche am Goniometer ist neben der Ablesung des Kreises bzw. Nonius die erwähnte Bezeichnung der Fläche und außerdem eine Angabe über die Beschaffenheit des eingestellten Reflexes zu notieren, aus welcher die Genauigkeit der Einstellung jederzeit ersehen werden kann.

Bezeichnet man z. B. ein tadelloses, scharfes Bild des Signales mit *a*, ein verwaschenes mit *b*, eine Gruppe ineinander übergehender Bilder (mehrfacher Knickung der eingestellten Fläche entsprechend) mit *c*, so würde das Messungsprotokoll für die Zone eines Prismas etwa folgende Form erhalten:

---

1) Benutzt man für beide Zwecke das gewöhnliche verticale Polarisationsinstrument (Fig. 35 S. 55), indem man dessen oberes verstellbares Rohr einmal so hoch stellt, daß man den Krystall erblickt, das andere Mal bis zur Einstellung der Interferenzfigur hinabgeht, so darf man nicht unberücksichtigt lassen, daß man im ersteren Falle den Krystall verkehrt sieht, den Ort der im Gesichtsfelde sichtbaren Interferenzbilder der optischen Axen also mit dem umgedreht, d. h. in seiner wirklichen Lage gedachten Krystalle zu vergleichen hat.

Fläche:	Ablesung:	Reflex:	Differenzen	(Flächenwinkel):		Mittel:
m_1	267° 18′	a	—	71° 34½′	$a-b$ (2)	71° 37½′ ± 3′
m_2	195 43½	b	(108° 22½′)	71 37½	$b-a$ (1)	
m_3	87 21	$a-b$	—	71 40	$a-b$ (2)	
m_4	15 41	$a-b$	(108 22½)	71 37½	a (3)	
m_1	267 18½	a				

Die in diesem Beispiele ausgeführte ganze Umdrehung, d. h. die schließliche Wiedereinstellung der ersten Fläche, ist notwendig, um etwa zufällig eingetretene Änderungen der Stellung des Krystalles auf dem Goniometer zu erkennen und um von jeder der vier Kanten des Prismas eine eigene Messung (Differenz zweier aufeinander folgender Einstellungen) zu besitzen. Diese vier Zahlen sind in der letzten Columne so angegeben, wie sie einander entsprechen und in geeigneter Weise, unter Berücksichtigung ihrer Genauigkeit, zu einem Mittelwerte vereinigt werden können. Dieser wurde so erhalten, daß die beste Messung dreimal, die beiden weniger guten zweimal und die mindestgute einmal in Rechnung gezogen wurden; die zugefügte Angabe ± 3′ entspricht dem Betrage der Schwankungen der einzelnen Winkel und ist daher ein Maß für die Genauigkeit des Mittelwertes.

Sind infolge der Flächenbeschaffenheit die einzelnen Einstellungen von geringer Genauigkeit oder durch Störungen des Krystallbaues die entgegengesetzten Flächen nicht parallel (was man unmittelbar aus den Ablesungen ersehen kann, deren Differenzen alsdann erheblicher von 180° abweichen, als $m_1 - m_3$, $m_2 - m_4$ in obigem Beispiele), so wird durch Wiederholung der Messung an demselben Krystalle kein wesentlich genaueres Resultat erhalten, wohl aber durch die Untersuchung einer Reihe von Krystallen, wobei die zufälligen Störungen der einzelnen Flächen sich im Mittel um so mehr ausgleichen, je mehr gleichwertige Zonen der Messung unterworfen werden.

Die Messungen jeder Zone, deren einzelne Winkel voneinander abhängig sind (d. h. die einen die Supplemente der andern, wie in obigem Beispiele, oder deren Hälfte, wie es beim Hinzutreten einer geraden Abstumpfung zu einem Prisma der Fall ist), werden in der oben angegebenen Art zu einem Mittelwerte vereinigt, dessen Genauigkeit abhängt von den Differenzen der einzelnen gemessenen Winkel, d. h. von mehr oder weniger großen Unvollkommenheiten in der Ausbildung des betreffenden einzelnen Krystalles. Die Differenzen dagegen, welche diese Mittelwerte entsprechender Winkel an verschiedenen gemessenen Krystallen zeigen, liefern einen Maßstab zur Beurteilung derjenigen Vollkommenheit, mit welcher die untersuchte Krystallisation überhaupt ausgebildet ist. Je geringer jene Differenzen sind, d. h. je vollkommener jeder einzelne gemessene Krystall sich erwies, mit einer desto geringeren Zahl untersuchter Krystalle kann man sich daher begnügen,

Wie bei der Vereinigung der sich auf gleichwertige Kanten eines Krystalles beziehenden Einzelmessungen zu einem Mittel, so ist es auch bei der Vereinigung dieser Mittelwerte zu einem der Rechnung zugrunde zu legenden Generalmittel erforderlich, die Einzelwerte je nach ihrem Gewichte mehr oder weniger auf das Resultat einwirken zu lassen. Im allgemeinen dürfte es genügen, ungenaue Messungen (c) je einmal, mittelmäßige (b) zweimal, gute ($a-b$) dreimal, ausgezeichnete (d. h. aus zwei a-Einstellungen gewonnene) viermal zu nehmen, während ganz unvollkommene Reflexe bei der Berechnung der Mittelwerte am besten vollständig ausgeschlossen werden.

Nach der Zusammenstellung der Messungsresultate und Berechnung der Mittelwerte kann nun zu der Bestimmung der Elemente des Krystalles und der Symbole seiner Flächen geschritten werden. Von den hierbei möglichen beiden, S. 561 erwähnten Wegen der Berechnung wird der erste, einfachere, gewöhnlich benutzt, wenn es sich um die krystallographische Bestimmung einer Substanz handelt, welche keine sehr genauen Messungen gestattet und nur eine beschränkte Anzahl von Formen zeigt, so daß außer



den zur Berechnung der Elemente ausreichenden Winkeln nur einer oder zwei weitere gemessen werden können; alsdann werden diese letzteren aus den Elementen berechnet und neben den beobachteten Werten angegeben; die Differenzen beider lassen den Grad der Genauigkeit, mit welcher die Krystallform des Körpers bestimmt ist, erkennen. Der Gang einer solchen Rechnung ist nicht nur von der betreffenden Combination, sondern vor allem auch von der Art der Elemente, d. h. von dem Krystallsysteme abhängig, daher die hierbei in Betracht kommenden Rechnungsmethoden in den folgenden Abschnitten nach den einzelnen Systemen getrennt behandelt werden sollen. Um während der Berechnung fortwährend eine Übersicht über den Gang derselben und die Zonenverhältnisse des Krystalles zu haben und dadurch etwa überflüssige Rechnungen zu vermeiden, ist es erforderlich, eine Projection anzufertigen und in diese nicht nur die Pole und Zonenkreise, sondern auch die beobachteten, bzw. berechneten Winkel an den betr. Bögen einzutragen. Es soll daher im folgenden die Anleitung zur Construction der stereographischen Projection der Krystalle des betreffenden Systemes mit derjenigen zur Berechnung verbunden, aber der Einfachheit halber stets nur eine Halbkugel projiciert werden, da man bei der Berechnung der Winkel ja jede Fläche durch die entgegengesetzte (parallele) ersetzen kann. Für den erwähnten praktischen Zweck ist es übrigens in vielen Fällen ausreichend, diese Projection nur aus freier Hand zu entwerfen. Wird sie indes genau construiert, so kann sie zur Controlle der Rechnung und selbst als Ersatz derselben dienen, wie weiterhin gezeigt werden wird.

Ist eine möglichst genaue Bestimmung der Elemente von theoretischer Bedeutung, und sind die Krystalle flächenreicher und so ausgebildet, daß sie gute Messungen einer größeren Zahl von Flächenwinkeln auszuführen gestatten, so empfiehlt sich die Berechnung auf dem zweiten Wege, d. h. die Ableitung derjenigen Elemente, welche sämtlichen genau beobachteten Flächenwinkeln am nächsten entsprechen. Dieser umständlichere Weg der Krystallberechnung, das sogenannte Ausgleichungsverfahren, soll daher in einem besonderen Abschnitte besprochen werden.

Nach Vollendung der Rechnung ist eine perspectivische Abbildung der Krystalle (oder, wenn an denselben verschiedene Combinationen beobachtet wurden, mehrere) anzufertigen, wozu ebenfalls weiterhin Anleitung gegeben wird.

Wenn endlich auch die erforderlichen physikalischen Untersuchungen abgeschlossen sind, so kann eine krystallographische Beschreibung[1]) des Körpers gegeben werden, welche am geeignetsten in derselben Reihenfolge anzuordnen wäre, wie sie eingangs dieses Abschnittes für die

1) Als Beispiele solcher können die zahlreichen Beschreibungen chemischer, namentlich organischer Verbindungen dienen, welche fortlaufend in der »Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie« (Leipzig, Engelmann, seit 1877) publiciert werden.



einzelnen Bestimmungen eingehalten wurde, also folgende Angaben enthalten würde:

Specifisches Gewicht.

Symmetrieklasse (falls diese nicht bestimmt werden kann, das Krystallsystem).

Elemente.

Aufzählung der beobachteten Formen und Beschreibung des Habitus der Krystalle (hierzu die Abbildung derselben), sowie etwa beobachteter Zwillingsbildungen; hierzu gehört auch die Angabe der Verhältnisse, d. h. des Lösungsmittels, der Temperatur usw., welche für die Ausbildung der einzelnen Formen maßgebend sind.

Tabelle der beobachteten und berechneten Winkel.

Cohäsionsverhältnisse und Ätzfiguren.

Optische Eigenschaften.

Eventuell: Anderweitige (elektrische u. a.) Eigenschaften.

Berechnung und Projection kubischer Krystallformen.

Im kubischen Krystallsysteme fällt die Berechnung der Elemente fort, da dieselben durch die Symmetrieverhältnisse gegeben und allen kubisch krystallisierenden Substanzen gemeinsam sind. Wenn also ein Krystall, sei es durch Messung, sei es auf physikalischem Wege (z. B. durch den Nachweis einfacher Lichtbrechung) als kubisch erkannt ist, so handelt es sich nur darum, die Symbole der an demselben auftretenden Formen aus beobachteten Winkeln und nach Feststellung jener umgekehrt aus den Indices die theoretischen Winkel zu berechnen, um sie mit den beobachteten vergleichen zu können. Im folgenden soll nun mit der Berechnung der theoretischen Winkel der einfachsten Formen dieses Systemes an der Hand der stereographischen Projection begonnen werden.

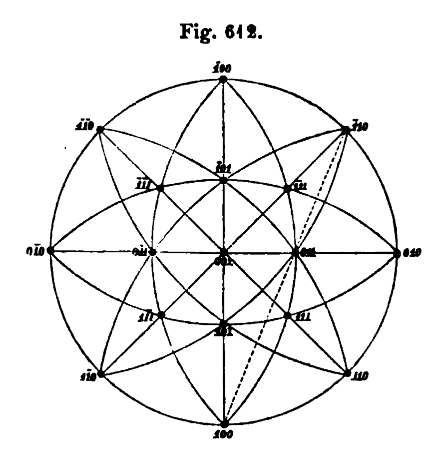
Die kubischen Krystalle werden am geeignetsten auf eine Hexaederfläche als Ebene des Grundkreises projiciert. Alsdann sind offenbar die in Fig. 612 mit (100), $(\bar{1}00)$, (010), $(0\bar{1}0)$, (001) bezeichneten Punkte[1]) die Pole der diesen Symbolen entsprechenden Hexaederflächen.

Nach diesen durch ihre Bogenabstände von 90° unmittelbar gegebenen Polen sollen zunächst diejenigen der Rhombendodekaederflächen eingetragen werden. Von diesen fallen vier, (110), $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}\bar{1}0)$, $(\bar{1}10)$, in den Grundkreis und in die Mitte zwischen zwei Hexaederpolen, da die Dodekaedernormalen ja den Winkel zwischen zwei Axen halbieren. Die vier weiter noch darzustellenden oberen Dodekaederflächen (101), (011), $(\bar{1}01)$, $(0\bar{1}1)$ liegen in den Zonen [100, 001] bzw. [010, 001], also ihre Pole auf denjenigen beiden größten Kreisen der Kugel, welche in der Projection als Durchmesser, den Axen parallel laufend, erscheinen. Um den Abstand

1 In den Figuren sind, um dieselben nicht zu überladen, die ( ) weggelassen.

eines solchen Poles von (001) zu finden, hat man sich durch einen der beiden Durchmesser eine senkrechte Ebene gelegt zu denken, welche die Kugel ebenfalls in einem größten Kreise schneidet, auf diesem von dem obersten Punkte, dem Pole der Fläche (001), ab 45° aufzutragen und diesen Pol mit dem untersten Punkte des größten Kreises durch eine Gerade zu verbinden; wo diese den horizontalen Durchmesser schneidet, liegt die Projection des Poles (vgl. S. 315). Zu dieser Hilfsconstruction kann man aber auch die Fig. 612 selbst benutzen, indem man z. B. die Punkte (100) und (̄110) verbindet; wo die Verbindungsgerade den Durchmesser (010):(0̄10) schneidet, muß ein Dodekaederpol liegen. Nachdem so die in der Zeichnungsebene darzustellenden Dodekaederpole sämtlich eingetragen sind, kann man dieselben untereinander durch Zonenkreise, wie [110, 101, 0̄11, ̄1̄10], verbinden, und es sind alsdann auch die Projectionen derjenigen sphärischen Dreiecke dargestellt, welche zur Berechnung des Winkels zweier benachbarter Dodekaederflächen erforderlich sind. Suchen wir z. B. den Winkel zwischen den Flächen (101) und (011), so dient dazu das sphärische Dreieck: (001), (011), (101); dieses hat in (001) einen rechten Winkel, und außerdem sind seine Seiten (001):(011) und (001):(101) bekannt, nämlich beide gleich 45°; der gesuchte Winkel der beiden Dodekaederflächen, d. i. die dem rechten Winkel des Dreieckes gegenüberliegende Seite c, ist demnach gegeben durch die Formel:

Fig. 612.



$$\cos c = \cos 45^\circ \cos 45^\circ = \tfrac{1}{2},$$

c ist also $= 60^\circ$, wie auch direct aus der Dreizähligkeit der Zonenaxe folgt.

Um die Lage des Poles (111) einer Oktaederfläche zu finden, hat man sich nur zu erinnern, daß dieselbe sowohl in der Zone [100, 011], als in [010, 101] liegt. Construiert man diese und sämtliche entsprechenden Zonenkreise, so erhält man als Durchschnittspunkte derselben die gesuchten Oktaederpole (111), (1̄11) usw. Durch jeden derselben geht noch ein dritter Zonenkreis, der in der Projection als Durchmesser erscheint, denn (111) gehört noch der Zone [001, 110] an usf. Ziehen wir auch diese Linien, d. h. die diagonalen Durchmesser von (110) nach (̄1̄10) und von (1̄10) nach (̄110), so enthält nunmehr die Projection auch diejenigen sphärischen Dreiecke, welche zur Bestimmung des Oktaederwinkels führen. Als solcher sei z. B. gesucht der Winkel zwischen (111) und (1̄11), so ist die Hälfte desselben gleich dem Bogen (111):(101) und dieser die Seite des in (101) rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes (101), (111), (001), in welchem

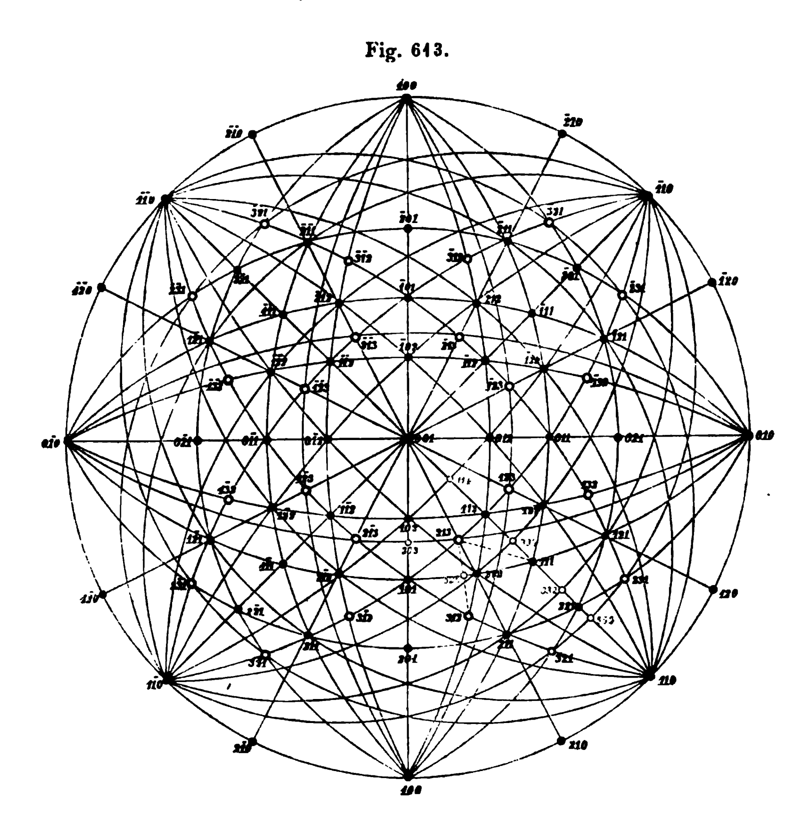
der Winkel an (001) gleich 45° und außerdem die Seite (001):(101) = 45° bekannt sind. Die tang des gesuchten Bogens ist = sin 45° tang 45° = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; daraus ergibt sich der ganze Bogen (111):(1$\bar{1}$1) = 70°31,'8, ferner der Abstand der Pole (111) und (001) = 54°44,'1 (das halbe Supplement des vorigen) und der Winkel zwischen den Zonenkreisen [001, 111] und [101, 111] = 60°. Der letzte Wert folgt außerdem auch daraus, daß die Ebenen dieser beiden Zonenkreise parallel den beiden Dodekaederflächen (1$\bar{1}$0) bzw. ($\bar{1}$01) sind, sowie daraus, daß in dem Pole (111) sich die drei Zonenkreise [001, 110] [100, 011] [010, 101] unter gleichen Winkeln, also unter 60°, schneiden müssen.

Von den drei einfachsten Formen soll nunmehr zu den Vierundzwanzigflächnern übergegangen und mit den in den Zonen der Hexaederkanten, d. h. der Axen, liegenden Tetrakishexaedern $\{hk0\}$ begonnen werden. Da die Normale z. B. zu der Fläche $(k0h)$ in der Ebene (010) liegt, ihr Pol also zwischen (001) und (101) fällt (um so näher an (001), je mehr die Form des Pyramidenwürfels dem Hexaeder ähnelt), so lehrt eine einfache Überlegung, daß sein Abstand von (001) dadurch bestimmt ist, daß dessen tang = $k : h$. So ergibt sich z. B. (102):(001) = 26°33,'9, woraus für (102):(101) = 18°26,'1 und für (102):(201) = 36°52,'2 folgt. Trägt man (Fig. 613) mit demselben Abstande von (001) auch den Pol (012) ein, so kann man den Winkel einer Kante zweiter Art am Tetrakishexaeder, nämlich (102):(012), unmittelbar aus den beiden gleichen Bögen (102):(001) und (012):(001) ableiten, da dieselben mit dem gesuchten Bogen ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck bilden. Handelt es sich darum, umgekehrt das Verhältnis $k : h$, also das Zeichen des Tetrakishexaeders, aus einem gemessenen Winkel zu berechnen, so leuchtet ein, daß die hexaedrische Kante, z. B. $(h0k):(k0h)$, unmittelbar den Winkel $(k0h)$:(001) gibt, dessen tang das gesuchte Verhältnis ist. Liegt dagegen die Messung einer Kante der zweiten Art vor, wie eine solche in Fig. 613 durch den Bogen (102):(012) repräsentiert ist, so halbiert man den gemessenen Wert und hat dann in demselben die Seite eines rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes, in welchem außerdem noch der gegenüberliegende Winkel = 45° bekannt ist (ein solches Dreieck ist das in der Figur von (001), (102), (114) gebildete); man berechnet in demselben die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite, d. h. den Abstand des Poles einer Tetrakishexaederfläche von (001), dessen tang nach obigem das gesuchte Verhältnis $k : h$ ist.

Als Beispiel der Berechnung eines Ikositetraeders mag diejenige der durch die Zonen [101, 011] und [001, 111] gegebenen Form {211} dienen. Sei von derselben der durch eine Hexaederfläche halbierte Winkel einer Kante 1. Art, z. B. (112):(1$\bar{1}$2), zu berechnen, so ist dieser das Doppelte des Bogens (112):(102), welcher sich leicht aus dem rechtwinkelig sphärischen Dreiecke (112), (102), (001) ergibt, dessen Winkel an (001) = 45° und dessen Seite (001):(102) bekannt ist (s. vorher unter Tetrakishexaeder). Diese Methode ist aber auch für jedes andere Ikositetraeder

gültig, da alle Pole (kkh) zwischen (001) und (111) liegen und mit $(k0h)$, d. h. einer Fläche des Pyramidenwürfels, welcher dieselben Werte h und k besitzt, je ein ähnliches sphärisches Dreieck bilden, dessen Seite $(k0h)$: (001) unmittelbar durch das Verhältnis $k : h$ gegeben ist. Sie kann also auch umgekehrt dazu dienen, um aus dem gemessenen Winkel der Ikositetraederkante, bzw. aus der Hälfte derselben, d. i. dem Bogen $(kkh) : (k0h)$, den Abstand des letzteren Poles von (001) und daraus die Indices zu berechnen. Um eine Kante der 2. Art, z. B. (211) : (121), aus dem gegebenen Zeichen der Form herzuleiten, hat man in demselben Dreiecke den Abstand

Fig. 613.



des Poles (112) (allgemein kkh) von (001) zu berechnen und diesen von dem Bogen (001) : (111) $= 54° 44{,}'1$ (s. S. 568) abzuziehen; der so erhaltene Bogen (112) : (111) $(kkh : 111)$ ist gleich (211) : (111) $(hkk : 111) =$ (121) : (111) $(khk : 111)$; der gesuchte Winkelabstand (211) : (121) (allgemein $hkk : khk$) ist also die dritte Seite in dem gleichschenkeligen Dreiecke (211), (121), (111), in welchem die beiden gleichen Seiten und der zwischenliegende Winkel $= 120°$ (da in (111) sich die Zonenkreise unter 60° schneiden) bekannt sind. Dieses Dreieck aber wird von dem Zonenkreise [111, 110] symmetrisch halbiert, daher von demselben in zwei rechtwinkelige sphärische Dreiecke geteilt, deren rechter Winkel im vorliegenden Falle an dem Pole (332) liegt,

dessen Indices aber auch in jedem andern Falle durch die beiden daselbst sich kreuzenden Zonen gegeben sind; in einem solchen rechtwinkeligen Dreiecke, z. B. (211), (111), (332), sind nunmehr die Seite (211):(111) und der Winkel an (111) (= 60°) bekannt, daher am einfachsten aus diesem der Bogen (211):(332), d. i. die Hälfte des Winkels einer Kante 2. Art am Ikositetraeder, berechnet werden kann. Soll umgekehrt aus dem Winkel einer solchen Kante das Zeichen der Form hergeleitet werden, so benutzt man das gleiche rechtwinkelige Dreieck, in welchem aber diesmal die dem Winkel von 60° gegegenüberliegende Seite (= dem halben gemessenen Winkel) bekannt, und die anliegende, d. i. die Neigung der Ikositetraeder- zur Oktaederfläche zu berechnen ist; aus letzterer ergibt sich dann direct diejenige zur Würfelfläche (001) und aus dieser der Winkel der Kante 1. Art, sowie die Neigung des zugehörigen Tetrakishexaeders zu (001), welche letztere unmittelbar das Verhältnis der Indices liefert.

Die Flächen der Triakisoktaeder $\{hhk\}$ liegen zwischen denen des Oktaeders und des Rhombendodekaeders, also ihre Pole auf den Zonenkreisen [111, 101] usw., je nach dem Verhältnisse ihrer Indices $h:k$ näher dem einen oder dem andern Pole. In Fig. 613 sind außer dem, einem Pyramidenoktaeder angehörigen, bereits benutzten Pole (332) diejenigen des häufigsten Triakisoktaeders {221} vollständig eingetragen. Will man den Winkel der oktaedrischen Kanten einer solchen Form berechnen, z. B. (212):($2\bar{1}2$), so ist hierzu nur erforderlich die Berechnung von (212):(101), da dieses die Hälfte jenes ist; dieser letztere Bogen ist aber eine Seite des rechtwinkeligen Dreieckes (001), (101), (212), in welchem außer der Seite (001):(101) = 45° auch der Winkel an (001) gegeben ist: die Verlängerung des Zonenkreises (001):(212) [allgemein: (001):(hkh)] trifft nämlich den Grundkreis in einem Pole, dessen Symbol = (210) [(allgemein $(hk0)$], worin das Verhältnis $h:k$ gleich dem des Pyramidenoktaeders); der Winkel (100):(210), dessen tang = $k:h$, ist nun aber offenbar gleich dem Winkel zwischen den Zonenkreisen [001:210] und [001:100]. Soll umgekehrt das Zeichen $\{hhk\}$ aus der Messung des Winkels einer oktaedrischen Kante berechnet werden, so benutzt man dasselbe Dreieck, wie vorher, indem man aus der Seite (101):(hkh) (der Hälfte des gemessenen Winkels) den gegenüberliegenden Winkel sucht, der gleich dem Bogen (100):$(hk0)$ auf dem Grundkreise ist und daher durch seine tang das gesuchte Verhältnis $k:h$ gibt. Zur Berechnung des Winkels einer Kante zweiter Art am Pyramidenoktaeder, z. B. (212):(122), hat man zunächst nach obigem den halben Winkel der oktaedrischen Kante zu berechnen, aus dem sich unmittelbar der Winkel zum Oktaeder, z. B. (212):(111) ergibt; dieser ist gleich (122):(111), also ist der gesuchte Bogen (212):(122) die dritte Seite in dem gleichschenkeligen Dreiecke (212), (122), (111), in welchem der an (111) anliegende Winkel = 120°. Da der Zonenkreis [001:110] dieses Dreieck in zwei rechtwinkelige teilt, so ist es einfacher, die Hälfte des gesuchten Bogens aus einem Dreiecke der letzteren Art, z. B. (212), (334), (111), in welchem natürlich der

Winkel an (111) nun = 60° ist, herzuleiten. Ein ebensolches Dreieck benutzt man auch bei der Berechnung des Zeichens eines Triakisoktaeders aus der Messung einer Kante zweiter Art, indem man nunmehr umgekehrt aus dem Bogen, welcher dem Winkel von 60° gegenüberliegt, d. i. aus der Hälfte des gemessenen Winkels, denjenigen der Triakisoktaederfläche zu (111) bestimmt, daraus durch Subtraction den derselben Fläche zu (101), d. h. den halben Winkel der oktaedrischen Kante und aus diesem die Indices wie oben berechnet.

In Fig. 613 sind nun endlich noch sämtliche Pole der 24 oberen Flächen des häufigsten Hexakisoktaeders {321} eingetragen, und soll an diesem Beispiele zunächst gezeigt werden, wie man bei der Berechnung der Winkel eines solchen zu verfahren hat. Die gerade Abstumpfung der dreierlei Kanten einer jeden derartigen Form wird von den Flächen je eines Vierundzwanzigflächners gebildet; es werden nämlich die mittleren Kanten abgestumpft durch ein Tetrakishexaeder, die längsten von einem Ikositetraeder und die kürzesten von einem Triakisoktaeder, deren Zeichen nach S. 311 direct durch Addition der Indices der benachbarten Flächen des Achtundvierzigflächners gefunden werden. So liegt z. B. zwischen den Flächen (213) und ($2\bar{1}3$) als Abstumpfung einer mittleren Kante die Fläche (203), deren Polabstand von (001) durch ihre Indices gegeben ist; dieser Abstand bildet aber eine Seite in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke (001), (203), (213), in welchem außerdem der spitze Winkel an (001) bekannt ist; derselbe ist nämlich gleich dem Abstande zwischen (100) und demjenigen im Grundkreise gelegenen Pole, dessen Indices der Zone [001, 213] genügen, d. i. (210), also ist seine tang = $\frac{1}{2}$. Die diesem Winkel gegenüberliegende Seite des angeführten Dreieckes ist aber die Hälfte des gesuchten Winkels der mittleren Kanten am Hexakisoktaeder. Es ist leicht einzusehen, daß dieselbe Rechnungsmethode für jedes Hexakisoktaeder gilt, nur führen die beiden benutzten Zonen für eine andere Form auf ein anderes Tetrakishexaeder als Abstumpfung oder auf einen andern Pol im Grundkreise, oder sie ergeben beides verschieden. Ganz analog ist die Berechnung der längsten Kante, welche durch ein Ikositetraeder abgestumpft wird. In dem in Fig. 613 gewählten speciellen Falle ist dieses {211}, und man erhält die Hälfte des gesuchten Winkels, z. B. den Bogen (213) : (112), aus dem rechtwinkeligen Dreiecke, in welchem die Seite (001) : (112) und der spitze Winkel an (001) durch die Zugehörigkeit von (213) zur Zone [001, 210] bestimmt ist. Ebenso einfach ist auch die Herleitung des Winkels der kürzesten Kante, z. B. derjenigen zwischen (321) und (231), mittels der abstumpfenden Fläche (552), denn die Hälfte des gesuchten Winkels, d. i. der Bogen (321) : (552), bildet die Seite eines rechtwinkeligen Dreieckes (321), (552), (110), in welchem der Bogen (552) : (110) leicht aus den Indices der ersteren Fläche zu berechnen ist, und der spitze Winkel an (110) gleich dem Bogen (001) : ($1\bar{1}2$), allgemein: gleich der Neigung desjenigen Ikositetraeders zum Hexaeder, welches in den Zonen

[hkl, 110] und [001, $1\bar{1}0$] liegt und offenbar durch das Zeichen des Hexakisoktaeders vollkommen bestimmt ist.

Handelt es sich jedoch darum, das Zeichen eines Hexakisoktaeders aus seinen Winkeln zu berechnen, so leuchtet ein, daß hierzu die Messungen zweier verschiedener Kanten vorliegen müssen, andererseits aber auch genügen, da die Verhältnisse der drei Indices $h : k : l$ nur zwei Unbekannte enthalten. Seien z. B. die Winkel der mittleren und der längsten Kanten gemessen worden, so sind damit an der in Fig. 613 projicierten Form die Bögen (213) : (203) und (213) : (112), als die Hälften jener Winkel, bestimmt. Jeder dieser beiden Bögen bildet mit (001) ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck, und diese Dreiecke haben die Seite (001) : (213) gemeinsam; werde die letztere mit c, der im ersten Dreiecke dem Bogen (213) : (203) $= a$ gegenüberliegende Winkel mit A, der im zweiten Dreiecke dem Bogen (213) : (112) $= a'$ gegenüberliegende Winkel mit A' bezeichnet, so ist

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin A'},$$

daraus folgt:

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin a},$$

und da $A' = 45^0 - A$, so ist

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cotang } A - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sin a'}{\sin a},$$

somit

$$\text{cotang } A = \frac{\sin a'}{\sin 45^0 \sin a} + 1.$$

Nachdem in dieser Weise A aus den bekannten Größen a und a' berechnet ist, ergibt sich unmittelbar der Bogen (001) : (203), d. h. allgemein dasjenige Tetrakishexaeder, welches die mittleren Kanten des Hexakisoktaeders abstumpft, wodurch zwei Indices des letzteren gegeben sind; der dritte folgt alsdann aus dem Winkel A, denn dieser bestimmt einen Pol auf dem Grundkreise, dessen Verbindungslinie mit (001) den Pol (213) [allgemein (klh)] enthält. Noch einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn eine mittlere und eine kürzeste Kante gemessen wurde: die Hälfte der ersteren ist die Seite a eines rechtwinkeligen Dreieckes, welches bei dem in Fig. 613 gewählten Beispiele die Eckpunkte (203), (213), (101) hat; der die kürzeste Kante repräsentierende Bogen (213) : (312) wird von dem Zonenkreise [101, 111], weil dieser einer Dodekaederfläche parallel ist, symmetrisch halbiert, daher der punktiert angedeutete Bogen (213) : (525) die Seite a' eines ebenfalls rechtwinkeligen Dreieckes (525), (213), (101) ist, welches mit dem ersten die jedesmal dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite (101) : (213) $= c$ gemeinsam hat. Wie im vorigen Falle, gilt also für die beiden an (101) anliegenden Winkel die Gleichung

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin a}.$$

Da hier aber $A + A' = 90^0$, so ist

$$\text{cotang } A = \frac{\sin a'}{\sin a}.$$

Hiermit sind nun die beiden sphärischen Dreiecke vollständig bestimmt, also auch die beiden Bögen (101) : (203) und (101) : (525), d. h. allgemein die Zeichen der beiden die gemessenen Kanten abstumpfenden Vierundzwanzigflächner, aus denen sich das Zeichen des Hexakisoktaeders in leicht ersichtlicher Weise ergibt. In ganz ähnlicher Art verfährt man endlich, wenn eine längste und eine kürzeste Kante gemessen wurde, deren Hälften wieder mit a und a' bezeichnet werden mögen: alsdann ist (s. Fig. 613) (213) : (112) $= a$, (213) : (525) $= a'$, und auch diese Bögen bilden, diesmal mit (111),

Fig. 613.

zwei rechtwinkelige Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite (213) : (111) (in der Figur punktiert); ihre Sinus verhalten sich also wiederum ebenso, wie die Sinus des einem jeden gegenüberliegenden Winkels A und A', deren Summe in diesem Falle 60° beträgt; folglich ist

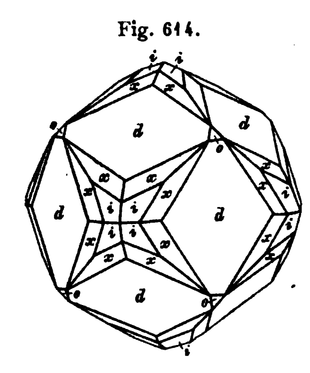
$$\text{cotang}\, A = \frac{\sin a'}{\sin 60^\circ \sin a} + \tfrac{1}{2}.$$

Durch die Berechnung von A und A' sind wieder die beiden sphärischen Dreiecke und damit die Symbole der beiden die gemessenen Kanten abstumpfenden Vierundzwanzigflächner bekannt, welche in allen Fällen das Zeichen des Hexakisoktaeders bestimmen.

Erheblich einfacher gestaltet sich die Berechnung eines Hexakisoktaeders, wenn dessen Flächen in einer bekannten Zone gelegen sind, wie folgende Beispiele zeigen.

Das Hexakisoktaeder liegt in der Zone der Rhombendodekaederkanten (Fig. 608, 609 S. 538). Alsdann müssen seine Indices $\{hkl\}$ der aus der Zone $[101, 110] = [\bar{1}11]$ sich ergebenden Gleichung: $-h+k+l=0$ entsprechen, z. B. $\{321\}$, $\{431\}$ usw. Der dritte Index ist also bekannt, wenn das Verhältnis zweier durch eine Messung in der Zone einer Dodekaederkante bestimmt wird, z. B. durch diejenigen des Bogens (101), (213) Fig. 613, denn hieraus ergibt sich unmittelbar $(213):(112)$, allgemein $(klh):(112) = \frac{1}{2}(klh):(lkh)$, da $(101):(112) = 30°$; der Bogen $(213):(112)$ ist aber eine Seite des rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes (001), (213), (112), in welchem die Seite $(001):(112)$ bekannt ist[1]), also der Winkel an (001) berechnet werden kann; letzterer ist aber gleich dem Bogen $(210):(110)$, allgemein $(kl0):(110)$, auf dem Grundkreise, welcher direct das Verhältnis zweier Indices bestimmt.

Fig. 614.

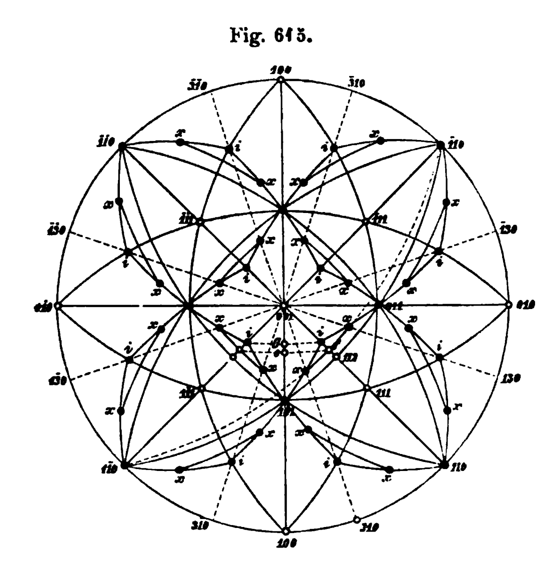


Als zweites Beispiel möge endlich die Berechnung der in Fig. 614 dargestellten Form dienen, wie sie die Krystalle des Magneteisenerzes (S. 538) zuweilen zeigen. An derselben sind die Formen $d = \{110\}$ und $o = \{111\}$ ohne Berechnung zu constatieren. Zur Bestimmung der übrigen Formen genügt die Messung einer einzigen Zone dxi; diese, nach Maßgabe der Flächenbeschaffenheit auf $\pm 5'$ genau, habe ergeben:

$$d:x = 16°58' \qquad x:i = 14°33'$$

$$\text{folglich: } d:i = 31°31'.$$

Fig. 615.



Die Form i ist offenbar ein Ikositetraeder, dessen $h:k > 2$, und dessen Zeichen zunächst berechnet werden soll. In Fig. 615, in welcher alle Flächen der Combination und sämtliche durch Kanten an derselben repräsentierte Zonen eingetragen und von den nur zur Hilfe benutzten Zonen und Flächenpolen unterschieden sind, ist der Bogen $(101):i$, gleich dem gemessenen Winkel 31° 31′, eine Seite des rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes (101), (112), i, in welchem außerdem die Seite $(101):(112) = \frac{1}{2}(101):(011) = 30°$ bekannt ist. Hieraus ergibt sich die Seite $i:(112) = 10° 8\frac{1}{2}'$, und da $(112):(001) = 35° 16'$[2]), so ist $(001):i = 25° 7\frac{1}{2}'$. Aus diesem Werte folgt mittels des rechtwinkeligen Dreieckes (001), i, g, in welchem der Winkel an $(001) = 45°$, der Bogen $(001):g = 18° 21'$, dessen cotang, d. i. $h:k$, $= 3{,}012$, d. h. unzweifelhaft $= 3$. Setzt man letzteren Wert ein und berechnet auf demselben Wege

1) Dieselbe ist $= 35° 16'$, d. h. die Hälfte des Oktaederwinkels, weil $(112):(\bar{1}\bar{1}1) = 90°$ (da $(\bar{1}\bar{1}1)$ zu allen Flächen der Zone $[101, 011]$ senkrecht steht) und $(\bar{1}\bar{1}1):(001) = 54° 44'$.

2) S. Anmerk. 1).

rückwärts $i:d$, so findet man dafür den Wert $31^\circ 29'$, also eine Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung von nur $2'$. Um nunmehr auch das Zeichen des Hexakisoktaeders x zu bestimmen, bedarf es zunächst der Kenntnis der Richtung des Zonenkreises $[i, (101)]$, auf welchem x liegt; diese ist gegeben durch den Winkel $(101)\cdot i\cdot(112)$ des oben benutzten Dreieckes und folgt aus den angeführten Daten $= 73^\circ 2'$. Derselbe Winkel gehört aber zugleich dem ebenfalls rechtwinkeligen Dreiecke xif an, in welchem durch Einführung des gemessenen Bogens $x:i$ sich ergibt: $x:f = 13^\circ 54'$ und $i:f = 4^\circ 20'$. Hierdurch ist nun in dem Dreiecke $x, f, (001)$ außer der Seite xf auch die Seite $f:(001) = 29^\circ 27\frac{1}{2}'$ bekannt, woraus der Winkel desselben an (001) zu $26^\circ 43'$ folgt. Durch letzteren ist aber der Pol des Grundkreises bestimmt, welcher in der Zone $[(001), x]$ liegt; aus seinem Abstande von (100), welcher $45^\circ - 26^\circ 43' = 18^\circ 17'$ beträgt, ergeben sich nämlich die Indices desselben $k:h = 1:3{,}027$, also ist dieser Pol derjenige der Fläche (310). Aus dem rechtwinkeligen Dreiecke $(001), e, f$ folgt $(001):e = 21^\circ 46'$, dessen cotang $= 1:2{,}504$, daher die Indices des Poles $e = 205$ und das Symbol der Ikositetraederfläche, deren Pol der Punkt f, $= (225)$. Diese stumpft aber die längste Kante des Hekakisoktaeders x ab, von dessen Indices bereits das Verhältnis zweier $(= 1:3)$ bekannt ist; setzen wir daher die Indices der rechts und links von f liegenden Flächen desselben $= (31x)$ und $(13x)$, so ergibt sich als Symbol ihrer Zone $[\bar x \bar x 4]$, und da in dieser Zone die Fläche (225) liegt, so muß $4x = 20$ sein, d. h. $x = 5$. Das gesuchte Symbol des Hexakisoktaeders ist $\{531\}$. Die Rückberechnung desselben liefert für den Winkel $x:i$ den Wert $14^\circ 27\frac{1}{2}'$.

Die vorstehenden Erörterungen beziehen sich sämtlich auf die höchst symmetrischen Formen des kubischen Krystallsystemes, diejenigen der 32. Klasse. Da die Formen der übrigen Klassen jedoch aus denselben Ebenen, nur in geringerer Anzahl, bestehen, so sind die Berechnungsmethoden für diese sämtlich in den oben behandelten mit enthalten.

Zum Schlusse soll eine Reihe von Formeln zusammengestellt werden, welche eine schnelle Berechnung einzelner Flächenwinkel kubischer Krystalle direct aus den Indices gestatten (dieselben können sehr einfach aus bekannten Formeln der analytischen Geometrie abgeleitet werden).

Für eine beliebige Fläche (hkl) eines kubischen Krystalles gelten, wenn man $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} = s$ setzt, folgende Relationen:

$$\cos (hkl):(100) = \frac{h}{s} \qquad \cos (hkl):(010) = \frac{k}{s} \qquad \cos (hkl):(001) = \frac{l}{s}$$

und für den Winkel zwischen zwei beliebigen Flächen (hkl) und (pqr):

$$\cos (hkl):(pqr) = \frac{hp + kq + lr}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}\,\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Hieraus ergeben sich folgende specielle Formeln:

Für die längsten, mittleren und kürzesten Kanten eines Hexakisoktaeders $\{hkl\}$:

$$\cos (hkl):(hlk) = \frac{h^2 + 2kl}{h^2 + k^2 + l^2}, \quad \cos (hlk):(h\bar l k) = \frac{h^2 + k^2 - l^2}{h^2 + k^2 + l^2}, \quad \cos (hkl):(khl) = \frac{2hk + l^2}{h^2 + k^2 + l^2}.$$

Für die dreierlei Kanten eines Dyakisdodekaeders:

$$\cos (hkl):(klh) = \frac{hk + kl + lh}{h^2 + k^2 + l^2}, \quad \cos (hlk):(h\bar l k) = \frac{h^2 + k^2 - l^2}{h^2 + k^2 + l^2}, \quad \cos (hkl):(h\bar k l) = \frac{h^2 - k^2 + l^2}{h^2 + k^2 + l^2}.$$

Für die Kanten eines Hexakistetraeders:

$$\cos (hkl):(hlk) = \frac{h^2 + 2kl}{h^2 + k^2 + l^2}, \quad \cos (hlk):(h\bar k\bar l) = \frac{h^2 - 2kl}{h^2 + k^2 + l^2}, \quad \cos (hkl):(khl) = \frac{2hk + l^2}{h^2 + k_2 + l^2}.$$

Für die Kanten erster und zweiter Art eines Triakisoktaeders $\{hhk\}$:

$$\cos (hkh):(h\bar{k}h) = \frac{2h^2 - k^2}{2h^2 + k^2} \qquad \cos (hkh):(khh) = \frac{h^2 + 2hk}{2h^2 + k^2}.$$

Für diejenigen eines Deltoiddodekaeders:

$$\cos (hkh):(h\bar{h}\bar{k}) = \frac{h^2 - 2hk}{2h^2 + k^2} \qquad \cos (hkh):(khh) = \frac{h^2 + 2hk}{2h^2 + k^2}.$$

Für die zweierlei Kanten eines Ikositetraeders $\{hkk\}$:

$$\cos (hkk):(h\bar{k}k) = \frac{h^2}{h^2 + 2k^2} \qquad \cos (hkk):(khk) = \frac{2hk + k^2}{h^2 + 2k^2}.$$

Für diejenigen eines Trigondodekaeders:

$$\cos (hkk):(\bar{h}\bar{k}\bar{k}) = \frac{h^2 - 2k^2}{h^2 + 2k^2} \qquad \cos (hkk):(khk) = \frac{2hk + k^2}{h^2 + 2k^2}.$$

Für die hexaedrischen und die pyramidalen Kanten eines Tetrakishexaeders $\{hk0\}$:

$$\cos (h0k):(k0h) = \frac{2hk}{h^2 + k^2} \qquad \cos (h0k):(hk0) = \frac{h^2}{h^2 + k^2}.$$

Für diejenigen eines Pentagondodekaeders:

$$\cos (hk0):(h\bar{k}0) = \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \qquad \cos (hk0):(k0h) = \frac{hk}{h^2 + k^2}.$$

Berechnung und Projection tetragonaler Krystallformen.

Der Berechnung kubischer Krystallformen schließt sich am nächsten diejenige der tetragonalen an, deren drei Axen ebenfalls zueinander senkrecht sind. Dadurch aber, daß hier eine der letzteren, die Hauptaxe, nicht den beiden andern gleichwertig ist, ergibt sich die Notwendigkeit, zuerst die Elemente, d. h. das Axenverhältnis $a:c$ der als $\{111\}$ angenommenen Form, zu berechnen, wozu, da es sich nur um eine Unbekannte handelt, eine Messung ausreicht.

Um einen Überblick über die Symmetrie der Zonenverhältnisse zu erhalten, werden die tetragonalen Formen stets auf die Basis als Ebene des Grundkreises projiciert. Es sind daher (s. Fig. 616 folg. S.) der Pol von $\{001\}$ in die Mitte des Grundkreises und die Pole der beiden tetragonalen Prismen $\{110\}$ und $\{100\}$ mit 90° bzw. 45° Abstand auf dem Umfange desselben einzutragen. Der Durchmesser $(001):(110)$ enthält dann die Pole der Pyramiden erster Art, $(001):(100)$ diejenigen der Pyramiden zweiter Art, zu deren Projicierung also nur die Kenntnis ihres Winkels zu (001) nötig ist. Seien (111) usf. die aus dem erwähnten Winkel in einer aus dem Principe der stereographischen Projection sich unmittelbar ergebenden Weise[1]) zu construierenden Pole der primären Pyramide erster Art, so gibt die Zone zweier derselben, z. B. (111) und $(1\bar{1}1)$, in welcher zugleich die Prismenflächen (010) und $(0\bar{1}0)$ liegen, den Pol (101) und ebenso die übrigen der zugehörigen Pyramide zweiter Art, welche die Polkante jener abstumpft.

1) Wozu man auch hier direct den Grundkreis benutzen kann, indem man auf demselben jenen Winkel von $(\bar{1}10)$ nach abwärts aufträgt und den Endpunkt dieses Bogens mit $(1\bar{1}0)$ geradlinig verbindet; wo diese Verbindungslinie den Durchmesser $(110):(\bar{1}\bar{1}0)$ schneidet, liegt der Pol (111).

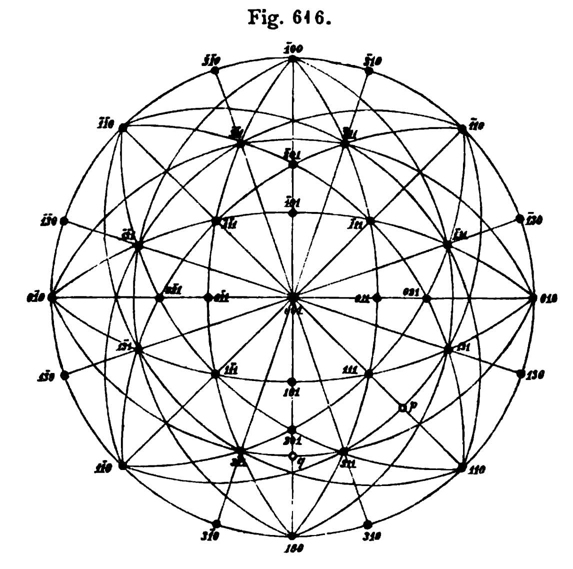
Ist der Flächenwinkel an der Basiskante einer Bipyramide zweiter Art gemessen, so liefert dieser direct das Parameterverhältnis c ($a = 1$ gesetzt), denn dieses ist offenbar gleich der tang des Winkels (001):(101), d. h. des halben Supplementes von jenem Flächenwinkel.

Handelt es sich um Berechnung des Axenverhältnisses aus der Bipyramide erster Art, so muß dazu entweder der Winkel ihrer Polkanten oder ihrer Basiskanten gemessen sein. Im ersteren Falle ist der Bogen (111):(101) [(allgemein $(hhl):(h0l)] = \alpha$ als Hälfte des gemessenen Winkels gegeben, und damit (101) bzw. $(h0l):(001) = \beta$ bestimmt, da $\sin\beta = \text{tang}\,\alpha \cdot \text{cotang}\,45^\circ$, d. i. tang α, und das gesuchte Axenverhältnis $c = \text{tang}\,\beta$. Hat man die Basiskante gemessen, so folgt daraus unmittelbar (111) [allgemein (hhl)]:(001) $= \gamma$ und das Axenverhältnis $c = \text{tang}\,\beta = \text{tang}\,\gamma \cdot \cos 45^\circ$. Dasselbe rechtwinkelige Dreieck (001), (111), (101) benutzt man natürlich ebenfalls, wenn umgekehrt aus dem Axenverhältnisse, d. i. aus β, die beiden andern Seiten desselben, d. h. die Winkel der Pol- und der Basiskante der Bipyramide, berechnet werden sollen.

Da {111} die Polkanten von {201} abstumpft, in deren Zone zugleich das Prisma erster Art liegt, so sind durch die Pole der ersten und letzten Form diejenigen von {201} gegeben, z. B. der Pol (201) als Durchschnittspunkt der Zonen [1$\bar{1}$0, 111] und [110, 1$\bar{1}$1], usf.

In der Polkantenzone einer Bipyramide, z. B. zwischen (111) und ($\bar{1}$11), liegen nun sämtliche ditetragonale Bipyramiden, welche die Polkanten der ersteren zuschärfen, — in derselben Zone, aber zwischen (111) und (100), eine Reihe spitzerer ditetragonaler Pyramiden, welche in den Combinationen als Abstumpfungen der Kanten der Bipyramide erster Art mit dem Prisma zweiter Art erscheinen (s. d in Fig. 384 S. 439); eine dieser Formen liegt zugleich in der Zone (201) : (110), wodurch sich unmittelbar ihr Zeichen als {311} ergibt. Trägt man die Pole dreier benachbarter Flächen dieser Form in der

Fig. 616.



Projection ein (s. Fig. 616), so ist durch je zwei eine Polkantenzone der ditetragonalen Pyramide bestimmt und der betreffende Zonenkreis mit Hilfe der in dieselbe Zone fallenden Prismenflächen leicht zu construieren. Einer dieser Kreise, z. B. (311):(131), schneidet den Durchmesser (001):(110) in

einem Punkte p, dem Pole derjenigen Pyramide erster Art, welche die nach den Zwischenaxen herablaufenden Polkanten der ditetragonalen Pyramide abstumpft; der Kreisbogen (311):(3$\bar{1}$1) dagegen bestimmt den Pol q derjenigen Pyramide zweiter Art, welche die andern Polkanten der ditetragonalen abstumpft. Endlich ist durch (311) auch der Pol (310) auf dem Grundkreise bestimmt. Dadurch sind die sphärischen Dreiecke gegeben, durch welche die Winkel jeder beliebigen ditetragonalen Pyramide bzw. Bipyramide aus ihrem Symbole berechnet werden können, wie an dem Beispiele der Form {311} gezeigt werden soll.

Aus dem Symbole {311} ergibt sich nach S. 311 (durch einfache Addition der entsprechenden Indices) $p = (221)$ und $q = (301)$; aus dem Axenverhältnisse der Substanz sind alsdann leicht die beiden Bögen (001):(221) und (001):(301) zu berechnen. Der Bogen (100):(310), dessen cotang = 3, ist zugleich der Winkel der beiden Zonenkreise (001):(100) und (001):(310). Damit sind in dem rechtwinkeligen Dreiecke (001), q, (311) der Winkel an (001) und die Seite (001):q gegeben, aus denen der halbe Polkantenwinkel (311):q einfach abzuleiten ist. Die Hälfte des andern Polkantenwinkels (311):p findet man durch das ebenfalls rechtwinkelige Dreiecke (001), p, (311), dessen Winkel an (001) die Differenz des entsprechenden Winkels im vorigen Dreiecke von 45° ist, und in welchem man den Bogen (001):p kennt. Der beiden Dreiecken angehörige und daher in einem derselben mit zu berechnende Bogen (001):(311) liefert unmittelbar die Basiskante von {311}.

Soll dagegen aus den beobachteten Winkeln einer ditetragonalen Bipyramide deren Parameterverhältnis und somit das Zeichen derselben berechnet werden, so benutzt man die gleichen Dreiecke umgekehrt. Sei (311):$q = a$ und (311):$p = a'$ gemessen, so gilt für die diesen Bögen gegenüberliegenden Winkel an (001) genau dieselbe Beziehung, wie für die entsprechenden Dreiecke (001) (112) (213) (203) in Fig. 613 (s. S. 572), d. h.:

$$\text{cotang } A = \frac{\sin a'}{\sin a \cdot \sin 45^\circ} + 1,$$

und da $A = (100):(310)$, so ist allgemein die cotang A gleich dem Verhältnisse $h:k$ des zu der Bipyramide zugehörigen ditetragonalen Prismas, d. h. dasjenige der ditetragonalen Bipyramide selbst. Das Verhältnis $k:l$ derselben folgt aus dem Zeichen der Bipyramide q, welche mit ihr dieses Verhältnis gemeinsam haben muß. Man hat daher nur nötig, mit Hilfe des Winkels A und der Seite q:(311) den Bogen (001):q zu berechnen und daraus das Symbol von q herzuleiten. Ist statt der Polkante (311):p die Basiskante der ditetragonalen Bipyramide gemessen worden, so gibt deren Hälfte, von 90° subtrahiert, die Seite (311):(001) in dem rechtwinkeligen Dreiecke (001), (311), q, in welchem die andere Polkante, d. h. (311):q, bekannt ist; es können daher die Seite (001):q und der Winkel an (001) berechnet werden, welche direct zum gesuchten Zeichen der ditetragonalen Bipyramide führen.



Liegt zur Bestimmung der letzteren statt zweier nur eine Winkelmessung vor, aber in einer bekannten Zone, z. B. in [111, 100], so hat man zuerst in dem rechtwinkeligen Dreiecke (111), (110), (100) den Winkel an (111) zu berechnen. Derselbe gehört zugleich dem rechtwinkeligen Dreiecke (111), (311), p an; ist also die Neigung zwischen den Flächen (111) und (311) gemessen, so folgt daraus der Bogen (111) : p, d. h. das Zeichen von p und damit eine zweite Zone zur Bestimmung der Indices der ditetragonalen Bipyramide.

Die vorstehenden Rechnungsmethoden umfassen sämtliche pyramidalen und bipyramidalen Formen des tetragonalen Krystallsystemes. Sie lassen sich jedoch auch verwenden zur Berechnung der Mittelkanten eines Bisphenoides, Trapezoeders oder Skalenoeders, weil in der Zone jeder derartigen Kante eine prismatische Fläche liegt, welche den Flächenwinkel an jener Kante halbiert. Man findet also die Hälfte des gesuchten Winkels, wenn man in ähnlicher Weise, wie im vorhergehenden angegeben, den Bogen zwischen der oberen Fläche der betreffenden Form und jener prismatischen Fläche als Seite eines passend gewählten sphärischen Dreieckes berechnet.

Diejenigen Formeln der analytischen Geometrie, welche in derselben Weise, wie die am Schlusse des vorhergehenden Abschnittes zusammengestellten, die unmittelbare Berechnung von Winkeln aus den Indices gestatten, enthalten selbstverständlich hier noch die Größe $c = \text{tang}\,(101):(001)$. Für eine beliebige Fläche (hkl) eines tetragonalen Krystalles gilt die Relation:

$$\text{tang}\,(hkl):(001) = \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{l}\,c.$$

Sei also der Winkel $(hkl):(001) = F$ gemessen, so ergibt sich daraus direct das Axenverhältnis der Substanz nach der Gleichung:

$$c = \frac{l}{\sqrt{h^2+k^2}}\,\text{tang}\,F.$$

Unabhängig von c findet man alsdann den Winkel G einer beliebigen anderen Fläche (pqr) zu (001) aus der Gleichung:

$$\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2}}\,\text{tang}\,G = \frac{l}{\sqrt{h^2+k^2}}\,\text{tang}\,F,$$

welche sich unmittelbar aus der vorigen ableiten läßt.

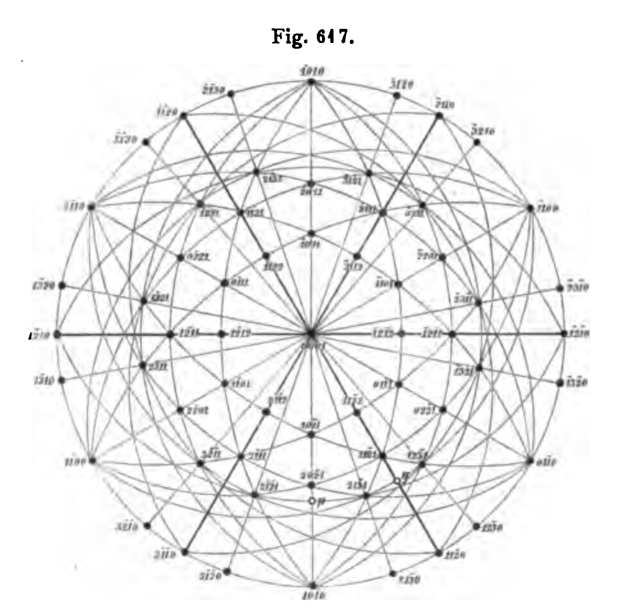
Um den Winkel zwischen den beiden beliebigen Flächen (hkl) und (pqr) zu berechnen, hat man nur zu erwägen, daß derselbe die dritte Seite eines sphärischen Dreieckes ist, dessen beide andern Seiten F und G sind, und in welchem außer letzteren der zwischen beiden liegende Winkel an (001) bekannt ist, da er sich direct aus den Verhältnissen der Indices $h:k$ und $p:q$ ergibt.

Berechnung und Projection hexagonaler Krystallformen.

Sehr ähnlich der Berechnung tetragonaler Formen gestaltet sich diejenige der hexagonalen, und auf dieselben Methoden läßt sich auch die Berechnung trigonaler Krystallformen zurückführen, wenn man dieselben auf die Hauptaxe und drei gleichwertige, in der zu jener senkrechten Ebene einander unter 60° schneidende, Nebenaxen bezieht, während bei der den Millerschen Symbolen zugrunde liegenden Wahl der Axen (s. S. 445) der Gang der Rechnung naturgemäß ein ganz anderer und daher in einem besonderen Abschnitte zu behandeln ist.

Wie im tetragonalen Systeme, so kann es auch hier nicht zweifelhaft sein, daß eine Projection auf die Basis diejenige sein wird, welche am vollkommensten die Symmetrieverhältnisse der projicierten Flächen und Zonen zur Darstellung bringt; eine solche soll daher der Erläuterung der Zonenverhältnisse und der Berechnung zugrunde gelegt werden. Der Grundkreis enthält alsdann offenbar die Pole der Flächen aller Prismen, von welchen diejenigen des 1. und 2. Prismas direct durch ihre Abstände von 60°, bzw. 30° einzutragen sind (s. Fig. 617). Den Mittelpunkt der Projection bildet der Pol der Basis (0001), und mittels der sechs den Neben- und den Zwischenaxen parallelen Durchmesser sind die Zonen zwischen (0001) und dem Prisma erster Art, in welchen sämtliche Pyramiden erster Art liegen, sowie die Zonen zwischen Basis und Prisma zweiter Art, d. h. die Zonen der Pyramiden zweiter Art, gegeben. Um die Pole einer Pyramide zu construieren, bedarf es also nur der Kenntnis ihrer Neigung zur Hauptaxe, bzw. des Abstandes zwischen dem Pole einer ihrer Flächen und dem der Basis, welchen man auf einem Kreise vom Durchmesser des Grundkreises abträgt und so in bekannter Weise die Länge des Bogens auf der Projection findet. Seien $(10\bar{1}1)$, $(01\bar{1}1)$ usf. die in dieser Weise bestimmten sechs Pole der primären Pyramide, so ergeben sich aus der Zone je zweier (in welcher jedesmal noch die beiden gegenüberliegenden Pole zweier, der Halbierungsebene der von den beiden Pyramidenflächen gebildeten Polkante parallelen,

Fig. 617.



Prismenflächen erster Art liegen) direct die Pole der Flächen der primären Pyramide zweiter Art $\{11\bar{2}2\}$, welche die Polkanten von $\{10\bar{1}1\}$ abstumpft. Ist der Winkel der Basiskante der Bipyramide zweiter Art bekannt, folglich auch der Winkel derselben zu (0001) (d. i. die Hälfte von dessen Supplemente), so dient das rechtwinkelige sphärische Dreieck: (0001), $(10\bar{1}1)$, $(11\bar{2}2)$, in welchem der Winkel an $(0001) = 30^\circ$, dazu, den Polkantenwinkel derselben Bipyramide zu berechnen — denn die Seite $(10\bar{1}1):(11\bar{2}2)$ ist offenbar die Hälfte desselben —, ebenso umgekehrt, um aus dem bekannten Winkel der Polkante denjenigen der Basiskante herzuleiten. Zur Berechnung des Axenverhältnisses c aus einem dieser beiden Winkel hat man nur den Bogen $(0001):(11\bar{2}2)$, d. h. allgemein: die Neigung derjenigen Bipyramide zweiter Art zu berechnen, welche die Polkante der Bipyramide erster Art, deren Axenverhältnis man sucht, abstumpft. Wie im tetragonalen Systeme, ist die tang jenes Bogens das gesuchte Axenverhältnis c[1]. Hat man endlich den Flächenwinkel der Basiskante einer Bipyramide zweiter Art selbst gemessen, so ergibt dieser ohne Berechnung direct das Parameterverhältnis der Bipyramide, derjenige der primären also das Axenverhältnis der Substanz. Ist umgekehrt dieses Axenverhältnis gegeben, und sollen aus demselben die Winkel der Bipyramiden berechnet werden, so verfährt man genau ebenso, nur daß in dem benutzten rechtwinkeligen Dreiecke die früher unbekannte Seite nunmehr die gegebene ist, und die vorher bekannte gesucht wird.

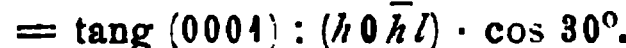
Durch die bisherigen Zonenkreise sind weiterhin noch bestimmt die Pole derjenigen Bipyramide zweiter Art, welche in der Zone der vorderen Fläche der primären $(10\bar{1}1)$ und der rechts angrenzenden Fläche des ersten Prisma $(01\bar{1}0)$, sowie in der Zone der rechts anliegenden Pyramidenfläche $(01\bar{1}1)$ und der vorderen Prismenfläche $(10\bar{1}0)$ liegt, also der in Fig. 517 (S. 502) mit q bezeichneten Form. Die Zonengleichung gibt für diese das Symbol $\{11\bar{2}1\}$; allgemein hat eine Bipyramide zweiter Art die doppelte Hauptaxe von derjenigen erster Art, mit welcher sie in dem angegebenen Zonenverbande steht. Da die Bipyramide $\{11\bar{2}1\}$ die Polkanten derjenigen erster Art abstumpft, welche die doppelte Hauptaxe der primären besitzt, so sind die Pole der letzteren dadurch gegeben, daß sie in den durch $\{11\bar{2}1\}$ und die jene Polkanten halbierenden Prismenflächen gegebenen Zonen liegen; so ergibt sich z. B. der Pol $(20\bar{2}1)$ durch die Zone $[11\bar{2}1, 1\bar{1}00]$. In derselben Weise kann man weiter aus der Zone $[20\bar{2}1, 01\bar{1}0]$ den Pol $(22\bar{4}1)$ und mittels dieses $(40\bar{4}1)$ finden usf.

Gehen wir nunmehr zur Projection dihexagonaler Bipyramiden über, so sei als Beispiel gewählt die häufigste $\{3\bar{1}\bar{2}1\}$, welche in den Zonen $[2\bar{1}\bar{1}1,$

1) Das Axenverhältnis c ist also $=$ tang $(0001):(11\bar{2}2)$, folglich

$$c = \text{tang}\ (0001):(10\bar{1}1)\cdot\cos 30^\circ,$$

allgemein: das Verhältnis der Längen von Haupt- und Nebenaxe einer hexagonalen Bipyramide $(h0\bar{h}l)$

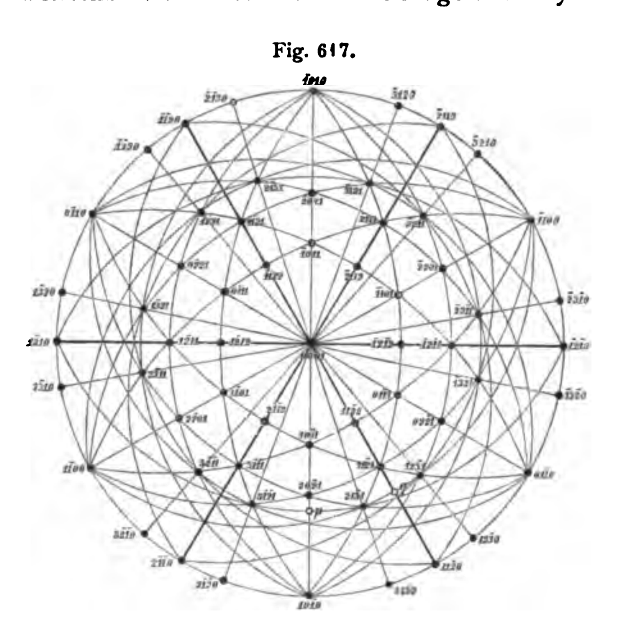


$$= \text{tang}\ (0001):(h0\bar{h}l)\cdot\cos 30^\circ.$$



$10\bar{1}0]$ und $[20\bar{2}1, 1\bar{1}00]$ liegt. Da die erstere dieser beiden Zonen zugleich die Polkantenzone der primären Bipyramide ist, also eine der wichtigsten Zonen, welche an flächenreichen Krystallen häufig durch eine Reihe von Formen repräsentiert wird, so soll an dieser Stelle die Bedingung allgemein entwickelt werden, welche erfüllt sein muß, damit eine dihexagonale Bipyramide zwischen den Flächen $(2\bar{1}\bar{1}1)$ und $(10\bar{1}0)$ mit parallelen Kanten liege. Die Indices der Zone der beiden angeführten Flächen, bezogen auf die vorderen beiden Hälften der Nebenaxen A_1 und A_3, diese positiv genommen (vgl. S. 443), sind $[\bar{1}11]$, die auf die gleichen Axenlängen bezogenen Indices hkl der dihexagonalen Bipyramide $\{h\bar{i}\bar{k}l\}$ müssen also die Bedingung erfüllen, daß $h = k + l$, wie es in der Tat bei der Bipyramide $\{3\bar{1}\bar{2}1\}$, ebenso bei $\{4\bar{1}\bar{3}1\}$, $\{6\bar{1}\bar{5}1\}$ usw. der Fall ist. — Trägt man die Pole dreier benachbarter Flächen einer dihexagonalen Pyramide, z. B. $(3\bar{1}\bar{2}1)$, $(21\bar{3}1)$, und $(12\bar{3}1)$, in die Projection ein, so ist durch je zwei derselben eine Polkantenzone der Form bestimmt, und der betreffende Zonenkreis leicht zu construieren, da er zugleich durch den Pol derjenigen Prismenfläche erster oder zweiter Art geht, welche die bezügliche Polkante der dihexagonalen Pyramide halbiert. Da, wo einer dieser Zonenkreise einen Durchmesser $(0001) : (10\bar{1}0)$ usw. senkrecht durchschneidet, z. B. in p, liegt ein Pol derjenigen

Fig. 617.



Pyramide erster Art, welche die nach den Zwischenaxen herablaufenden Polkanten (bei dem gewählten Beispiele sind es die schärferen) der dihexagonalen Pyramide abstumpft; in den Schnittpunkten von der Lage q liegen die Pole der Pyramide zweiter Art, welche die nach den Nebenaxen herablaufenden Kanten abstumpft. Die Zeichen dieser beiden Pyramiden sind durch die Indices der dihexagonalen gegeben, ebenso das Zeichen des dihexagonalen Prismas, welches das gleiche Verhältnis der Nebenaxen besitzt und dessen Pole daher in den Zonen $[0001, hikl]$ liegen. Aus Fig. 617, in welcher die Pole des zu $\{3\bar{1}\bar{2}1\}$ gehörigen dihexagonalen Prismas vollständig eingetragen sind, ersieht man sofort, daß man die Pole jeder beliebigen dihexagonalen Pyramide aus ihrem Zeichen finden kann, indem man die Pole einer der beiden Abstumpfungen ihrer Polkanten und

diejenigen des zugehörigen dihexagonalen Prismas einträgt und die betreffenden Zonenkreise construiert. Damit sind zugleich die sphärischen Dreiecke gegeben, durch welche für jede beliebige dihexagonale Pyramide bzw. Bipyramide die Berechnung ihrer Winkel zu erfolgen hat, wie an dem Beispiele der in Fig. 617 eingetragenen Form gezeigt werden soll.

Aus dem Zeichen $\{3\bar{2}\bar{1}1\}$ der dihexagonalen Pyramide folgt nach S. 311 durch Addition der entsprechenden Indices, daß ihre schärferen Polkanten abgestumpft werden durch $\{50\bar{5}2\}$. Die Länge der Hauptaxe dieser abgeleiteten Pyramide erhalten wir, indem wir das Axenverhältnis der Substanz c mit $\frac{5}{2}$ multiplicieren, und können also in der weiter oben angegebenen Weise die Entfernung ihres Poles p von (0001) berechnen. Ebenso findet man als Abstumpfung der stumpferen Polkanten die Pyramide zweiter Art $\{33\bar{6}2\}$ und dadurch den Abstand des Poles q von (0001). Für die Fläche des dihexagonalen Prismas endlich, welche dieselben Indices der Nebenaxen hat, z. B. $(21\bar{3}0)$, allgemein: $(kih0)$, ergibt sich der Polabstand von $(10\bar{1}0)$ durch eine einfache Berechnung:

$\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{h}$ sind die Parameter der Fläche auf den beiden benachbarten Seiten der Nebenaxen, welche 60° miteinander einschließen und mit der Trace der Fläche $(kih0)$ auf der Basis ein ebenes Dreieck bilden. Die vom Schnittpunkte der beiden ersteren Seiten dieses Dreieckes auf die dritte gefällte Senkrechte ist die Normale zur Fläche $(kih0)$, deren Richtung durch jenes Dreieck, d. h. durch die Längen $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{h}$, bestimmt ist. Für $k:h = 2:3$ z. B. ist der Abstand des Poles $(21\bar{3}0)$ von $(10\bar{1}0) = 19°6\frac{1}{2}'$, von $(11\bar{2}0)$ daher $= 10°53\frac{1}{2}'$.

Der Bogen $(10\bar{1}0):(21\bar{3}0)$ ist nun offenbar gleich dem Winkel an (0001) in dem Dreiecke $(0001):(21\bar{3}1)$, p, und seine Differenz von 30°, d. i. Bogen $(21\bar{3}0):(11\bar{2}0)$, gleich dem entsprechenden Winkel im Dreiecke (0001), $(21\bar{3}1)$, q. Aus diesen Winkeln und den bekannten Bögen $(0001):p$ und $(0001):q$ können in jenen Dreiecken, da dieselben rechtwinkelige sind, die Seiten $(21\bar{3}1):p$, $(21\bar{3}1):q$ und $(21\bar{3}1):(0001)$ berechnet werden. Die beiden ersten sind die halben Polkantenwinkel von $\{21\bar{3}1\}$, die letzte gibt von 90° subtrahiert den Bogen $(21\bar{3}1):(21\bar{3}0)$, d. h. den halben Winkel der Basiskante der Bipyramide.

Soll dagegen aus den gemessenen Winkeln einer dihexagonalen Bipyramide deren Parameterverhältnis und somit ihr Zeichen berechnet werden, so benutzt man natürlich dieselben Dreiecke in umgekehrter Weise. Seien z. B. die beiden Polkantenwinkel, also die Bögen $a = p:(21\bar{3}1)$ (allgemein: $kihl$) und $a' = q:(21\bar{3}1)$, gegeben, so folgt genau so wie S. 572:

$$\frac{\sin A'}{\sin A} = \frac{\sin a'}{\sin a},$$

und da hier $A' = 30° - A$, so ist

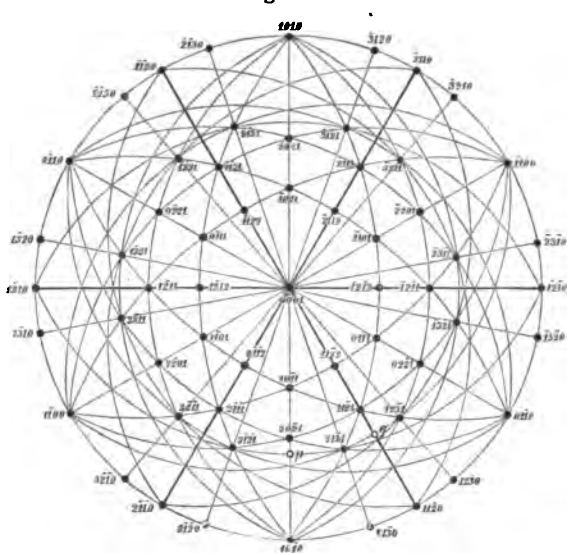
$$\frac{1}{2}\operatorname{cotang} A - \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sin a'}{\sin a},$$

folglich

$$\operatorname{cotang} A = \frac{2 \sin a'}{\sin a} + \sqrt{3}.$$

Das so gefundene A ist gleich dem Bogen $(10\bar{1}0):(21\bar{3}0)$ (allgemein: $ki\bar{h}0$), aus welchem sich mittels ebener Trigonometrie das Verhältnis $h:k$ berechnen läßt. Das Verhältnis $h:l$ gilt zugleich für die abstumpfende Pyramide zweiter Art q, man hat also nur den Bogen $(0001):q$ (aus dem Dreiecke: (0001), q, $(21\bar{3}1)$) zu berechnen und die hieraus sich ergebende Länge der Hauptaxe der Pyramide q durch c, die Hauptaxenlänge der Grundform, zu dividieren; der dem gefundenen Quotienten nächstliegende rationale Wert wird für $h:l$ eingesetzt. Sind statt der beiden Polkanten der dihexagonalen Bipyramide nur eine und der Winkel der Basiskanten gemessen, so gestaltet sich die Berechnung des Zeichens noch einfacher: Aus dem halben Basiskantenwinkel erhält man durch Subtraction von 90° den Bogen $(0001):(21\bar{3}1)$ (allgemein: $(0001):(kihl)$); dieser bildet mit der halben gemessenen Polkante, z. B. mit dem Bogen $p:(21\bar{3}1)$ und mit dem Bogen $(0001):p$ ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem somit die letzterwähnte Seite und der Winkel an (0001) (oben mit A bezeichnet) ohne weiteres berechnet werden können. Damit sind aber für die Fläche $(21\bar{3}1)$ (allgemein: $(kihl)$) zwei Zonen bestimmt, nämlich $[p, \bar{1}2\bar{1}0]$ und $[0001, 21\bar{3}0]$, aus welchen ihre Indices sich ergeben.

Fig. 617.



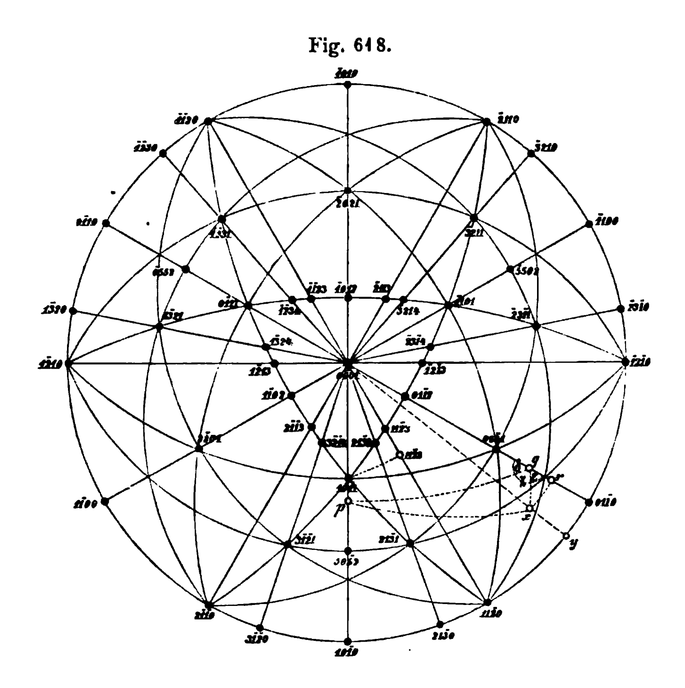
In den meisten Fällen hat man zur Berechnung des Zeichens einer dihexagonalen Bipyramide nur eine Winkelmessung nötig, wenn ihre Flächen nämlich in einer bekannten Zone liegen. Auch das alsdann einzuschlagende Verfahren der Rechnung läßt sich leicht an dem Beispiele Fig. 617 erläutern. Sei z. B. der Bogen $(11\bar{2}1):(21\bar{3}1)$[1] gemessen worden, so bildet dieser eine Seite des rechtwinkeligen Dreieckes $(11\bar{2}1)$, $(21\bar{3}1)$, q, in welchem noch der Winkel an $(11\bar{2}1)$ bekannt ist, da derselbe zugleich dem Dreiecke $(11\bar{2}1)$, $(11\bar{2}0)$, $(10\bar{1}0)$ angehört und daher aus dem Axenverhältnisse der Substanz berechnet werden kann. In dem ersteren Dreiecke läßt sich daher der Bogen $(11\bar{2}1):q$ und aus diesem das Zeichen der Pyramide q bestimmen.

[1]) Es ist dies an den S. 496 bzw. 502 abgebildeten Combinationen des Apatit bzw. Beryll der Winkel $q:s$ in der bekannten Zone $q:m$.

Die Indices dieser letzteren, zusammen mit der Bedingungsgleichung für die Lage in der Zone $[11\bar{2}1, 10\bar{1}0]$ (vgl. S. 582), liefern das Zeichen der dihexagonalen Bipyramide.

Die Anwendung der vorhergehenden Methoden auf die Berechnung trigonaler und ditrigonaler Pyramiden, bzw. der Rhomboeder und Skalenoeder, geht unmittelbar aus der Betrachtung der Fig. 618 hervor. Ist $(10\bar{1}1)$ ein Pol einer trigonalen Pyramide bzw. eines Rhomboeders erster Art und

Fig. 618.



$(10\bar{1}1):(0001) = \gamma$, so ist: $\sin\gamma \cdot \sin 60^\circ = \sin (10\bar{1}1):(01\bar{1}2)$; letzterer Bogen ist aber die Hälfte des Flächenwinkels der Polkante jener Form. Ferner ist: $\operatorname{tang}\gamma \cdot \cos 30^\circ = \operatorname{tang}(0001):(11\bar{2}2) = c$ (d. i. das Axenverhältnis derselben nach S. 581). Seien an einem Skalenoeder (bzw. einer ditrigonalen Pyramide) die beiden Polkanten gemessen worden, so sind deren Hälften die Winkel zwischen einer Skalenoederfläche und den beiden Rhomboederflächen, welche die längere bzw. kürzere Polkante gerade abstumpfen, z. B. die Bögen $a = (21\bar{3}1):(50\bar{5}2)$ bzw. $a' = (21\bar{3}1):(02\bar{2}1)$. Aus den beiden Dreiecken, welche diese Bögen mit (0001) bilden, kann man in derselben Weise, wie S. 583, die beiden Winkel an letzterem Pole, deren Summe $= 60^\circ$, berechnen nach der Gleichung:

$$\operatorname{cotang}(10\bar{1}0):(21\bar{3}0) = \frac{\sin a'}{\sin a \cdot \sin 60^\circ} + \frac{1}{2\sin 60^\circ},$$

ebenso die Abstände der beiden Pole $(50\bar{5}2)$ und $(02\bar{2}1)$ von (0001), und hat damit alle Daten für die Indices des Skalenoeders. Ist der Winkel einer Polkante und derjenige der Mittelkante gemessen, so hat man zu erwägen,

daß die Hälfte des letzteren gleich dem Winkel des Skalenoeders zu dem Prisma zweiter Art ist, da dieses die Mittelkanten aller Skalenoeder abstumpft. Will man also z. B. das Zeichen des Skalenoeders $\{21\bar{3}1\}$ aus dem Bogen $(21\bar{3}1):(11\bar{2}0) = \beta$ und dem halben Polkantenwinkel $(21\bar{3}1):(50\bar{5}2) = \alpha$ berechnen, so sind in dem sphärischen Dreiecke $(21\bar{3}1)$, $(\bar{1}2\bar{1}0)$, $(11\bar{2}0)$ die drei Seiten $= 90^\circ - \alpha$, 60° und β gegeben; der hieraus folgende Winkel an $(\bar{1}2\bar{1}0)$ ist nun offenbar gleich dem Bogen $(50\bar{5}2):(10\bar{1}0)$, aus welchem man mit Hinzunahme von α das Zeichen des Skalenoeders berechnen kann, wie vorher. Daß man bei der umgekehrten Berechnung eines Skalenoeders aus seinen Parameterverhältnissen von den beiden abstumpfenden Rhomboedern ausgeht, und wie man aus deren Neigungen zu (0001) die halben Polkantenwinkel des Skalenoeders findet, versteht sich nach obigem von selbst. Der halbe Winkel der Mittelkante, d. i. bei dem in Fig. 618 gewählten Beispiele der Bogen $(21\bar{3}1):(11\bar{2}0)$, wird alsdann am einfachsten aus dem rechtwinkeligen Dreiecke $(21\bar{3}1)$, $(11\bar{2}0)$, $(21\bar{3}0)$ berechnet, in welchem $(11\bar{2}0):(21\bar{3}0)$ und der Winkel an $(11\bar{2}0)$ durch die Indices des Skalenoeders bestimmt sind, da letzterer Winkel zugleich dem rechtwinkeligen Dreiecke $(11\bar{2}0)$, $(10\bar{1}0)$, $(10\bar{1}1)$ angehört, in welchem der zuletzt angeführte Pol ebenfalls aus dem Zeichen des Skalenoeders folgt.

Meist ist zur Berechnung eines Skalenoeders nur eine Messung erforderlich, wenn die Flächen desselben nämlich einer bekannten Zone angehören, z. B. die Flächen $(21\bar{3}1)$ und $(21\bar{3}4)$ in Fig. 618, aus welcher nach dem Vorhergehenden leicht ersichtlich ist, wie aus dem Winkel zu $(10\bar{1}1)$ das Symbol einer solchen Fläche abzuleiten ist.

Liegt dagegen keinerlei Zone zur Bestimmung einer unbekannten Fläche x (Fig. 618) vor, und seien deren Winkel zu zwei bekannten Flächen p und q gemessen worden, so kennt man in dem sphärischen Dreiecke pqx alle drei Seiten und kann daher den Winkel χ berechnen. Da δ bekannt ist, folgt hieraus ε und in dem rechtwinkeligen Dreiecke qxr die Länge qr, d. h. das Zeichen desjenigen Rhomboeders, welches eine Polkante des Skalenoeders abstumpft, dem die Fläche x angehört; in dem ebenfalls rechtwinkeligen Dreiecke (0001), $(01\bar{1}0)$, y kann alsdann der Winkel an (0001), d. h. die Lage des Poles y berechnet werden, welche mit derjenigen von r die Indices der Fläche x bestimmen.

Um endlich den Winkel irgend zweier Flächen eines hexagonalen oder trigonalen Krystalles aus deren Indices zu finden, hat man für jede derselben den Winkel zu (0001) zu berechnen, was stets mittels eines durch die Indices gegebenen rechtwinkeligen Dreieckes möglich ist, wie z. B. in Fig. 618 $(21\bar{3}1):(0001)$ in dem Dreiecke (0001), $(50\bar{5}2)$, $(21\bar{3}1)$ und $(11\bar{2}3):(0001)$ in dem Dreiecke (0001), $(01\bar{1}2)$, $(11\bar{2}3)$; alsdann sind die beiden Seiten eines sphärischen Dreieckes gegeben, dessen dritte Seite der gesuchte Flächenwinkel ist, während der ihr gegenüberliegende Winkel aus den Symbolen folgt. Das Verfahren der Rechnung entspricht also genau dem am Schlusse des vorigen Abschnittes (S. 579) angegebenen, und es können hier ebenso, wie

dort, die Winkel der beiden Flächen zur Basis direct aus den Indices und dem Axenverhältnisse c berechnet werden. Sind die beiden beliebigen Flächen (hil) und (efg), wobei der Index der 3. Nebenaxe als überflüssig weggelassen ist, so gelten die Gleichungen:

$$\text{cotang}\,(hil):(001) = \frac{l\sqrt{3}}{2c\sqrt{h^2+hi+i^2}}, \quad \text{cotang}\,(efg):(001) = \frac{g\sqrt{3}}{2c\sqrt{e^2+ef+f^2}}.$$

Der Winkel A zwischen den beiden Seiten $(hil):(001)$ und $(efg):(001)$ des sphärischen Dreieckes (001), (hil), (efg) ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\text{tang}\,A = \frac{hf - ie}{h(f+2e)+i(e+2f)}.$$

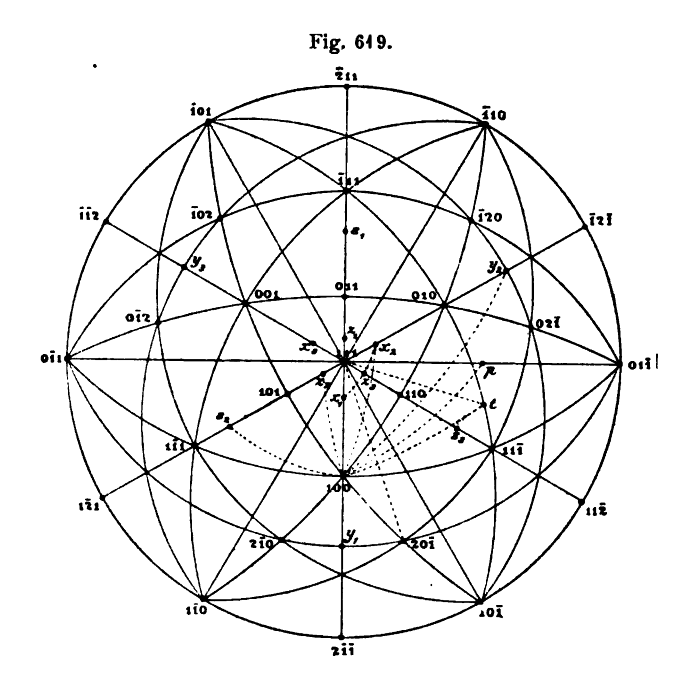
Die diesem Winkel gegenüberliegende Seite ist der gesuchte Flächenwinkel $(hil):(efg)$.

Berechnung und Projection trigonaler Krystallformen.

Wenn die Formen eines trigonalen Krystalles nach S. 445 auf die drei Kanten einer trigonalen Pyramide, bzw. eines Rhomboeders, als Axen bezogen werden, so besteht die Berechnung der Elemente in derjenigen der Axenwinkel α $(= \beta = \gamma)$ aus dem Flächenwinkel jener Form.

Die zur Übersicht während der Berechnung eines solchen Krystalles dienende Projection Fig. 619 ist, wie in den vorhergehenden Abschnitten,

Fig. 619.



so construiert, daß die Basis (111) als Projectionsebene dient, der Grundkreis also alle Flächen enthält, deren Indices die Bedingung $p + q + r = 0$

erfüllen. Seien (100), (010), (001) die Pole der als Axenebenen gewählten oberen trigonalen Pyramide, so ist klar, daß je einer der Bögen (100):(010), (010):(001), (001):(100) mit zweien der Bögen (111):(100), (111):(010), (111):(001) ein gleichschenkeliges sphärisches Dreieck bildet, in welchem der Winkel an (111) 120° beträgt. Jede der beiden gleichen Seiten eines derartigen Dreieckes ist gleich dem Winkel zwischen je einer Fläche der trigonalen Pyramide und der Basis, und die dritte Seite ist gleich dem Winkel der Polkante jener Form; ein der letzteren Seite anliegender Winkel dagegen, z. B. derjenige zwischen den Bögen (100):(111) und (100):(010), ist offenbar gleich dem Winkel, welchen die beiden durch diese größten Kreise bestimmten Ebenen, also auch deren Normalen, d. h. die betreffenden Zonenaxen, einschließen. Die Axe der Zone [100, 010] ist aber die Polkante (100):(010) der trigonalen Pyramide, OA_3' in Fig. 620 (S. 589), diejenige der Zone [100, 111] die Kante zwischen (100) und der Basis ($A_2'A_3'$ in Fig. 620), bzw. an einem Rhomboeder die horizontale Flächendiagonale, welche auf den beiden Polkanten (Krystallaxen) gleiche Längen abschneidet; es ist daher der Winkel zwischen diesen beiden Kanten das halbe Supplement des gesuchten Winkels α zwischen zwei Krystallaxen. Die Berechnung des Winkels jener beiden Zonenkreise erfolgt am einfachsten in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke (100), (110), (111), dessen Winkel an (111) = 60°, und zwar, wenn der Winkel der Polkante (100):(010) gegeben ist, aus der Hälfte desselben nach der Formel:

$$\sin \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos (100):(110)} = \frac{1}{2 \cos (100):(110)}.$$

Ist dagegen der Winkel (100):(111), d. i. die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite jenes Dreieckes, gemessen worden, so ergibt sich α aus der Gleichung:

$$\operatorname{cotang} \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \cos (100):(111) \cdot \operatorname{tang} 60^\circ = \cos (100):(111) \cdot \sqrt{3}.$$

Wurde endlich die Neigung der Fläche (110), der Abstumpfung der Polkante der Primärform, zur Basis gemessen, so kann der Axenwinkel auch aus der dritten Seite jenes Dreieckes berechnet werden, wie folgt:

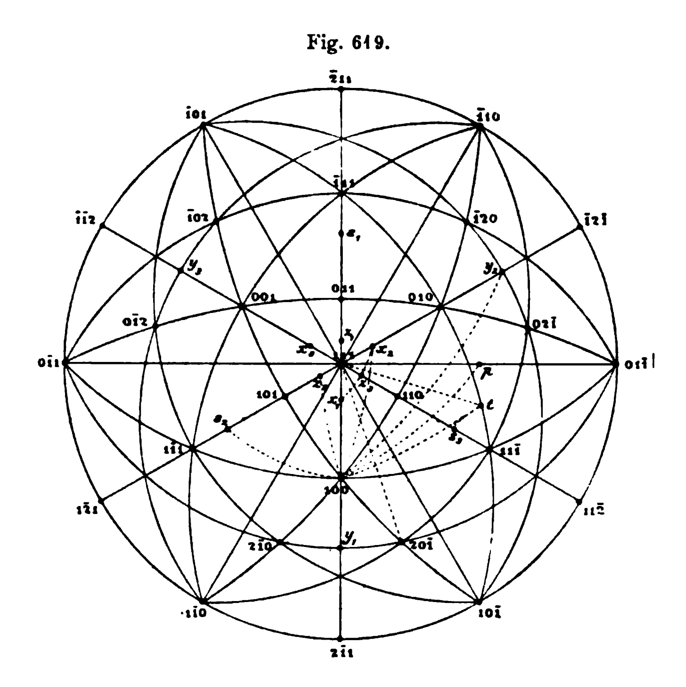
$$\cos \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \cos (110):(111) \cdot \sin 60^\circ = \cos (110):(111) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Nachdem so die Elemente des Krystalles bestimmt sind, können die Symbole der übrigen beobachteten Formen aus den Messungen ihrer Flächenwinkel berechnet werden, falls dieselben nicht ohne weiteres aus den beobachteten Zonenverhältnissen folgen.

Handelt es sich um eine Form, deren Flächen in der Zone (100):(111) bzw. (010):(111) usf. liegen, also einer trigonalen Pyramide oder eines Rhomboeders erster Art, und ist deren Winkel zu (111) oder zu (010) in jener Zone gemessen worden, so verfährt man zur Berechnung der

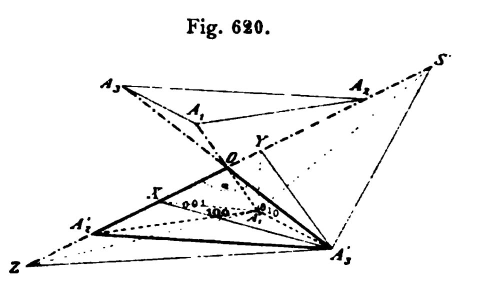
Indices derselben, von denen natürlich zwei gleich groß sind, folgendermaßen: Liegt der Pol x_2 (Fig. 619) einer derartigen Fläche (qpq) zwischen

Fig. 619.



(010) und (111), so würde dieselbe, durch die Kante $A_1'A_3'$ (Fig. 620) gelegt, die dritte Axe A_2' in dem Punkte X schneiden, wobei $OA_2' : OX = p : q$; dieses Verhältnis folgt aber aus des Größe des Winkels $XA_3'A_2'$, d. h. des Winkels, welchen die Axen, also auch die Ebenen, der beiden Zonen [100, x_2] und [100, 111] miteinander bilden, und dieser ist gleich dem an (100) anliegenden Winkel des sphärischen Dreieckes (100), (111), x_2, in welchem der Winkel an (111) $= 120^\circ$. Liegt der Pol y_2 Fig. 619 dagegen zwischen (010) und $(\bar{1}2\bar{1})$, so wird diese Fläche, wieder durch $A_1'A_3'$ in Fig. 620 gelegt gedacht, die Axe OA_2 in Y schneiden, und das Symbol $(\bar{q}p\bar{q})$ ist bekannt, wenn der Winkel $YA_3'A_2'$, welcher gleich dem an (100) anliegenden Winkel des sphärischen Dreieckes (100), (111), y_2, berechnet ist.

Fig. 620.



In derselben Zone, wie die bisher betrachteten positiven Formen, aber zwischen (111) und $(1\bar{2}1)$, liegen ferner die den sog. negativen trigonalen Pyramiden und Rhomboedern angehörigen Pole, von denen z_2 ein solcher zwischen (111) und (101) sei, dessen Winkel zu einer dieser beiden Flächen gemessen worden sei. Denken wir uns die Ebene z_2

ebenfalls durch die Kante $A_1'A_3'$ gelegt, so schneidet sie A_2' in Z, und ihre Indices (pqp) bzw. $(\bar{p}\bar{q}\bar{p})$ folgen aus dem Verhältnisse $OZ:OA_2' = p:q$, d. h. aus dem Winkel $A_2'A_3'Z$, welcher demjenigen gleich ist, den die beiden Zonen [100, 111] und [100, z_2] miteinander bilden, also dem an (100) liegenden Winkel des sphärischen Dreieckes (100), (111), z_2, in welchem der Winkel an (111) = 60°. Ist endlich s_2 ein Pol einer negativen Form, welche steiler als {101} ist, so würde eine solche Ebene, durch $A_1'A_3'$ gelegt, die Axe A_2 in S schneiden, und das Symbol $(p\bar{q}p)$ würde sich aus dem Winkel $A_2'A'_3S$, d. i. dem an (100) anliegenden Winkel des sphärischen Dreieckes (100), (111), s_2, ergeben. Wurde an einer trigonalen Pyramide oder einem Rhomboeder erster Art nicht der Winkel zur Basis, sondern derjenige einer Polkante gemessen, so muß zunächst der erstere berechnet werden. Offenbar ist die Hälfte des gemessenen Winkels der Polkante die Seite eines rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes, in welchem der gegenüberliegende Winkel an (111) = 60°; also folgt z. B. für x die Neigung zur Basis aus der Formel:

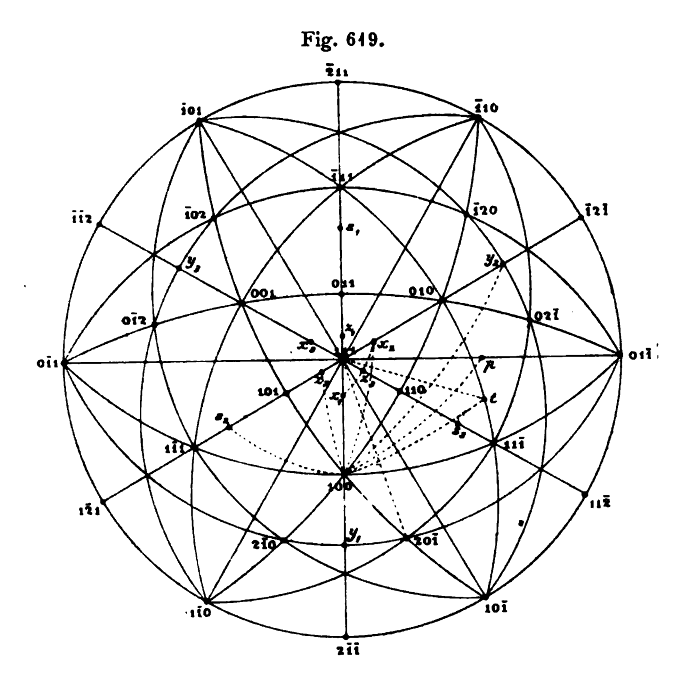
$$\sin (111):x_1 = \frac{\sin x_1 z_3}{\sin 60^\circ} = \frac{\sin x_1 z_3}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}.$$

Einfacher gestaltet sich die Berechnung einer Form zweiter Art, deren einer Pol also beispielsweise, wie p in Fig. 619, auf dem Zonenkreise (111):(01$\bar{1}$) liegt. Aus dem Winkel zu (111) folgt nämlich alsdann mittels eines rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes der Winkel (111) (100) p, und dieses ist der Winkel, welchen die beiden Kanten (100):(111) und (100):p einschließen, und aus dem das Verhältnis zweier Indices sich ergibt, während der dritte aus der Bedingungsgleichung $p + q = 2r$ (s. S. 445) folgt.

Die Bestimmung der Indices einer beliebigen Form dritter Art, z. B. der Fläche t Fig. 619, erfordert die Messung zweier Winkel, z. B. t:(100) und t:(010). Man sieht dann sofort, daß die sphärischen Dreiecke (100), (111), t und (010), (111), t eine Seite gemeinsam haben, und die Summe ihrer Winkel an (111) bekannt ist (= 120°), daher die vorliegende Aufgabe in ähnlicher Weise gelöst werden kann, wie diejenige der Berechnung eines Hexakisoktaeders aus zwei Winkeln (S. 572f.). Es muß jedoch bemerkt werden, daß an flächenreicheren Krystallen mit derartigen Formen gewöhnlich mindestens eine Zone zur Bestimmung derselben gegeben ist und sich dadurch die Berechnung wesentlich vereinfacht. So würde z. B. die Fläche t wegen ihrer Lage in der Zone [010, 10$\bar{1}$] nur der Messung des Winkels zu (010) bedürfen; aus dem in diesem Falle rechtwinkeligen Dreiecke (111), (010), t würde die Hypotenuse (111):t und der Winkel an (111) zu berechnen sein und daraus in dem Dreiecke (111), t, (100) der an (100) anliegende Winkel, welcher das Verhältnis zweier Indices bestimmt, während der dritte aus der Zone [010, 10$\bar{1}$] folgt. Gehört eine Fläche dritter Art einem Skalenoeder an, so sind die Indices derselben bestimmt, wenn

zwei verschiedene Kanten dieser Form gemessen wurden. In Fig. 619 sind z. B. die sechs oberen Pole der häufigen Kalkspatform $\{20\bar{1}\}$ (Fig. 456 S. 480) eingetragen, deren beide Polkanten $(2\bar{1}0):(20\bar{1})$ und $(20\bar{1}):(02\bar{1})$ gemessen sein mögen; die Hälfte derselben, die Bögen $(20\bar{1}):y_1$ und $(20\bar{1}):(11\bar{1})$, sind Seiten der beiden rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke (111), y_1, $(20\bar{1})$ und (111), $(20\bar{1})$, $(11\bar{1})$, welche die Hypotenuse gemeinsam haben und deren Winkelsumme an (111) 60^0 beträgt; es ist daher sehr einfach möglich, den Bogen $(111):y_1$ zu berechnen und, da $(111):(100)$ bekannt ist, aus $(100):y_1$ den Winkel der beiden Zonenkreise $[111, 100]$ und $[100, 20\bar{1}]$, wodurch zwei Indices des Skalenoeders bestimmt sind, während der dritte aus dem gleichzeitig sich ergebenden Symbole von $y_1 = (4\bar{1}\bar{1})$ folgt.

Fig. 619.



Wurde dagegen nur eine Polkante und die Mittelkante des Skalenoeders gemessen, so verfährt man folgendermaßen: Die Hälfte der Polkante sei $(20\bar{1}):y_1$, so ist hierdurch deren Complement, d. i. der Bogen $(20\bar{1}):(01\bar{1})$, bekannt; die Hälfte des Winkels der Mittelkante ist der Bogen $(20\bar{1}):(10\bar{1})$; da $(10\bar{1}):(01\bar{1}) = 60^0$, so sind die drei Seiten des sphärischen Dreieckes $(20\bar{1})$, $(01\bar{1})$, $(10\bar{1})$ bekannt, und es kann daher dessen Winkel an $(01\bar{1})$ berechnet werden; dieser ist aber gleich dem Bogen $(2\bar{1}\bar{1}):y_1$, wodurch die Lage von y_1 und somit alles Weitere bestimmt ist.

Sollen die Winkel einer bekannten Form aus dem Symbole derselben berechnet werden, so können natürlich die im vorhergehenden erläuterten Methoden im umgekehrten Sinne benutzt werden, doch ist es meist einfacher, die betreffenden Winkel direct aus den Werten der Indices zu

berechnen mit Hilfe von Formeln, welche die Abhängigkeit derselben von den letzteren in ähnlicher Weise ergeben, wie die S. 575 f. für die kubischen Formen zusammengestellten, daher die wichtigsten dieser Formeln (nach Miller) hier angeführt werden mögen. Selbstverständlich können diese auch umgekehrt dazu dienen, aus gemessenen Winkeln die Indices zu berechnen.

Sei (pqr), worin der algebraische Wert $p > q > r$, eine beliebige Fläche, und werden die Winkel, welche der Bogen $(pqr):(111)$ mit den Zonenkreisen $(111):(100)$, bzw. $(111):(010)$ und $(111):(001)$ bildet, durch ϑ bzw. φ und ψ bezeichnet, so ist:

$$\text{tang}\ \vartheta = \sqrt{3}\ \frac{q-r}{2p-q-r}$$

$$\text{tang}\ \varphi = \sqrt{3}\ \frac{r-p}{2q-r-p}$$

$$\text{tang}\ \psi = \sqrt{3}\ \frac{p-q}{2r-p-q}$$

und

$$\text{tang}\ (pqr):(111) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}[(q-r)^2+(r-p)^2+(p-q)^2]}}{p+q+r}\ \text{tang}\ (100):(111).^{1)}$$

Gehört die Fläche (pqr) einer trigonalen Pyramide oder einem Rhomboeder dritter Art an, so folgt alsdann aus dem Winkel $(pqr):(111)$ derjenige der Polkante dieser Form nach derselben Gleichung, wie bei einer trigonalen Pyramide erster Art (s. S. 590), nämlich:

$$\sin \tfrac{1}{2}(pqr):(qrp) = \sin 60^0 \sin (pqr):(111).$$

Bildet die Fläche (pqr) jedoch mit den ihr gleichwertigen ein Skalenoeder, so ergeben sich dessen drei Arten von Flächenwinkeln aus $(pqr):(111)$, nach Berechnung der Werte von ϑ, φ, ψ (s. oben), mittels rechtwinkeliger sphärischer Dreiecke, welche für den speciellen Fall $p = 2$, $q = -1$, $r = 0$ in Fig. 619 eingezeichnet sind, in folgender Weise:

a) die Hälfte des Flächenwinkels an der stumpfen Polkante ist gegeben durch

$$\sin \tfrac{1}{2}(pqr):(prq) = \sin \vartheta \sin (pqr):(111);$$

b) die Hälfte des Flächenwinkels an den schärferen Polkanten durch:

$$\sin \tfrac{1}{2}(prq):(rpq) = \sin \psi \sin (prq):(111);$$

c) endlich findet man das Supplement des Winkels der Mittelkanten, $(prq):(qrp)$, aus der Formel:

$$\sin \tfrac{1}{2}(prq):(qrp) = \sin \varphi \sin (prq):(111).$$

Die allgemeinste Aufgabe, den Winkel zwischen zwei beliebigen Flächen (pqr) und $(p_1 q_1 r_1)$, welche also auch verschiedenen einfachen Formen

---

1) Hieraus kann auch umgekehrt, wenn der Winkel einer beliebigen Fläche, deren Indices bekannt sind, zur Basis vorliegt, der Winkel $(100):(111)$, d. h. die Größe der Elemente des Krystalles, berechnet werden.



angehören können, aus ihren Indices zu berechnen, ist in folgender Weise zu lösen: Man berechnet sowohl für (pqr), als für $(p_1 q_1 r_1)$ nach den a. vor. S. angegebenen Formeln ϑ bzw. ϑ_1, sowie $(pqr):(111)$ und $(p_1 q_1 r_1):(111)$. Die beiden letzteren Bögen sind zwei Seiten des sphärischen Dreieckes (111), (pqr), $(p_1 q_1 r_1)$, und der von ihnen eingeschlossene Winkel ist, je nach der Lage der beiden Pole, entweder $\vartheta - \vartheta_1$, oder $\vartheta + \vartheta_1$, also kann die gegenüberliegende Seite $(pqr):(p_1 q_1 r_1)$ nach bekannter Formel der sphärischen Trigonometrie gefunden werden.

Sind (pqr) und $(p'q'r')$ die Symbole zweier Flächen, in deren Zone die Basis (111) gelegen ist, so gilt die Gleichung:

$$\frac{q-r}{p+q+r} \operatorname{tang} (pqr):(111) = \frac{q'-r'}{p'+q'+r'} \operatorname{tang} (p'q'r'):(111).$$ [1]

Ist $(p0q)$ eine Fläche in der Zone $[100, 10\bar{1}]$ (d. i. z. B. beim Calcit die Zone der gewöhnlichsten Skalenoeder, wie $\{20\bar{1}\}$ Fig. 619), so ist:

$$\operatorname{tang} (p0q):(10\bar{1}) = \frac{p+q}{p-q} \operatorname{tang} (100):(10\bar{1}).$$

Ist $(pq\bar{q})$ eine Fläche in der Zone $[11\bar{1}, 01\bar{1}]$ (d. i. die Zone der häufigeren negativen Skalenoeder beim Calcit), so gilt die Formel:

$$\operatorname{tang} (pq\bar{q}):(01\bar{1}) = \frac{p}{q} \operatorname{tang} (11\bar{1}):(01\bar{1}).$$

Die letzteren Formeln gestatten offenbar umgekehrt die einfachste Art der Berechnung der Indices eines Skalenoeders, welches in der Kantenzone der Rhomboeder $\{100\}$ oder $\{11\bar{1}\}$ liegt, auf Grund einer einzigen Messung, wenn die Winkel jener Rhomboeder bekannt sind. Die Symbole der beiden Rhomboeder, welche die stumpfen und schärferen Polkanten eines Skalenoeders gerade abstumpfen, ergeben sich nach S. 311 einfach durch Addition der entsprechenden Indices der beiden in der betreffenden Kante zusammenstoßenden Flächen, z. B. ist die Abstumpfung der Kante $(2\bar{1}0):(20\bar{1})$ das Rhomboeder $\{4\bar{1}\bar{1}\}$.

Der Winkel einer Rhomboederfläche erster Art (pqq) zur Basis ist gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} (pqq):(111) = \frac{p-q}{p+2q} \operatorname{tang} (100):(111),$$

in welcher die beiden tang entgegengesetztes Vorzeichen erhalten, wenn der Pol (pqq) auf der (100) entgegengesetzten Seite von (111) gelegen ist (wie z_1 und s_1 in Fig. 619). Umgekehrt kann man mittels derselben Gleichung das Verhältnis $p:q$, d. i. das Symbol des Rhomboeders, berechnen, wenn man dessen Neigung zur Basis und die Elemente des Krystalles kennt, oder die letzteren, d. h. den Winkel $(100):(111)$, aus der Neigung eines bekannten Rhomboeders zur Basis.

---

1) Setzt man in diese Gleichung für $p'q'r'$ die S. 452 angegebenen Werte ein, so ergeben sich die beiden Winkel $(pqr):(111)$ und $(p'q'r'):(111)$ gleich groß und entgegengesetzt.

Der Polkantenwinkel eines Rhomboeders folgt aus dessen Neigung zur Basis nach der bereits S. 592 benutzten Formel:

$$\sin \tfrac{1}{2}(pqq):(qpq) = \sin 60^\circ \sin (pqq):(111).$$

Für den Winkel endlich, welchen eine Fläche (pqr) in dem speciellen Falle, daß $p+q+r=0$, d. h. dem eines ditrigonalen oder dihexagonalen Prismas, mit der Fläche $(2\bar{1}\bar{1})$ des Prismas erster Art einschließt, gilt die Gleichung:

$$\operatorname{tang}(pqr):(2\bar{1}\bar{1}) = \sqrt{3}\,\frac{q-r}{2p-q-r},$$

mit Hilfe deren auch umgekehrt die Indices einer solchen Form aus deren Messung hergeleitet werden können.

Berechnung und Projection rhombischer Krystallformen.

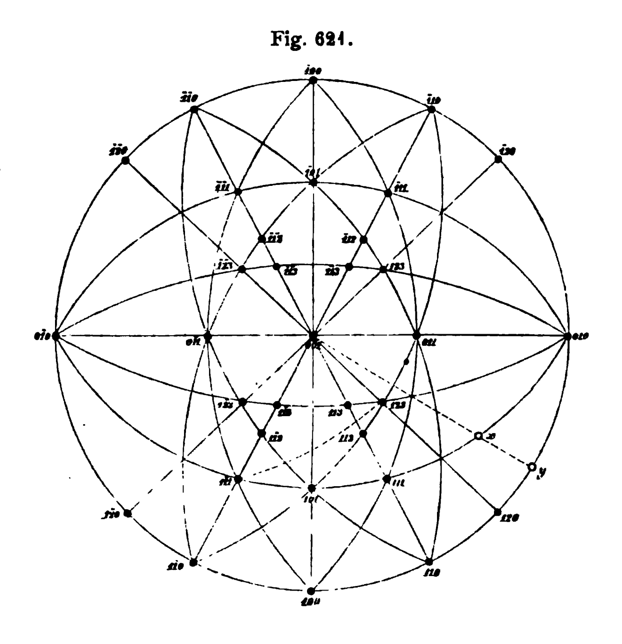
Die Formen des rhombischen Krystallsystemes werden zur Gewinnung einer übersichtlichen Darstellung ihrer Zonenverhältnisse auf eine der drei, zueinander senkrechten Axenebenen, z. B. auf (001), projiciert. Alsdann fallen die Pole der Flächen aller Prismen dritter Art in den Grundkreis und können unmittelbar mittels ihrer Winkel zu (100) und (010) eingetragen werden. In Fig. 621 ist dies in betreff der beiden Prismen {110} und {120} geschehen, welche der in Fig. 316 (S. 410) dargestellten Combination des Topas entsprechen, und sind außerdem die Projectionen der Formen {100} und {010}, deren Flächen die Prismenwinkel halbieren, hinzugefügt. Die Durchmesser (110) : (001) usw. enthalten die Pole aller Flächen, deren ersten beiden Indices gleich groß sind; es genügt also die Kenntnis des Winkels einer solchen Fläche zur Basis, um nach bekannter Methode den Pol derselben zu finden. In dieser Weise sind in der Projection die drei Bipyramiden {111}, {112} und {113} der Fig. 316 eingetragen. Das zu einer Bipyramide gehörige Prisma zweiter Art, welches ihre stumpfen Polkanten abstumpft, ergibt sich aus dem Zonenkreise, welcher durch die beiden Pyramidenflächen und (010) als Halbierungsebene der Polkanten bestimmt ist; ebenso das zugehörige Prisma erster Art aus dem Zonenkreise durch die beiden, in der scharfen Polkante einander schneidenden Pyramidenflächen und (100). In dieser Weise sind die Pole der beiden zu {111} zugehörigen Prismen {101} und {011} in der Projection eingetragen. Fig. 316 zeigt noch eine abgeleitete Bipyramide x, welche in den Zonen [113, 1$\bar{1}$3] und [112, 011] (d. i. = der Zone [101, 011] liegt; hieraus ergibt sich das Zeichen {123} und somit ihre Zugehörigkeit zu der Zone [001, 120]. Durch zwei der entsprechenden Zonenkreise kann also ihr Pol in der Projection gefunden werden und in ähnlicher Weise derjenige jeder andern abgeleiteten Bipyramide eines rhombischen Krystalles.

Die Berechnung der Elemente eines rhombischen Krystalles erfordert die Messung zweier voneinander unabhängiger Winkel. Der einfachste Fall ist der, daß die Winkel zweier Prismen verschiedener Art

gegeben sind. Werde die eine derselben als diejenige dritter Art $\{110\}$ genommen, so ergibt der Winkel $(110):(100) = A$, d. i. die Hälfte des stumpfen Prismenwinkels, direct das Parameterverhältnis $a:b$ oder, wenn $b = 1$ gesetzt wird, die Axenlänge $a = \operatorname{tang} A$. In derselben Weise führt der gemessene Winkel eines Prismas anderer Art zur Axenlänge c; denn wenn $B = (011):(001) = \frac{1}{2}(011:0\bar{1}1)$ gegeben ist, so folgt $c = \operatorname{tang} B$; wurde dagegen der Winkel $(101):(\bar{1}01)$ gemessen, dessen Hälfte $C = (101):(001)$, so ist $c = a \cdot \operatorname{tang} C$.

Die einfache Beziehung, welche somit zwischen den Axenlängen und den Bögen A, B und C besteht, wird auch benutzt, wenn es sich darum handelt, aus zwei gemessenen Winkeln einer rhombischen Bipyramide deren Axenverhältnis zu berechnen. Man leitet nämlich aus diesen Winkeln zunächst jene Bögen, d. h. die Winkel derjenigen Prismen ab, welche die Kanten der Bipyramide abstumpfen, und findet dann aus diesen das Parameterverhältnis. Seien z. B. von der Bipyramide $\{111\}$ die beiden Winkel an den Polkanten $(111):(1\bar{1}1) = 2P$ und $(111):(\bar{1}11) = 2Q$ gemessen, so ist $P = (111):(101)$ und $Q = (111):(011)$. Diese beiden Bögen sind, wie aus Fig. 621 ersichtlich, Seiten zweier rechtwinkeliger sphärischer Dreiecke, welche die Hypotenuse $(111):(001) = R$ gemeinsam haben. Von den Bögen A, B, C, welche ihre vorige Bedeutung behalten sollen, ist A zugleich der Winkel zwischen den Zonenkreisen $[001, 100]$ und $[001, 111]$, daher aus jenen beiden rechtwinkeligen Dreiecken folgt:

Fig. 621.



$$1)\ \sin A = \frac{\sin P}{\sin R} \qquad 2)\ \sin(90^\circ - A) = \cos A = \frac{\sin Q}{\sin R}$$

und durch Division von 2) in 1):

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin P}{\sin Q}.$$

Der Wert $\operatorname{tang} A$ ist (da A, wie oben angegeben, der halbe stumpfe Prismenwinkel) gleich der Axenlänge a. Zur Berechnung von c benutzt man nun den Bogen $B = (001):(011)$, welcher sich aus dem Dreiecke (001),

(011), (111), dessen Winkel an (001) $= 90^\circ - A$ nunmehr bekannt ist, unmittelbar ergibt durch die Gleichung:

$$\sin B = \text{tang}\, Q \cdot \text{cotang}\, (90^\circ - A) = \text{tang}\, Q \cdot \text{tang}\, A.$$

Ist dagegen einer der Winkel an den Polkanten, $2P$ oder $2Q$, und derjenige an der Basiskante gemessen, so ist durch letzteren der Bogen (111) : (110) (gleich der Hälfte desselben) und damit, durch Subtraction von 90°, auch R bestimmt. Aus P und R oder Q und R findet man aber, nach einer der beiden Gleichungen S. 595 unten, A und damit die Axenlänge a. Mit Hilfe von A oder dessen Complement ergibt sich dann in einem der obenerwähnten rechtwinkeligen Dreiecke der Bogen B oder C und damit das zweite Parameterverhältnis.

Handelt es sich um die Bestimmung der Indices einer abgeleiteten Pyramide oder Bipyramide, welche nicht durch zwei Zonen gegeben ist, so können hierzu entweder die Messungen zweier ihrer Winkel benutzt und daraus, wie bei der primären Pyramide, das Parameterverhältnis berechnet werden, welches durch Division in dasjenige der Grundform die Indices liefert — oder es genügt eine Winkelmessung zur Herleitung des Zeichens, wenn die Pyramide nämlich in einer bekannten Zone liegt. Sei z. B. die Kante (111) : (010) eines Krystalles durch eine derartige Fläche abgestumpft, so liegt der Pol x derselben (s. Fig. 621) auf dem Zonenkreise (111):(010); ist nun der Winkel x:(010) oder x:(111) gemessen worden, so kann man, da die Bögen (101) : (111) und (101) : (001) durch das Zeichen der bekannten Pyramide, in diesem Falle {111}, gegeben sind, in dem rechtwinkeligen Dreiecke (101), (001), x aus den beiden Seiten (101) : (001) und (101) : x den der letzteren gegenüberliegenden Winkel an (001) berechnen; dieser ist gleich dem Bogen (100) : y, aus welchem direct das Zeichen des zur Pyramide x zugehörigen Prismas y folgt. Mit letzterem hat x die beiden ersten Indices gemein, mit der Pyramide, in deren Polkantenzone sie liegt, im vorliegenden Beispiele {111}, das Verhältnis des ersten und dritten; somit sind ihre Indices sämtlich bekannt.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergeben sich die sehr einfachen Formeln, welche dazu dienen, die Winkel einer rhombischen Krystallform aus den Indices zu berechnen, wenn die Elemente bekannt sind, d. h. der Winkel (110) : (100), dessen tang $= a : b$, und der Winkel (101) : (001), dessen tang $= c : a$. Es ist nämlich für eine beliebige Fläche (hkl) der Winkel φ, welchen die Zonenkreise (001):(hkl) und (001):(100) einschließen, gegeben durch

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{k}{h}\, \text{tang}\, (110) : (100) = \frac{k}{h}\, a.$$

Für die dreierlei Winkel einer rhombischen Bipyramide gelten alsdann die folgenden Gleichungen:

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}\, (hkl) : (hk\bar{l}) = \frac{l}{h} \cot (101) : (001) \cdot \cos \varphi = \frac{l}{h} \cdot \frac{a}{c} \cos \varphi$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\, (hkl) : (h\bar{k}l) = \cos \tfrac{1}{2}\, (hkl) : (hk\bar{l}) \cdot \cos \varphi$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\, (hkl) : (\bar{h}kl) = \cos \tfrac{1}{2}\, (hkl) : (hk\bar{l}) \cdot \sin \varphi.$$

Handelt es sich um die Berechnung des Winkels zwischen zwei beliebigen Flächen (hkl) und (pqr), so berechnet man nach obigen Formeln für jede derselben den Winkel φ und die Neigung zur Basis (d. i. das Complement des halben Winkels der Basiskante der betr. Bipyramide). Man hat alsdann in dem sphärischen Dreiecke (001), (hkl), (pqr) die beiden Seiten $(001):(hkl)$ und $(001):(pqr)$ und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, welcher, je nach der Lage der betr. Pole, entweder die Summe oder die Differenz der beiden Werte von φ ist; man kann also die dem letzteren gegenüberliegende Seite, d. h. den Bogen $(hkl):(pqr)$, berechnen.

Endlich gilt für den Winkel eines rhombischen Prismas erster Art:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(0kl):(0\bar{k}l) = \frac{k}{l} \operatorname{tang}(011):(001),$$

für denjenigen eines Prismas zweiter Art:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(h0l):(\bar{h}0l) = \frac{h}{l} \operatorname{tang}(101):(001)$$

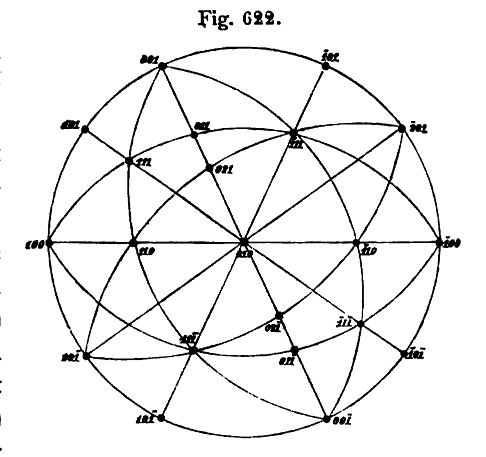
und für den Winkel eines Prismas dritter Art:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(hk0):(h\bar{k}0) = \frac{k}{h} \operatorname{tang}(110):(100).$$

Berechnung und Projection monokliner Krystallformen.

Die monoklinen Formen können zur übersichtlichen Darstellung der Zonenverhältnisse sowohl auf (010), als auf eine dazu senkrechte Ebene projiciert werden. Wählt man die erstere, d. h. die Symmetrieebene bzw. die zur Symmetrieaxe senkrechte Ebene, als diejenige der Projection (Fig. 622), so enthält der Grundkreis die Pole aller Flächen, welche der Krystallaxe b parallel sind, z. B. (100), (101), (001); diese können also direct mittels der Winkel, welche sie miteinander bilden, eingetragen werden. Da der Pol von (010) in der Mitte des Grundkreises liegt, so erscheinen alle Zonenkreise, denen der Pol (010) angehört, als Durchmesser. Der Pol einer beliebigen Fläche (hkl) liegt also auf dem Durchmesser $(010):(h0l)$ in derjenigen Entfernung von der Mitte des Grundkreises, welche dem Winkel $(hkl):(010)$ entspricht; z. B. (111) auf dem Durchmesser (010) : (101) usf. Die Figur stellt die Projection eines Krystalles der 5. Klasse, nämlich der in Fig. 258 (S. 380) abgebildeten Combination des Orthoklas mit Hinzufügung der Formen {111}, {101} und

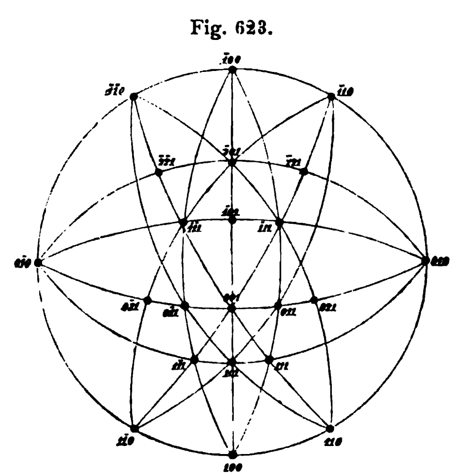
Fig. 622.



{011} dar. Infolge der Symmetrieverhältnisse der prismatischen Klasse ist daher zu jedem Pole ein zweiter, auf demselben Durchmesser gleichweit von (010) entfernt, vorhanden.

Dieselbe monoklin-prismatische Combination ist in Fig. 623 auf eine zu (010) senkrechte, und zwar auf die zur *c*-Axe normale, Ebene projiciert. Da in dieser die Normalen aller Flächen liegen, welche der Verticalaxe parallel gehen, so sind deren Pole, wie (100), (110), (010), mit Hilfe ihrer Winkel unmittelbar in den Grundkreis einzutragen. Alsdann enthält der verticale Durchmesser die Pole aller Flächen, welche der Axe *b* parallel sind, wie (100), (101), (001) usf., deren Ort aus ihrer Neigung zu (100) gefunden wird, wenn man diesen Winkel von (100) nach links auf dem Grundkreise aufträgt und den Endpunkt desselben mit dem Pole (010) durch eine Gerade verbindet, z. B. liegt der Pol (001) auf der Geraden von (010) nach dem Endpunkte eines Bogens von 63°57′ (180° — β), auf dem Grundkreise in der angegebenen Richtung von (100) aus aufgetragen. Jeder Pol auf dem verticalen Durchmesser bestimmt nun mit (010) und $(0\bar{1}0)$ einen Zonenkreis, auf welchem die Pole derjenigen Prismen liegen, deren erster und dritter Index in demselben Verhältnisse stehen; z. B. liegen auf dem Kreisbogen (010) : (001) : $(0\bar{1}0)$ alle Prismen erster Art, auf (010) : $(\bar{2}01)$: $(0\bar{1}0)$ alle Prismen vierter Art, deren $h : l = -2 : 1$, usf. Der Abstand der Pole von dem senkrechten Durchmesser der Projection wird im vorliegenden Beispiele durch Construction weiterer Zonenkreise gefunden, so (111) aus der Zone [001, 110], (011) und $(\bar{1}11)$ aus der Zone [100, 111], $(\bar{2}21)$ aus der Zone [001, $\bar{1}10$] usf.

Fig. 623.



An der Hand der letzteren Projection sollen nun die wichtigsten Fälle der Berechnung der Elemente eines monoklinen Krystalles betrachtet werden.

1. Es seien zwei Flächen am Krystalle beobachtet, welche der Axe *b* parallel sind, und diese sollen als (100) und (001) angenommen werden, ferner zwei Prismen (bzw. Domen oder Sphenoide), welche in den Zonen [100, 010] bzw. [001, 010] gelegen sind und als {110} und {011} betrachtet werden sollen. Alsdann gibt die Messung (100) : (001) direct den Axenwinkel β, denn dieser ist das Supplement jenes Winkels, also = (001) : $(\bar{1}00)$. Zur Berechnung der beiden weiteren Unbekannten sind zwei Messungen erforderlich, nämlich diejenige der Winkel (001) : (011) und (100) : (110) = $(\bar{1}00)$: $(\bar{1}10)$; aus ersterem kann in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke

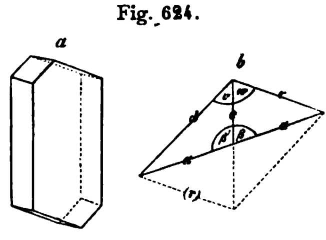
(011), (001), $(\bar{1}00)$ der Winkel an $(\bar{1}00)$ berechnet werden, d. h. der Winkel, welchen die Zone, also die Kante $[\bar{1}00, 011]$, mit der Kante $[\bar{1}00, 001]$, d. i. der Axe b, bildet; die tang dieses Winkels ist das Verhältnis der Axen $c : b$. Ebenso folgt in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke (001), $(\bar{1}00)$, $(\bar{1}10)$ der Winkel an (001), d. h. derjenige zwischen den Kanten $[001, \bar{1}10]$ und $[001, \bar{1}00]$, dessen tang $= a : b$.

2. Sind nur die beiden Prismen $\{110\}$ und $\{011\}$ vorhanden, so muß auch β berechnet werden. Es seien gemessen die Winkel $(110) : (\bar{1}10)$, $(011) : (0\bar{1}1)$ und $(011) : (\bar{1}10)$. Alsdann sind, da $(010) : (\bar{1}10) = \frac{1}{2}(110) : (\bar{1}10)$ und $(011) : (010) = 90° - \frac{1}{2}(011) : (0\bar{1}1)$, die drei Seiten des sphärischen Dreieckes (011), $(\bar{1}10)$, (010) gegeben, daher der an (010) anliegende Winkel $= \beta$ berechnet werden kann. Damit ist der Bogen $(001) : (\bar{1}00)$ bekannt, und das Axenverhältnis der Grundform kann nunmehr in der unter 1. angegebenen Weise gefunden werden.

3. Es seien mit einem Prisma $\{110\}$ zwei der Axe b parallele Flächen combiniert, welche als (001) und (101) betrachtet werden sollen. Es seien zunächst gemessen die Winkel $(110) : (1\bar{1}0)$ und $(110) : (001)$; da $(100) : (110) = \frac{1}{2}(110) : (1\bar{1}0)$, so sind in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke (110), (100), (001) zwei Seiten bekannt; die Berechnung der dritten Seite $(100) : (001)$ liefert den Wert von β und diejenige des Winkels an (001) die Neigung der Kante $[001, 110]$ zur Kante $[001, 100]$, d. i. der Winkel, welchen erstere Kante mit der Axe b bildet, dessen tang also $= a : b$. Zur Berechnung der c-Axe dient endlich die Messung des Winkels $(101) : (001)$, welcher einem ebenen Dreiecke angehört, dessen Seiten die Parameter a und c sind und in welchem außerdem der von letzteren eingeschlossene Winkel $180° - \beta$ bekannt ist (läge $(\bar{1}01)$ statt (101) vor, so wäre dieser Winkel $= \beta$). Fehlt eine derartige zweite, der Axe b parallele Krystallfläche, so kann die dritte Axe nicht berechnet werden, und die Bestimmung der Elemente muß eine unvollständige bleiben. Wäre das Prisma als dasjenige erster Art $\{011\}$ betrachtet worden, so würde der gleiche Fall die Axe a betreffen und nur das Verhältnis $b : c$ bestimmt werden können.

4. Sind nur solche Flächen am Krystalle vorhanden, welche der Axe b parallel oder dazu senkrecht sind, so ist der Parameter b der Grundform nicht bestimmbar, dagegen β und das Verhältnis $a : c$, wenn wenigstens drei der Axe b parallele Flächen beobachtet sind. Am einfachsten gestaltet sich die Bestimmung der erwähnten Elemente, wenn von den letzteren Flächen eine als (100), eine zweite als (001) und die dritte als (101) oder $(\bar{1}01)$ angenommen wird, da dann β direct gemessen werden kann, und $a : c$ aus der Berechnung eines ebenen Dreieckes folgt.

Fig. 624.



Sollen dagegen an einem derartigen Krystalle, wie ihn Fig. 624 a darstellt, die drei zur vorherrschenden Form $\{010\}$ senkrechten Pinakoide als $\{100\}$,

$\{\bar{1}01\}$, $\{101\}$ angenommen werden, so ist β zu berechnen, und zwar, da die gemessenen Winkel zwischen jenen Pinakoiden zugleich diejenigen ihrer Kanten mit (010) sind, in den ebenen Dreiecken Fig. 624*b*, in welcher die zu berechnende Axe a, d. h. die Richtung eingetragen ist, auf der $d = [101, 010]$ und $r = [\bar{1}01, 010]$ gleiche Längen (a) abschneiden. Bedeuten v' und w' die Supplemente von v und w, so ist, wie aus der Figur unmittelbar ersichtlich,

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(w' - \beta)}{\sin w} = \frac{\sin(v' - \beta')}{\sin v}.$$

Die Entwicklung dieser Gleichung nach β gibt

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{2 \sin w \sin v}{\sin(w - v)}.$$

Diese Methode der Berechnung ist auch anzuwenden, wenn in der unter 3. besprochenen Combination keine der beiden, der Axe b parallelen Flächen als (001) betrachtet werden soll.

5. Wird die Combination zweier Prismen als $\{110\}$, $\{111\}$ aufgefaßt, so liefert die Messung der Winkel $(110):(1\bar{1}0)$, $(111):(1\bar{1}1)$ und $(111):(110)$ die Kenntnis der drei Seiten des sphärischen Dreieckes (010), (111), (110), so daß der Winkel zwischen den Zonenkreisen [110, 100] und [110, 111] berechnet werden kann. Dieser gestattet dann im rechtwinkeligen Dreiecke (001), (100), (110) die Berechnung der Seite (001):(100) usw. Einfacher noch gestaltet sich die Bestimmung der Elemente, wenn zu jenen beiden Formen noch $\{001\}$ hinzutritt, indem dann die Messungen der Winkel (110):(001) und $(110):(1\bar{1}0)$ nach 3. die Werte von β und $a:b$ liefern, während c mittels des rechtwinkeligen Dreieckes (001), (101), (111) aus der Messung des Winkels (111):(001) folgt.

6. Seien endlich die Axenebenen (100), (010), (001) und eine Fläche (111) oder $(\bar{1}11)$ beobachtet, so gibt die Messung von (100):(001) den Winkel β, diejenige der Neigung der Grundform gegen zwei Axenebenen das Parameterverhältnis der ersteren. Seien z. B. gemessen die Winkel (111):(100) und (111):(010), so sind dies zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes, dessen dritte Seite $(100):(010) = 90^{\circ}$ ist; die Berechnung des Winkels an (010) liefert den Bogen (100):(101) und damit das Verhältnis $a:c$, während der berechnete Winkel desselben Dreieckes an (100) das Complement des Winkels zwischen den Zonenkreisen [100, 001] und [100, 011] ist, d. h. des Winkels, dessen $\operatorname{tang} = c$.

Sind die Elemente eines monoklinen Krystalles vollständig bestimmt, so können, wenn dies auf einem der unter 1—5 angeführten Wege geschah, jedenfalls die Winkel (100):(101), (101):(001) und (111):(010) berechnet werden, oder sie sind z. T., wie unter 6. angenommen, die der Rechnung zugrunde gelegten Fundamentalwinkel. Mit Hilfe dieser drei Winkel ergeben sich aber die Indices einer beliebigen Fläche (hkl) aus folgenden Gleichungen:



$$\frac{h}{l} = \frac{\sin(100):(101)}{\sin(101):(001)} \cdot \frac{\sin[(100):(001) - (100):(h0l)]}{\sin(100):(h0l)}$$

$$\frac{k}{l} = \frac{\sin(100):(101)}{\sin(100):(h0l)} \cdot \frac{\operatorname{tang}(111):(010)}{\operatorname{tang}(hkl):(010)},$$

wenn der Winkel der Fläche (hkl) zu (010) und die Neigung der geraden Abstumpfung der Kante $(hkl):(h\bar{k}l)$, d. h. des Pinakoides $(h0l)$, zu (100) gemessen sind. Wurden statt dessen die Winkel der Fläche (hkl) zu zweien der drei Ebenen (100), (010) und (001) beobachtet, so bilden die betreffenden beiden Bögen in der Projection stets zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes, dessen dritte Seite bekannt ist — in zwei Fällen ist dieselbe = 90°, im dritten = (100):(001) —, aus welchem also die erwähnten beiden Größen und daher die Indices berechnet werden können.

Handelt es sich umgekehrt um die Berechnung der angularen Position einer Fläche (hkl), deren Indices bekannt sind, und sei $(h0l)$ der im verticalen Durchmesser einer Projection von der Art der Fig. 623 gelegene Pol des Zonenkreises [010, hkl], so folgt der Winkel $(100):(h0l)$ aus der Formel:

$$\operatorname{cotang}(100):(h0l) - \operatorname{cotang}(100):(001) =$$
$$= \frac{h}{l}\left(\operatorname{cotang}(100):(101) - \operatorname{cotang}(100):(001)\right)$$

oder aus der für logarithmische Rechnung geeigneteren Gleichung:

$$\operatorname{tang}\left((100):(h0l) - \tfrac{1}{2}(100):(001)\right) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(100):(001) \cdot \operatorname{tang}(45^\circ - \Theta),$$

worin:

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{h}{l} \cdot \frac{\sin(101):(001)}{\sin(101):(100)}.$$

Für die Winkel der Fläche (hkl) zu den drei Axenebenen ergibt sich alsdann:

$$\operatorname{tang}(hkl):(010) = \frac{l}{k} \cdot \frac{\sin(100):(101)}{\sin(100):(h0l)} \operatorname{tang}(111):(010),$$
$$\cos(hkl):(100) = \sin(hkl):(010) \cdot \cos(100):(h0l),$$
$$\cos(hkl):(001) = \sin(hkl):(010) \cdot \cos(001):(h0l).$$

Diese Gleichungen können natürlich auch umgekehrt benutzt werden, um aus den Winkeln einer beliebigen Fläche mit bekannten Indices (hkl) die Elemente des Krystalles, d. h. die Winkel (100):(101), (101):(001) und (111):(010) zu berechnen. Zu dem Zwecke würden zunächst aus den beiden letzten die Winkel $(100):(h0l)$ und $(001):(h0l)$ hergeleitet; aus deren Summe, d. i. (100):(001), folgt (100):(101) mittels der Gleichung:

$$\operatorname{tang}\left((100):(101) - \tfrac{1}{2}(100):(001)\right) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(100):(001) \cdot \operatorname{tang}(45^\circ - \Theta),$$

worin:

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{l}{h} \cdot \frac{\sin(001):(h0l)}{\sin(100):(h0l)},$$

und endlich (111):(010) aus der ersten der drei Gleichungen.

Ferner können die obigen Formeln dazu dienen, den Winkel zwischen zwei beliebigen Flächen (hkl) und (pqr) zu berechnen. Zu dem Zwecke werden mittels derselben einerseits die Winkel $(h0l):(100)$ und $(p0r):(100)$, andererseits die Winkel $(hkl):(010)$ und $(pqr):(010)$ berechnet; die letzteren sind die beiden Seiten eines sphärischen Dreieckes, dessen von ihnen eingeschlossener Winkel, je nach der Lage der beiden Pole, gleich der Summe oder der Differenz der beiden Winkel $(h0l):(100)$ und $(p0r):(100)$ ist. In dem speciellen Falle, daß (hkl) und (pqr) auf einem Zonenkreise liegen, welcher durch (010) geht, ist

$$\frac{\operatorname{tang}(hkl):(010)}{\operatorname{tang}(pqr):(010)} = \frac{ql}{kr} = \frac{qh}{kp}.$$

Statt der vorhergehenden Methode kann in vielen Fällen auch die Formel angewendet werden, welche im allgemeinen die Abhängigkeit der Winkel tautozonaler Flächen von deren Indices bestimmt und daher die Berechnung einzelner Winkel ohne Kenntnis der Elemente gestattet (s. S. 607 im nächsten Abschnitte).

Über die Transformation der Indices eines monoklinen Krystalles, wenn die Axen a und c anders gewählt werden, siehe am Schlusse der Berechnung trikliner Krystallformen S. 610.

Berechnung und Projection trikliner Krystallformen.

Die stereographische Projection eines triklinen Krystalles als allgemeinster Fall einer solchen wurde bereits S. 315f. behandelt, und wie dort, so soll auch bei der im folgenden zur Erläuterung der Rechnungsmethoden benutzten Projection als Ebene des Grundkreises diejenige gewählt werden, welche zur Krystallaxe c senkrecht ist, also die Normalen aller Pinakoide (bzw. Pedia) dritter Art enthält. Sei z. B. der in Fig. 625

Fig. 625.

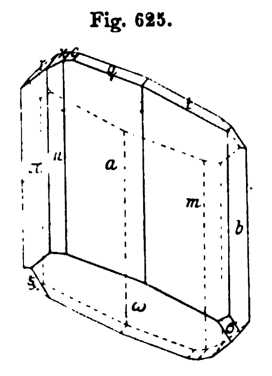
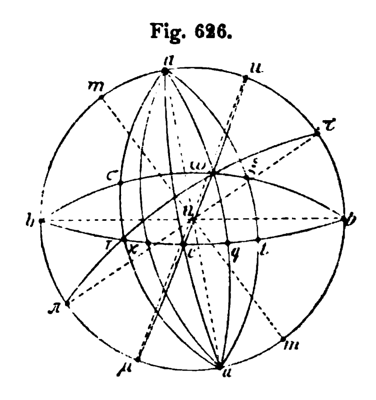


Fig. 626.



abgebildete Krystall von Kupfervitriol in der angegebenen Weise zu projicieren, so werden zunächst die Pole der Pinakoide $a\,\{100\}$, $b\,\{010\}$, $m\,\{110\}$, $\mu\,\{1\bar{1}0\}$ und $\pi\,\{1\bar{3}0\}$ mittels ihrer gemessenen Winkel in den Grundkreis eingetragen. Hierauf folgt die Aufsuchung der Lage eines

weiteren Poles, z. B. desjenigen von c (001): seien A und B die gemessenen Winkel $b:c = (010):(001)$ und $a:c = (100):(001)$, so verlängere man in Fig. 626 die beiden Durchmesser aa und bb nach vorn bzw. nach rechts und trage von der Mitte O des Grundkreises aus auf Oa die Länge

$$OK = \frac{r}{\cos B},$$

auf Ob die Länge

$$OL = \frac{r}{\cos A}$$

auf, wo r den Radius des Grundkreises bedeutet. Von dem Punkte K aus wird alsdann ein Kreis mit dem Radius

$$Kc = r \cdot \operatorname{tang} B,$$

von L aus ein solcher mit dem Radius

$$Lc = r \cdot \operatorname{tang} A$$

construiert. Diese beiden Kreise schneiden einander innerhalb des Grundkreises in dem Punkte c, und dieser stellt den gesuchten Pol der Fläche (001) dar[1]).

In derselben Weise könnte auch jeder der übrigen Flächenpole aus den Winkeln der Fläche zu a und b construiert werden; weit einfacher findet man denselben jedoch unter Benutzung der Zonenverhältnisse, und zwar auf einem bereits vorliegenden Zonenkreise, welchem der gesuchte Pol angehört, mittels des Winkels der Fläche zu einer der bekannten Flächen derselben Zone, oder durch zwei bereits eingetragene Zonenkreise, wenn die Fläche in beiden betr. Zonen liegt. Während im letzteren Falle der Pol unmittelbar als Durchschnittspunkt der beiden Zonenkreise gegeben ist, bedarf es im ersteren Falle, um auf dem betreffenden Zonenkreise den gesuchten Punkt zu finden, noch einer Construction, welcher die folgende Eigenschaft der stereographischen Projection zugrunde liegt: Nennt man »Pol eines Zonenkreises« denjenigen Punkt auf der Kugelfläche, welcher von allen Punkten des Zonenkreises 90° Abstand besitzt (d. i. der Pol der zur Zonenaxe senkrechten Ebene), so gilt der Satz: »Verbindet man den Pol eines Zonenkreises mit den Polen zweier Flächen der betreffenden Zone durch Gerade und verlängert diese, bis sie den Grundkreis treffen, so schneiden sie auf diesem einen Bogen ab, welcher gleich dem Winkel zwischen den beiden Flächen ist«.

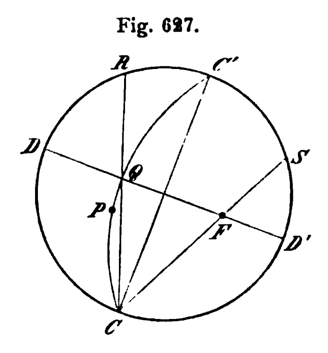
---

1) Die beschriebene Construction ist in Fig. 626, welche überhaupt nur noch die allernötigsten Hilfslinien enthält, nicht mehr dargestellt, weil sie zu viel Raum beanspruchen würde. In dem gewählten Beispiele sind nämlich die Winkel $c:a = 73^\circ 53'$, $c:b = 94^\circ 29'$ (in diesem Falle wird $\cos A$ negativ, also ist OL nach links aufzutragen) und r ist $= 20$ Millimeter, daher $OK = 72{,}05$, $OL = 255{,}85$ Millimeter. Will man nicht mit so großen Distanzen construieren, so muß man statt des Poles von c zuerst denjenigen einer Fläche suchen, deren Winkel zu a und b kleiner sind. Die übrige Construction wird dadurch nur in der Reihenfolge der einzelnen Operationen geändert.



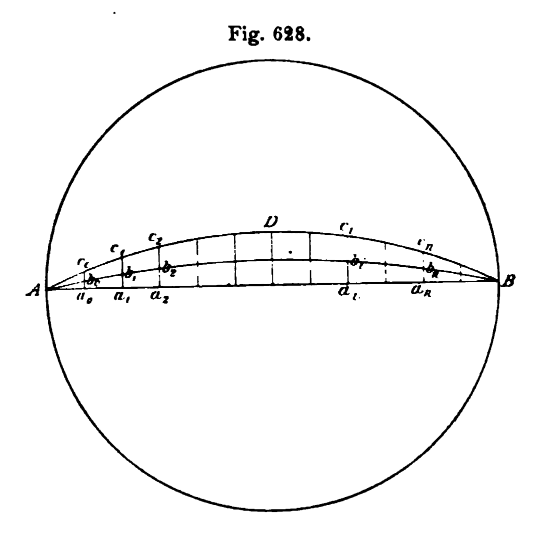
Der Pol eines Zonenkreises wird auf die folgende Art durch Construction gefunden: In Fig. 627 ist der Kreis durch C, C', D, D' der Grundkreis, C und P die Pole zweier Krystallflächen; dann ist auch die zu C parallele Gegenfläche zur Zone CP gehörig, und deren Pol ist offenbar C' (CC' Durchmesser); es sind demnach drei Pole der Zone [C, P, C'] gegeben, und der Kreisbogen CPC' kann also auf bekannte Art construiert werden. Der gesuchte Pol dieses Zonenkreises muß auf der Geraden DD' liegen (DD' durch die Mitte und $\perp$ CC'), denn diese ist die Projection des auf dem Grundkreise normal stehenden Zonenkreises, der sämtliche, 90° von C abstehende Punkte enthält. Ferner muß aber jener Pol nicht nur von C, sondern auch von jedem andern Punkte des Zonenkreises CP, z. B. von Q, einen Abstand von 90° haben; es muß also nach dem a. vor. S. angeführten Satze die Gerade zwischen ihm und C mit der von Q nach C, da dieses letztere Pol der Zone DQD' ist, auf dem Grundkreise einen Bogen von 90° abschneiden. Man ziehe folglich CQ bis R, schneide von dem Grundkreise einen Bogen $RS = 90°$ ab und verbinde S mit C, so ist F der gesuchte Pol des Zonenkreises CPC'.

Fig. 627.



Hiernach können nun in Fig. 626, nachdem der Pol c (001) gefunden ist, alle übrigen Pole eingetragen werden. Z. B. würde der Pol ω auf dem Zonenkreise $\mu c \mu$ sich ergeben, indem der Pol des letzteren nach dem angegebenen Verfahren aufgesucht, von μ ($\bar{1}\bar{1}0$) aus nach rechts auf dem Grundkreise der gemessene Winkel $\mu\omega$ aufgetragen und der Endpunkt mit dem Pole der Zone durch eine Gerade verbunden wird; σ und ξ auf dem Zonenkreise [$b\omega b$] und q auf [bcb] können in analoger Weise aus den Winkeln $\sigma(\xi):b$ und $q:b$ construiert werden, während t und x sich direct als Schnittpunkte des Zonenkreises [bcb] mit [$a\xi a$] und [$a\sigma a$] ergeben.

Fig. 628.



Anmerkung. Bei der Anfertigung einer derartigen stereographischen Projection handelt es sich oft um Construction sehr flacher Kreisbögen, wie aca und $\mu c \mu$ in Fig. 626; für diese wurde von G. Wulff folgende Methode angegeben. Seien A, b_i und B (Fig. 628) die drei Punkte, durch welche der Kreisbogen gehen soll, so ziehe man zunächst einen beliebigen, weniger flachen Kreisbogen ADB und dann eine Reihe zu AB senkrechter Geraden a_0c_0, a_1c_1, ... a_nc_n; aus der Länge von a_ib_i wird das Verhältnis $a_ic_i : a_ib_i$ festgestellt und dann alle Punkte b_0, b_1, ... b_n aufgesucht, welche der Proportionalität

$$\frac{a_0c_0}{a_0b_0} = \frac{a_1c_1}{a_1b_1} = \cdots = \frac{a_ic_i}{a_ib_i} = \cdots = \frac{a_nc_n}{a_nb_n}$$

genügen. Der durch die Punkte A, b_0, b_1, ... b_i, ... b_n, B gehende (eigentlich elliptische) Bogen läßt sich mit genügender Genauigkeit als ein Kreisbogen ansehen. — Zu dem gleichen

Zwecke kann ferner das von Fedorow beschriebene Kreislineal Fig. 629 benutzt werden. Dasselbe besteht aus einer Metallplatte A und einem etwas schräg gestellten stählernen Streifen BC, welcher durch Anziehen der Schraube F mittels der keilartigen Ansätze D

Fig. 629.

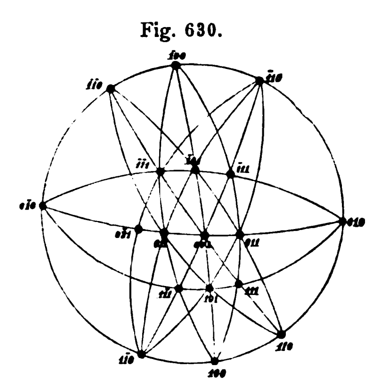


und E gebogen wird; die Schraubenmutter g ist mit der Platte A fest verbunden (über die Theorie dieses Instrumentes und dessen Verwendung zur Construction von Kreisbögen, welche über die Länge desselben hinausgehen, s. Zeitschr. f. Krystallogr. 1893, **21**, 618). Ein auf demselben Principe beruhendes, aus Holz angefertigtes und sehr brauchbares Curvenlineal beschrieb Penfield, Zeitschr. f. Kryst. 1902, **35**, 20.

An der Projection Fig. 630, welche die Pole der wichtigsten Krystallflächen eines beliebigen triklinen Krystalles enthält, soll nun im folgenden die Berechnung eines solchen erläutert werden.

Zur Bestimmung der Elemente eines triklinen Krystalles sind offenbar vier Flächen ausreichend, wenn nicht drei derselben in einer Zone liegen, weil andernfalls nicht fünf voneinander unabhängige Winkel gemessen werden können. Der einfachste Fall der Berechnung liegt vor, wenn drei von jenen vier Flächen als Axenebenen (100), (010), (001) und die vierte als Grundform (111) oder $(1\bar{1}1)$ usw. angenommen werden. Wenn alsdann von den Winkeln der drei ersten und denjenigen, welche die Grundform mit zweien derselben bildet, z. B. (111):(100) und (111):(010), Messungen vorliegen, so sind in dem sphärischen Dreiecke (100), (001), (010) die drei Seiten gegeben, daher die drei Winkel desselben berechnet werden können; von letzteren ist der an (100) anliegende derjenige, welchen die Ebenen der Zonenkreise [010] und [001], deren Normalen die Krystallaxen b und c sind, einschließen; sein Supplement ist also der Axenwinkel α im rechten oberen vorderen Oktanten der Axenebenen; ebenso ergeben sich die Axenwinkel β und γ aus den beiden andern Winkeln jenes Dreieckes. Die ferner gemessenen Winkel (111):(100) und (111):(010) bilden mit (100):(010) ein sphärisches Dreieck, in welchem somit ebenfalls die drei Seiten bekannt sind; der an (100) anliegende Winkel desselben ist der ebene Winkel in (100), unter welchem die Kanten (100):(111) und (010):(100) einander schneiden; letzterer gehört aber dem ebenen Dreiecke an, welches von der

Fig. 630.

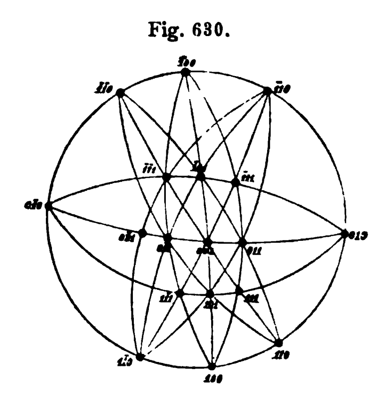


Kante (100) : (111) und den Axenlängen b und c gebildet wird; da der Winkel zwischen den letzteren $= \alpha$ bekannt ist, so erfolgt die Berechnung des Axenverhältnisses $b:c$ nach der ebenen Trigonometrie. Aus dem Winkel zwischen den Bögen (010) : (100) und (010) : (111), d. i. dem Winkel zwischen den Kanten der gleichnamigen Flächen mit der Ebene (010), welchen man in demselben sphärischen Dreiecke wie vorher berechnet, ergibt sich in der gleichen Weise das Axenverhältnis $a:c$. Es leuchtet ein, daß man bei der Berechnung ganz analog zu verfahren hat, wenn statt (111) eine andere Einheitsfläche, z. B. $(\bar{1}11)$, gemessen worden ist, indem man statt des Dreieckes (100), (010), (001) alsdann das von den Bögen $(\bar{1}00)$: (010), $(\bar{1}00)$: (001), (010) : (001) gebildete zu benutzen hat. Soll dagegen die Combination der vier beobachteten Flächen als {111}, $\{1\bar{1}1\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{1}\bar{1}1\}$ betrachtet werden, ein Fall, wie ihn Fig. 200 unter Weglassung von c darstellen würde, so ist klar, daß die Ebenen, welche durch je zwei Kanten dieser Combination bestimmt sind, den Axenebenen entsprechen, z. B. die Ebene durch o' : $'o$ und $o,$: $,o$ dem Pinakoide {010} usw. Der Gang der Rechnung erläutert sich an der Projection Fig. 630 folgendermaßen: Gemessen sind die vier Seiten des sphärischen Viereckes (111), $(1\bar{1}1)$, $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(\bar{1}11)$ und eine der Diagonalen desselben, z. B. (111) : $(\bar{1}\bar{1}1)$; mittels der beiden Dreiecke (111), $(\bar{1}11)$, $(\bar{1}\bar{1}1)$ und (111), $(1\bar{1}1)$, $(\bar{1}\bar{1}1)$ ist es nun leicht, alle Winkel des sphärischen Viereckes und aus (111) : $(1\bar{1}1)$, (111) : $(\bar{1}11)$ und dem zwischenliegenden Winkel auch die andere Diagonale $(1\bar{1}1)$: $(\bar{1}11)$, welche als Controllwinkel dient, zu berechnen. Denkt man sich die Bögen $(\bar{1}11)$: (111) und $(\bar{1}\bar{1}1)$: $(1\bar{1}1)$ nach vorn und die Bögen $(1\bar{1}1)$: (111) und $(\bar{1}\bar{1}1)$: $(\bar{1}11)$ nach rechts verlängert, so schneiden dieselben einander in (100), bzw. (010); es können also die Dreiecke (100), (111), $(1\bar{1}1)$ und (010), (111), $(\bar{1}11)$ vollständig berechnet werden, da je zwei ihrer Winkel die Supplemente von Winkeln des vorerwähnten sphärischen Viereckes und die zwischenliegenden Seiten solche des letzteren sind. Aus den Bögen (111) : (100) und (111) : (010) nebst dem eingeschlossenen Winkel folgt aber (100) : (010), und da die Lage von (001) auf dem Zonenkreise (111) : $(\bar{1}\bar{1}1)$ leicht zu berechnen ist (z. B. durch Dreieck (111), $(1\bar{1}1)$, (001), in welchem die Seite (111) : $(1\bar{1}1)$ und die beiden anliegenden Winkel bekannt sind), so kann man ferner aus (001) : (111), (111) : (100) und dem zwischenliegenden Winkel den Bogen (100) : (001) und aus diesem, aus (100) : (010) und dem eingeschlossenen Winkel endlich den Bogen (010) : (001) ableiten, wodurch die Winkel der drei Axenebenen bestimmt sind, und nunmehr mittels zweier der drei Bögen (111) : (001), (111) : (010) und (111) : (100) die Axenverhältnisse wie im vorhergehenden Falle berechnet werden kann.

Sind an einem triklinen Krystalle nicht vier Flächen vorhanden oder zu Fundamentalmessungen geeignet, welche der eingangs erwähnten Bedingung genügen, sondern außer drei zu Axenebenen gewählten Flächen nur solche, welche in der Zone je zweier der ersteren liegen, also Pinakoide (bzw. Pedia) erster, zweiter oder dritter Art, so müssen noch zwei solcher

Flächen, welche verschiedenen Krystallaxen parallel sind, also fünf Flächen zur vollständigen Bestimmung der Elemente herangezogen werden. Seien z. B. die Winkel (100):(110) und (010):(011) gemessen; im Dreiecke (100), (110), (001) sind alsdann bekannt die Seiten (100):(110), (100):(001) und der zwischenliegende Winkel $= 180^0 - \alpha$; man berechne den Winkel an (001), d. i. den ebenen Winkel der Kanten (001):(100) und (001):(110) auf der Fläche (001); damit sind nunmehr in dem ebenen Dreiecke, welches von den Axenlängen a und b und der Kante (001):(110) gebildet wird, die drei Winkel bekannt, so daß das Axenverhältnis $a:b$ berechnet werden kann. Dasselbe Dreieck (100), (110), (001) dient auch zur Berechnung des Bogens (001):(110), welcher als Controllwinkel zu benutzen ist. Ganz ebenso hat man in dem Dreiecke (100), (010), (011) aus den Seiten (010):(011) und (010):(100) nebst dem zwischenliegenden Winkel den der Seite (010):(011) gegenüberliegenden Winkel zu berechnen, welcher das Axenverhältnis $b:c$ liefert, während der Bogen (100):(011) einen Controllwinkel bildet.

Fig. 630.



Wenn von den an einer derartigen Combination beobachteten Flächen jedoch nicht drei, sondern etwa nur zwei als Axenebenen angenommen, bzw. deren Winkel der Rechnung zugrunde gelegt werden sollen, so wird die Position der dritten am geeignetsten mittels der Formel für das sog. »Doppelverhältnis« (s. S. 313) von vier Flächen einer Zone bestimmt. Seien $A = (efg)$, $B = (hkl)$, $C = (pqr)$ drei beliebige Flächen einer Zone, deren Pole in der angegebenen Reihenfolge auf dem betr. Zonenkreise liegen, und $D = (mno)$ irgendeine weitere Fläche derselben Zone, so gilt für die von A aus in derselben Richtung gemessenen Winkel der Satz:

$$P(\text{cotang}\, AD - \text{cotang}\, AC) = Q(\text{cotang}\, AB - \text{cotang}\, AC),$$

worin
$$P = \frac{fo - gn}{nr - oq} = \frac{gm - eo}{op - mr} = \frac{en - fm}{mq - np}$$

und
$$Q = \frac{fl - gk}{kr - lq} = \frac{gh - el}{lp - hr} = \frac{ek - fh}{hq - kp}$$

Anmerkung. Es sind hier drei identische Verhältnisse angegeben, weil häufig eines oder zwei derselben den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ annimmt.

In einer für logarithmische Rechnung noch bequemeren Form läßt sich die obige Beziehung auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\text{tang}\,(AD - \tfrac{1}{2}AC) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}AC \cdot \text{tang}\,(45^0 - \Theta),$$

worin
$$\text{tang}\,\Theta = \frac{Q}{P} \cdot \frac{\sin BC}{\sin AB}.$$

Für den speciellen Fall, daß die drei gegebenen Flächen (100), (101) und ($\bar{1}01$) sind, und die Position von (001) gesucht wird, ergibt sich $P = 1$, $Q = \frac{1}{2}$ und durch Einsetzung dieser Werte die gleiche Formel für tang (100) : (001), wie sie S. 600 für die entsprechenden Flächen des monoklinen Systems entwickelt wurde.

Mit Hilfe dieser Formel kann man aus den Winkeln zwischen drei Flächen einer Zone stets die Position einer vierten von bestimmtem Symbole berechnen, ohne die Elemente des Krystalles zu kennen. Sei z. B. an dem in Fig. 625 S. 602 abgebildeten Krystalle die Fläche $b = (010)$ nicht ausgebildet, so daß eine directe Messung des Winkels $a : b = (100) : (010)$ nicht möglich ist, so berechnet man den Winkel $\mu : b$ nach obigem aus den Winkeln von $\mu = (1\bar{1}0)$ zu $a = (100)$ und $m = (110)$. Sind außer diesen auch die Winkel (100) : (001) und (110) : (001) gemessen, so kann auch (001) : (010) berechnet werden, und zur vollständigen Bestimmung der Elemente bedarf es nur noch einer fünften Fundamentalmessung, z. B. des Winkels (001) : (011).

Sind außer den vier oder fünf Flächen mit willkürlich angenommenen Indices, welche auf einem der angegebenen oder einem ähnlichen Wege zur Bestimmung der Elemente des Krystalles gedient haben, an letzterem noch weitere Formen vorhanden, so sind deren, aus der erfolgten Wahl der Elementarflächen sich ergebende Symbole nunmehr festzustellen. Handelt es sich dabei um eine Fläche, welche in keiner bekannten Zone liegt, so müssen wenigstens zwei Winkel derselben zu bekannten Flächen vorliegen, mit Hilfe deren ihre Winkel zu zwei Axenebenen berechnet werden können, oder die letzteren selbst, aus welchen alsdann das Verhältnis ihrer Parameter genau so abgeleitet werden kann, wie dasjenige der Grundform (S. 605 f.); die Division der so gefundenen Axenlängen in diejenigen der Grundform liefert dann die Indices der Fläche. Meist liegt jedoch für die Bestimmung des Symboles einer Fläche wenigstens eine bekannte Zone vor, und alsdann genügt die Messung des Winkels zu einer der tautozonalen Ebenen; sind deren drei A, B, C vorhanden und die Winkel AB und AC bekannt, so ergeben sich zwei von den Indices (mno) der Fläche D durch Einsetzung des beobachteten Winkels AD in die Gleichung a. vor. S. als Functionen der bekannten Indices von A, B und C, während der dritte aus der Zonengleichung nach S. 309 folgt. Gehört endlich eine Fläche zwei bekannten Zonen des Krystalles an, so ist bekanntlich ihr Symbol ohne Winkelmessung gegeben.

Handelt es sich endlich um die Rückberechnung der Winkel einer triklinen Combination aus den Symbolen bzw. den Parameterverhältnissen ihrer Flächen, so ist im allgemeinen derselbe Weg im umgekehrten Sinne einzuschlagen. Die den Fundamentalwinkeln entsprechenden Werte der wichtigsten Controllwinkel ergeben sich zwar der Mehrzahl nach, wie aus der Betrachtung der oben angegebenen Rechnungsmethoden hervorgeht, bereits bei der Berechnung der Elemente, aber es ist wünschenswert, einige derselben direct aus den Elementen neu herzuleiten, um nicht nur die Genauigkeit

der Winkelmessungen, sondern auch die Richtigkeit der Berechnung der Elemente selbst einer vollständigen Controlle zu unterziehen. Sind in dieser Weise außer den fünf Fundamentalwinkeln noch die aus ihnen berechneten Werte einiger anderer Winkel festgestellt, so kann man jeden weiteren, wenn er einer Zone angehört, in welcher bereits zwei Winkel zwischen drei Flächen bekannt sind, mittels der S. 607 angegebenen Formel aus den Indices berechnen. Bleiben dann noch einzelne Flächen übrig, für welche eine solche Zone nicht vorliegt, so verfährt man am geeignetsten folgendermaßen: Sei D eine derartige Fläche und gesucht ihr Winkelabstand von einer Fläche A, deren Winkel zu den andern Flächen bereits berechnet ist; alsdann wird der Zonenkreis DA von irgend zwei bekannten Zonenkreisen in den Polen B und C geschnitten, deren Symbole nach S. 311 gegeben sind; aus diesen können daher die beiden Bögen AB und AC berechnet werden, wodurch die nötigen Werte zur Berechnung von AD nach S. 607 vorhanden sind. Ein analoges Verfahren kann auch benutzt werden zur Lösung der allgemeinsten Aufgabe, den Winkelabstand zweier beliebiger Flächen D und E aus ihren Indices zu bestimmen: Der Zonenkreis DE schneide drei bekannte Zonenkreise in den Punkten A, B und C, deren entsprechende Indices dadurch gegeben sind; mit Hilfe der Winkel AD und AC berechnet man nun einmal, wie vorher, AD und das andere Mal nach derselben Methode AE; die Differenz beider ist der gesuchte Bogen DE. Ist von einem der Pole D oder E der Winkelabstand zu einer der Elementarflächen bereits berechnet, so kann es einfacher sein, auch den Winkel der andern zu derselben Fläche und den zwischen beiden Zonenkreisen eingeschlossenen Winkel zu rechnen; der gesuchte Bogen ist dann die dem letzteren gegenüberliegende Seite des von D, E und jener Elementarfläche gebildeten sphärischen Dreieckes.

Wie für die Berechnung der einfachen, so bietet auch für diejenige der Zwillingskrystalle das trikline System den allgemeinsten Fall dar, aus welchem sich die speciellen Fälle der übrigen Krystallsysteme leicht herleiten lassen. Unter den verschiedenen Arten regelmäßiger Verwachsung zweier Krystalle (vgl. S. 345f.) ist von besonderer Wichtigkeit derjenige, in welchem die Zwillingsebene eine mögliche Krystallfläche ist, weil dieser Fläche alsdann in bezug auf die Structur des Krystalles eine besondere Bedeutung zukommt, und es daher bei einem triklinen Krystalle angezeigt erscheint, von ihr als einer der Elementarflächen auszugehen. Falls dieselbe nun an dem Krystalle nicht oder wenigstens nicht so ausgebildet ist, daß sie genaue Messungen gestattet, so kann ihre Position auf folgende Art berechnet werden: Seien P und $\underline{P}$, sowie Q und $\underline{Q}$ je zwei einander entsprechende Flächen der beiden Krystalle, so wird offenbar sowohl der Bogen $P\underline{P}$, als $Q\underline{Q}$ von der Zwillingsebene halbiert, daher die letztere der Zone $[P\underline{P}]$, wie der Zone $[Q\underline{Q}]$ angehört; der Pol S der Zwillingsebene (bzw. der Punkt, in welchem deren Normale, die Zwillingsaxe, die Kugeloberfläche trifft) ist also der Schnittpunkt jener beiden Zonenkreise, und

zwar ist $PS = 90^\circ + \frac{1}{2}P\underline{P}$ und $QS = 90^\circ + \frac{1}{2}Q\underline{Q}$. Hat man also die beiden Winkel $P\underline{P}$ und $Q\underline{Q}$ gemessen, und kennt man den Winkelabstand der beiden Flächen P und Q des einen Krystalles, so sind die drei Seiten des sphärischen Dreieckes PQS gegeben und daher die Position der Zwillingsebene so genau bestimmt, wie die irgendeiner andern Fläche desselben Krystalles durch ihre Winkel zu zwei bekannten Flächen. Werden alsdann die Pole des zweiten Krystalles in die Projection des ersten so eingetragen, daß sie gegen diese um die Zwillingsaxe 180° gedreht erscheinen, so ergeben sich ohne weiteres diejenigen sphärischen Dreiecke, welche dazu dienen können, den Winkel irgendeiner Fläche des einen Krystalles zu irgendeiner des andern zu berechnen und durch Vergleichung des Resultates mit dem beobachteten Werte sowohl die Richtigkeit der Bestimmung des Zwillingsgesetzes, als die Genauigkeit der betreffenden Messungen zu controllieren.

Sollen für einen triklinen Krystall andere Axen und eine andere Grundform gewählt werden, so verfährt man folgendermaßen: Man berechnet nach S. 309 die Symbole der drei Kanten, welche man als neue Axen annehmen will; diese Symbole seien: $[u_1 v_1 w_1]$ für die neue Axe a, $[u_2 v_2 w_2]$ für die neue Axe b, $[u_3 v_3 w_3]$ für die neue Axe c. Will man nun der bisherigen Fläche (efg) in der neuen Stellung des Krystalles das Symbol $(e'f'g')$ geben, z. B. sie zur Einheitsfläche $(1\bar{1}1)$ machen, so ergeben sich die neuen Indices $(h'k'l')$ einer beliebigen Fläche (hkl) der alten Stellung aus den folgenden (von Lewis entwickelten) Transformationsgleichungen:

$$\frac{h'}{e'} = \frac{hu_1 + kv_1 + lw_1}{eu_1 + fv_1 + gw_1}$$

$$\frac{k'}{f'} = \frac{hu_2 + kv_2 + lw_2}{eu_2 + fv_2 + gw_2}$$

$$\frac{l'}{g'} = \frac{hu_3 + kv_3 + lw_3}{eu_3 + fv_3 + gw_3}.$$

In dieser Weise werden die neuen Symbole aller Flächen bestimmt und ihnen entsprechend die neuen Elemente des Krystalles nach den früher angegebenen Methoden berechnet.

Da die obigen Formeln aus dem Rationalitätsgesetze bzw. dem Zonengesetze abgeleitet sind, so besitzen sie allgemeine Gültigkeit für die Krystalle, welche auch deren Symmetrie sei. Eine praktische Verwertung kommt ihnen jedoch, außer im triklinen Systeme, nur noch im monoklinen zu, wenn nämlich die a- und die c-Axe durch zwei andere, in der Symmetrieebene gelegene Kanten ersetzt werden sollen; es liegt dann der specielle Fall vor, daß die b-Axe ihre Bedeutung behält, also in obigen Gleichungen $u_2 = 0$, $v_2 = 1$, $w_2 = 0$ ist. In den übrigen Krystallsystemen findet eine Transformation der Axen nicht statt.

Berechnung durch das Ausgleichungsverfahren.

Wenn auf Grund der Messung einer Anzahl von gleichartigen Krystallen die Mittelwerte für eine Art von Flächenwinkeln nach S. 564 zu einem Generalmittel vereinigt werden, so möge dieses als der »beobachtete Wert« des betreffenden Flächenwinkels oder kurz als »Beobachtung« bezeichnet werden; demselben kann unter Berücksichtigung der Zahl und Güte der Einzelmessungen ein »Gewicht« g zugeschrieben werden[1]). Hat man nun m solcher »Beobachtungen« und ist diese Zahl größer, als die zur Berechnung der Elemente des Krystalles erforderliche Zahl n, so sind jene m Winkel voneinander abhängig, d. h. aus je n derselben folgen die übrigen, aber je nach der Wahl der zur Rechnung benutzten n Winkel würden sich für die übrigen $m - n$ etwas verschiedene Werte ergeben; es bestehen also zwischen den m Beobachtungen Widersprüche. Der Zweck der hier zu besprechenden Methode ist nun, diese Widersprüche auszugleichen, d. h. diejenigen Werte der m Winkel zu berechnen, welche sich allen Beobachtungen am nächsten anschließen. Bezeichnet man die Differenz zwischen einem so berechneten und dem beobachteten Werte als den Fehler des betreffenden Winkels, so sind nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung diejenigen Werte die wahrscheinlichsten, bei denen die Summe der Quadrate aller Fehler ein Minimum ist. Danach wird das Ausgleichungsverfahren auch die »Methode der kleinsten Quadrate« genannt[2]). Dieselbe setzt voraus, daß die Beobachtungsfehler »zufällige« sind, d. h. ebenso leicht im positiven wie im negativen Sinne erfolgen können, und daß die »Beobachtungen« entweder gleich gut sind oder, wenn dies nicht der Fall, ihre »Gewichte« in einem bestimmten Zahlenverhältnisse stehen. Bei den krystallographischen Messungen treten nun zu diesen, den eigentlichen Beobachtungsfehlern, noch andere hinzu, welche durch Unvollkommenheiten der Ausbildung der Krystalle bedingt sind, und wenn letztere einseitige Abweichungen von der idealen Form bewirken,

---

1) Wenn alle Einzelbeobachtungen a_1, a_2, ... bis a_n gleich gut sind, so ist der wahrscheinlichste Wert das arithmetische Mittel

$$M = \frac{a_1 + a_2 \cdots + a_n}{n}.$$

Setzt man dann das Gewicht einer Einzelbeobachtung = 1, so ist das Gewicht des Mittels $= n$. Haben die Gewichte der Beobachtungen einen gemeinsamen Teiler, so darf man natürlich durch diesen dividieren.

Bezeichnet man die Differenzen $M - a_1$, $M - a_2$, ... $M - a_n$ mit c_1, c_2, ... c_n, so heißt die Größe $m = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2}{n-1}}$ der mittlere Fehler.

2) Die für die Krystallographie in Betracht kommende Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ist hauptsächlich bearbeitet worden in der Abhandlung von Beckenkamp, Zeitschr. f. Kryst. 1894, **22**, 376, welcher das Folgende mit einigen vom Verf. selbst vorgeschlagenen Änderungen entlehnt ist.

so können solche Fehler natürlich durch jene Berechnungsmethode nicht eliminiert werden. Aus diesem Grunde ist es geeignet, nur solche Formen eines Krystalles dieser Berechnung zu unterwerfen, welche sehr vollkommen ausgebildet erscheinen, d. h. deren Flächen einfache und tadellose Reflexe liefern, deren je zwei entgegengesetzte Flächen sich durch die Messung als streng parallel erweisen, und welche endlich an verschiedenen Krystallen sehr gut übereinstimmende Winkel zeigen. Bei dieser Beschränkung wird die Zahl m der »Beobachtungen« meist nicht viel größer sein als n, die zur Berechnung der Elemente notwendige, und nur für diesen, verhältnismäßig einfacheren Fall soll auch im folgenden der Gang der Rechnung angegeben werden. Hat man mit Hilfe derselben statt der »beobachteten« m Winkel eines Krystalles die »berechneten«, d. h. die wahrscheinlichsten Werte gefunden, so existieren nun zwischen ihnen keine Widersprüche mehr, daher es gleichgültig ist, aus welchen n derselben man schließlich die Elemente des Krystalles berechnet (selbstverständlich wählt man hierzu diejenigen, welche nach dem Vorhergehenden die einfachste Berechnung ermöglichen).

Triklines Krystallsystem. Es seien vier Flächen P_1, P_2, P_3, P_4, von denen nicht drei in einer Zone liegen, gleich gut meßbar, und die sämtlichen möglichen Winkel zwischen ihnen beobachtet, nämlich $P_1P_2 = a_1$, $P_1P_3 = a_2$, $P_1P_4 = a_3$, $P_2P_3 = a_4$, $P_2P_4 = a_5$, $P_3P_4 = a_6$, wobei es gleichgültig ist, ob der Pol P_4 innerhalb des von $P_1P_2P_3$ gebildeten Dreieckes liegt (Fig. 631) oder nicht (Fig. 632).

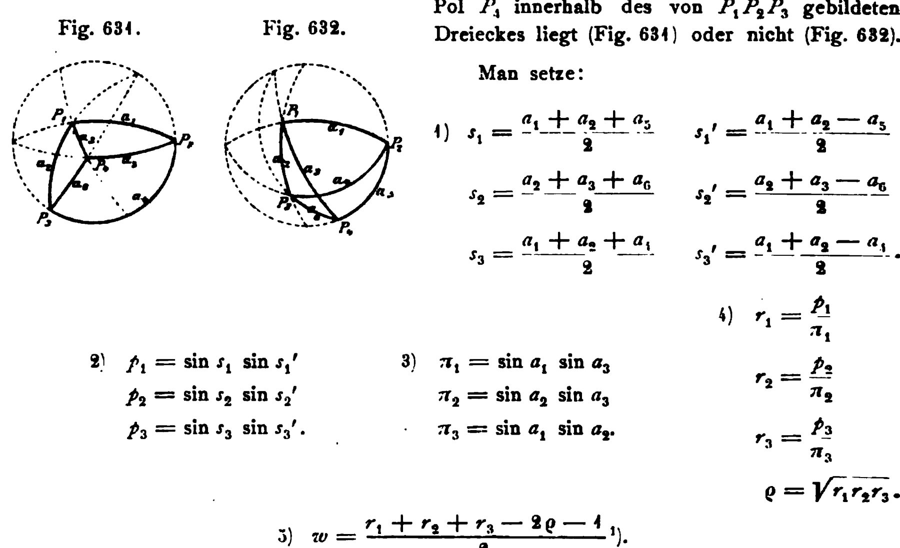


Fig. 631. Fig. 632.

Man setze:

$$1)\quad s_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_5}{2} \qquad s_1' = \frac{a_1 + a_2 - a_5}{2}$$

$$s_2 = \frac{a_2 + a_3 + a_6}{2} \qquad s_2' = \frac{a_2 + a_3 - a_6}{2}$$

$$s_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_4}{2} \qquad s_3' = \frac{a_1 + a_2 - a_4}{2}.$$

$$2)\quad p_1 = \sin s_1 \sin s_1' \qquad p_2 = \sin s_2 \sin s_2' \qquad p_3 = \sin s_3 \sin s_3'.$$

$$3)\quad \pi_1 = \sin a_1 \sin a_3 \qquad \pi_2 = \sin a_2 \sin a_3 \qquad \pi_3 = \sin a_1 \sin a_2.$$

$$4)\quad r_1 = \frac{p_1}{\pi_1} \qquad r_2 = \frac{p_2}{\pi_2} \qquad r_3 = \frac{p_3}{\pi_3} \qquad \varrho = \sqrt{r_1 r_2 r_3}.$$

$$5)\quad w = \frac{r_1 + r_2 + r_3 - 2\varrho - 1}{2}\,[1]).$$

$$6)\quad \delta_1 = \frac{r_1 - \varrho}{4} \qquad \delta_2 = \frac{r_2 - \varrho}{4} \qquad \delta_3 = \frac{r_3 - \varrho}{4}.$$

1) Diese Gleichung heißt diejenige des Widerspruches, weil $w = 0$ sein müßte, wenn die sechs Beobachtungen fehlerfrei wären, d. h. wenn man statt der beobachteten Werte $a_1, a_2, \ldots$ die wahren einsetzen könnte.

$$7)\quad q_1 = \frac{\sin(s_1 + s_1')}{p_1} \qquad q_1' = \frac{\sin(s_1 - s_1')}{p_1}$$

$$q_2 = \frac{\sin(s_2 + s_2')}{p_2} \qquad q_2' = \frac{\sin(s_2 - s_2')}{p_2}$$

$$q_3 = \frac{\sin(s_3 + s_3')}{p_3} \qquad q_3' = \frac{\sin(s_3 - s_3')}{p_3}.$$

$$8)\quad \delta_1 q_1 = \lambda_1 \qquad \delta_2 q_2 = \lambda_2 \qquad \delta_3 q_3 = \lambda_3$$

$$k_1 = \lambda_1 + \lambda_3 - 2(\delta_1 + \delta_3)\ \mathrm{cotang}\ a_1$$

$$k_2 = \lambda_2 + \lambda_3 - 2(\delta_2 + \delta_3)\ \mathrm{cotang}\ a_2$$

$$k_3 = \lambda_1 + \lambda_2 - 2(\delta_1 + \delta_2)\ \mathrm{cotang}\ a_3$$

$$k_4 = -\delta_3 q_3' \qquad k_5 = -\delta_1 q_1' \qquad k_6 = -\delta_2 q_2'.$$

$$9)\quad -F = \frac{w}{\frac{k_1^2}{g_1} + \frac{k_2^2}{g_2} + \cdots + \frac{k_6^2}{g_6}},$$

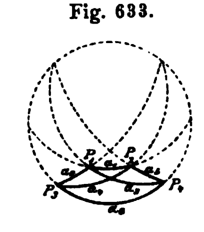
wo $g_1, g_2, \ldots g_6$ die Gewichte der sechs beobachteten Winkel $a_1, a_2, \ldots a_6$. Alsdann sind die berechneten (ausgeglichenen oder wahren) Werte der sechs Winkel:

$$P_1P_2 = a_1 + \frac{k_1 F}{g_1 i}, \qquad P_1P_3 = a_2 + \frac{k_2 F}{g_2 i}, \qquad \ldots, \qquad P_3P_4 = a_6 + \frac{k_6 F}{g_6 i},$$

in welchen Formeln der Factor $i = 0{,}00029089$, wenn die Correctionen der beobachteten Werte $a_1, a_2, \ldots a_6$ in Minuten und deren Bruchteilen angegeben werden sollen.

Monoklines Krystallsystem. a) Es seien die sechs Winkel $a_1, a_2, \ldots a_6$ (s. Fig. 633) zwischen vier Flächen, P_1P_2, P_3P_4, zweier Prismen gemessen. Von diesen sind aber a_4 mit a_3 und a_5 mit a_2 gleichwertig und werden mit denselben zu einem Mittelwerte vereinigt, der mit a_3 bzw. a_2 bezeichnet werden soll, so daß also vier beobachtete Werte a_1, a_2, a_3, a_6 vorliegen. Die Gewichte von a_2 und a_3 sind je die Summe der Gewichte von a_2 und a_5 bzw. a_3 und a_4, während diejenigen von a_1 und a_6 vierfach zu nehmen sind, weil bei der folgenden Rechnung ihre halben Werte in Betracht kommen, und nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung das Gewicht für $\frac{1}{n}$ eines gemessenen Winkels n^2-mal so groß zu nehmen ist. Setzt man nun

Fig. 633.



$$a_1' = 90^\circ - \tfrac{1}{2} a_1 \qquad a_6' = 90^\circ - \tfrac{1}{2} a_6,$$

so gestaltet sich die Berechnung der vier Beobachtungen folgendermaßen:

$$w = \cos a_1' \cos a_6' - \sin \tfrac{1}{2}(a_3 + a_2) \sin \tfrac{1}{2}(a_3 - a_2)$$

$$k_1' = -\sin a_1' \cos a_6'$$

$$k_2 = +\tfrac{1}{2} \sin a_2$$

$$k_3 = -\tfrac{1}{2} \sin a_3$$

$$k_6' = -\cos a_1' \sin a_6'$$

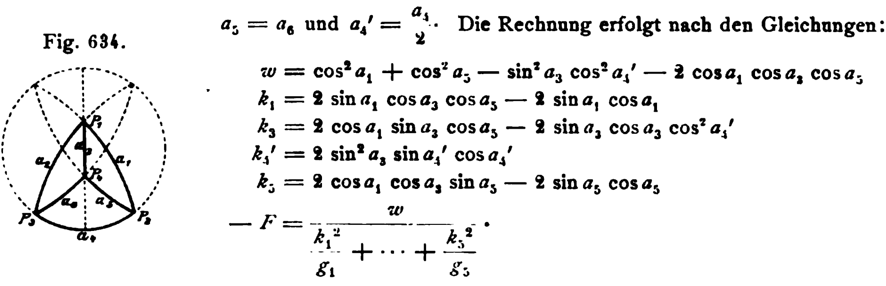
$$-F = \frac{w}{\frac{k_1'^2}{g_1'} + \frac{k_2^2}{g_2} + \frac{k_3^2}{g_3} + \frac{k_6'^2}{g_6'}}.$$

Alsdann sind zu den vier beobachteten Werten a_1', a_2, a_3, a_6' folgende Correctionen zu addieren:

$$\frac{k_1' F}{g_1' i} \qquad \frac{k_2 F}{g_2 i} \qquad \frac{k_3 F}{g_3 i} \qquad \frac{k_6' F}{g_6' i}.$$

b) Es seien die Winkel eines Prismas P_2P_3 und zweier zu (010) senkrechter Flächen P_1P_4, von denen keine in der Prismenzone liegt, gemessen (Fig. 634). Alsdann ist $a_1 = a_2$, $a_5 = a_6$ und $a_4' = \frac{a_4}{2}$. Die Rechnung erfolgt nach den Gleichungen:

Fig. 634.



$$w = \cos^2 a_1 + \cos^2 a_5 - \sin^2 a_3 \cos^2 a_4' - 2 \cos a_1 \cos a_3 \cos a_5$$
$$k_1 = 2 \sin a_1 \cos a_3 \cos a_5 - 2 \sin a_1 \cos a_1$$
$$k_3 = 2 \cos a_1 \sin a_3 \cos a_5 - 2 \sin a_3 \cos a_3 \cos^2 a_4'$$
$$k_4' = 2 \sin^2 a_3 \sin a_4' \cos a_4'$$
$$k_5 = 2 \cos a_1 \cos a_3 \sin a_5 - 2 \sin a_5 \cos a_5$$
$$-F = \frac{w}{\frac{k_1^2}{g_1} + \cdots + \frac{k_5^2}{g_5}}.$$

Wird schließlich mit a_n ein beobachteter Wert bezeichnet, so ist der zugehörige wahre Wert $= a_n + c_n$, worin $c_n = \frac{k_n F}{g_n i}$.

Rhombisches Krystallsystem. a) Es sind die vier Flächen $P_1P_2P_3P_4$ einer rhombischen Pyramide gemessen worden (s. Fig. 635). Dann ist:

Fig. 635.

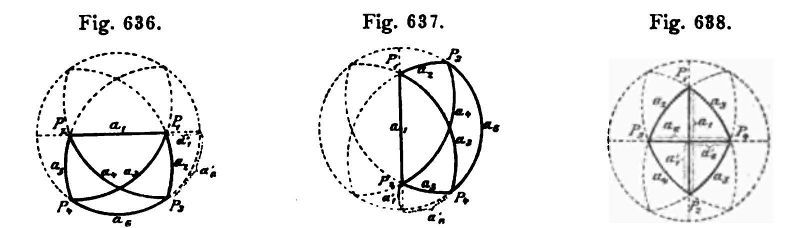
$$a_1 = a_6 \qquad a_2 = a_5 \qquad a_3 = a_4$$
$$a_1' = \frac{a_1}{2} \qquad a_4' = \frac{a_4}{2} \qquad a_5' = \frac{a_5}{2}$$
$$w = \sin^2 a_4' - \sin^2 a_1' - \sin^2 a_5'$$
$$k_1' = -2 \sin a_1' \cos a_1'$$
$$k_4' = +2 \sin a_4' \cos a_4'$$
$$k_5' = -2 \sin a_5' \cos a_5'$$
$$-F = \frac{w}{\frac{k_1'^2}{g_1'} + \frac{k_4'^2}{g_4'} + \frac{k_5'^2}{g_5'}}$$

und die Correction, welche zu einem beobachteten Werte a_n hinzuzufügen ist,

$$c_n = \frac{k_n F}{g_n i}.$$

b) Sind dagegen die Winkel zwischen vier Flächen zweier Prismen, welche verschiedenen Axen des Krystalles parallel sind, gemessen worden, so können jene entweder so

Fig. 636. Fig. 637. Fig. 638.



liegen, wie in Fig. 636 und 637 angegeben ist, oder so, wie die Pole in Fig. 638 angeordnet sind. Man setzt nun

für die beiden ersteren Fälle:

$$a_1' = 90^\circ - \frac{a_1}{2} \qquad a_6' = 90^\circ - \frac{a_6}{2},$$

für den letzteren:

$$a_1' = \frac{a_1}{2} \qquad a_6' = \frac{a_6}{2}.$$

Ferner ist

$$a_2 = a_5 = 180^\circ - a_3 = 180^\circ - a_4,$$

und es gelten die Formeln:

$$w = \cos a_2 - \cos a_1' \cos a_6'$$

$$k_1' = + \sin a_1' \cos a_6' \qquad k_2 = - \sin a_2 \qquad k_6' = + \cos a_1' \sin a_6'$$

$$-F = \frac{w}{\frac{k_1'^2}{g_1'} + \frac{k_2^2}{g_2} + \frac{k_6'^2}{g_6'}},$$

endlich die Correctionen:

$$c_n = \frac{k_n F}{g_n i}.$$

Tetragonales Krystallsystem. a) An einer tetragonalen Pyramide (s. Fig. 639) sind die zweierlei Winkel $P_0 P_0' = 2a_0$ und $P_0 P_1 = 2a_1$ gemessen und $\alpha = 45^\circ$ bekannt. Alsdann ist

Fig. 639.

$$w = \sin \alpha \cdot \sin a_0 - \sin a_1$$

$$k_0 = + \sin \alpha \cdot \cos a_0 \quad . \quad k_1 = - \cos a_1$$

$$-F = \frac{w}{\frac{k_0^2}{g_0} + \frac{k_1^2}{g_1}}$$

und die corrigierten Werte von a_0 und a_1:

$$a_0 + \frac{k_0 F}{g_0 i} \qquad \text{und} \qquad a_1 + \frac{k_1 F}{g_1 i}.$$

b) Seien an einer ditetragonalen Pyramide $\{hkl\}$ (Fig. 640) durch die Messung gegeben der Winkel zur Basis $a_0 = \frac{1}{2} P_0 P_0'$ und die halben Polkantenwinkel $a_1 = \frac{1}{2} P_0 P_1$ und $a_2 = \frac{1}{2} P_0 P_2$, so sind diese Winkel durch zwei Bedingungsgleichungen verknüpft wegen des rationalen Verhältnisses $h:k$; es ergeben sich demnach zwei Gleichungen des Widerspruches usf. Setzt man

Fig. 640.

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{h}{k} \qquad \alpha_1 = \beta - 45^\circ \qquad \alpha_2 = 45^\circ - \alpha_1,$$

so ist

$$w^{\mathrm{I}} = \sin \alpha_1 \sin a_0 - \sin a_1 \qquad w^{\mathrm{II}} = \sin \alpha_2 \sin a_0 - \sin a_2$$

$$k_0^{\mathrm{I}} = \sin \alpha_1 \cos a_1 \qquad k_0^{\mathrm{II}} = \sin \alpha_2 \cos a_0$$

$$k_1^{\mathrm{I}} = - \cos a_1 \qquad k_2^{\mathrm{II}} = - \cos a_2 .$$

Ferner:

$$-F^{\mathrm{I}} = \frac{\varkappa_{22} w^{\mathrm{I}} - \varkappa_{12} w^{\mathrm{II}}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}\varkappa_{21}} \qquad -F^{\mathrm{II}} = \frac{\varkappa_{11} w^{\mathrm{II}} - \varkappa_{12} w^{\mathrm{I}}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}\varkappa_{21}},$$

worin

$$\varkappa_{11} = \frac{k_1^{\mathrm{I}} k_1^{\mathrm{I}}}{g_1} + \frac{k_0^{\mathrm{I}} k_0^{\mathrm{I}}}{g_0} \qquad \varkappa_{12} = \frac{k_0^{\mathrm{I}} k_0^{\mathrm{II}}}{g_0}$$

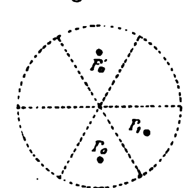
$$\varkappa_{21} = \frac{k_0^{\mathrm{II}} k_0^{\mathrm{I}}}{g_0} \qquad \varkappa_{22} = \frac{k_2^{\mathrm{II}} k_2^{\mathrm{II}}}{g_2} + \frac{k_0^{\mathrm{II}} k_0^{\mathrm{II}}}{g_0}$$

und die den beobachteten Werten a_0, a_1 und a_2 hinzuzufügenden Correctionen

$$c_0 = \frac{k_0^{\mathrm{I}} F^{\mathrm{I}} + k_0^{\mathrm{II}} F^{\mathrm{II}}}{g_0 i} \qquad c_1 = \frac{k_1^{\mathrm{I}} F^{\mathrm{I}}}{g_1 i} \qquad c_2 = \frac{k_2^{\mathrm{II}} F^{\mathrm{II}}}{g_2 i}.$$

Hexagonales Krystallsystem. a) Gegeben sind $a_0 = \frac{1}{2} P_0 P_0'$ und $a_1 = \frac{1}{2} P_0 P_1$ einer hexagonalen Pyramide (s. Fig. 641); wenn $\alpha = 30^\circ$, so ist

Fig. 641.



$$w = \sin \alpha \sin a_0 - \sin a_1$$

$$k_0 = \sin \alpha \cos a_0 \qquad k_1 = - \cos a_1$$

$$-F = \frac{w}{\frac{k_0^2}{g_0} + \frac{k_1^2}{g_1}}$$

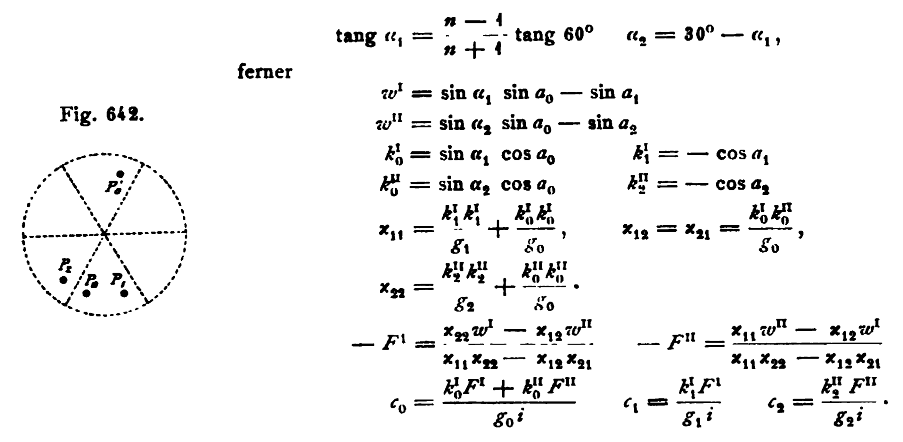
$$c_0 = \frac{k_0 F}{g_0 i} \qquad c_1 = \frac{k_1 F}{g_1 i}.$$

b) An einer dihexagonalen Pyramide $\{hikl\}$ seien die dreierlei Kanten gemessen, und zwar: $a_0 = \frac{1}{2} P_0 P_0'$, $a_1 = \frac{1}{2} P_0 P_1$, $a_2 = \frac{1}{2} P_0 P_2$ (s. Fig. 642). Setzt man $h : k$ (d. i. das Verhältnis zweier benachbarter Parameter auf den Nebenaxen) $= n$, so ist:

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{n-1}{n+1} \operatorname{tang} 60^\circ \qquad \alpha_2 = 30^\circ - \alpha_1,$$

ferner

Fig. 642.



$$w^{\mathrm{I}} = \sin \alpha_1 \sin a_0 - \sin a_1$$
$$w^{\mathrm{II}} = \sin \alpha_2 \sin a_0 - \sin a_2$$
$$k_0^{\mathrm{I}} = \sin \alpha_1 \cos a_0 \qquad k_1^{\mathrm{I}} = -\cos a_1$$
$$k_0^{\mathrm{II}} = \sin \alpha_2 \cos a_0 \qquad k_2^{\mathrm{II}} = -\cos a_2$$
$$\varkappa_{11} = \frac{k_1^{\mathrm{I}} k_1^{\mathrm{I}}}{g_1} + \frac{k_0^{\mathrm{I}} k_0^{\mathrm{I}}}{g_0}, \qquad \varkappa_{12} = \varkappa_{21} = \frac{k_0^{\mathrm{I}} k_0^{\mathrm{II}}}{g_0},$$
$$\varkappa_{22} = \frac{k_2^{\mathrm{II}} k_2^{\mathrm{II}}}{g_2} + \frac{k_0^{\mathrm{II}} k_0^{\mathrm{II}}}{g_0}.$$
$$-F^{\mathrm{I}} = \frac{\varkappa_{22} w^{\mathrm{I}} - \varkappa_{12} w^{\mathrm{II}}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}\varkappa_{21}} \qquad -F^{\mathrm{II}} = \frac{\varkappa_{11} w^{\mathrm{II}} - \varkappa_{12} w^{\mathrm{I}}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}\varkappa_{21}}$$
$$c_0 = \frac{k_0^{\mathrm{I}} F^{\mathrm{I}} + k_0^{\mathrm{II}} F^{\mathrm{II}}}{g_0 i} \qquad c_1 = \frac{k_1^{\mathrm{I}} F^{\mathrm{I}}}{g_1 i} \qquad c_2 = \frac{k_2^{\mathrm{II}} F^{\mathrm{II}}}{g_2 i}.$$

Trigonales Krystallsystem. Da an einem Rhomboeder nur eine Art von Winkeln möglich ist, so kann Ausgleichung nur stattfinden an einem Skalenoeder (s. Fig. 643). Sind durch Messung gegeben dessen drei Arten von Kanten, nämlich: $a_0 = \frac{1}{2} P_0 P_0'$, $a_1 = \frac{1}{2} P_0 P_1$ und $a_2 = \frac{1}{2} P_0 P_2$, und habe n dieselbe Bedeutung, wie im vorigen Falle, so ist:

$$\operatorname{tang} \alpha_0 = \frac{n-1}{n+1} \operatorname{tang} 60^\circ \qquad \alpha_1 = 60^\circ - \alpha_0 \qquad \alpha_2 = 60^\circ + \alpha_0$$

Fig. 643.

$$w^{\mathrm{I}} = \sin \alpha_0 \sin a_1 - \sin \alpha_1 \sin a_0$$
$$w^{\mathrm{II}} = \sin \alpha_0 \sin a_2 - \sin \alpha_2 \sin a_0$$
$$k_1^{\mathrm{I}} = \sin \alpha_0 \cos a_1 \qquad k_0^{\mathrm{I}} = -\sin \alpha_1 \cos a_0$$
$$k_0^{\mathrm{II}} = \sin \alpha_0 \cos a_2 \qquad k_2^{\mathrm{II}} = -\sin \alpha_2 \cos a_0$$
$$\varkappa_{11} = \frac{k_1^{\mathrm{I}} k_1^{\mathrm{I}}}{g_1} + \frac{k_0^{\mathrm{I}} k_0^{\mathrm{I}}}{g_0} \qquad \varkappa_{12} = \frac{k_0^{\mathrm{I}} k_0^{\mathrm{II}}}{g_0}$$
$$\varkappa_{21} = \frac{k_0^{\mathrm{II}} k_0^{\mathrm{I}}}{g_0} \qquad \varkappa_{22} = \frac{k_2^{\mathrm{II}} k_2^{\mathrm{II}}}{g_2} + \frac{k_0^{\mathrm{II}} k_0^{\mathrm{II}}}{g_0}$$
$$-F^{\mathrm{I}} = \frac{\varkappa_{22} w^{\mathrm{I}} - \varkappa_{12} w^{\mathrm{II}}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}\varkappa_{21}} \qquad -F^{\mathrm{II}} = \frac{\varkappa_{11} w^{\mathrm{II}} - \varkappa_{12} w^{\mathrm{I}}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}\varkappa_{21}}$$
$$c_1 = \frac{k_1^{\mathrm{I}} F^{\mathrm{I}}}{g_1 i} \qquad c_2 = \frac{k_2^{\mathrm{II}} F^{\mathrm{II}}}{g_2 i} \qquad c_0 = \frac{k_0^{\mathrm{I}} F^{\mathrm{I}} + k_0^{\mathrm{II}} F^{\mathrm{II}}}{g_0 i}.$$

Im vorstehenden sind die einfachsten Fälle der Ausgleichungsrechnung angegeben und damit zugleich diejenigen, welche praktisch zunächst in Frage kommen, wenn es sich darum handelt, die Elemente eines Krystalles etwa mit einer Genauigkeit auf eine Einheit der 4. Decimale, bzw. 0,'1—0,'2, also einer etwas größeren, als der gewöhnlichen, S. 301 erwähnten, zu bestimmen. Wo auch diese noch nicht ausreicht, z. B. bei Untersuchungen über die Änderungen der Winkel durch die thermische Ausdehnung der Krystalle, müssen unter Umständen noch mehr Winkel herbeigezogen werden, und alsdann gestaltet sich die Rechnung auch erheblich umständlicher. Für solche Fälle und für Weiteres über die Methode überhaupt sei hingewiesen auf die Arbeiten von J. Beckenkamp, Zeitschr. f. Krystallographie und Mineralogie 1881, 5, 463 und 1894, 22, 376.

Graphische Berechnung der Krystalle.

Wie bereits S. 318 erwähnt wurde, kann eine stereographische Projection dazu dienen, die bei der Berechnung eines Krystalles vorkommenden Aufgaben der sphärischen Trigonometrie graphisch zu lösen, wenn sie mit genügender Genauigkeit angefertigt wird. Die Grundzüge der graphischen Berechnung der Krystalle hat zuerst Fedorow entwickelt (Zeitschr. f. Krystallographie 1893, **21**, 617f.). Um größtmögliche Genauigkeit zu erreichen, benutzt er zur Herstellung der Projection eigene, in Blaudruck hergestellte Netze[1]) auf durchsichtigem Papiere, welche die zur directen Eintragung der Pole nötigen, stereographisch projicierten Curven innerhalb eines Grundkreises von 20 cm Durchmesser enthalten. Ganz besonders geeignet sind diese Netze zur Eintragung der Resultate optischer Bestimmungen (Pole der optischen Axen usw.) und zur Ableitung der Lage der Axenebene, der Auslöschungscurven (s. S. 357) u. dgl. aus jenen Daten, weil bei den hier gesuchten Werten meist keine höhere Genauigkeit erforderlich ist, als sie bei dieser graphischen Methode leicht zu erreichen ist, d. h. auf $\frac{1}{2}^\circ$—1°. Zur Vereinfachung der Construction einer stereographischen Projection verwendet G. Wulff (Zeitschr. f. Krystallographie 1901, **36**, 14f.) eine Hilfsprojection, nämlich ein möglichst genau gearbeitetes, auf starkem Papiere gedrucktes Netz (a. a. O. Taf. II)[1]), welches in einem Grundkreise von 20 cm Durchmesser die stereographischen Projectionen folgender Curven von 2° zu 2° ausgezogen enthält: 1) diejenigen der größten Kreise auf der Kugel, welche durch zwei gegenüberliegende, auf dem Grundkreise liegende Pole PP gehen (Meridiane); 2) die Projectionen der Kreise, welche auf der Kugel um einen Punkt P mit den Radien 2°, 4°, .. beschrieben sind (Parallelkreise) und von denen derjenige mit 90° Abstand von beiden Polen (der Äquator der Projection) als Durchmesser des Grundkreises QQ, senkrecht zu PP, erscheint. Auf diese Hilfsprojection legt man nun ein durchsichtiges Pauspapier, auf welchem ein Grundkreis von 20 cm Durchmesser gezogen und dessen Mittelpunkt bezeichnet ist, und kann nun auf dem Pauspapiere ohne Anwendung des Zirkels die stereographische Projection eines Krystalles aus freier Hand mit einer Genauigkeit (auf etwa $\frac{1}{2}^\circ$) entwerfen, welche jedenfalls genügt, größere Fehler in der Berechnung, wie sie bei complicierten triklinen Krystallen, besonders durch Verwechselung eines Winkels mit seinem Supplemente, leicht vorkommen, sofort zu erkennen. Eine solche Projection kann also mit großem Vorteile zur fortlaufenden Controlle einer Krystallberechnung benutzt werden. Die Herstellung derselben möge an dem S. 602 (Fig. 625 und 626) betrachteten Beispiele eines Krystalles von Kupfervitriol erläutert werden.

1) Hergestellt von der lithographischen Kunstanstalt von H. Köhler in München und zu beziehen durch die Verlagsbuchhandlung.



Nachdem die Pole *a*, *b*, *m*, *μ* und *π* mittels ihrer bekannten Flächenwinkel eingetragen sind, wird der Pol *c* auf folgende Art gefunden: die Zeichnung wird auf der Hilfsprojection concentrisch so gedreht, daß die Durchmesser *bb* der Zeichnung und *PP* des Netzes zusammenfallen; alsdann ist offenbar der Zonenkreis *bcb* derjenige Meridian des letzteren, welcher mit dem Grundkreise den Winkel (180°—*β*) einschließt, denn diese beiden Zonenkreise stehen auf den Axen *a* bzw. *c* senkrecht; ist also der Axenwinkel *β* berechnet, so kann man den betreffenden Zonenkreis durch Interpolation zwischen den beiden nächstliegenden Meridianen der Hilfsprojection aus freier Hand auf dem Pauspapiere ziehen; die Orte der auf demselben liegenden Pole *c*, *q* usw. findet man direct, indem man deren Winkelabstand von *b* auf den Parallelkreisen des Netzes abzählt. Den Pol *c* kann man aber auch, ohne vorher *β* berechnet zu haben, auf folgende Art finden: man bringt die Pole *aa* der Zeichnung mit den Polen *PP* des Netzes zur Deckung und zieht auf dem Pauspapiere den Parallelkreis, welcher dem Flächenwinkel *a* : *c* entspricht; alsdann dreht man die Zeichnung concentrisch auf dem Netze, bis dessen Pole *PP* mit den Punkten *bb* der Zeichnung zusammenfallen, und zieht den dem Winkel *b* : *c* entsprechenden Parallelkreis auf dem Pauspapiere; der Pol *c* ist der Schnittpunkt dieser beiden Parallelkreise[1]), und der durch *c* gehende Meridian ist der Zonenkreis *bcb*, auf welchem, wie vorher, die Pole *q*, *x* usw. durch Abzählen auf den Parallelkreisen des Netzes eingetragen werden. Jeder Pol dieser Zone, z. B. *c*, liefert mit zwei Polen auf dem Grundkreise einen neuen Zonenkreis, z. B. *aa*, indem *a* und *a* mit *P* und *P* des Netzes zur Deckung gebracht und dann der durch *c* gehende Meridian auf dem Pauspapiere gezogen wird; in denselben werden die weiteren Pole der Zone [*aca*] auf Grund ihrer Winkel zu *a* oder *c* eingetragen.

Um auf einer so hergestellten Projection die Seite eines sphärischen Dreieckes, d. h. den Winkel zwischen zwei gegebenen Polen, zu messen, verfährt man folgendermaßen: Man dreht die Zeichnung concentrisch auf dem Netze, bis die beiden Pole auf einem zwischen den Meridianen des Netzes interpolierten Meridiane liegen; die Zählung der zwischen den beiden Polen liegenden Parallelkreise des Netzes gibt die gesuchte Entfernung im Winkelmaß. Die Winkel der sphärischen Dreiecke in der Projection sind nach S. 315 die gleichen, wie auf der Kugel, d. h. es sind die Kantenwinkel (s. S. 317); die Messung eines solchen Winkels auf der Projection erfolgt mit dem Transporteur, entweder indem man durch den Scheitelpunkt des Winkels Tangenten an die beiden Schenkel desselben zieht, oder indem man im Scheitelpunkte Normalen auf die beiden Zonenkreise, deren Winkel man sucht, errichtet und deren Winkel mißt. Die Normale zu einem Zonenkreise kann genauer, als die Tangente, construiert werden, indem man von zwei gleichweit vom Scheitelpunkte entfernten Punkten des Zonenkreises zwei gleichgroße Kreise zieht und die beiden Schnittpunkte derselben verbindet. Man kann also alle Flächen- und Kantenwinkel eines Krystalles der Zeichnung entnehmen und mit den berechneten vergleichen. Außerdem kann man mit Hilfe des Netzes auch die S. 604 behandelte Aufgabe, den Pol eines gegebenen Zonenkreises zu finden, in sehr einfacher Weise lösen, indem man den Zonenkreis durch concentrisches Drehen des Pauspapieres mit einem Meridiane des Netzes zur Deckung bringt und auf dem Äquator *QQ* des Netzes den Punkt aufsucht, welcher 90° von dem auf *QQ* liegenden

1) Diese Methode kann allgemein zur Construction eines Poles dienen, dessen Abstände von zwei Polen auf dem Grundkreise bekannt sind.



Punkte des gegebenen Zonenkreises entfernt ist. Betreffs der graphischen Lösung weiterer Aufgaben mag auf die Originalabhandlung G. Wulffs a. a. O. verwiesen werden.

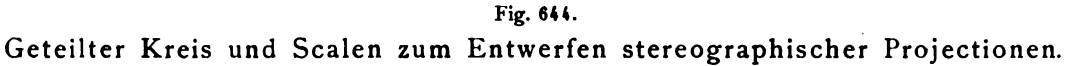
Die weitestgehende Verwendung der stereographischen Projection zur graphischen Berechnung der Krystalle ist von Penfield eingeführt worden[1]). Nach dessen Verfahren kann die Construction der Projection mit einer solchen Genauigkeit ausgeführt werden, daß man ihr die Werte der Seiten und Winkel der sphärischen Dreiecke bis auf etwa $\frac{1}{10}°$ genau entnehmen kann, und da die Krystalle vieler Substanzen nicht genauer gemessen werden können, als auf 5—10′, so kann die Berechnung derartiger Krystalle vollständig durch die stereographische Projection ersetzt werden. Um diese in genügender Genauigkeit herzustellen, benutzt Penfield eigens vorbereitete, ausreichend große Blätter guten starken Papieres, auf welchen ein Grundkreis von 14 cm Durchmesser mit Gradeinteilung am Rande aufgedruckt ist. Dieser Größe des Grundkreises entsprechend sind bestimmte Transporteure und Skalen construiert worden, mit deren Hilfe man Punkte und Kreisbögen, deren Lage auf der Kugel bekannt ist, rasch und genau auf die Bildebene zeichnen kann. Fig. 644 (a. folg. S.) ist eine verkleinerte Abbildung eines solchen Zeichnungsblattes, welches außer dem Grundkreise auch die erforderlichen Skalen aufgedruckt enthält. Zum Einzeichnen von (ihrer Winkeldistanz nach bekannten) Polen auf einem Durchmesser des Grundkreises dient der auf Carton gedruckte Transporteur I, in Fig. 645 (S. 621) in natürlicher Größe abgebildet, welcher außer der zur gewöhnlichen Messung ebener Winkel geeigneten Einteilung noch diejenige der projicierten Grade enthält; stellt man ihn senkrecht auf den Durchmesser des Grundkreises der Zeichnung, so gibt die Teilung an seiner Basis die stereographische Projection der Teilung auf seinem Halbkreise. Die gleiche Projection ist auch in Skala Nr. 3 der Fig. 644 enthalten und außerhalb des Grundkreises fortgeführt, wobei als Augenpunkt der Projection der gleiche dient, wie für die Projection innerhalb des Grundkreises. Diese Skala, welche für noch größere Abstände vom Grundkreise durch eine Tabelle ergänzt wird, gestattet die Auffindung der Centren von Zonenkreisen der Projection, so daß diese mit dem Zirkel bzw. Stangenzirkel gezogen werden können. Zur Messung des Winkelabstandes zweier Pole benutzt man, wie es S. 618 an der Wulffschen Hilfsprojection erklärt wurde, die Parallelkreise um die beiden Pole, welche mit den beiden Durchschnittspunkten des Zonenkreises mit dem Grundkreise zur Deckung gebracht werden; diese Parallelkreise sind nun auf durchsichtigem Materiale (Celluloid) aufgedruckt und dadurch ein zweiter Transporteur hergestellt, welcher auf die Zeichnung concentrisch

1) S. L. Penfield, Amer. Journ. Sc. (4) **11**, 1 u. 115, **14**, 249, und Zeitschr. f. Kryst. 1901, **35**, 1 f. und 1903, **38**, 177 f. Die Herausgabe einer ausführlichen Darstellung (v. K. Stöckl) der stereographischen Projection und ihrer Anwendung zur Berechnung und Zeichnung der Krystallformen nach den Penfieldschen Methoden, nebst den dazu gehörigen Utensilien, wird von der Verlagsfirma vorbereitet.



Fig. 644.

Geteilter Kreis und Scalen zum Entwerfen stereographischer Projectionen.



No. 1. Radien stereographisch projicierter Bögen größter Kreise, in Graden gemessen von dem geteilten Kreise aus.
No. 2. Radien stereographisch projicierter Bögen von Kleinkreisen, in Graden gemessen von dem geteilten Kreise aus.
No. 3. Grade eines verticalen größten Kreises, projiciert auf einen Durchmesser.
No. 4. Decimalteile des Radius des geteilten Kreises.

Auf der mit der Maschine geteilten Originalplatte hat der Kreis einen Durchmesser von 14 cm und ist in Grade geteilt. Die Scalen sind ferner so weiter geteilt, daß sie auch die erforderlichen Teile von Graden liefern.

so aufgelegt wird, daß seine Pole mit den erwähnten beiden Durchschnittspunkten zur Deckung kommen; zur genauen Ablesung der Winkeldistanzen auf den Parallelkreisen des Transporteurs sind diese auf der einen Hälfte desselben für jeden einzelnen Grad gezogen. Mit den auf den Zeichnungsblättern gedruckten Skalen und den beschriebenen beiden Transporteuren ist man imstande, alle vorkommenden Probleme der sphärischen Trigonometrie graphisch zu lösen. Außerdem kann man zur raschen Auffindung der beiden Punkte, in welchen der durch irgend zwei Pole gedachte Zonenkreis den Grundkreis trifft, einen Hilfstransporteur benutzen, der, ebenfalls auf Celluloid gedruckt, die Meridiane, wie in der Wulffschen Hilfsprojection von 2° zu 2°, enthält, endlich zur angenäherten Ausmittelung von sphärischen Dreiecken einen weiteren Hilfstransporteur, welcher beide Curvensysteme, aber nur von 5° zu 5°, enthält.

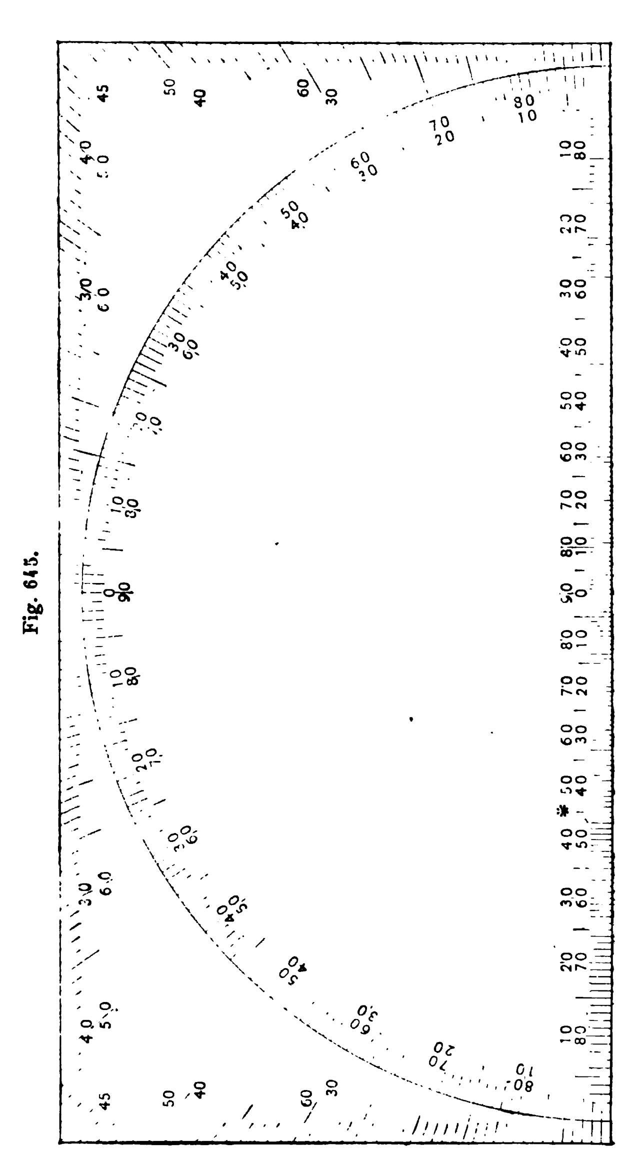


Fig. 645.

Daß man aus der stereographischen Projection nicht nur die Axenwinkel α, β, γ, sondern auch die Parameterlängen a und c ($b = 1$ gesetzt) eines beliebigen Krystalles graphisch ableiten kann, soll an dem von Penfield behandelten Beispiele des triklinen Rhodonit ($SiO_3 Mn$, zur Mineralgruppe der Pyroxene gehörig) gezeigt werden. An dem Krystalle Fig. 646 seien gemessen die Winkel:

$a:b = (100):(010) =$	$94°$	$26'$
$a:c = (100):(001)$	72	$36\frac{1}{2}$
$b:c = (010):(001)$	78	$42\frac{1}{2}$
$a:p = (100):(111)$	56	19
$c:p = (001):(111)$	29	49

Wie Fig. 647 zeigt, ist das Axenverhältnis $b:c$ bestimmt durch das ebene Dreieck mit den Winkeln α, π, ϱ, ebenso $a:c$ durch das Dreieck mit den Winkeln β, μ, ν und $a:b$ durch das Dreieck mit den Winkeln

Fig. 646.

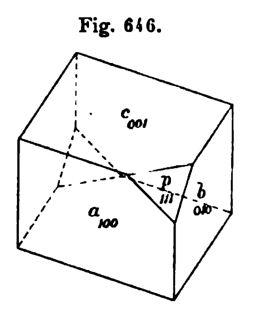
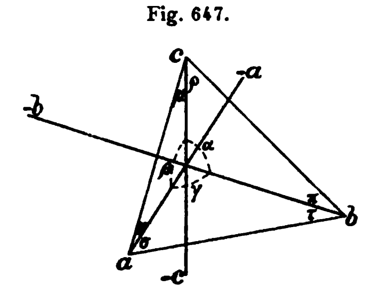
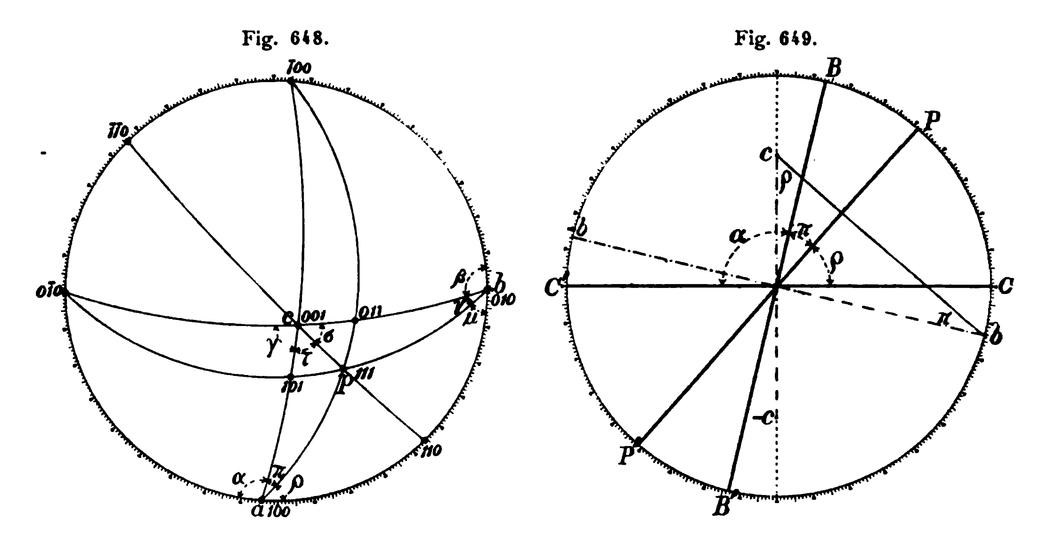


Fig. 647.



γ, σ, τ. Führt man nun auf Grund der obigen fünf Fundamentalwinkel die Construction der stereographischen Projection Fig. 648 aus, so kann man dieser sämtliche angeführten Winkel entnehmen. Die Winkel α, π, ϱ sind nämlich identisch mit den ebenso bezeichneten in Fig. 648, denn diese

Fig. 648. Fig. 649.



sind nach Früherem die Winkel, welche die Kanten von $a:c$, $a:p$ und $a:b$ miteinander bilden. Sei nun Fig. 649 ein centraler Durchschnitt der Kugel parallel a (100), so ist CC' die verticale Projection des Zonenkreises aller der c-Axe parallelen Flächen, BB' diejenige des Zonenkreises

der der *b*-Axe parallelen Flächen, und da diese beiden Zonenkreisebenen den Winkel α miteinander bilden, so kann man mit dem aus Fig. 648 entnommenen Werte von α CC' und BB' und folglich auch deren Normalen, die strichpunktierten Axen *b* und *c* mittels der Teilung des Kreises einzeichnen. Die ebenfalls durch die Normale zu *a* (100) gehende Ebene des Zonenkreises *ap* projiciert sich vertical in Fig. 649 in PP'; zieht man hierzu die Normale durch den Punkt *b*, so schneidet diese auf der *c*-Axe eine Länge ab, welche dem Parameter *c* entspricht, wenn der Radius des Kreises gleich 1 gesetzt wird. Ebenso kann das Verhältnis $a:b$ durch die Winkel γ, σ, τ graphisch bestimmt werden.

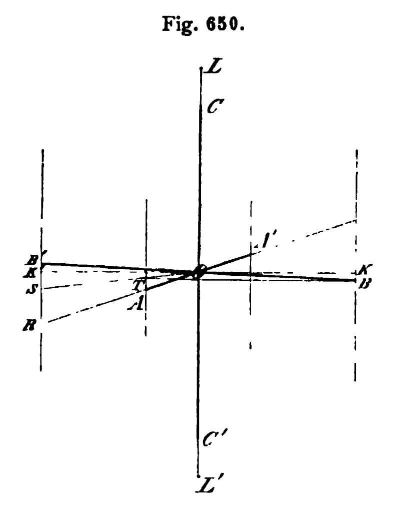
An Stelle der graphischen Berechnung kann endlich auch die Lösung der vorkommenden Aufgaben der sphärischen Trigonometrie auf instrumentellem Wege erfolgen, und ein von Fedorow construierter, mit dem Reflexionsgoniometer verbundener Apparat, welcher weiterhin beschrieben werden soll, gestattet eine Ausmittelung der Werte mit derselben Genauigkeit, wie die Messung mit dem Goniometer (s. den Abschnitt über Reflexionsgoniometer).

Anmerk. Zu den graphischen Methoden gehört auch die Benutzung eines Diagrammes, welches Herb. Smith (Min. Mag. Lond. 1904, **14**, 49 f.) construiert und Moriogramm genannt hat. Dasselbe gestattet, die Winkel von Flächen mit bestimmten Indices zu einer Symmetrieebene direct abzulesen.

Zeichnung der Krystallformen.

Die perspectivischen Bilder, durch welche in der II. Abteilung die Formen der Krystalle dargestellt wurden, sind Projectionen, bei denen das Auge in unendlicher Entfernung (weshalb alle am Krystalle parallelen Kanten auch in der Zeichnung parallel erscheinen) und außerdem um eine bestimmte Größe seitwärts von der nach vorn laufenden Axe und endlich wieder um einen gewissen Winkel erhoben über die horizontale Ebene gedacht wird, so daß die oberen Flächen, und zwar verkürzt, sichtbar werden.

Fig. 650.



Um eine solche Zeichnung anzufertigen, bedarf es zuerst der richtigen Projection der drei zu Axen gewählten Richtungen, und zwar wollen wir von derjenigen dreier, zueinander rechtwinkeliger, gleich langer Axen (kubisches Krystallsystem) ausgehen. Die in der II. Abteilung angewendete Projection erhält man auf folgende Art:

Man ziehe zwei, einander unter 90° schneidende Gerade KK' und LL', Fig. 650, teile die erstere in sechs gleiche Teile und ziehe durch K und

K', sowie durch den zweiten und vierten Teilpunkt Parallelen zu LL'; dann trage man die Länge eines solchen Teiles von K' aus nach unten auf; verbindet man den so erhaltenen Punkt R mit O und verlängert RO jenseits, so ist der zwischen den beiden mittleren Verticalen enthaltene Teil dieser Geraden, AA', die Projection der nach vorn laufenden horizontalen Axe. Durch A ziehe man $AS \parallel OK$ und verbinde S mit O, so erhält man in der zweiten Verticalen einen Schnittpunkt T; man ziehe ferner $TB \parallel OK$, verbinde B mit O und verlängere nach der andern Seite, so ist BB' die Projection der querlaufenden horizontalen Axe. Um endlich die richtige Länge der vertical bleibenden dritten Axe zu finden, mache man OC und $OC' = OR$, so sind C und C' die gesuchten Endpunkte der verticalen Axe.

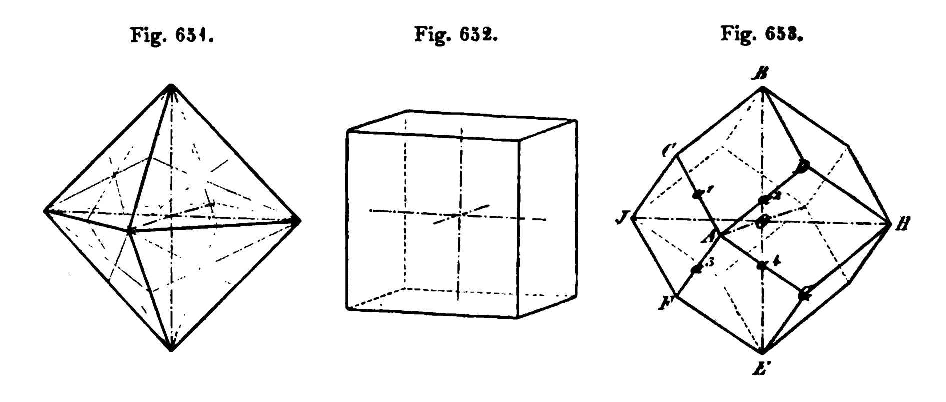


Fig. 651. Fig. 652. Fig. 653.

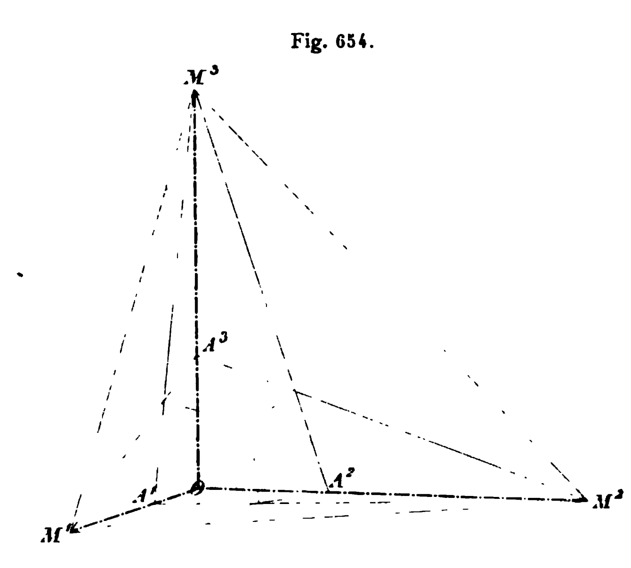


Fig. 654.

Verbindet man A mit B, A mit C, B mit C usf., so erhält man das Bild des Oktaeders, vgl. Fig. 651. Wie man dasjenige des Hexaeders construiert, geht unmittelbar aus Fig. 652 hervor. Die Kanten des Rhombendodekaeders, Fig. 653, erhält man auf folgende Weise: Zieht man durch B, E, H, J Gerade $\parallel BE$ und HJ, so bilden diese den Durchschnitt der vier im Punkte A einander schneidenden Dodekaederflächen mit der Axenebene BOH; die vier Kanten $a_1 a_2 a_3 a_4$ sind also die Verbindungslinien des Punktes A mit

den Eckpunkten des von jenen vier Geraden gebildeten Viereckes. Verdoppelt oder verdreifacht man die Längen OA, OB, OC, so kann man die Durchschnitte der Flächen von Ikositetraedern usw. mit den Axenebenen einzeichnen, und wie man daraus die ganze Form erhält, läßt sich aus der Fig. 654 leicht erkennen, welche die Construction des Ikositetraeders {311}, dessen Parameter sich verhalten wie 1 : 3 : 3, zeigt. Ebenso ist in Fig. 655 diejenige des Triakisoktaeders {221} mit den Parametern OA,

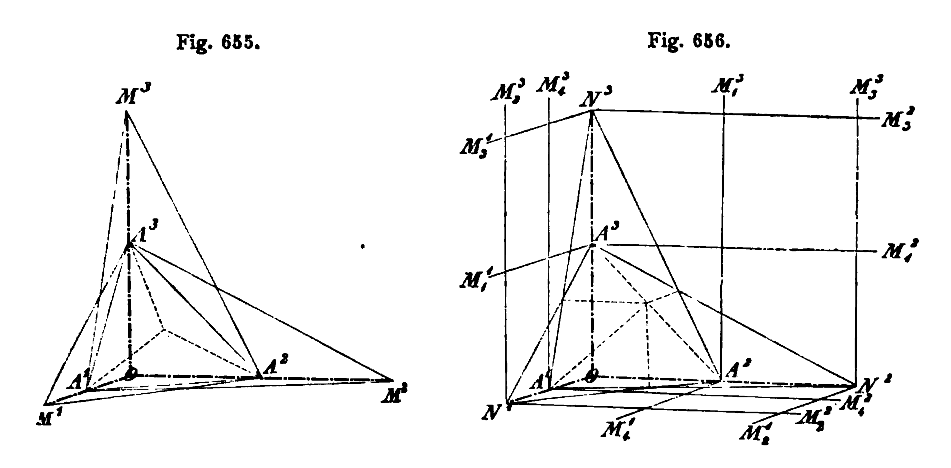


Fig. 655. Fig. 656.

$OM = 2 \cdot OA$ usf., in Fig. 656 die des Tetrakishexaeders {210}, endlich in Fig. 657 die Construction des Hexakisoktaeders {321} mit den Parametern $OA : \frac{3}{2} OA : 3 OA$ dargestellt.

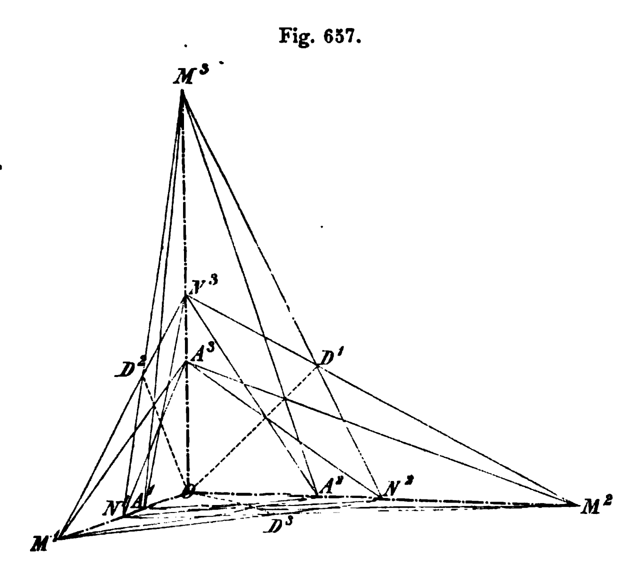


Fig. 657.

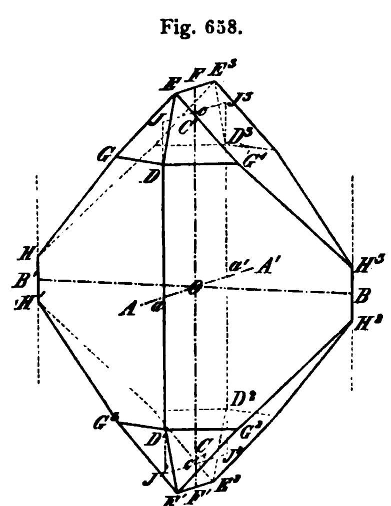
Will man eine **tetragonale** Form zeichnen, so multipliciere man die Länge OC (Fig. 650) mit der Zahl c, welche das Verhältnis der Hauptaxe zu den Nebenaxen angibt, und trage die neue Länge von O aus nach oben und unten auf der verticalen Axe auf; verbindet man die neuen Endpunkte dieser mit denen der Nebenaxen, A, A', B, B', so erhält man die Kanten der primären tetragonalen Bipyramide {111} (vgl. Fig. 354).

Hat man die Zeichnung einer **rhombischen** Combination auszuführen, so läßt man BB' unverändert, da wir den Parameter dieser Axe stets $= 1$ gesetzt haben, multipliciert die Länge OA mit dem Werte der Axe a und OC mit dem der verticalen c, und erhält so das Axenkreuz dreier rechtwinkeliger Axen $a : 1 : c$, deren Endpunkte, miteinander verbunden (vgl. Fig. 290), die Kanten der entsprechenden primären rhombischen Bipyramide liefern.

Wie nun die Zeichnung einer Combination mehrerer Formen weiterhin vorgenommen wird, soll an einem bestimmten Beispiele erläutert werden, und zwar wollen wir dazu einen rhombischen Krystall der bipyramidalen Klasse nehmen, da sich alsdann das Verfahren bei der Zeichnung eines tetragonalen oder kubischen Krystalles von selbst ergibt.

Es soll die Combination: $p = \{110\}$, $o = \{111\}$, $q = \{011\}$ des Quecksilberchlorides, Fig. 301 S. 401, abgebildet werden. Zuerst wird auf die S. 623 f. angegebene Art das kubische Axenkreuz construiert; dieses sei in Fig. 658 dargestellt durch die Geraden AA', BB', CC'; das Axenverhältnis des Quecksilberchlorides ist nach S. 401: $a : b : c = 0{,}7251 : 1 : 1{,}0697$; wir müssen also die Länge OA mit 0,7251, die Länge OC mit 1,0697 multiplicieren, um das Axenkreuz dieses Körpers zu erhalten; es ergeben sich die Projectionen der drei Axen aa', BB' (wie vorher), cc'. Ziehen wir nun durch die Punkte aa', BB' Verticalen, so sind dies offenbar die Kanten des Prismas $\{110\}$ für den hier anzunehmenden Fall, daß seine vier Flächen gleich groß ausgebildet seien. Trägt man nun von a aus auf der Prismenkante eine willkürlich gewählte Länge aD, ebenso nach unten aD^1, endlich auch, von a' aus, $a'D^2$ und $a'D^3$ auf, und sollen von diesen Punkten D aus die stumpferen Polkanten der Bipyramide o beginnen, so hat man nur

Fig. 658.



$DE \parallel ac$, $D^1E^1 \parallel ac'$, $D^2E^2 \parallel a'c'$, $D^3E^3 \parallel a'c$ zu ziehen; nimmt man dann von O aus auf der Verticalaxe nach oben und unten eine gleich große willkürliche Länge $OF = OF'$ an und legt durch die Punkte F und F' Gerade, parallel der Axe aa', bis dieselben jene Polkanten der Bipyramide schneiden, so stellen erstere die obere und untere Kante des Prismas $\{011\}$ dar. Von den Schnittpunkten E, E^1, E^2, E^3 aus hat man nun die Combinationskanten zwischen o und q zu construieren; diese sind aber parallel den schärferen Polkanten von o, da q diese abstumpft; also ziehe man $EG \parallel cB^1$, $EG' \parallel cB$, $E^1G^2 \parallel c'B$, $E^1G^3 \parallel c'B^1$ und ebenso dazu Parallele von E^2 und E^3 aus. Von D, D^1, D^2 und D^3 aus sind ferner zu ziehen die

Combinationskanten zwischen {111} und dem Prisma {110}; da aber letzteres dasselbe $a:b$ hat, wie die Bipyramide, so muß $DG^1 \parallel D^1G^2 \parallel aB$ und ebenso links, und die entsprechenden Kanten auf der punktiert ausgeführten Hinterseite des Krystalles; so werden als Durchschnittspunkte der Kanten $o:q$ und $o:p$ die Punkte G, G^1, G^2, G^3 und die entsprechenden vier der Rückseite erhalten. Von diesen ausgehend, hat man endlich die Kanten $q:p$, d. h. GH, G^1H^3 usf. zu construieren. Die Richtung von GH findet man auf folgende Art: Die linke obere Fläche $(0\bar{1}1)$ von q schneidet, wenn sie in den richtigen Abstand von der Mitte des Axenkreuzes gerückt wird, die Axenebene aOc in der Geraden JJ^2, die linke Prismenfläche dritter Art $(1\bar{1}0)$ unter derselben Bedingung (durch die Zeichnung schon erfüllt) in JJ^1; der Punkt J, in welchem die Durchschnitte beider Flächen mit der erwähnten Axenebene einander schneiden, muß demnach ein Punkt ihrer Combinationskante sein. Die Axenebene $B'Oc$ wird von $(1\bar{1}0)$ in einer Verticalen durch B', von $(0\bar{1}1)$ in einer Geraden $B'c$ geschnitten; diese beiden Durchschnitte haben den Punkt B' gemein, also ist dieser ein zweiter Punkt der Combinationskante, die somit bekannt ist. Man hat also, ihrer Richtung $B'J$ parallel, die Gerade GH zu ziehen, bis sie die durch B' gehende verticale Prismenkante schneidet, ebenso $G^1H^3 \parallel JB$, $G^2H^2 \parallel J'B$ usf. Die hinteren und vorderen Kanten $q:p$ müssen einander in Punkten schneiden, welche genau in den durch B und B' gehenden Verticalen liegen, durch welche Übereinstimmung die Genauigkeit der Zeichnung controlliert wird.

Die soeben auseinandergesetzte Methode zur Bestimmung der Richtung einer Combinationskante wird nun allgemein für diesen Zweck angewandt; man denkt sich die Flächen stets in der richtigen Lage zum Axenkreuze, also z. B. eine Fläche (221) durch die Punkte gelegt, welche von der Mitte um $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, c oder um a, b und $2c$ abstehen, — sucht dann die Durchschnitte der beiden zu combinierenden Flächen mit einer Axenebene und bestimmt den Schnittpunkt derselben, nimmt das gleiche in einer zweiten Axenebene vor und verbindet beide Schnittpunkte durch eine Gerade, deren Richtung die gesuchte Combinationskante ist.

Um einen hexagonalen Krystall mit dem Axenverhältnisse $1:1:1:c$ zu zeichnen, entwirft man zuerst das Axenkreuz eines rhombischen, dessen b-Axe $= 1$, dessen a-Axe $= 1{,}732$ und dessen Verticale $= c$ des hexagonalen ist; nachdem man die Endpunkte der Axen a und b verbunden und so die Projection eines Rhombus von genau 120° Winkel (an der Seite) erhalten hat, halbiert man die beiden Seiten der Axe a und zieht durch die Mittelpunkte Gerade parallel der Axe b, bis dieselben die Seiten des Rhombus schneiden; da sie mit diesen ebenfalls 120° bilden, so ist hierdurch ein Hexagon construiert, dessen Ecken, mit der Mitte verbunden, die drei Nebenaxen, in richtigem Längenverhältnisse zur Hauptaxe c stehend, liefern. Die weitere Construction, nachdem einmal das Axenkreuz gegeben ist, bedarf keiner speciellen Erläuterung mehr; man hat einfach alle Kanten,

welche nicht direct durch die Endpunkte und Richtungen der Axen bestimmt sind, auf die angeführte Art mittels ihrer Durchschnitte mit zwei Axenebenen zu construieren.

Aus diesem Grunde ist auch für das monokline und trikline System nur nötig, die Construction ihres Axenkreuzes anzugeben, da alsdann alles übrige sich von selbst versteht.

Sei in Fig. 659 AA', BB', CC' das kubische Axenkreuz, und sei dasjenige eines monoklinen Krystalles zu construieren, dessen a-Axe nach vorn geneigt ist und mit c den Winkel β einschließt. Man trägt von der Mitte aus nach oben die Länge

Fig. 659.

$$OC'' = OC \cdot \cos(180^\circ - \beta)\,^{1)}$$

und nach hinten diejenige

$$OA'' = OA' \cdot \sin\beta$$

auf, vollendet das Parallelogramm $OA''a'C''$ und macht $Oa = Oa'$, so sind aa', BB', CC' die drei Axen des betreffenden Krystalles für den Fall, daß dieselben gleiche Länge haben; man hat also nur nötig, Oa und OC mit den Werten der betreffenden Axenverhältnisse zu multiplicieren, um das definitive Axenkreuz zu erhalten[2]).

Um nun endlich das Axenkreuz eines triklinen Krystalles zu finden, dessen drei Axenwinkel α (Axe b : Axe c), β und γ sind, gehe man wieder von dem kubischen Axenkreuze AA', BB', CC' Fig. 660, aus, trage auf OB die Länge

$$OA^2 = OA \cdot \cos C$$

---

1) Die Multiplication der Längen mit den trigonometrischen Functionen hier und beim triklinen Systeme kann man, nach dem Vorschlage von A. J. Moses, durch ein graphisches Verfahren ersetzen, wenn man mit der Einheit des zum Abstechen der Längen benutzten Maßstabes als Radius einen Quadranten construiert, in welchen die zu den Winkeln von 5° zu 5° gehörigen cos und sin durch horizontale und verticale Gerade eingetragen sind.

2) Bei Krystallen von der Ausbildung des Epidotes (s. S. 876) erscheinen zuweilen bei der zur Construction der rechtwinkeligen Axen (Fig. 650) gewählten Drehung die Seitenflächen des Krystalles so verkürzt, daß die Zeichnung undeutlich wird. Dann wählt man zweckmäßig eine stärkere Drehung des Krystalles gegen die Projectionsrichtung, wie man sie z. B. auf folgende Art erhält: Man teilt KK' (Fig. 650) in vier gleiche Teile und trägt einen solchen Teil von K aus nach unten ab; die Verbindung des Endpunktes dieser Länge mit O ist die gedrehte Axe b. Alsdann trägt man von O nach K' die Länge $\frac{3}{4} \cdot OK'$ auf und vom Endpunkte dieser Strecke senkrecht nach abwärts die Hälfte jener Länge; der Endpunkt, mit O verbunden, gibt die gedrehte Axe a. Die so erhaltenen Richtungen sind die Projectionen dreier gleich langer, rechtwinkeliger Axen; die Drehung der Axe a in die Richtung, welche mit c den Winkel β bildet, erfolgt dann ganz ebenso, wie a. vor. S. für die gewöhnliche Projectionsmethode angegeben ist.

und auf OB die Länge

$$OB^2 = OB \cdot \sin C$$

auf, wobei C den Winkel (100) : (0$\bar{1}$0) bedeutet, so ist, wenn man das Parallelogramm OA^2DB^2 gezogen hat, die Ebene COD die projicierte Ebene (100), wenn (010) unverändert geblieben ist, und OD eine in derselben befindliche Horizontale von der Länge 1. Man nehme nun in OC die Längen

$$OC^3 = OC \cdot \cos(180^\circ - \beta)$$
$$OC^2 = OC \cdot \cos\alpha,$$

ferner in OA^1

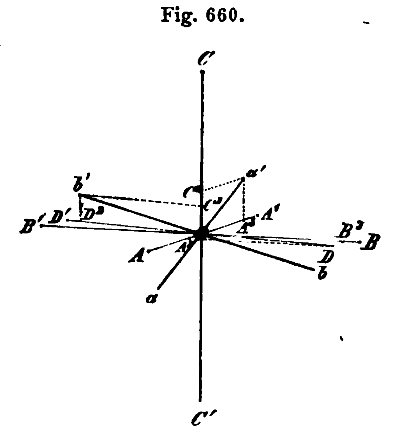
$$OA^3 = OA^1 \cdot \sin\beta$$

und in OD^1 (wenn der spitze Axenwinkel α links, andernfalls in OD)

$$OD^2 = OD^1 \cdot \sin\alpha,$$

vollende die Parallelogramme $OA^3a'C^3$ und $OD^2b'C^2$, ziehe deren Diagonalen und verlängere sie jenseits O um denselben Wert, so sind aa', bb', CC' die Projectionen der drei Axen der betreffenden Krystallform, wenn $a : b : c = 1$; man hat also bb' unverändert zu lassen und aa' mit a, CC' mit c zu multiplicieren, um das Axenkreuz des Krystalles mit den Parameterverhältnissen $a : b : c$ zu erhalten.

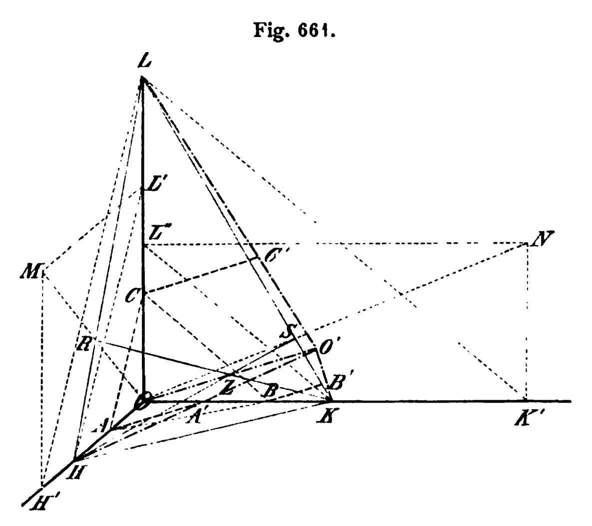
Fig. 660.



Zeichnung der Zwillingskrystalle. Um diese in derselben Weise zu projicieren, hat man erstens das Axenkreuz des einen Krystalles in der richtigen Stellung zu construieren, zweitens dasjenige des zweiten in einer Stellung, in welcher es gegen eine bestimmte Krystallfläche des ersten (die Zwillingsebene) symmetrisch liegt.

Sei in Fig. 661 OA, OB, OC das Axenkreuz des ersten Krystalles, seien OH, OK, OL die Parameter der Krystallfläche, welche die Zwillingsebene bildet, so suche man den Punkt Z, in welchem eine aus O auf die Ebene HKL gefällte Normale diese trifft. Diesen Punkt findet man folgendermaßen: Ziehe HL' und $LH' \parallel AC$, KL'' und $LK' \parallel BC$, construiere die

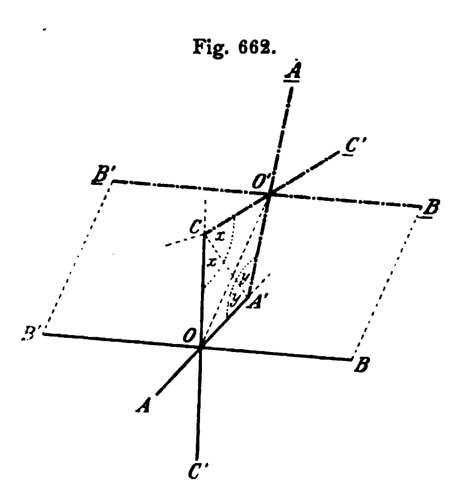
Fig. 661.



Parallelogramme $OH'ML'$ und $OK'NL''$ und deren Diagonalen OM und ON; den Punkt R, wo OM und HL sich schneiden, verbinde man mit K, so ist KR eine Höhenlinie des Dreieckes HKL; den Punkt S, in welchem ON und KL sich schneiden, verbinde man mit H, so ist SH eine zweite Höhenlinie jenes Dreieckes; Z ist der Schnittpunkt dieser beiden Höhenlinien, also ist OZ die Projection der Normale von O aus auf die Ebene HKL. Verlängert man OZ jenseits Z um seine eigene Länge, so erhält man einen Punkt O', welchen man durch Gerade mit H, K und L verbindet; alsdann sind $O'H$, $O'K$ und $O'L$ die Richtungen der drei Axen a, b, c des in Zwillingsstellung befindlichen zweiten Krystalles, und ihre Längen gleich den Parametern der Zwillingsfläche HKL, welche dann für beide Krystalle identisch ist, nur daß diese umgekehrt gegen sie liegen. Will man nun das primäre Axenkreuz, d. h. die Parameterlängen der Grundform haben, so braucht man nur durch A, B und C Parallelen zu OZ zu legen, bis sie die Axen des zweiten Krystalles schneiden, so ist $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ die Projection des Axenkreuzes für den zweiten, in bezug auf HKL gegen den ersten symmetrisch liegenden Krystall. Mit Hilfe dieses Axenkreuzes zeichnet man nun diesen nach derselben Methode wie den ersten, und verschiebt ihn, parallel sich selbst, so weit, wie es der natürlichen Ausbildung der Zwillingskrystalle entspricht.

Sehr viel einfacher gestaltet sich die Construction, wenn die Zwillingsebene einer Axe eines rhombischen oder monoklinen Krystalles parallel ist.

Fig. 662.



Seien AA', BB', CC' die Axen eines monoklinen Krystalles (der Fall eines rhombischen würde sich nur dadurch unterscheiden, daß der Winkel AOC gleich dem in Fig. 650 und 658 wäre), und seien OA' und OC die Parameter der, der Axe B parallelen, Zwillingsebene, durch deren Symbol die Winkel x und y gegeben sind. Legt man nun durch C die in der Figur kurz angedeuteten Richtungen der kubischen Axen a und c und trägt auf der verticalen die Länge

$$c \cdot \cos(180^\circ - 2x),$$

auf der andern (a) nach rückwärts

$$a \cdot \sin 2x$$

auf, so erhält man die strichpunktierte Richtung, welche in der Ebene $A'CO$ mit $A'C$ den gleichen Winkel nach der andern Seite einschließt, wie OC, also symmetrisch zu OC in bezug auf die Zwillingsebene liegt. Unter Benutzung des Winkels y erhält man durch die analoge Construction (welche im Prinzipe derjenigen der Fig. 659 entspricht) die zu OA' symmetrische

Richtung und als Schnittpunkt beider den Axenmittelpunkt O' des in Zwillingsstellung befindlichen zweiten Krystalles. Zieht man schließlich durch O' eine Parallele zu BB' und macht $B\underline{B}$ und $B'\underline{B}' \parallel OO'$, so sind $\underline{A}A'$, $\underline{B}\underline{B}'$, $C\underline{C}'$ die Axen des zweiten Krystalles, und zwar sind die Parameter $O'\underline{A}$, $O'\underline{B}$, $O'C$ gleich denjenigen des ersten, nämlich OA, OB, OC.

Wie schon auf S. 628 Anmerk. 2 erwähnt, bietet zuweilen die übliche, im vorhergehenden angegebene Methode der Projection kein übersichtliches Bild des Krystalles dar, und namentlich ist dies bei Zwillingen der Fall, welche nicht selten eine andere Stellung erfordern, um die Art der Verwachsung deutlich hervortreten zu lassen. In solchen Fällen kann man mit Hilfe der Lehrsätze der darstellenden Geometrie die specielle Art der Projection aufsuchen, welche für die gegebenen Elemente des Krystalles die geeignetste ist; eine durch zahlreiche Beispiele illustrierte Anleitung hierzu gab St. Jolles in »Orthogonale Projection krystallographischer Axensysteme« (Zeitschr. f. Kryst. 1893, **22**, 1 f. u. Taf. I—V).

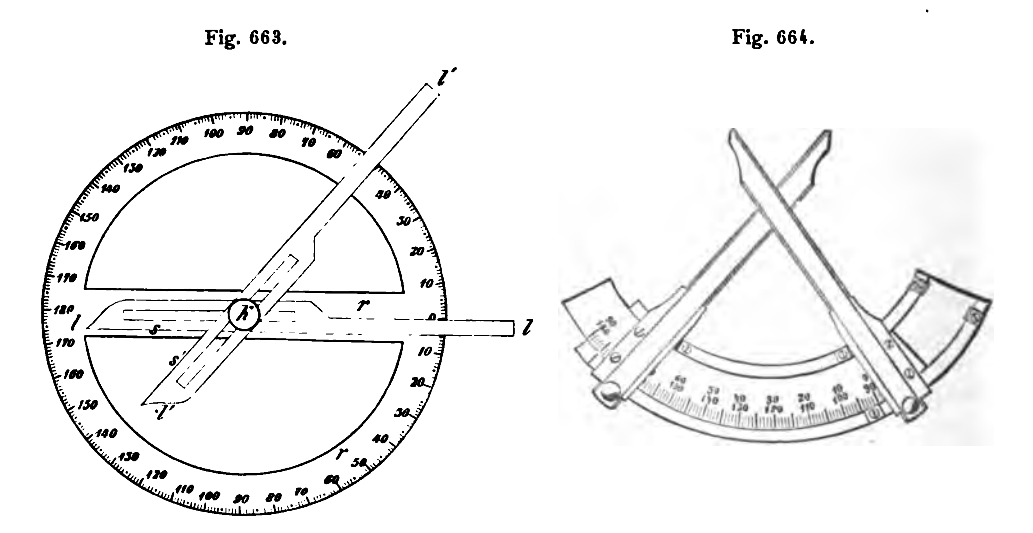
Statt der obigen Methode kann man bei der Herstellung des perspectivischen Bildes eines Krystalles auch von einer der zur Darstellung der Zonenverhältnisse geeigneten Projectionen ausgehen. Goldschmidt (Zeitschr. f. Kryst. 1891, **19**, 352) legte hierbei die gnomonische Projection (s. S. 314) zugrunde, und v. Fedorow (ebenda 1898, **30**, 9) vervollständigte dessen Verfahren und dehnte es auf andere Projectionsarten aus. Von diesen kann besonders auch die im vorigen Abschnitte bezüglich ihrer Herstellung näher erläuterte stereographische Projection als Ausgangspunkt dienen, und dementsprechend hat Stöber (Zeitschr. f. Kryst. 1901, **34**, 621) eine Methode beschrieben, senkrechte und schiefe Projectionsbilder von einfachen und von Zwillingskrystallen auf Grund der stereographischen Projection anzufertigen, und wie G. Wulff (welcher ebenfalls auf die gleiche Methode gekommen war) angibt, kann hierbei mit Vorteil das S. 617 erwähnte Netz angewendet werden. Endlich gab Penfield (Amer. Journ. Sc. 1905 (4) **19**, 39) eine sehr übersichtliche Anleitung zur Anfertigung einer schiefen Projection, bei welcher er für die Construction schiefwinkeliger Axen einen eigenen Transporteur benutzt, mit welchem diese rasch und sehr genau gefunden werden und der namentlich zur Construction der Axen von Zwillingskrystallen sehr geeignet ist.

Messung der Winkel und der Brechungsindices der Krystalle.

Contactgoniometer.

Anlegegoniometer. Das Instrument, mit welchem zuerst Krystallwinkel gemessen wurden, ist das Anlegegoniometer, welches im achtzehnten Jahrhunderte von dem Künstler Carangeot, der für den französischen Krystallographen Romé de l'Isle Krystallmodelle anfertigte, erfunden wurde. Dasselbe, in Fig. 663 in einer der jetzt üblichen Formen abgebildet, besteht aus zwei Linealen, *ll* und *l'l'*, welche um eine zu ihrer Ebene normale Axe drehbar sind. Dieselben können mittels des Knopfes *k* von dem Kreise *r*, um dessen Centrum sie drehbar sind, abgehoben werden. Bringt man nun die zu messende Krystallkante so zwischen die beiden Schneiden *s* und *s'*, daß sie normal zu deren Ebene steht, und dreht die Schenkel

Fig. 663. Fig. 664.

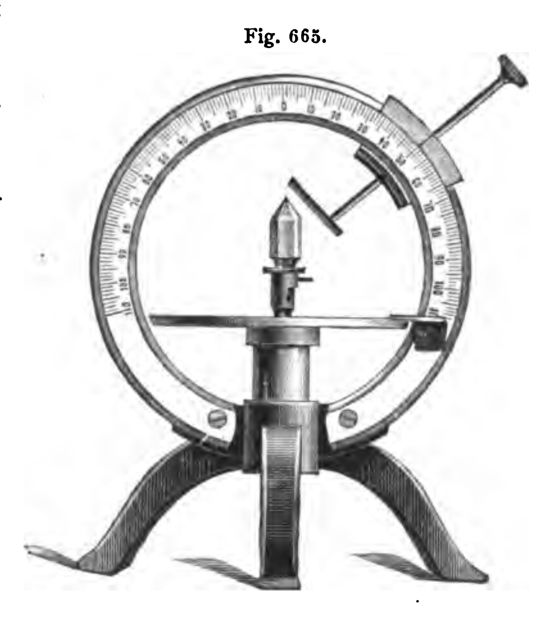


der Lineale so weit, daß *s* auf der einen, *s'* auf der andern Krystallfläche genau aufliegt (was man am besten sehen kann, wenn man das Ganze dabei gegen das Licht hält), so bilden die beiden Lineale offenbar denselben Winkel miteinander, welchen die beiden, in der zu messenden Kante einander schneidenden, Krystallflächen einschließen. Steckt man nun die Axe derselben wieder in die im Centrum des Kreises *r* befindliche kreisrunde Öffnung und dreht sie, bis der eine Schenkel an den Stift *o* anschlägt,

so zeigt die durch das Centrum gehende Schneide des andern unmittelbar auf dem Kreise den gesuchten Winkel an. Um auch aufgewachsene Krystalle messen zu können, bei denen oft ein Auflegen der Schenkel wegen der benachbarten Krystalle nicht möglich wäre, kann man dieselben beliebig verkürzen durch Parallelverschiebung beider Lineale. Oft verbindet man auch das eine Lineal fest mit der Kreisteilung, nimmt aber alsdann nur einen Halbkreis. Endlich kann man sich auch mit einem Quadranten begnügen, welcher in einem zweiten, der zwei 90° voneinander abstehende Marken trägt, gleitet (Fig. 664 nach R. Fuess). Ein äußerst einfaches und billiges Anlegegoniometer, bestehend aus einem auf Carton gedruckten Halbkreise und einem damit verbundenen drehbaren Celluloidstreifen, beschrieb Penfield in Zeitschr. f. Kryst. **1900, 33, 548.**

Nach einem andern Principe erfolgt die Messung des Krystalles durch das von Goldschmidt (Zeitschr. f. Kryst. **1895, 25, 321**) construierte Anlegegoniometer mit zwei Kreisen (Fig. 665). Dasselbe besteht aus einem Horizontalkreise, mit welchem der Krystall drehbar ist, und einem festen Verticalkreise, dessen Nullpunkt der Drehungsaxe des horizontalen Kreises entspricht. Der Krystall wird auf einem Träger auf Kugelgelenk befestigt, welches gestattet, eine bestimmte Zone vertical zu stellen. An dem Verticalkreise gleitet ein Führungsstück auf einem verschiebbaren und drehbaren Stifte, welches am Ende eine dazu senkrechte Anlegeplatte trägt. Liegt die Ebene dieser Platte auf einer Fläche des Krystalles vollständig auf, so entspricht die Richtung des Stiftes der Normalen der Krystallfläche; diese Richtung ist bestimmt durch den Winkel φ, welcher auf dem Horizontalkreise an der am Verticalkreise befestigten Marke abgelesen wird, und durch den am Vertikalkreise abgelesenen Winkel ϱ. Ersterer Winkel ist der Meridian, letzterer die Poldistanz eines Flächenpoles auf der Kugel, deren Äquator die Pole der vertical gestellten Flächen enthält. Mit Hilfe von φ und ϱ kann also der Ort der zu bestimmenden Krystallfläche unmittelbar in die stereographische Projection eingetragen werden.

Fig. 665.



Das Anlegegoniometer kann natürlich nur bei sehr großen und ganz ebenen Flächen eine größere Genauigkeit geben, als etwa auf 1°; es dient

daher nur zur Anfertigung von Krystallmodellen,, oder höchstens zur Orientierung an sehr großen, für andere Goniometer etwa zu unbehilflichen Krystallen, während man sich sonst stets des Reflexionsgoniometers (s. S. 21) bedient. Dieses setzt aber voraus, daß die Flächen, deren relative Neigung man bestimmen will, spiegelnde seien, ist also nicht anwendbar, wenn es sich, wie es z. B. bei einzelnen Mineralien (Feldspat) der Fall ist, um matte, wenn auch ebene Flächen handelt. Man hat verschiedene Verfahren eingeschlagen, um solche Krystalle der Messung mit dem Reflexionsgoniometer zugänglich zu machen: entweder fertigt man von denselben Abdrücke, z. B. in Siegellack, an denen alsdann die Messung vorgenommen wird, oder man überzieht die Krystallflächen mit einer Harzlösung, welche nach dem Trocknen eine glänzende Oberfläche zeigt, oder endlich, man bedeckt sie mit Plättchen von dünnem Deckglase, welche durch möglichst wenig zwischengebrachten flüssigen Canadabalsam darauf festgehalten werden. Es leuchtet ein, daß die Genauigkeit der Messung bei Benutzung solcher künstlich hergestellter glänzender Flächen davon abhängt, bis zu welchem Grade die letzteren den eigentlichen Flächen des Krystalles parallel sind; die Abweichung beider vom Parallelismus kann unter Umständen eine recht beträchtliche sein, und es gibt kein Mittel, dieselbe genau zu bestimmen.

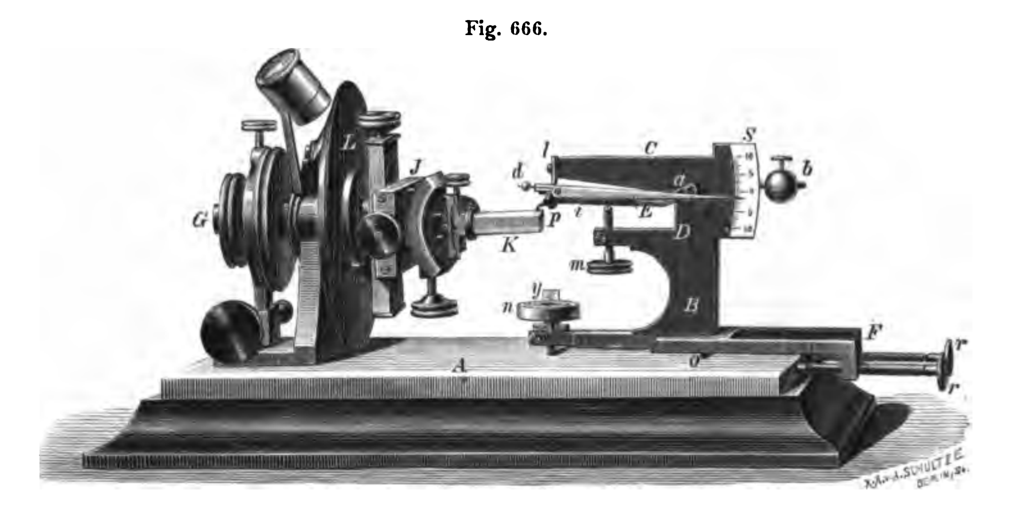
Ein anderes Verfahren, um spiegelungslose Flächen der Messung zu unterwerfen, hat J. Hirschwald (s. N. Jahrb. für Min., Geol. usw. 1879, 301 u. 539, 1880, 156 und Zeitschr. f. Kryst. **4**, 219, s. auch ebenda **8**, 16) vorgeschlagen. Derselbe benutzt ein Mikroskop, welches in einer zu seiner Axe senkrechten Ebene parallel verschiebbar ist, und bestreicht damit die von oben beleuchtete Krystallfläche. Diese ist jener Ebene genau parallel, wenn sie bei der Verschiebung des Mikroskopes von rechts nach links und von vorn nach hinten immer in gleicher Entfernung vom Objective bleibt, was man dadurch erkennt, daß ihre Umrißkanten und etwa auf der Fläche befindliche Unebenheiten, Ätzfiguren usw. oder ein darauf gestreutes feines Pulver immer in gleicher Schärfe sichtbar bleiben, während das Mikroskop mittels zweier, in zueinander senkrechten Richtungen wirkender, Schrauben über dieselbe hinbewegt wird. Hat man nun den Krystall centriert und justiert (vgl. S. 21) auf der Axe eines Teilkreises angebracht, welcher mit dem Mikroskopträger in fester Verbindung steht, so kann man durch Drehung jener Axe eine zweite Krystallfläche in das Gesichtsfeld des Mikroskopes und auf gleiche Weise in dieselbe Lage bringen, welche vorher die erste Fläche einnahm. Werden nun beide Stellungen des Kreises am Nonius abgelesen, so ist die Differenz beider Ablesungen offenbar der gesuchte Winkel. Es liegt aber auf der Hand, daß die Genauigkeit dieses Verfahrens davon abhängt, innerhalb welcher Grenzen die Entfernung der Fläche vom Objective des Mikroskopes variieren kann, ohne daß dieselbe aufhört, scharf sichtbar zu sein. Für manche Personen sind diese Grenzen sehr enge, für andere, welche eine große

Accommodationsfähigkeit des Auges besitzen, ziemlich weite, daher die Genauigkeit der Messung mit diesem ziemlich complicierten, von seinem Erfinder »Mikroskopgoniometer« genannten Instrumente von subjectiven Verhältnissen abhängt.

Der geeignetste Apparat, um matte Flächen mit einer weit größeren Genauigkeit, als mittels des Anlegegoniometers, zu messen, ist das von R. Fuess erfundene »Fühlhebelgoniometer«, welches daher an dieser Stelle ausführlicher beschrieben werden soll.

Das Fühlhebelgoniometer. Auf einer matt und vollkommen eben geschliffenen Glasplatte, der »Grundplatte« *A* Fig. 666, ist ein Teilkreis *L*, dessen Ebene genau senkrecht zur Grundplatte steht, befestigt. Derselbe

Fig. 666.



ist um eine zu *A* parallele Axe drehbar mittels der größeren der beiden links davon sichtbaren, am Rande gekerbten Messingscheiben[1]), wobei sich zugleich die innerste, durch den Knopf *G* auch unabhängig davon drehbare Axe mit bewegt, welche an ihrem andern Ende die Centrier- und Justiervorrichtung *J* und den Krystall *K* trägt. Die erstere besteht zunächst dem Kreise aus zwei gekreuzten Schlitten, welche durch je eine Schraube eine Parallelverschiebung in zwei zueinander senkrechten Richtungen und damit die Centrierung des Krystalles *K* gestatten, ferner aus zwei cylindrischen Schlitten, welche durch Drehung der an denselben angebrachten Schrauben eine Neigung in zwei zueinander senkrechten Ebenen und damit die Justierung der betreffenden Kante ermöglichen (Näheres über diese Vorrichtungen s. im nächsten Abschnitte). Die Stellung des Kreises kann an einem Nonius durch die mittels eines Armes mit der Goniometeraxe verbundene Lupe abgelesen werden.

1) Oder mittels der darunter befindlichen Feinstellschraube, deren Einrichtung und Gebrauch im nächsten Abschnitte beschrieben werden soll.



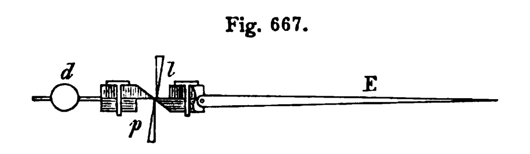
Hat man nun eine von zwei Krystallflächen gebildete Kante auf diesem Instrumente centriert und justiert[1]), so ist man imstande, durch Drehung des Limbus L einmal die eine, das andere Mal die andere Fläche der Grundplatte parallel zu stellen, und offenbar ist alsdann die Differenz der beiden Ablesungen am Nonius der gesuchte Flächenwinkel. Es handelt sich also bei dieser Messung darum, den Parallelismus einer Fläche des am Goniometer befestigten Krystalles mit der horizontalen Grundplatte genau zu prüfen. Dies geschieht mit der Fuessschen Fühlhebelvorrichtung, welche auf die rechte Seite der Grundplatte aufgesetzt wird. Dieselbe besteht aus einem Messingstative B, welches mit drei konischen stählernen Füßchen, zwei festen o (von denen nur eines in der Figur sichtbar ist) und einem durch die Schraube n verstellbaren, auf der Grundplatte aufruht. Von dem Stative B laufen nach links zwei Arme C und D aus, von denen der erstere am Ende ein Stahlstück l trägt, dessen unterster Teil eine horizontale, senkrecht zur Zeichnungsebene verlaufende Schneide bildet. Durch den Arm D geht die mit einem feinen Gewinde versehene Schraube m, auf welcher das Hebelsystem i aufruht. Dieses besteht aus zwei parallelen und gleich gestalteten, nach rechts aufgebogenen Stahlstäbchen, von denen das hintere in der Figur durch das vordere verdeckt ist, und welche bei p und a durch horizontale Querstücke verbunden sind; das erstere von diesen trägt in der Mitte eine Fortsetzung, welche in ein nach unten gebogenes Messingstiftchen, im folgenden als »Fühler« bezeichnet, ausläuft, während auf ihrer Oberseite eine der Schneide l parallele, aber nach oben gerichtete Schneide befestigt ist; die rechte, bei a gelegene Querverbindung der Rahmenteile geht durch eine, unter a befindliche, nur halb sichtbare Durchbohrung des Statives B, welche so weit ist, daß sie jener eine kleine Bewegung gestattet, hindurch. Die beiden dem Arme C parallelen Stäbchen setzen noch fort bis zu einer ganz wenig rechts von der vorigen (siehe unter a rechts abwärts) befindlichen Durchbohrung, in welcher ein horizontaler Stahlcylinder befestigt ist, an dessen Enden die beiden Stäbchen mit kleinen Schraubenzapfen anliegen, so daß das ganze Hebelsystem i um die Axe jenes Stahlcylinders drehbar ist. Während der vordere Teil desselben an dieser Stelle aufhört, setzt sich der hintere nach rechts in einen langen Stahlstab fort, welcher die verschiebbare Kugel b trägt, mittels deren das ganze Hebelsystem i balanciert werden kann. Zwischen der an diesem befestigten und daher mit demselben beweglichen Schneide p und

[1]) Dies geschieht bei diesem Instrumente mittels eines in der Figur nicht mit abgebildeten Hilfsapparates, bestehend aus einer scharfen Stahlschneide, welche an einem Messingarme befestigt ist, dessen Untersatz auf drei Schrauben ruht, während eine seitliche Fortsetzung noch zwei horizontale Schräubchen trägt. Die Schneide befindet sich genau in der Richtung der Goniometeraxe, wenn man den kleinen Apparat so auf die Grundplatte aufsetzt, daß die beiden horizontalen Schrauben die vordere Randfläche desselben berühren. Der Krystall K wird nun mittels der an J befindlichen Schrauben so gerichtet, daß die zu messende Kante die Stahlschneide fast berührt und ihr genau parallel läuft.



der früher erwähnten festen Schneide *l* befindet sich nun frei schwebend der eigentliche Fühlhebel *E*, dessen Construction aus Fig. 667 ersichtlich ist. Derselbe besteht aus zwei Stahlplatten (in der Figur ungleich schraffiert), welche durch Schrauben fest verbunden sind. Aus beiden ist in ihrem mittleren Teile auf gleiche Art ein viereckiges Stück mit drei senkrechten und einer schiefen Seitenfläche ausgeschnitten; die Platten sind so aneinandergelegt, daß die schiefen Seiten des ausgeschnittenen Teiles parallel sind und beinahe in eine Ebene fallen. An dem so gebildeten Rahmen ist an einer Seite ein circa 7 cm langer, aus Elfenbein hergestellter Arm *E*, der »Zeiger«, befestigt, welcher auf der andern Seite durch eine kleine verschiebbare Metallkugel *d* balanciert werden kann. Die ganze Vorrichtung wird so zwischen die beiden Schneiden eingelegt, daß Schneide *l* auf der oberen Seite der unteren Platte und Schneide *p* auf der unteren Seite der oberen Platte aufliegt. Da die Schneide *l* fest ist, so bildet sie die Drehungsaxe des Hebels *E*, dessen beide Teile durch Verschiebung der Kugel *d* so balanciert werden, daß der linke ein sehr kleines Übergewicht besitzt. Am Niedersinken wird derselbe dadurch verhindert, daß die bewegliche Schneide *p* von unten her ihn berührt, ein Contact, welcher durch die Stellung der Schraube *m* bewirkt wird (vgl. Fig. 666); das mit der Schneide *p* in Verbindung stehende Hebelsystem *i* ist durch die Kugel *b* so genau balanciert, daß die leiseste Berührung des an *p* befindlichen »Fühlers« sofort eine Hebung der linken und eine Senkung der rechten Seite zur Folge hat. Dadurch wirkt die Schneide *p* auf den Fühlhebel, indem sie dessen linke Seite hebt, und da der horizontale Abstand der beiden Schneiden *p* und *l* ein äußerst geringer ist, so entspricht einer sehr kleinen Aufwärtsbewegung der ersteren ein großer Ausschlag des Zeigers *E* nach unten. Hat also die Schraube *m* diejenige Stellung, bei welcher die bewegliche Schneide *p* nur eben den Fühlhebel in einer solchen Lage schwebend erhält, daß der Zeiger *E* desselben auf den Nullpunkt der bei *S* auf dem Stative angebrachten Teilung gerichtet ist, so genügt offenbar die leiseste Berührung des Fühlers, um einen merkbaren Ausschlag des Zeigers auf der Scala hervorzubringen[1]).

Fig. 667.



---

1) Betreffs der Fig. 666 muß bemerkt werden, daß an den neueren Fuessschen Instrumenten sich der Nullpunkt am oberen Ende der Teilung, in der Mitte also 10 und unten 20, befindet, so daß die Gleichgewichtsstellung des Fühlhebels nicht, wie in der Figur, horizontal, sondern eine schräg nach rechts ansteigende ist. Da es sich nur um die Beobachtung von abwärts gerichteten Ausschlägen handelt, ist diese unerhebliche Änderung der in Fig. 666 abgebildeten Anordnung vorzuziehen. Am unteren Ende der Scala ist ein Knöpfchen angebracht, welches über die Teilung hinausgehende Ausschläge des Zeigers verhütet.

Diese Empfindlichkeit wird nun benutzt, um den Parallelismus einer horizontal gestellten Krystallfläche mit der Grundplatte zu prüfen. Ist die zu messende Kante des Krystalles genau justiert, d. h. der Grundplatte parallel, so genügt es offenbar, den Parallelismus einer zur Kante senkrechten, in der Krystallfläche gelegenen Geraden mit der genannten Platte zu constatieren. Zu diesem Zwecke kann man den ganzen Fühlhebelapparat von vorn nach hinten verschieben, wobei derselbe mit den Enden der beiden Stahlschrauben *r*, welche durch die Verlängerungen *F* des Statives *B* gehen, an der der Ebene des Teilkreises parallelen Seitenfläche der Grundplatte entlang gleitet. Dabei beschreibt der Fühler auf der Krystallfläche eine Gerade, welche die erforderliche, zur Kante senkrechte Richtung besitzt, und wird bei vollkommenem Parallelismus der Fläche mit der Grundplatte, welcher durch Drehung des Krystalles mittels der Feinstellschraube bewirkt wird, an allen Stellen die Fläche eben berühren, vorausgesetzt, daß vorher dem Fühler durch Heben oder Senken mittels der Schraube *n*, wobei sich der ganze Fühlhebelapparat um die beiden festen Stahlspitzen *o* dreht, die erforderliche Höhenstellung erteilt ist. Ein solches Gleiten ist aber natürlich nur auf einer sehr glatten Fläche möglich. Die matten Flächen der hier in Betracht kommenden Krystalle besitzen nun häufig Hervorragungen und andere Unebenheiten und erfordern deshalb das folgende Verfahren: Der Fühler wird durch die Schraube *n* so hoch gestellt, daß er über alle Stellen der Fläche frei hinweggehen kann, aber derselben stets sehr nahe bleibt; nun sucht man auf der Krystallfläche nahe der Kante und möglichst entfernt davon in der dazu senkrechten Richtung zwei möglichst ebene Stellen aus, bringt den Fühler über die eine und senkt ihn durch Drehung der Schraube *n* bis zur Berührung. *n* ist eine Mikrometerschraube, deren Windungen je 0,5 mm hoch sind und deren Rand in 100 Teile geteilt ist, so daß eine Hebung des Fühlers um 0,005 mm direct abgelesen und eine solche von 0,001 mm noch geschätzt werden kann; die ganzen Umdrehungen werden an dem in halbe Millimeter geteilten Index *y* abgelesen. Mittels dieser Vorrichtung kann man also sehr genau bestimmen, um wieviel der Apparat gesenkt werden mußte, um die Berührung des Fühlers mit der Krystallfläche hervorzubringen, wobei man die Genauigkeit noch durch mehrmalige Wiederholung des Versuches an mehreren nahe benachbarten Punkten und durch Mittelziehung der einzelnen Ablesungen erhöhen kann; alsdann wiederholt man das gleiche Verfahren nach einer entsprechenden Verschiebung des Fühlhebelapparates an der zweiten der beiden ausgesuchten Stellen der Krystallfläche. Ist die hier bis zur Berührung erforderliche Senkung die gleiche, so ist offenbar die Krystallfläche der Grundplatte parallel; andernfalls corrigiert man durch die feine Drehung der Goniometeraxe die Stellung des Krystalles so lange, bis beide Sondierungen genau das gleiche Resultat ergeben.

Über die bei derartigen Messungen zu erreichende Genauigkeit, sowie über die Prüfung des Instrumentes siehe die Arbeit von

A. Schmidt, über das Fuesssche Fühlhebelgoniometer, Zeitschr. f. Kryst. 1884, 8, 1.

Mikrogoniometer. Zu den Contactgoniometern kann man endlich auch diejenigen Vorrichtungen rechnen, in denen die Winkelmessung mittels eines optischen Contactes geschieht, und solche Vorrichtungen, »Mikrogoniometer«, sind es, welche besonders zur Messung mikroskopischer Krystalle benutzt werden. Da man unter dem Mikroskope nur die in einer Ebene liegenden Teile eines Krystalles scharf erblickt, so kann mit diesem Instrumente nur die Messung ebener Winkel vorgenommen werden, d. h. derjenigen, welche je zwei Kanten einer auf dem Tische des Mikroskopes horizontal liegenden Krystallfläche miteinander bilden. Hierzu benutzt man am einfachsten ein Mikroskop[1]), in dessen Ocularsysteme ein rechtwinkeliges Fadenkreuz angebracht ist, welches man gleichzeitig mit dem Krystalle im Gesichtsfelde erblickt, und dessen Tisch um seinen Mittelpunkt drehbar und so eingerichtet ist, daß man seine Drehung an einer am Rande desselben befindlichen Teilung ablesen kann. Die Drehungsaxe des Tisches muß mit der optischen Axe des Mikroskopes zusammenfallen, welche durch den Kreuzungspunkt der Fäden in der Mitte des Gesichtsfeldes bezeichnet ist. Behufs der Messung wird nun zunächst der Eckpunkt der Krystallfläche, in welchem die beiden Kanten, deren ebenen Winkel man sucht, einander schneiden, durch Verschiebung des Krystalles mit dem Kreuzungspunkte der Fäden zur Deckung gebracht; alsdann wird durch Drehung des Tisches mit dem darauf liegenden Krystalle eine der beiden Kanten parallel eingestellt mit einem der beiden Fäden, was sich besonders genau erreichen läßt, wenn man die Kante ein wenig neben dem Faden einstellt, statt beide vollkommen zur Deckung zu bringen. Nachdem diese Stellung des Mikroskoptisches an dessen Teilung abgelesen worden ist, wird derselbe gedreht, bis die zweite Kante in gleiche Richtung gelangt ist, welche vorher die erste innehatte, und dann wiederum abgelesen; die Differenz beider Ablesungen ist der gesuchte Winkel.

Diese Methode der Winkelmessung unter dem Mikroskope ist besonders wichtig für petrographische Untersuchungen, bei denen es sich oft um die Bestimmung der Gestalt von Krystallen handelt, von welchen in einem Gesteinsschliffe sehr dünne Querschnitte vorliegen. Obgleich deren Orientierung gegen die krystallographischen Axen unbekannt und natürlich für jeden Durchschnitt eine andere ist, so kann doch aus der Umrißfigur eines solchen Durchschnittes, d. h. aus den ebenen Winkeln desselben, wenn diese nach der angegebenen Methode gemessen worden sind, ein Schluß auf die Stellung der Durchschnittsebene und daraus auf die Form des Krystalles gezogen werden, namentlich wenn man noch andere Hilfsmittel hinzuzieht, z. B. die in derselben Weise zu bestimmende Richtung etwa sichtbarer

1) Die nähere Beschreibung der zu krystallographischen Zwecken geeigneten Mikroskope folgt in einem späteren Abschnitte.

Spaltungsrisse, die Schwingungsrichtungen des polarisierten Lichtes, die Interferenzerscheinungen im convergenten Lichte usw. So würde man z. B. unter den in einem solchen Gesteinsschliffe vorhandenen Krystallschnitten eines monoklinen Minerales mit prismatischer Spaltbarkeit, durch das Vorhandensein von Spaltungsrissen nach einer einzigen Richtung, leicht diejenigen herausfinden, deren Ebene der Kante des Spaltungsprismas parallel geht, und unter diesen wieder die zu {010} ungefähr senkrechten dadurch, daß in ihnen die Schwingungsrichtungen des polarisierten Lichtes den Spaltrissen parallel sind. Bei Auffassung des Spaltungsprismas als {110} hätte man in einem Schnitte der letzterwähnten Art einen solchen nach dem Pinakoide {100} vor sich, dessen Gestalt, verglichen mit denen der andern verticalen Schnitte, d. h. derjenigen, in denen alle Spaltungsrisse parallel verlaufen, ein Urteil über die an den Krystallen auftretenden Endflächen und deren ungefähre Winkel gestattet. Andererseits sind unter den Durchschnitten, in denen beide Spaltungsrichtungen beobachtet werden, diejenigen, in welchen dieselben ungefähr den Winkel des Spaltungsprismas miteinander bilden, offenbar annähernd senkrecht zur Kante dieses Prismas; die Gestalt der Umrisse liefert hier also direct die Winkel der am Krystalle ausgebildeten verticalen Flächen. J. Thoulet hat für die petrographisch wichtigsten Mineralien (Pyroxene, Amphibole, Feldspäte) die ebenen Winkel berechnet, welche die Spaltungsrichtungen in verschiedenen, den Hauptzonen der Krystalle angehörigen Ebenen bilden, und dadurch die Aufgabe, die Orientierung dieser Mineralien in Gesteinsschliffen zu bestimmen, sehr erleichtert (Annales d. mines (7) 1878, **14**, 3).

Eine weniger häufig, als die vorstehend beschriebene, gebrauchte Methode der mikroskopischen Winkelmessung besteht darin, daß man, anstatt den Tisch des Mikroskopes drehbar zu machen, ein Fadenkreuz anwendet, dessen einer Faden um die Mitte drehbar ist, und dessen Drehung an einer außen am Oculare angebrachten Teilung abgelesen werden kann. Man bringt hierbei ebenso, wie bei der gewöhnlichen Methode, den Schnittpunkt der beiden Kanten des Krystalles in den Kreuzpunkt der beiden Fäden, stellt alsdann den beweglichen Faden einmal auf die erste, das andere Mal auf die zweite Kante der Krystallfläche ein und bestimmt am Kreise die dazwischen erfolgte Drehung.

Endlich werde noch eine von Leeson vorgeschlagene Einrichtung zur genauen Messung der ebenen Winkel mikroskopischer Krystalle beschrieben, welche in Fig. 668 im Durchschnitte, in Fig. 669 in perspectivischer Ansicht dargestellt ist. Der Apparat wird auf dem

Fig. 668.

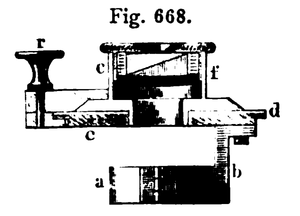
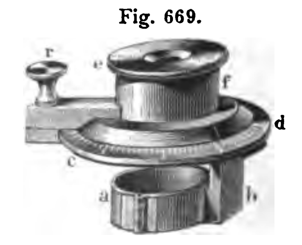


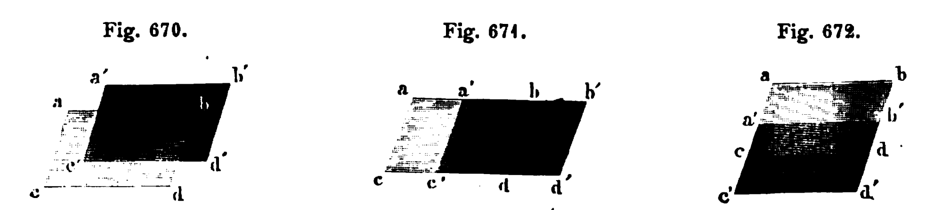
Fig. 669.



Ocularrohre des Mikroskopes mittels des Ringes *a* befestigt, welcher durch den Träger *b* mit dem geteilten Kreise *cd* fest verbunden ist; auf diesem ist eine abgeschrägte kreisförmige

Platte mit der Hülse *ef* drehbar; die letztere enthält ein doppeltbrechendes Prisma von Quarz, dessen Dispersion dadurch beseitigt ist, daß ein ebenso stark dispergierendes Glasprisma mit demselben in umgekehrter Stellung verbunden ist. Durch diese Combination erblickt man daher die im Mikroskope sichtbaren Gegenstände doppelt, jedoch ohne störende Farbenzerstreuung. Befindet sich nun z. B. eine Krystallfläche von der Form eines Rhombus *abcd* eingestellt im Gesichtsfelde, so erscheint dieselbe doppelt, etwa wie Fig. 670. Durch

Fig. 670. Fig. 671. Fig. 672.



Drehen des Quarzprismas mittels des Knopfes *r* werden die beiden Bilder einmal in die gegenseitige Lage Fig. 671, das andere Mal in die Fig. 672 dargestellte gebracht, und durch Ablesen beider Stellungen am Kreise die dazu erforderliche Drehung, welche offenbar dem Winkel des Rhombus gleich bzw. supplementär ist, bestimmt. Es leuchtet ein, daß diese Messung des ebenen Winkels um so genauer ausfällt, je vollkommener es gelingt, das eine Mal die Kante *ab* mit *a'b'*, bzw. *cd* mit *c'd'*, das andere Mal *ac* mit *a'c'* und *bd* mit *b'd'* in eine gerade Linie zu bringen.

Reflexionsgoniometer[1]) mit verticalem Teilkreise.

Das Reflexionsgoniometer, 1809 von Wollaston erfunden, wurde bereits S. 21 im Principe besprochen. Die Einrichtung eines solchen Instrumentes von einfachster Form kann aus Fig. 673 (s. folg. S.) ersehen werden.

Auf einer festen Säule mit einer auf drei Spitzen aufstehenden Fußplatte befindet sich der geteilte Kreis *V*, welcher mittels der Scheibe *S* gedreht werden kann. Ein unbeweglicher, nach oben gehender Arm trägt den Nonius, an welchem die jedesmalige Stellung des Kreises durch die zu oberst in der Figur sichtbare kleine Lupe abgelesen werden kann. An der vermittelst der Scheibe *T* unabhängig vom Kreise drehbaren Axe ist auf der entgegengesetzten Seite ein mit einem Gelenke versehener Bügel befestigt, welcher in einen kleinen Ring endigt; der in diesem verschiebbare und drehbare Stift trägt am oberen Ende den mit Wachs befestigten Krystall. Die zu messende Kante des letzteren kann nun mittels der Bewegungen, welche die zuletzt beschriebenen Teile zulassen, in die erforderliche Orientierung gebracht, d. h. centriert und justiert werden (vgl. S. 21). Unter dem Krystalle befindet sich ein zur Ebene des Kreises senkrechter Spiegel von schwarzem Glase, welcher durch eine Schraube in einer solchen Neigung festgeklemmt werden kann, daß der vor dem Instrumente sitzende

1) Betreffs der Prüfung bzw. Justierung der in den folgenden Abschnitten beschriebenen Goniometer und Refractometer möge auf das Werk von C. Leiss, die optischen Instrumente der Firma R. Fuess, deren Beschreibung, Justierung und Anwendung, Leipzig 1899, verwiesen werden.

Beobachter das Bild eines fernen Gegenstandes, am besten einer Lichtquelle von geringer Ausdehnung, welche sich in der durch den Krystall parallel zur Kreisscheibe gehenden Ebene befindet, im Spiegel erblickt. Dreht man nun die Axe mit dem darauf befindlichen Krystalle so weit, bis das von der einen Fläche der zu messenden Kante zurückgeworfene Spiegelbild des als Signal benutzten Gegenstandes mit dem in dem schwarzen Spiegel gesehenen Bilde desselben zusammenfällt, so ist hierdurch die betreffende Krystallfläche der Ebene des Spiegels parallel gestellt, sobald die Entfernung des Signals groß genug ist, um die von dort aus auf das Instrument fallenden Strahlen als parallel betrachten zu können. Nachdem die betreffende Stellung des Kreises am Nonius abgelesen ist, dreht man denselben mittels der Scheibe S (ohne T zu berühren), bis auf die gleiche Weise der Parallelismus der zweiten Krystallfläche mit der Ebene des schwarzen Spiegels beobachtet wird. Da alsdann der Krystall an der Drehung des Kreises teilgenommen hat, so ist die Differenz zwischen der nunmehr vorzunehmenden Ablesung am Nonius und der vorigen nach S. 21 der gesuchte Flächenwinkel. Die hierbei notwendige Centrierung der Kante ersieht man daraus, daß dieselbe beim Drehen der Axe ihren Ort nicht ändert, die Justierung daraus, daß ohne dieselbe die von den beiden Flächen hervorgebrachten Spiegelbilder mit dem in dem schwarzen Spiegel gesehenen überhaupt nicht zur Deckung gebracht werden können, sondern beim Drehen der Axe entweder rechts oder links an demselben vorübergehen. Die richtige Stellung zu finden (Centrierung und Justierung müssen natürlich der eigentlichen Messung vorangehen) erfordert einige Übung, weil sowohl die Verschiebung behufs der Centrierung, als die zur Justierung der Kante nötigen Drehungen aus freier Hand vorgenommen werden müssen, und es daher dem Anfänger erst nach mehrfachem Hin- und Herprobieren gelingt, die ungefähre Richtigstellung des Krystalles zu erreichen. Ein weiterer Übelstand ist die nach dem Vorhergehenden erforderliche große Entfernung des Signales, infolge deren man nur große und gut spiegelnde Flächen einzustellen imstande ist.

Fig. 673.



Den letzteren Nachteil beseitigte in neuerer Zeit Mallard dadurch, daß er den schwarzen Spiegel nur 2—3 cm unter dem Krystalle anbrachte und vor dem Instrumente eine große,

nahezu achromatische Doppellinse und vor dieser in der Entfernung der Brennweite einen Schirm mit horizontalem Spalte, welcher durch eine Gaslampe beleuchtet wurde, aufstellte, so daß die von dem als Signal dienenden Spalte ausgehenden Strahlen parallel zum Spiegel und Krystalle gelangten. Da das von einer kleinen Krystallfläche reflectierte Signalbild stets erheblich schwächer ist, als das vom Spiegel gelieferte, so ist es gut, das letztere zu schwächen durch Vorsetzen eines roten oder eines roten und eines grünen Glases.

Die vorerwähnten Unvollkommenheiten des Wollastonschen Goniometers veranlaßten schon frühe mehrfache Verbesserungen. Zuerst Malus, und dann namentlich Mitscherlich verbanden damit ein dem Kreise paralleles Fernrohr, durch welches das reflectierte Bild des Signales betrachtet wird; bringt man in der Bildebene desselben ein Fadenkreuz an, so kann man durch Drehen des Krystalles einen bestimmten Punkt in dem Signalbilde mit großer Schärfe auf die Mitte dieses Fadenkreuzes einstellen. Mitscherlich (s. Abhandlungen der Berliner Akad. d. Wiss. 1843, S. 189) wies darauf hin, daß das Fernrohr wenig oder gar nicht vergrößern dürfe, weil sonst das von kleinen Krystallflächen reflectierte Bild zu lichtschwach wird, um deutlich gesehen zu werden. Wir haben aber S. 266 gesehen, daß gerade kleine Krystalle am ehesten frei von Störungen der Ausbildung sind, während unter den größeren sehr häufig solche vorkommen, deren Flächen geknickt und gebrochen sind; da man mit dem Fernrohre ein sehr scharfes Bild des Objectes erblickt, so gewahrt man durch dasselbe auch viel leichter, als mit bloßem Auge, derartige Unebenheiten der Flächen, indem diese dann mehrere Bilder reflectieren, namentlich, wenn man als Signal eine kleine Lichtquelle im dunkeln Zimmer anwendet. Nachdem so die Genauigkeit der Einstellung eine bedeutende Erhöhung erfahren hatte, wurde auch die Unbequemlichkeit der Centrierung und Justierung aus freier Hand, wie sie das Wollastonsche Instrument bietet, beseitigt durch die Einführung von Centrier- und Justiervorrichtungen, welche die Parallelverschiebung und die Neigung der Krystallkante in zwei zueinander senkrechten Ebenen mittels Schrauben gestatten. Die vollkommenste derartige Einrichtung, welche eine leichte und sichere Einstellung des Krystalles in die gewünschte Orientierung ermöglicht, ist die von Fuess construierte, welche bereits S. 635 erwähnt wurde und im nächsten Abschnitte mittels eines Durchschnittes näher erläutert werden soll. Diese beiden wesentlichsten Verbesserungen des Wollastonschen Reflexionsgoniometers sind daher in neuerer Zeit gewöhnlich nicht nur an größeren, zu feineren Messungen dienenden Instrumenten dieser Art, sondern auch an kleineren und einfacheren angebracht worden, wie sie z. B. von den Firmen R. Fuess in Steglitz bei Berlin, Böhm und Wiedemann in München und Linhof ebenda geliefert werden (s. Anhang: Preisverzeichnisse der Lieferanten von Apparaten usw.). Die Beschreibung dieser einander ähnlichen Apparate möge mit demjenigen beginnen, welchen die zuletzt erwähnte Firma nach Angabe des Verfassers construiert.

Auf einer, auf drei kurzen Füßen ruhenden lackierten Eisenplatte P (Fig. 674) ist eine Messingsäule M befestigt, welche den Teilkreis K trägt,

ferner eine zweite mit dem Fernrohre O, welches, der Ebene des Teilkreises parallel gestellt und auf die Drehungsaxe desselben gerichtet, unveränderlich festgeschraubt ist. Die beiden Centrierschlitten werden durch die Schrauben y, von denen nur eine in der Figur sichtbar ist, bewegt, während die beiden Schrauben xx die Justierung bewirken; eine kleine Metallplatte, das Tischchen u, an welchem der Krystall mit Wachs befestigt ist, wird mit einem daran befindlichen Stifte in einer Öffnung der Justiervorrichtung mittels des Schräubchens v festgeklemmt. Um nun den Krystall, bzw. den zu centrierenden Teil desselben in die Verlängerung der Axe des Fernrohres zu bringen, ist die innere Axe s des Teilkreises, welche die Centrier- und Justiervorrichtung trägt, nicht drehbar, sondern in ihrem Lager verschiebbar mittels einer Drehung der Scheibe A; letztere ist mit dem Ringe a fest verbunden und bildet eine Schraubenmutter, durch deren Drehung die am Ende mit einem Schraubengewinde versehene Axe s in ihrem Lager parallel verschoben und so der Krystall dem Teilkreise genähert oder von ihm entfernt werden kann[1]). Alle Drehungen des Krystalles um die Axe des Instrumentes, sowohl die für die Centrierung und Justierung erforderlichen, als die zur eigentlichen Messung gehörigen, werden mittels der Scheibe B bewirkt, so daß also der Limbus K stets an denselben teilnimmt. Die

Fig. 674.



Stellung des Kreises wird an dem festen Nonius N, welcher durch einen Arm mit der Messingsäule M verbunden ist, mittels der Lupe l abgelesen. Damit jede Stelle der Nonienteilung in die Mitte des Gesichtsfeldes der Lupe gebracht werden kann, ist der Träger L der letzteren, welcher mit einem Ringe auf der Axe b aufsitzt, um diese drehbar; außerdem wird die Ablesung erleichtert durch einen das Licht auf die Teilung reflectierenden kleinen Schirm (in der Figur weggelassen), welcher an der Lupe angebracht ist. Zur genauen Einstellung einer bestimmten Stelle des Signalbildes auf den Kreuzungspunkt der beiden Fäden im Gesichtsfelde des

1) Diese Einrichtung ist derjenigen der Goniometer mit horizontalem Kreise entlehnt (s. S. 652), wie auch die Centrier- und Justiervorrichtung eine analoge, nur etwas vereinfachte Construction besitzt.

Fernrohres bedient man sich der Vorrichtung zur »Feinstellung«: Die Axe *b* ist umgeben von einem Ringe *c*, welcher durch Anziehen der Schraube *C* an jener festgeklemmt wird; *c* trägt einen Arm *d*, welcher in den Raum zwischen die beiden vorspringenden Teile des gabelförmigen, an der Säule *M* befestigten Stückes *g* hineinragt, und an welchem oben rückwärts eine Feder *F* angeschraubt ist, deren unteres Ende gegen den hinteren jener beiden vorspringenden Teile wirkt; durch den vorderen geht die Schraube *E*, durch deren Drehung im einen oder andern Sinne das untere Ende des Armes *d* vor- oder rückwärts bewegt und damit der Teilkreis mit dem Krystalle um beliebig kleine Winkel gedreht werden kann (vgl. auch die Beschreibung der ähnlichen Einrichtung im nächsten Abschnitte).

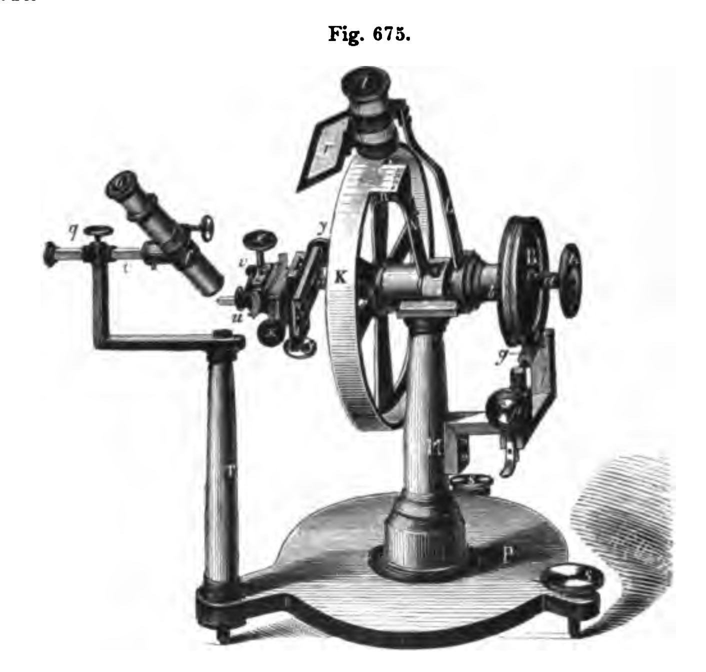
Wenig von dem vorstehend beschriebenen Instrumente verschieden ist das von Böhm und Wiedemann in den Handel gebrachte, in Fig. 675 in etwa $\frac{1}{3}$ nat. Gr. abgebildete Reflexionsgoniometer. Auf einer Metallplatte *P*, welche durch Schrauben *ss* horizontal gestellt werden kann, ruht eine Messingsäule *M*, durch deren oberen verstärkten Teil die Axe des drehbaren Teilkreises *K* geht, und zwar ist diese eine doppelte: eine innere *a*, welche die Centrier- und Justiervorrichtung trägt und durch *A* gedreht wird, und eine äußere *b*, welche mit dem Teilkreise verbunden ist; eine Drehung der Scheibe *B* bewirkt also eine solche von *K*, an welcher auch die innere Axe und somit der Krystall teilnimmt. Die Vorrichtungen zum Ablesen der Teilung und zum Justieren und Centrieren des Krystalles sind die gleichen, wie bei dem vorher beschriebenen Instrumente, während dagegen der Träger des Fernrohres abweichend construiert ist; letzteres (*f*) ist nämlich innerhalb eines gewissen Winkels drehbar um eine zur Ebene des Kreises senkrechte Axe; hebt man das Ocularende *o* desselben, bis der Anschlag erfolgt, so ist die in der Figur dargestellte Stellung erreicht, in welcher es genau auf die Drehungsaxe des Teilkreises *K* gerichtet ist. Außer der Drehung kann man das Fernrohr auch parallel sich selbst verschieben mittels der Schiene *t*, welche durch die Schraube *q* fixiert wird[1]). Hierdurch ist es möglich, je nach der Größe des Krystalles das Fernrohr so zu stellen, daß sich die spiegelnden Flächen gerade vor der Mitte des Objectives befinden. Das Fernrohr ist durch die Säule *T* fest mit dem Stative des Apparates verbunden. Die Feinstellung wird mittels der Schraube *g* bewirkt, deren Gewinde in die Zähne der Scheibe *B* eingreift, so daß man durch Drehen des Knopfes *p* sehr kleine Drehungen von *B* hervorbringen und dadurch eine genaue Einstellung erzielen kann. Um behufs der groben Einstellung die Axe *b* frei drehen zu können, macht man die Scheibe *B* von dem Gewinde der Feinstellschraube *g* unabhängig, indem man den

1) Diese Einrichtung hat den Vorteil, daß man beim Centrieren und Justieren des Krystalles nur die innere Axe *a* zu drehen hat, während man bei dem Linhofschen Instrumente (Fig. 674) hierbei auch den Teilkreis bewegen und daher den Apparat vielleicht etwas mehr abnutzen muß; doch ist dieser Vorteil ganz unerheblich gegenüber der größeren Stabilität der letzteren Construction.



Knopf *p* niederdrückt bis zu einer Stellung, in welcher die darunter befindliche stählerne Feder mit ihrem nach innen vorspringenden Knöpfchen in eine Öffnung des Rahmens *i*, der mit dem Stative des Instrumentes fest verbunden ist, einspringt und die Feinstellschraube in dieser tieferen Lage festhält, bis man sie behufs der Einstellung durch Zurückziehen der Feder wieder löst.

Fig. 675.



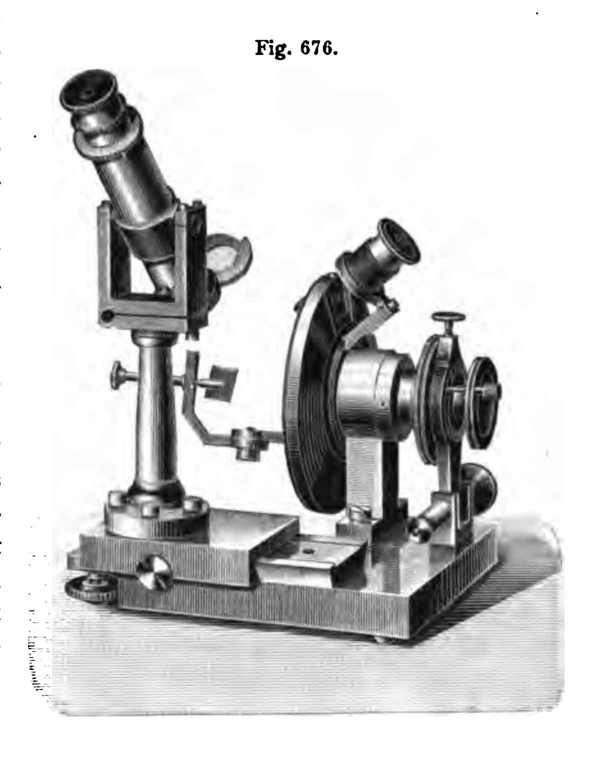
Endlich liefert auch die Firma Fuess in Steglitz ähnliche kleine Goniometer, nach den Angaben von C. Klein construiert (Fig. 676 a. folg. S.). An diesen erfolgt die Parallelverschiebung des Fernrohres zusammen mit der dasselbe tragenden Säule auf einer der Axe des Teilkreises parallelen Schiene, welche fest mit der Fußplatte des Instrumentes verbunden ist, eine jedenfalls viel stabilere Einrichtung, als die in Fig. 675 abgebildete. Dagegen ist diesem Instrumente statt des verbesserten Centrier- und Justierapparates die ältere Wollastonsche Einrichtung beigegeben.

Reflexionsgoniometer von einer der vorbeschriebenen Arten sind für gewöhnliche Krystallmessungen, z. B. chemischer Präparate behufs Identificierung, wobei es sich nicht um Erreichung größerer Genauigkeit handelt, ausreichend und Anfängern namentlich deshalb zu empfehlen, weil sie infolge der bequemen Lage der Arme des Beobachters und der während der ganzen Arbeit gleichbleibenden Stellung der Goniometerteile ein verhältnismäßig rasches Arbeiten gestatten. Als Signal dient am besten ein in 6—8 m Entfernung und etwa 3 m Höhe angebrachte elektrische Glühlampe[1])

[1]) Besonders geeignet sind sog. »Focuslampen« mit einer sehr kleinen Kohlenschleife,

oder ein Gasglühlichtbrenner, welcher von einem Glimmercylinder und einem Schornstein von Eisenblech umgeben ist; in letzteren wird ein einfacher oder kreuzförmiger Spalt eingeschnitten, welcher sich vor dem hellsten Teile der Flamme befinden muß. Wo eine derartige Entfernung nicht zur Verfügung steht, muß man die Lampe auf den Tisch vor das Goniometer setzen und die von dem Spalte kommenden Strahlen durch eine Linse parallel machen (s. S. 642). Zum Ablesen verwendet man am geeignetsten einen Leuchtbrenner, dessen Flamme, damit dieselbe in der Zwischenzeit bei der Einstellung nicht stört, durch Drehen des Hahnes gelöscht werden kann, während unter einer Metallhülle ein kleines Flämmchen weiter brennt, so daß beim Zurückdrehen des Hahnes die Leuchtflamme wieder erzeugt wird (Flürscheims Patent s. Böhm u. Wiedemanns Preiscour.). Hierdurch ist es ermöglicht, daß der Beobachter die vollständige Messung durchführen kann, ohne seine Stellung am Tische zu ändern. Um die Stellung des Goniometers zum Signale aufzufinden, bei welcher letzteres sich in der durch die Axe des Fernrohres parallel zum Teilkreise gehenden Ebene befindet, bedient man sich einer planparallelen Glasplatte, welche man statt des Krystalles auf dem Tischchen *u* befestigt und genau justiert; ist dies geschehen und passieren die von den beiden entgegengesetzten Flächen desselben reflectierten Bilder beim Drehen der Axe nicht nur dieselbe Stelle des Gesichtsfeldes im Fernrohre, sondern auch den Kreuzungspunkt der Fäden, so ist jene Bedingung, d. h. die richtige Stellung des Signales zum Instrumente, erfüllt, und es kann zur Messung

Fig. 676.



welche in der betr. Entfernung als ein hell leuchtender Punkt erscheint; solche sind z. B. im mineralog. Institute der Universität München in Verwendung für eine Reihe fest aufgestellter Goniometer, welche zu den praktischen Übungen dienen, in denen die Studierenden der Chemie und Mineralogie, nachdem sie sich mit der physikalischen Krystallographie vertraut gemacht haben, die Methoden dieser Wissenschaft in einem bestimmten Cursus anzuwenden Gelegenheit finden.

übergegangen werden[1]). Zu dem Zwecke wird der zu untersuchende Krystall auf das Tischchen *u* mit Wachs so aufgesetzt, daß die zu messende Kante bzw. Zone so genau, wie es nach dem Augenmaße erreicht werden kann, zur Ebene der kleinen Platte senkrecht steht, alsdann wird letztere so an dem Goniometer befestigt (mittels des Schräubchens *v*), daß die größte Fläche der betr. Zone möglichst je einer der Centrier- und Justierschrauben parallel ist, weil hierdurch die Justierung wesentlich vereinfacht wird. Über diese, sowie über die Centrierung (während welcher an den beiden zuerst beschriebenen Instrumenten das Ocular des Fernrohres abgenommen werden muß, um den Krystall zu sehen) und das Verfahren der Krystallmessung überhaupt s. weiterhin bei den Goniometern mit horizontalem Kreise.

Die Principien der Construction der im vorstehenden beschriebenen kleineren Goniometer hat man nun auch angewendet auf größere, für die Zwecke krystallographischer Untersuchungen, welche einen höheren Grad der Genauigkeit und eine kritische Prüfung des letzteren erheischen, bestimmte Instrumente. Auf den Vorschlag Mitscherlichs, nach dessen Angaben Oertling in Berlin seine Goniometer construierte, wurden diese Apparate mit zwei dem Kreise parallelen Fernröhren versehen, von denen das eine zur Beobachtung, das andere, der Collimator, dazu dient, die auf den Krystall fallenden Strahlen parallel zu machen. Der Collimator bildet mit dem Beobachtungsfernrohre einen stumpfen Winkel und kehrt wie dieses sein Objectiv dem Krystalle zu; das in seiner Brennebene befindliche Fadenkreuz stellt das Signal dar, dessen Bild, von der Krystallfläche reflectiert, eine sehr genaue Einstellung auf das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres gestattet. Ähnliche Instrumente wurden später angefertigt von Jürgenson in Kopenhagen (s. V. von Lang, Denkschr. d. Wien. Akad. d. Wiss. 1876, **36**, 41—44) und Schneider in Wien (s. A. Brezina, Jahrb. d. geol. Reichsanst. 1884, **34**, 321), und zwar sind diese, wie die Oertlingschen Goniometer, gleichzeitig zum Gebrauche als Refractometer (zur Bestimmung der Brechungsindices) eingerichtet. Alle diese größeren Instrumente, deren Teilkreise eine Ablesung auf Bruchteile einer Minute gestatten, besitzen jedoch in der horizontalen Richtung ihrer Drehungsaxe eine Fehlerquelle, welche, bei den kleineren Instrumenten meist nicht in Betracht kommend, die Verwendung derartig construierter größerer Apparate zu genauen Messungen ungeeignet machen. Zunächst, und dieser Nachteil betrifft natürlich auch die vorbeschriebenen kleinen Goniometer, können mit denselben nur verhältnismäßig kleine Krystalle, bzw. Prismen, untersucht werden, da größere entweder beim Drehen durch ihr Gewicht sich senken oder überhaupt gar nicht mit Wachs an dem Ende der horizontalen Axe

1) Bei den in Fig. 675 und 676 abgebildeten Instrumenten kann man außerdem zur Controlle des Parallelismus des Fernrohres mit der Ebene des Teilkreises das letztere direct auf das Signal einstellen, muß es aber alsdann wieder bis zum Anschlage herabsenken.



befestigt werden können. Aber selbst bei der Messung mäßig großer Krystalle bewirkt die ungleiche Einwirkung der Schwere auf die ungleichförmig um die Axe verteilten Massen eine Biegung der letzteren und des Justierapparates, welche um so größer ist, je mehr der Schwerpunkt jener Massen von der Axe abweicht; hierdurch entstehen während der zur Messung erforderlichen Drehung Bewegungen dieser Teile, welche von der des Limbus unabhängig sind und erfahrungsgemäß bis zu mehreren Minuten steigende Fehler der Messung hervorbringen können. Ferner wird durch den Druck, welchen die Axe auf die Innenseite der sie umschließenden Hülse nur nach unten ausübt, letztere nach längerem Gebrauche des Instrumentes dort stärker abgenutzt; die Drehung wird alsdann excentrisch und bleibt nicht gleichmäßig sanft. Besonders ist letzteres der Fall, wenn das Goniometer zugleich als Refractometer benutzt und zu diesem Zwecke das Beobachtungsfernrohr an den Kreis angeschraubt wird und denselben einseitig belastet. Ferner können Collimator und Beobachtungsfernrohr, was bei der Messung der Brechungsindices, wie bei gewissen krystallographischen Untersuchungen von besonderer Wichtigkeit ist, nicht unter jedem beliebigen Winkel gegeneinander geneigt werden.

Aus diesen Gründen sind für alle genaueren krystallographischen Untersuchungen stets Goniometer mit horizontalem Teilkreise vorzuziehen, wie sie zuerst von Malus und Babinet vorgeschlagen wurden. Da bei diesen der Objectträger eine horizontale Platte darstellt, so kann man große Krystalle und Prismen, selbst mäßig große Krystalldrusen, deren Zerkleinerung man zu vermeiden wünscht, darauf befestigen; ferner kann man unter beliebigen Incidenzwinkeln mit gleicher Leichtigkeit beobachten; kurz: bei verticaler Stellung der Drehungsaxe werden sämtliche oben aufgeführte Übelstände vermieden. Diejenigen Instrumente, welche den Anforderungen größerer Genauigkeit und vielseitiger Verwendbarkeit am vollkommensten entsprechen und daher für krystallographische Untersuchungen jetzt fast allgemein benutzt werden, sind die von R. Fuess in Steglitz bei Berlin gelieferten[1]), welche deshalb im folgenden Abschnitte ausführlich beschrieben werden sollen.

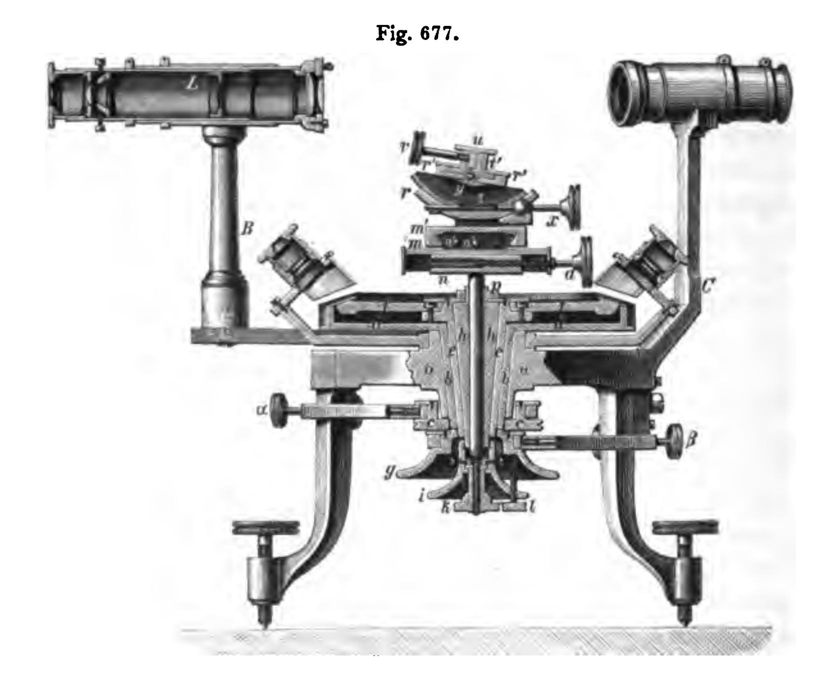
Reflexionsgoniometer mit horizontalem Teilkreise.

Für fast alle krystallographischen Untersuchungen ausreichend, namentlich infolge der mannigfachen von M. Websky vorgeschlagenen Verbesserungen, ist das Fuesssche Goniometer Nr. 2, welches in Fig. 677 in ½ nat. Gr. dargestellt ist. Diese Figur ist so gezeichnet, daß der mittelste Teil des Instrumentes, d. h. die ineinander geschobenen Axen, der Kreis und die Centrier- und Justiervorrichtung sowie auch das Beobachtungsfernrohr im Durchschnitte, die übrigen Teile dagegen in der Ansicht erscheinen. Das Ganze ruht auf drei mit Schrauben versehenen Füßen,

1) S. dessen Preisverzeichnis am Schlusse dieses Buches.

und der Kreis kann daher, was jedoch für die Messungen nicht erforderlich ist, genau horizontal gestellt werden. Die Füße sind an die kreisrunde dicke Messingplatte *o* (vgl. auch die Ansicht Fig. 678 S. 654) angeschraubt, welche, in der Mitte conisch durchbohrt, die hohlen Axen und den Kreis trägt. In der weiten Durchbohrung derselben sitzt zunächst eine conische Axe *b*; diese ragt nach unten nur wenig über die Hülse, welche den untersten Teil von *o* bildet, hervor und ist oben fest verbunden mit einem Kreise *d*, der an zwei diametral entgegengesetzten Stellen eine Nonienteilung (Ablesung auf 30″) besitzt; an diese Kreisscheibe ist endlich von unten her der horizontale Arm, welcher auf einer senkrechten Säule *B* das Beobachtungsfernrohr *L* trägt, angeschraubt, so daß durch Bewegung des letzteren

Fig. 677.



sich auch der Nonienkreis *d* und die hohle Axe *b* um die Centralaxe des Instrumentes drehen. Diese Drehung kann durch Anziehen der Schraube *α* an jeder beliebigen Stelle arretiert werden, indem dadurch die an das untere Ende von *b* angeschraubte Scheibe *c*, deren Rand ringförmig ausgeschnitten ist, gegen einen in diesem Ausschnitte liegenden und mit der Klemmschraube in Verbindung stehenden Ring gepreßt wird. Dieselbe Arretierung kann aber auch mittels einer von vorn durch *o* hindurchgehenden Schraube [1]) bewirkt werden, deren Ende, wenn sie fest angezogen ist, gegen einen Punkt der Außenseite des Conus *b* drückt und diesen daher

1) Da die Vorderseite in dem Durchschnitte Fig. 677 fortgenommen gedacht ist, konnte diese Schraube nicht zur Darstellung gelangen.

an der Drehung hindert. Für die Krystallmessung kann somit der Beobachter dem Fernrohre *L* diejenige Stellung geben, welche ihm die bequemste ist, und dasselbe dann in dieser fixieren, indem er die zuletzt erwähnte Schraube oder α fest anzieht, wodurch auch der Ort der beiden Nonien ein unveränderlicher geworden ist.

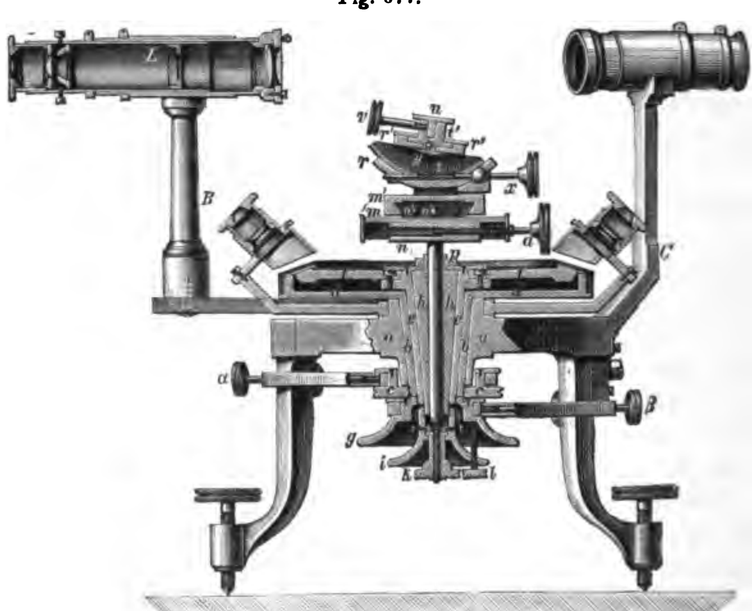
In *b* bewegt sich concentrisch die ebenfalls hohle Axe *e*, welche oben mit dem eigentlichen Teilkreise *f*, unten mit der am Rande gekerbten hohlen Scheibe *g* durch Verschraubung fest verbunden ist; durch Drehen der letzteren mit der Hand bewegt man somit, wenn Nonien und Fernrohr auf die oben angegebene Art fixiert sind, den Kreis und die inneren Axen, also auch den aufgesetzten Krystall, und kann daher die erfolgte Drehung an jedem der beiden Nonien ablesen. Diese Drehung kann nun arretiert werden durch die Schraube β, welche in Verbindung steht mit einem starken Ringe (im quadratischen Durchschnitte auf der linken Seite sichtbar), der den oberen Teil der Scheibe *g* umfaßt; zieht man β an, so klemmt sie mit einem an ihrem Ende befindlichen parallelepipedischen Stücke die Axe an jenen Ring fest. Die Schraube β ist aber ihrerseits nicht unmittelbar mit dem Stative verbunden, sondern das lange Metallstück, welches die Schraubenmutter von β enthält, liegt auf der Hinterseite nur lose an dem Ende einer Schraube an, die den rechts befindlichen Fuß horizontal von hinten nach vorn durchbohrt, und deren Knopf in der Zeichnung nur zum kleinen Teile sichtbar ist; gegen das Ende dieser Schraube wird aber jenes Metallstück angepreßt durch eine stählerne Feder. Dreht man die Schraube mittels des Knopfes vorwärts, so gibt die Feder nach, das Metallstück und der Ring, folglich auch die darin festgeklemmte Axe *e* mit dem Krystalle drehen sich, als wenn keine Arretierung existierte; dreht man die Schraube zurück, so folgt ihr das Metallstück wegen des Druckes der Feder nach, und der Krystall dreht sich nach der entgegengesetzten Seite, als vorher. Da man mittels der Bewegung einer Schraube es viel besser in der Gewalt hat, eine kleine Drehung auszuführen, als mit freier Hand, so stellt man durch Drehen an der Scheibe *g* das von der Krystallfläche reflectierte Bild nur ungefähr im Gesichtsfelde des Fernrohres ein, klemmt alsdann die Axe *e* und corrigiert die Einstellung mittels der Feinstellschraube.

Innerhalb *e* ist sehr leicht drehbar die ebenfalls noch hohle Axe *h*, welche durch die Scheibe *i* bewegt wird, um die beim Centrieren und Justieren nötigen Drehungen auszuführen, ohne zugleich den ganzen Kreis mitdrehen zu müssen, was eine überflüssige Abnutzung des Instrumentes zur Folge haben würde. Da die Einstellung mittels der Drehung von *g* nur dann richtige Resultate liefern kann, wenn *h* und *i* ganz gleichmäßig an der Drehung teilnehmen, so können diese durch Anziehen der Schraube *l* fest mit *g* verbunden werden (für einen einigermaßen geübten Beobachter ist übrigens diese Verbindung überflüssig, da die Scheibe *g* so weit über *i* vorragt, daß man sie leicht drehen kann, ohne *i* zu berühren und dessen Stellung gegen *g* zu verändern). Statt der Schraube *l* kann dem Instrumente

auch eine Vorrichtung zur Feinstellung der Axe *h* und des Krystallträgers beigegeben werden, deren Construction aus Fig. 678 zu ersehen ist (s. auch S. 657 u. Fig. 682).

In *h* steckt nun endlich die innerste cylindrische Axe, welche oben die Centrier- und Justiervorrichtung trägt. In ihrem untersten Teile ist dieselbe verjüngt und mit einem Schraubengewinde versehen, welches in einer Hülse läuft, deren unterster Teil die kleine, am Rande gekerbte Scheibe *k* bildet. Da der obere Teil dieser Hülse mit *i* so verbunden ist, daß er zwar gedreht werden kann, aber immer in derselben Höhe bleiben muß (wie aus Fig. 677 deutlich zu ersehen), so bewirkt eine Drehung von *k* eine Bewegung der inneren Axe in verticaler Richtung (eine Drehung

Fig. 677.



der letzteren ist durch eine eigene Vorrichtung verhindert). Man kann somit durch Drehen von *k* die innere Axe mit der Centrier- und Justiervorrichtung so weit heben oder senken, daß die zu messenden Flächen des Krystalles sich genau vor der Mitte des Objectives des Beobachtungsfernrohres befinden. Schließlich kann man die innere Axe in der erforderlichen Höhe durch Anziehen der Klemmvorrichtung *p* (mittels eines beigegebenen Schlüssels) fixieren.

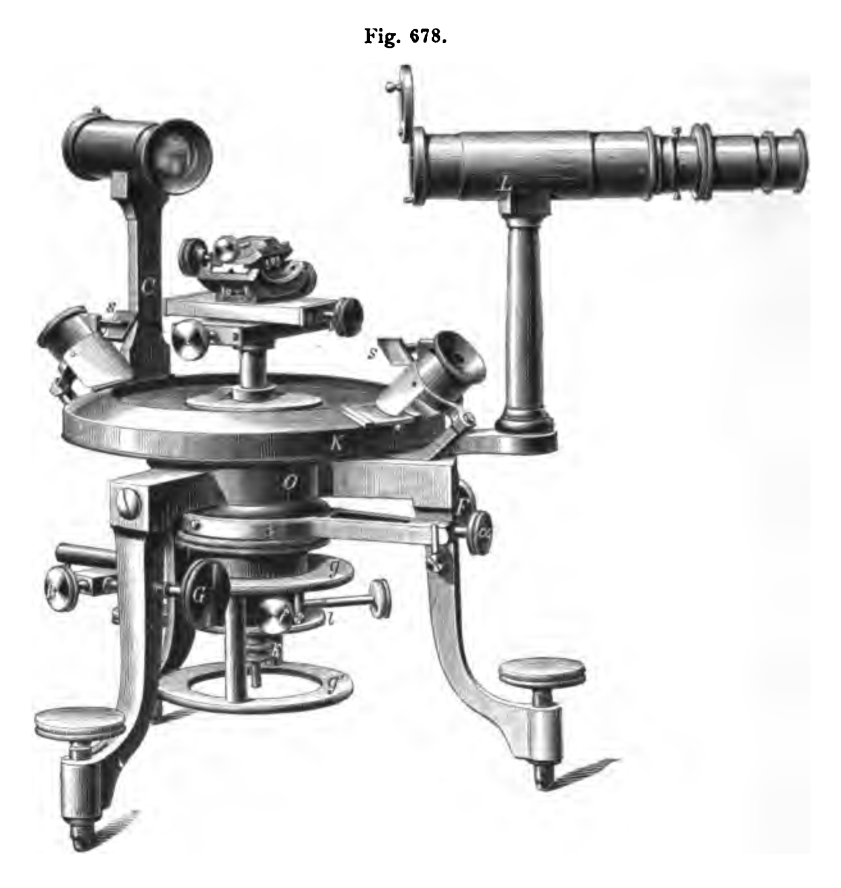
Die Fuesssche Centrier- und Justiervorrichtung ist in Fig. 677 ebenfalls im Durchschnitte sichtbar. Auf die zuletzt erwähnte innerste Axe des Goniometers ist das Metallstück *n* aufgeschraubt, welches von dem rectangulären Kasten *m* auf der Vorder- und Hinterseite so umfaßt wird, wie es der darüber befindliche Querschnitt *m' n'* zeigt. Der Kasten *m* kann

daher durch die Schraube *a* von rechts nach links oder umgekehrt verschoben werden und wird dabei in seiner Richtung geführt nicht nur durch die schrägen Seitenschienen, sondern auch noch durch zwei, das Metallstück *n* der Länge nach durchbohrende Stahlcylinder, welche mit *m* fest verbunden sind. Eine die Schraube *a* (auf der rechten Seite in der Figur) umwindende Spiralfeder preßt das Stück *n*, die Schraubenmutter von *a*, gegen die eine Seite des Gewindes der Schraube, wodurch, selbst wenn letztere durch langen Gebrauch stark abgenutzt sein sollte, jeder »tote Gang« vermieden wird. Auf *m* ist nun der zweite senkrecht dazu bewegliche Schlitten befestigt, der genau die Construction des ersteren besitzt, daher dessen Querschnitt (*m'* der von vorn nach hinten und umgekehrt verschiebbare Rahmen, *n'* das auf *m* festgeschraubte Stück, *a'* die Schraube) zugleich zur Erläuterung des unteren dient; zu beiden Seiten der Schraube *a'* erblickt man auch im Querschnitte die beiden derselben parallelen Stahlcylinder, welche die Führung des Gleitens von *m'* bewirken. Dieses letztere trägt nun die Justiervorrichtung, welche die Drehung des Krystallträgers in zwei aufeinander senkrechten Ebenen durch Gleiten zweier Schlitten, deren Gestalt ein Kreissegment ist, in Schienen von derselben Form erzielt. Die Schienen, *r* die untere in der Längsansicht, *r'* die obere im Querschnitte, umfassen die beiden Seitenränder des Schlittens (*t* der untere, *t'* der obere) von oben und unten in Form einer doppelten Rinne, wie aus dem Querschnitte des oberen Teiles deutlich ersichtlich ist. Die beiden Schlitten sind nun an ihrer Unterseite in der Mittelzone von einem Ende bis zum andern gezähnelt, so daß diese Zone gleichsam ein Stück eines Zahnrades bildet, in dessen Zähne das Gewinde einer horizontalen Schraube (*x*, bzw. *y*, letztere nur im kreisförmigen Querschnitte sichtbar) eingreift, welche ohne Ortsveränderung in der Schiene drehbar ist, und durch deren Drehung das Kreissegment folglich in jener verschoben wird. Da der Kreisbogen eines solchen Segmentes etwa einem rechten Winkel entspricht, so sieht man leicht ein, daß dasselbe um etwa 40° nach rechts oder links gedreht werden kann, ohne daß die Stabilität des Krystallträgers gefährdet ist; diese Weite der Grenzen, innerhalb deren man den Krystall neigen kann, hat aber den großen Vorteil, daß man zwei Flächen noch immer zu justieren imstande ist, selbst wenn man sie, weil ihre Kante nicht sichtbar (zerbrochen oder durch andere Flächen weggenommen), sehr schief auf den Krystallträger aufgesetzt hatte. Beide Segmente haben einen gemeinsamen Drehungspunkt, welcher so hoch über dem Krystallträger *u* liegt, daß man die zu messende Kante eines kleinen, wie eines ziemlich großen Krystalles leicht in jene Höhe bringen kann, in welcher er seinen Ort beim Justieren nicht mehr wesentlich ändert. In den oberen Schlitten ist ein kreisrundes Loch eingebohrt, in welchem der Fuß des horizontalen Tischchens *u*, auf das der Krystall mit Wachs aufgesetzt wird, durch eine kleine Schraube *v* festgehalten ist. Um auch in den Justierschrauben jeden toten Gang zu vermeiden, werden dieselben durch eine

horizontale Feder gegen das Schraubengewinde der Schlitten angepreßt; den Querschnitt der zu *x* gehörigen und mit *r* vorn und hinten verbundenen Feder sieht man in Fig. 677 unter dem linken Ende der Schraube *x*. Noch besser sind diese Federn sichtbar in der, zugleich zur Verdeutlichung der vorstehenden Beschreibung zu vergleichenden Ansicht Fig. 678.

Betreffs der Kreisteilung des Instrumentes ist noch anzuführen, daß dieselbe auf einer schräg nach außen abfallenden conischen Fläche angebracht ist und in einer Ebene liegt mit den beiden auf *d* befindlichen

Fig. 678.



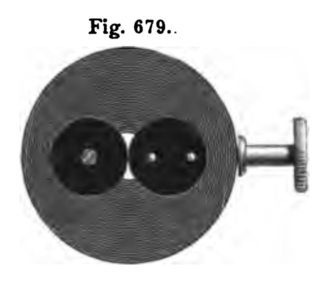
Nonienteilungen. Beide Teilungen sind durch eine ringsum laufende Messingkappe (in Fig. 678 mit *K* bezeichnet), welche unten mit *d* fest verbunden ist, verdeckt und so gegen Verunreinigungen geschützt. An der Stelle der beiden Nonienteilungen sind in diesen Schutzring rectanguläre Fenster eingeschnitten und durch ebene Glasplatten geschlossen. Durch die letzteren hindurch erfolgt die Ablesung mittels zweier diametraler Lupen, welche mit je einem halbcylindrischen Hornblatte behufs Zerstreuung des durch einen kleinen Spiegel *s* (s. die Ansicht Fig. 678) auf die Teilung geworfenen Lichtes versehen sind; durch einen Träger steht jede Lupe mit

einem den Stativteil *o* umfassenden Ringe in Verbindung, welcher drehbar ist, so daß man die Lupe längs der Nonienteilung verschieben kann.

Durch den Arm *C* ist fest mit dem Stative verbunden das Collimatorrohr, welches an der den Krystallen zugewandten Seite eine achromatische Linse trägt, in deren Brennpunkt die verschiedenen Signale durch Einschieben derselben am andern Ende des Rohres gebracht werden können. Es sind dies die folgenden:

a) Der sogenannte Webskysche Spalt (s. Fig. 679 in natürl. Größe), welcher aus zwei, vor einer kreisrunden Öffnung angebrachten und durch eine Schraube bis zur Berührung verschiebbaren, kreisförmigen, geschwärzten Metallscheiben besteht; diese Vorrichtung vereinigt die Vorteile eines engen und eines weiten Spaltes, da die Verengerung in der Mitte des hellen Bildes eine sehr genaue Einstellung gestattet, andererseits Licht genug durch den Spalt hindurchgeht, um auch bei der Reflexion von sehr kleinen oder unvollkommenen Flächen noch den oberen und unteren Teil als zwei helle Flecke erscheinen zu lassen, welche wenigstens eine approximative Einstellung ermöglichen.

Fig. 679.



b) Ein geradliniger Spalt, wie er besonders bei der Messung von Brechungsindices benutzt wird, durch eine Schraube von der totalen Berührung der beiden Schneiden bis zur Breite von $1\frac{1}{2}$ mm verstellbar.

c) Eine runde Öffnung von 0,5 mm Durchmesser, welche dazu dient, geringe Abweichungen von Flächen aus der Zone oder die Gruppierung der mehrfachen Reflexe geknickter, aus mehreren Facetten bestehender Flächen zu bestimmen, welche also besonders geeignet ist zum Studium der Vicinalflächen (s. S. 267).

d) Das sogenannte Schraufsche Signal (s. Fig. 680, nat. Gr.), welches vorteilhaft an Stelle des früher verwendeten Fadenkreuzes in hellem Felde (s. S. 648) gesetzt wird, weil letzteres das Auge sehr ermüdet. Dasselbe besteht aus einem unter 45° gerichteten Kreuzspalte, in dessen Mitte sich ein aufrechtes Fadenkreuz befindet, welches bei der Reflexion an sehr vollkommenen Flächen auch im Spiegelbilde erkennbar ist und die genaueste Einstellung gestattet. Das Signal hat nun den weiteren Vorteil vor dem gewöhnlichen Fadenkreuze, daß es auch verwendbar ist, wenn die zu messenden Krystallflächen nicht so vollkommen und so groß sind (und dies ist der bei weitem häufigste Fall), daß das von ihnen gespiegelte Bild das feine Fadenkreuz noch erkennen läßt: man stellt alsdann auf die Mitte des hellen Kreuzes ein, was offenbar, wenn das Bild

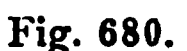


Fig. 680.



einigermaßen scharf ist, immer noch mit ziemlicher Genauigkeit bewerkstelligt werden kann (s. A. Schrauf, Zeitschr. f. Kryst. 1879, **3**, 356).

Vor das jedesmalige Signal wird, um es zu beleuchten, eine elektrische oder Gas-Glühlampe bzw. mangels solcher eine Petroleumlampe gesetzt, deren Licht durch einen passenden Schirm vom Beobachter abgehalten wird, so daß dasselbe nur auf das Signal fällt. Eine weit größere Helligkeit des letzteren erhält man durch Concentration des Lichtes mittels einer Beleuchtungslinse; zu diesem Zwecke wird ein mit einem seitlichen Fenster versehenes Rohr, welches vorn eine Linse von etwas größerem Durchmesser, als das Objectiv des Collimators, enthält, vor dem Signale aufgesteckt; die Lampe wird so vor die Beleuchtungslinse gestellt, daß gerade auf dem Signale ein scharfes umgekehrtes Flammenbild entsteht, was man durch das seitliche Fenster des Rohres zu beobachten imstande ist. In das Rohr dieses Beleuchtungsapparates kann vor dem Aufstecken desselben ein Nicolsches Prisma (bei der Messung der Brechungsindices doppeltbrechender Prismen erforderlich) eingeschoben und auch nach dem Aufstecken (durch das Fenster) um die Axe des Rohres gedreht werden; durch Marken an letzterem und an der Fassung des Nicols ist es ermöglicht, hierbei dem Hauptschnitte des letzteren die erforderliche Stellung mit genügender Genauigkeit zu verleihen[1]).

Das Beobachtungsfernrohr L ist, wie schon erwähnt, durch den horizontalen Arm, auf welchem die Säule B ruht, fest mit dem Nonienkreise verbunden. Vor dem Objective, welches aus einer dem Objective des Collimators ähnlichen achromatischen Linse besteht, kann eine in einen Anschlag fallende Lupe vorgeschlagen werden; damit wird das Fernrohr in ein schwach vergrößerndes Mikroskop umgewandelt, durch welches man den auf dem Träger u befindlichen Krystall erblickt und daher imstande ist, die Centrierung der zu messenden Kante durch Einstellung auf das Fadenkreuz des Oculares sehr genau vorzunehmen. Dem Beobachtungsfernrohre sind folgende vier verschiedene Oculare beigegeben:

α) Eine achromatische Doppellinse, welche eine sechs- bis siebenfache Vergrößerung bewirkt und daher eine sehr genaue Einstellung des Signalbildes gestattet.

β) Eine achromatische Doppellinse mit dreifacher Vergrößerung, welche für die meisten Messungen ausreicht und daher häufiger verwendet wird.

γ) Eine Linsencombination, welche kaum zweimal vergrößert und daher wegen ihrer Lichtstärke bei schwachen und gestörten Reflexen mit Vorteil verwendet wird.

δ) Zwei Linsen, von denen eine vor das Objectiv gesetzt wird; diese Combination bewirkt eine Verkleinerung des Signalbildes um das Dreifache

1) Goniometerlampen mit derartigen Vorrichtungen liefert R. Fuess in Steglitz in der zu seinen Instrumenten geeigneten Form, ferner eine nach Angaben von V. Goldschmidt construierte Lampe für Gasglühlicht der Mechaniker Stoë in Heidelberg (s. Zeitschr. f. Kryst. 1894, **28**, 149).



und läßt im dunkeln Raume und bei guter Abblendung noch die Reflexe der allerkleinsten, nur mit der Lupe sichtbaren Flächen erkennen.

Jedes der Rohre, in welchen sich diese Oculare befinden, kann in das Objectivrohr L eingeschoben werden, und damit seine richtige Stellung in demselben jedesmal rasch gefunden werde, ist es mit einem Klemmringe umgeben, welcher eine vorspringende dreieckige Nase besitzt; der Ring ist durch eine Schraube so auf dem Ocularrohre festgeklemmt, daß letzteres richtig eingeschoben ist, wenn die Nase des Ringes in einen ihr entsprechenden Kerb des Objectivrohres genau paßt. Ebensolche Klemmringe tragen zu demselben Zwecke auch die in den Collimator einzuschiebenden Rohre mit den verschiedenen, S. 654 erwähnten Signalen.

Über die Prüfung und Justierung des vorbeschriebenen Instrumentes s. M. Websky, Zeitschr. f. Kryst. 1880, **4**, 545 f.

Die perspectivische Ansicht Fig. 678 (in $\frac{1}{3}$ natürl. Größe) bezieht sich auf das in Fuess' Preisverzeichnisse (s. am Schlusse dieses Buches) als Nr. 2a bezeichnete Goniometer, welches genau dieselbe Größe und Construction wie Nr. 2 besitzt, aber noch dadurch vervollständigt ist, daß die Verbindung der beiden Scheiben g und i (Fig. 677), anstatt durch die einfache Schraube l, ebenfalls durch eine Feinstellbewegung mit der Klemmschraube f bewirkt wird. Da man infolgedessen mit der Hand weniger gut an die Drehscheibe g gelangen kann, so sind an dieselbe zwei nach unten gehende Metallpfeiler angesetzt, und diese tragen einen mit g gleich großen und parallelen Ring g', mitttels dessen nun der betreffende Axenconus nebst dem Teilkreise sehr bequem gedreht werden kann.

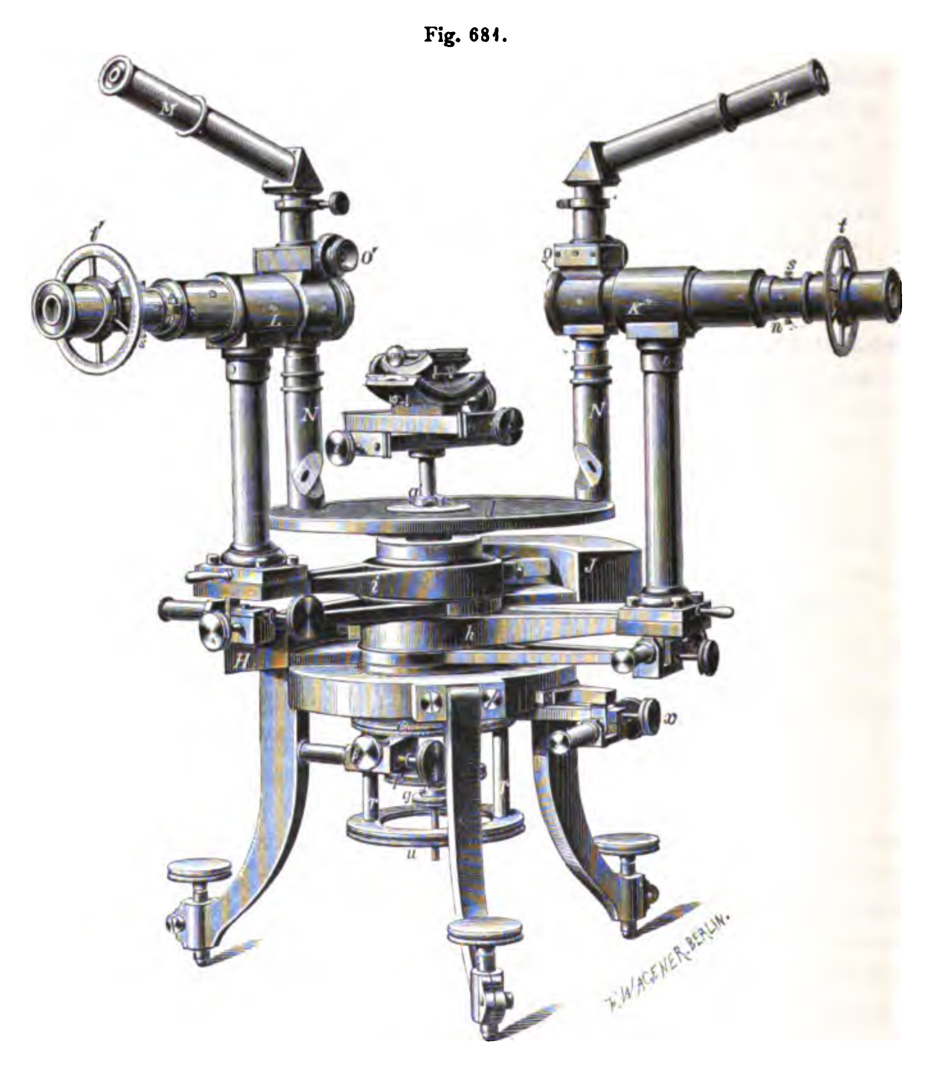
Als Modell Nr. 3 liefert R. Fuess ein einfacher ausgerüstetes Instrument, ebenfalls von gleichen Dimensionen wie Nr. 2, aber von demselben dadurch verschieden, daß die bei der Messung von Brechungsindices zu benutzende Feinstellbewegung α weggelassen, daher der Apparat nur für Krystallmessungen eingerichtet ist; aus diesem Grunde wird demselben auch nur das gewöhnliche Ocular mit zweifacher Vergrößerung (γ) und nur ein Signal (der Webskysche Spalt, nicht verstellbar) beigegeben. Endlich sind von derselben Firma auch kleinere Goniometer (Modell Nr. 4) von ähnlicher Construction zu beziehen, und ein solches bildet zugleich auch einen Teil des in einem späteren Abschnitte beschriebenen krystallographisch-optischen Universalapparates in seiner älteren Form, während die später gelieferten Apparate (s. ebenda) zugleich ein Goniometer enthalten, welches dem größeren Modelle 2 entspricht.

Wie die zuvor erwähnten Instrumente, so sind für gewöhnliche Messungen auch verwendbar die von dem Mechaniker Linhof in München hergestellten Reflexionsgoniometer mit horizontalem Kreise und zwei Fernröhren, welche im übrigen den S. 644 beschriebenen mit verticalem Kreise entsprechen, aber, durch Anbringung eines Collimators mit Webskyschem Spalte und zweier Feinstellvorrichtungen, dieselbe Art der Verwendung gestatten, wie die größeren Fuessschen Goniometer. Wenn sie diesen natürlich auch

an Genauigkeit nachstehen, so ermöglicht ihre einfachere Construction doch ein sehr rasches und bequemes Arbeiten (betr. der Verwendung als Refractometer s. S. 691 Anmerk.).

Für sehr genaue Messungen, namentlich Untersuchungen über die Änderungen der Krystallwinkel mit der Temperatur, welche ja stets sehr

Fig. 681.



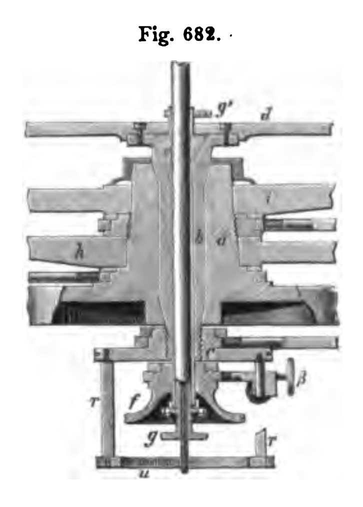
klein sind, bedarf es eines noch größeren Instrumentes, wie es in Fig. 681 in $\frac{1}{5}$ der natürlichen Größe abgebildet ist. Diese Figur ist eine Ansicht des von Fuess als Modell Nr. 1 gelieferten großen Goniometers, während Fig. 682 (S. 660) den mittleren Teil im Durchschnitte darstellt. Zwischen Dreifuß und Kreis befindet sich ein fest mit dem Stative des Goniometers verbundener, verhältnismäßig hoher und starker Metallcylinder *a*, welcher von den

inneren Axen durchbohrt wird. Um diese Hülse drehen sich, der eine über dem andern und durch Rinnen geführt, zwei Ringe, deren jeder nach einer Seite einen horizontalen Arm (*i*, bzw. *h*), an welchem auf einer Säule ein Fernrohr ruht, nach der andern ein Gegengewicht (*J* und *H*) trägt. Die beiden Fernröhre *K* und *L* sind daher ganz voneinander unabhängig beweglich und können in jede beliebige Stellung gebracht (zu welchem Zwecke die Fernrohrträger mit kleinen Handhaben versehen sind) und durch Klemmschrauben darin fixiert werden; eine bestimmte Stellung eines jeden derselben kann ferner durch eine Feinstellschraube (die am linken Fernrohre befindliche ist in der Figur dem Beobachter zugekehrt) in beliebiger Schärfe hergestellt werden. Hierdurch ist man imstande, mit dem Instrumente alle Arten von optischen Untersuchungen anzustellen, bei denen es sich um Bestimmung der Richtung von auffallenden, reflectierten oder gebrochenen Strahlen handelt; um hierbei auch polarisiertes Licht anwenden zu können, ist auf das Ocular jedes Fernrohres ein um seine Axe drehbares Nicolsches Prisma mit einem kleinen Teilkreise, der die Stellung des ersteren angibt, aufzustecken. Die Oculare, wie die Signale und der Beleuchtungsapparat dieses Instrumentes sind die entsprechenden, wie bei Modell Nr. 2, nämlich *a*, *b*, *d* und α, β, γ, (s. S. 655, 656), und werden in derselben Weise je nach Bedarf in die Objectivrohre eingeschoben; die Klemmringe *n*, welche hierbei die richtige Stellung angeben, sind in Fig. 681 deutlich sichtbar, derjenige des Fernrohres *L* mit der Seite, an welcher die Klemmung mittels eines Schlüssels ausgeführt wird. In einer durch Liebisch verbesserten neuen Form dieses Instrumentes sind die Ocularrohre durch Trieb verstellbar, und an Stelle der Ocularnicols große Polarisatoren mit Teilkreisen vor den Objectiven der Fernröhre aufsetzbar. Vor demjenigen des Beobachtungsfernrohres kann außerdem auch ein Babinetscher Compensator (siehe weiterhin unter den Mikroskopattributen) angebracht werden.

Durch die obenerwähnte cylindrische Hülse *a*, um welche sich die Fernrohrträger drehen, geht nun zunächst eine hohle, oben und unten konische Axe (*b* in Fig. 682). Diese trägt oben den horizontalen Teilkreis *d*; ihre Bewegung wird mittels der obersten und größten *c* der drei zwischen den Füßen des Goniometers befindlichen Scheiben oder, noch bequemer, mittels der durch die Pfeiler *r* damit fest verbundenen Scheibe *u* ausgeführt. Diese Drehung wird bei einer Krystallmessung benutzt, und kann die betreffende Axe durch die Schraube *x* geklemmt und mit der zugehörigen Mikrometerschraube fein gestellt werden. In dieser Axe steckt concentrisch eine zweite (*e*, Fig. 682, der Axe *h* in der Fig. 677 entsprechend), ebenfalls hohl und durch die zweite kleinere Scheibe *f* von unten her zu bewegen; auch hier kann eine feine Einstellung durch Anziehen der Klemmschraube β und Drehung der zugehörigen Feinstellschraube erfolgen. Die zu diesem Instrumente gehörige Centrier- und Justiervorrichtung ist gleich der vorher beschriebenen, nur daß auf dieselbe nach Erfordernis auch ein größeres Tischchen aufgesetzt werden kann. Sie kann ebenso wie bei dem Instrumente Fig. 677 in das

erforderliche Niveau gebracht werden dadurch, daß die letzte und innerste Axe, auf der sie befestigt ist, unten ein Schraubengewinde trägt, welches durch Drehen des untersten in Fig. 681 und 682 sichtbaren Knopfes *g* auf und nieder bewegt wird. Die Ablesung geschieht bei diesem großen Instrumente durch zwei Mikroskope, welche mit den Fernröhren fest verbunden sind. Der untere, senkrechte Teil derselben *N* enthält das Objectiv, auf welches das Licht von der Teilung durch eine Öffnung in der schrägen weißen Fläche fällt; letztere dient dazu, die Teilung zu beleuchten, indem sie das Licht einer seitlich aufgestellten Lampe zerstreut reflectiert. Die Strahlen passieren dann das Innere des Fernrohres und über demselben einen Kasten *o*, an welchem eine Mikrometerschraube *o'* befestigt ist; alsdann werden sie durch ein totalreflectierendes Prisma abgelenkt und gehen endlich durch den schräg gerichteten, das Ocular enthaltenden Teil *M*, welcher, auf dem senkrechten Teile drehbar, in jede dem Beobachter bequeme Richtung gebracht werden kann. Dieser erblickt nun im Mikroskope außer der Teilung des Kreises *d* noch einen in der Bildebene befindlichen und durch die Mikrometerschraube *o'* beweglichen Doppelfaden, dessen Ort auf der Teilung dadurch bestimmt wird, daß man denselben durch Drehen von *o'* auf den vorhergehenden Teilstrich zurück verschiebt. Da der Abstand der Teilstriche auf dem Kreise 10' beträgt, die Trommel *o'* aber in 60 Teile geteilt ist, so entspricht die Drehung der Trommel um einen Strich einer Verschiebung des Fadens um 10", und da die Zehntel eines Teiles auf der Trommel noch geschätzt werden können, so vermag man mit diesem Instrumente die einzelnen Secunden abzulesen. Es leuchtet aus der Beschreibung des Apparates ein, daß mit dieser Genauigkeit sowohl der Winkel zwischen den beiden Fernröhren, bzw. die Größe einer mit denselben ausgeführten Drehung, als auch der Winkel, um welchen, bei fester Stellung der Fernröhre, der Kreis *d* mit einem darauf befestigten Krystalle gedreht worden ist, gemessen werden kann.

Fig. 682.



Eine etwas eingehendere Beschreibung dieses großen Goniometers, welches naturgemäß nur verhältnismäßig selten gebraucht wird, findet man in dem Berichte über die wissenschaftlichen Instrumente der Berl. Gew.-Ausstellung v. J. 1879 (Berlin 1880), S. 321 f.

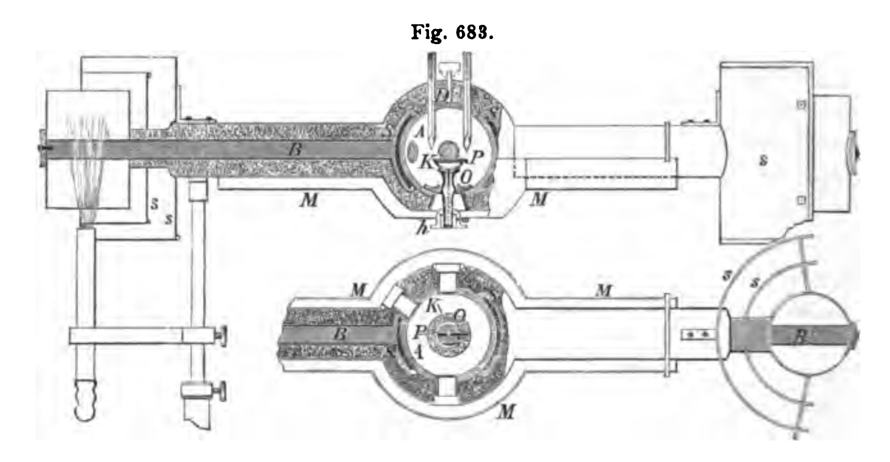
Will man dieses Goniometer zur Messung von Krystallwinkeln in höherer Temperatur anwenden, so muß man mit demselben ein Luftbad verbinden, in welchem sich der Krystall befindet. Man kann hierzu einen Metallkasten von 40—50 mm Höhe verwenden, dessen Boden in der Mitte ein kreisrundes Loch hat und der durch einen Deckel geschlossen werden kann.

Derselbe muß drei Fenster, d. h. kurze Ansatzröhren, mit planparallelen Glasplatten geschlossen, besitzen. Nach zwei gegenüberliegenden Seiten ist er mit je einer am Ende geschlossenen Metallröhre in Verbindung, deren äußerster Teil durch Gasflammen erhitzt wird, bis der ganze Innenraum eine constante Temperatur angenommen hat, welche durch zwei Thermometer gemessen wird, die durch den Deckel hineinreichen. Den Erhitzungskasten legt man mit beiden Enden auf je eine Gabel eines eisernen Statives, an welchem zugleich ein Bunsenscher Brenner befestigt ist, so auf, daß die Öffnung in dem Boden des Mittelraumes sich unmittelbar über der Centrier- und Justiervorrichtung befindet. Auf letztere wird statt des Tischchens eine kleine verticale Messingpincette zum Halten des Krystalles angeschraubt, welche sich zum größeren Teile im Innern des Kastens befindet, so daß der Krystall gerade in dessen Mitte durch die beiden gegenüberliegenden Fenster gesehen werden kann. Um die zur ungehinderten Drehung notwendige weite Öffnung an der Unterseite des Luftbades möglichst zu schließen, dient ein kreisförmiges Metallplättchen, welches halbiert und mit Scharnier wie eine Schere geschlossen werden kann; dasselbe hat in der Mitte ein Loch von dem Durchmesser des Stieles der Pincette und verschiebt sich mit dieser, wenn es um dieselbe herumgelegt worden ist. Zur Krystallmessung stellt man das eine Fernrohr senkrecht auf die Glasscheibe des hinteren Fensters, das andere normal zu dem seitlich gelegenen vorderen; alsdann bilden beide einen Winkel von 135° miteinander, und bei passender Stellung einer Krystallfläche wird das Bild des Fadenkreuzes des hinteren Fernrohres, von derselben reflectiert, in das vordere gelangen. Denselben Apparat kann man auch dazu benutzen, die Brechungsindices eines in höherer Temperatur befindlichen Prismas zu bestimmen. Gibt man demselben nämlich einen so großen Winkel, daß die im Minimum dadurch hervorgebrachte Ablenkung etwa 45° beträgt, so kann man, durch die beiden gegenüberliegenden Fenster blickend, das directe Bild des am hinteren Fernrohre angebrachten Spaltes und durch das seitliche Fenster das abgelenkte Bild desselben im Beobachtungsfernrohre einstellen[1]). Nach verschiedenen Verbesserungen des Erhitzungsapparates durch Beckenkamp construierte die Firma Fuess einen solchen, der Temperaturen bis nahe 300° längere Zeit constant zu erhalten gestattet. Derselbe ist in Fig. 683 z. T. in verticalem und in horizontalem Durchschnitte, z. T. in Ansicht, dargestellt. Der mittlere Teil, das eigentliche Luftbad, in welchem sich die Krystallhalter K und die Thermometer befinden, ist eine kupferne, mit den entsprechenden Fenstern (von denen zwei in der oberen Figur sichtbar sind) versehene Hohlkugel A. An dieser sind zwei Schalen S und an letzteren zwei Stäbe B von demselben Metalle befestigt, welche an ihren Enden

1) Über die Ausführung von Messungen mit diesem großen Apparate bei verschiedenen Temperaturen siehe namentlich A. Arzruni, Zeitschr. f. Kryst. 1, 109; L. Calderon, ebenda 4, 505; J. Beckenkamp, ebenda 5, 440 und 6, 450; A. Schrauf, ebenda 9, 435.

erhitzt werden. Alle Zwischenräume sind mit Asbest ausgefüllt. Die Blechschirme *s* und der freiliegende Blechmantel *M* halten die strahlende Wärme vom Goniometer ab. Der Krystallträger *K* ist so construiert, daß

Fig. 683.



er eine grobe Vorjustierung des Krystalles, welcher von verstellbaren Drahtstiften gehalten wird, ermöglicht (über das Verfahren mit diesem Apparate s. Zeitschr. f. Kryst. 1893, **21**, 153).

Methode der Messung mit dem Reflexionsgoniometer.

Die Genauigkeit, mit welcher die Flächenwinkel eines Krystalles gemessen werden können, hängt hauptsächlich ab von der Beschaffenheit seiner Flächen; sind diese uneben, gebrochen oder wenig spiegelnd[1]), so kann auch das genaueste Instrument dem Beobachter nicht zu einer andern als einer approximativen Kenntnis der Winkel verhelfen, die nur dadurch der Wahrheit mehr genähert wird, daß derselbe eine größere Zahl von Krystallen untersucht und das Mittel aus den Resultaten zieht. Trotzdem muß der Beobachter es sich stets zur Vorschrift machen, alle Fehler, welche durch mangelhafte Centrierung, Justierung u. dgl. hervorgebracht

1) Es versteht sich von selbst, daß die Krystalle in sorgfältig gereinigtem Zustande auf das Goniometer gebracht werden müssen. Sind die Flächen derselben nicht vollkommen rein, so reibt man sie trocken oder mit Alkohol in einer Falte vom weichsten Putzleder und faßt sie dann an einer Stelle, welche zur Messung nicht benutzt werden soll, mit der Spitze eines kleinen Kegels von gelbem Wachse, das man durch Kneten mit den Fingern zuvor möglichst weich gemacht hat. Dieser Wachskegel wird dann auf den Krystallträger des Instrumentes aufgesetzt und muß daher, wenn der Krystall schwer ist, ziemlich massig sein, um Senkungen des letzteren zu vermeiden. Bei sehr genauen Messungen größerer Krystalle ist es jedenfalls zu empfehlen, als Unterlage Siegellack zu nehmen, auf welchem die Befestigung mit wenig Wachs vorgenommen wird, oder nach dem Aufsetzen bis zur Vornahme der Messung einige Zeit zu warten. Bei der Messung kleiner Flächen ist es vorteilhaft, das Wachs durch eingekneteten Ruß zu schwärzen, da das von dem hellen Wachskegel in das Gesichtsfeld geworfene zerstreute Licht bei der Einstellung sehr lichtschwacher Reflexe einigermaßen stört.

werden können, so weit zu vermeiden, daß die erhaltenen Resultate so genau sind, als es bei der Beschaffenheit der Flächen nur irgend möglich ist.

Im folgenden sollen nun die verschiedenen zur Messung gehörigen Manipulationen und die bei denselben möglichen Fehler behandelt werden.

1) Wahl des Signales. Die Wahl desjenigen leuchtenden Objectes, dessen Bild von den Krystallflächen reflectiert werden soll, muß ganz von deren Beschaffenheit abhängig gemacht werden. Das vorteilhafteste ist, wie schon früher bemerkt, das Fadenkreuz eines zweiten Fernrohres, aber dieses läßt sich nur bei sehr vollkommenen Flächen anwenden. Bei den weitaus meisten Fällen erhält man kein Reflexbild desselben von den Flächen und muß sich daher nach einem lichtstärkeren Objecte umsehen. Bei den S. 646 f. für das Arbeiten mit den kleinen verticalen Goniometern empfohlenen Signalen muß ein dunkles Zimmer zur Verfügung stehen und auch die Ablesung des Instrumentes bei künstlicher Beleuchtung stattfinden. Will man das letztere vermeiden, so kann man an einem Fenster in 6—8 m Entfernung vom Goniometer einen schwarzen Schirm mit einer kreisförmigen Öffnung anbringen und auf diese einstellen. Doch müssen alsdann die Krystallflächen schon ziemlich groß und gut spiegelnd sein, um bei Tageslicht ein genügend helles Bild im Fernrohre erkennen zu lassen.

Die im vorigen Abschnitte beschriebenen Goniometer mit horizontalem Kreise bedürfen keiner Distanz zur Aufstellung des Signales, da dieses sich im Collimatorrohre befindet und durch eine dicht vor letzteres zu stellende Lampe beleuchtet wird[1]). Von den bereits S. 655 besprochenen Signalen dient dasjenige mit der kleinen kreisrunden Öffnung nur dazu, sehr kleine Knickungen und sonstige Unvollkommenheiten der spiegelnden Fläche zu erkennen, und ist wegen der Kleinheit des Bildes hierzu ganz vorzüglich geeignet. Zu den eigentlichen Messungen bedient man sich entweder des Webskyschen Spaltes oder des Schraufschen Signales, über welche a. a. O. das Nötige gesagt ist.

Ehe man die Messung beginnt, hat man das Ocular des Beobachtungsfernrohres so einzustellen, daß das Object, sei es eine entfernte beleuchtete Öffnung, sei es das Fadenkreuz oder der Spalt des andern Fernrohres, direct gesehen ganz scharf erscheint, ebenso das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres, und daß beide bei einer Bewegung des Auges sich gar nicht gegeneinander verschieben, d. h. daß das Bild des Objectes und das Fadenkreuz genau in einer Ebene liegen.

Centrierung. Um diese vorzunehmen, muß der Krystall selbst, bzw. die zu centrierende Kante, in dem auf die Axe des Goniometers gerichteten Beobachtungsfernrohre sichtbar gemacht werden. Bei den kleinen S. 644 f. beschriebenen Instrumenten geschieht dies einfach dadurch, daß man das

---

1) Um auch bei Tageslicht arbeiten zu können und den häufigen Wechsel von Hell (beim Ablesen, s. S. 647) und Dunkel (beim Einstellen) zu vermeiden, verwendet H. Traube (Jahrb. f. Min. 1894, 2, 92) eine von Fuess ausgeführte Vorrichtung, welche zum Krystalle nur das durch den Collimator gegangene Licht gelangen läßt.



Ocularrohr des Fernrohres entfernt, dessen Objectiv alsdann wie eine Lupe wirkt, durch welche man den Krystall erblickt und somit sehen kann, ob die zu messende Kante bei der Drehung an ihrem Orte verbleibt. Bei den vollkommneren, im vor. Abschn. behandelten Goniometern wird die Vorschlaglinse (s. S. 656) bis zum Anschlage herabgedrückt und dadurch das Fernrohr in ein Mikroskop verwandelt, welches auf den Krystall eingestellt ist.

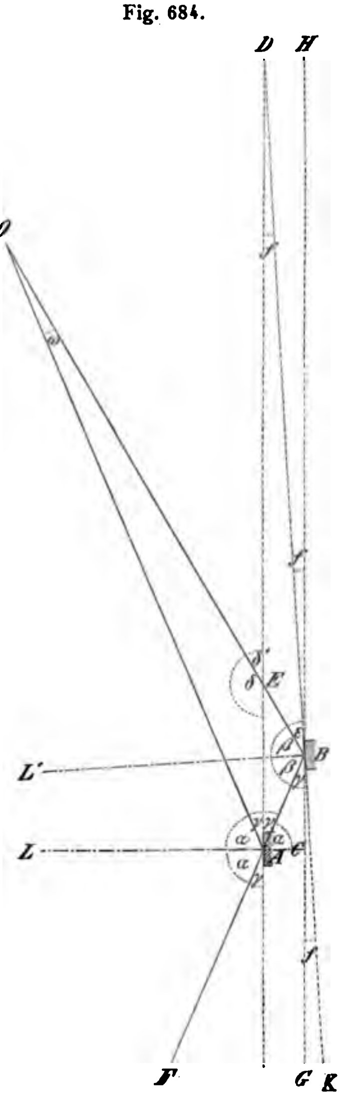
In allen Fällen setzt man den letzteren auf dem Tischchen *u* so auf, daß die zu messende Kante schon von vornherein nach dem Wiedereinsetzen nahezu centriert ist; alsdann bringt man durch Drehung der Scheibe *A* (Fig. 674) oder durch Verschiebung des Fernrohres *f* (Fig. 675) Krystall und Fernrohr in die gleiche Entfernung vom Kreise; bei den horizontalen Instrumenten, z. B. Fig. 677, wird der Krystall in die richtige Höhe gebracht durch Drehen der Scheibe *k*. Nunmehr stellt man eine der beiden Centrierschrauben *y* parallel dem Fernrohre und bewegt durch die zweite die zu centrierende Krystallkante nach oben oder unten, bei den horizontalen Instrumenten nach rechts oder links, bis sie in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint; alsdann dreht man an der Scheibe *A* Fig. 675 (*i* Fig. 677) um 90° und wiederholt das gleiche mit der andern Schraube; ist das Fernrohr genau auf die Drehungsaxe gerichtet, so steht nunmehr die Kante im Gesichtsfelde still, d. h. sie ist centriert. Ist die zu messende Kante jedoch nicht ausgebildet oder abgebrochen, so muß man jedesmal die Axe so weit drehen, daß die Krystallfläche im Fernrohre eben verschwindet, d. h. zu einer geraden Linie verkürzt erscheint (dabei fällt die Fernrohraxe in die Ebene der Krystallfläche), und muß diese Linie jedesmal in die Mitte des Gesichtsfeldes bringen.

Mit welcher Genauigkeit die Centrierung einer Kante erreicht werden muß, darüber erhält man am besten Rechenschaft, wenn man untersucht, welchen Einfluß auf das Resultat der Messung eine ungenaue Centrierung ausübt.

Sei in Fig. 684 (S. 665) A ein Punkt der reflectierenden Krystallfläche, deren Durchschnittsrichtung mit der Ebene, in welcher die Reflexion stattfindet, AD; sei O das leuchtende Object, OA der unter dem Winkel α auffallende Lichtstrahl, AF der in das Fernrohr reflectierte; außerdem reflectieren auch die andern Punkte der Fläche, so daß divergente Strahlen auf das Objectiv des Beobachtungsfernrohres auffallen; diese werden aber alle zu einem Bilde von O vereinigt, da ihre Richtung so ist, als ob sie alle herkämen von einem Punkte, der symmetrisch zu O in bezug auf die Spiegelebene liegt. Demnach ist es gleichgültig, an welcher Stelle innerhalb der Ebene AD die reflectierende Fläche liegt; das Bild wird auch an derselben Stelle im Fernrohre zustande kommen, wenn es von der andern Fläche (nach der Drehung) reflectiert wird, wenn diese nur parallel AD und zugleich in dieselbe Ebene, nicht rechts oder links, fällt. Ist dagegen der letzten Bedingung nicht genügt, so ist das virtuelle Bild von O hinter dem Spiegel jetzt an einem andern Orte, also auch die Richtung der von ihm herkommenden Strahlen,

d. h. die Stellung seines Bildes im Fernrohre, eine andere, und es muß die Krystallfläche um einen Winkel vor- oder zurückgedreht werden, um dieselbe Einstellung zu erhalten. Um so viel aber, als diese Drehung beträgt, wird das Messungsresultat falsch, da der gesuchte Flächenwinkel gleich ist dem Winkel, um welchen man den Krystall drehen muß, damit die zweite Krystallfläche derjenigen Ebene, in welcher sich vorher die erste befand, parallel wird. Sei nun B Fig. 684 ein Punkt der zweiten Krystallfläche, BD deren Lage, nachdem der Krystall so weit gedreht worden ist, bis das reflectierte Bild von O im Fernrohre an derselben Stelle (Mitte des Fadenkreuzes) erscheint, wie vor der Drehung das von der ersten Fläche zurückgeworfene, d. h. bis die Richtung BF mit AF zusammenfällt; sei ferner $GH \| AD$, so ist offenbar die Differenz der abgelesenen Drehung und des gesuchten Winkels, d. h. der Fehler des Resultates = dem Winkel f, welchen die beiden Ebenen AD und BD miteinander bilden. Dessen Größe ergibt sich auf folgende Weise:

Fig. 684.



Da $\delta' = \varepsilon + f$ zugleich der Außenwinkel des Dreieckes AEO, so ist

$$\gamma + \omega = \varepsilon + f,$$

und da

$$\varepsilon = \gamma + f$$

(weil $KBL' = \gamma + f + \beta = L'BD = \varepsilon + \beta = 90^\circ$), so ist

$$\omega = 2f.$$

Da ferner

$$AB = \frac{AC}{\sin\gamma}$$

und da im Dreiecke ABO

$$\sin\omega = \frac{AB\cdot\sin 2\gamma}{BO} = \frac{AC}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin 2\gamma}{BO},$$

so ist, weil $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cdot\cos\gamma$,

$$\sin\omega = \frac{AC}{BO}\cdot 2\cos\gamma.$$

Hieraus sieht man, daß der Fehler f, d. i. $\frac{\omega}{2}$, um so kleiner wird, je größer BO, d. h. die Entfernung des Objectes vom Krystalle; benutzt man also, wie es bei den kleinen Goniometern S. 644 f. geschieht, eine erleuchtete Öffnung in einem dunkeln Schirme als Object, so hängt es von deren Entfernung ab, wie groß f wird; ferner von dem Winkel γ, denn ω, also

auch f, wächst mit abnehmendem γ (gewöhnlich stellt man das Fernrohr so, daß $\gamma = 30^\circ$ bis 40°). Sei z. B. der Abstand AC der beiden Ebenen, in welche wegen unvollkommener Centrierung die eine und die andere Krystallfläche zu liegen kommen, = 1 Millimeter, der Abstand des Signales = 5 Meter, $\gamma = 30^\circ$, so wird der entstehende Fehler $f = 0'36''$; befindet sich dagegen das Signal in einer Entfernung von 10 Meter, so wird, bei sonst gleichen Verhältnissen, $\omega = 0'37''$, d. h. $f = 0'18''$. Man hat also womöglich die Lichtquelle so entfernt aufzustellen, als es die Flächenbeschaffenheit gestattet, um noch ein deutliches Reflexbild zu erhalten. Hält man an Stelle des Krystalles eine beleuchtete Millimeterscala, so kann man ein für allemal bestimmen, der wievielte Teil des Gesichtsfeldes (nach Entfernung des Oculares) einem Millimeter entspricht, und kann unter Berücksichtigung der Gestalt des Krystalles nach obigem leicht, wenn derselbe aufgesetzt ist, beurteilen, ob die erreichte Centrierung noch Fehler von störender Größe hervorbringen kann. Habe man z. B. ein rhombisches Prisma, dessen beide Flächenpaare, das eine 2, das andere 3 Millimeter gegenseitigen Abstand haben, so kann man getrost die Mitte desselben centrieren und, ohne neu zu centrieren, alle vier Winkel messen, denn es ist klar, daß alsdann die Ebenen, in welche beim Drehen die verschiedenen Flächen zu liegen kommen, nicht weiter voneinander abstehen können, als $\frac{1}{2}$ Millimeter; bei 10 Meter Signaldistanz gibt dies nur einen Fehler von etwa 9″, ja selbst bei 5 Meter Abstand würde derselbe in den meisten Fällen noch weit geringer sein, als die aus Unvollkommenheiten der Flächen entstehenden, nämlich 18″. Würden die Flächen einer Zone zufällig alle genau gleichweit von der Mitte des Krystalles abstehen, so wäre der Fehler bei der Centrierung dieser Mitte für die Messung aller ihrer Winkel absolut gleich Null.

Der aus einer Excentricität der zu messenden Kante entspringende Fehler wird ebenfalls gleich Null, wenn die auf die Krystallfläche auffallenden Strahlen parallel sind. Dies ist aber der Fall, wenn das Goniometer mit einem Collimator ausgerüstet ist, bestehend aus einer Objectivlinse, in deren Brennpunkte sich ein beleuchtetes Signal (Spalt) befindet; denn die von dem letzteren ausgehenden Strahlen treten aus dem Objective parallel aus und fallen so auf die Krystallfläche. Bei den S. 649—660 beschriebenen vollständigeren Goniometern ist daher eine Centrierung der Krystallkanten eigentlich gar nicht nötig; wenn man dieselbe trotzdem vornimmt, so geschieht es, um auch kleine, aus einem etwaigen nicht vollkommenen Parallelismus der aus dem Collimator austretenden Strahlen entstehende, Fehler zu vermeiden, hauptsächlich aber, um die spiegelnde Fläche in die Axe des Beobachtungsfernrohres zu bringen, so daß die reflectierten Strahlen durch die Mitte des Objectives dringen und in der Focalebene ein möglichst helles und scharfes Bild hervorbringen. Zu dem Zwecke wird vor das Objectiv die Lupe vorgeschlagen, wie es in Fig. 677 dargestellt ist, und die Kante oder, wenn der Krystall nicht allzu groß ist, die Mitte der zu messenden Zone so verschoben, daß sie beim Drehen constant am senkrechten Faden des



Fernrohres bleibt, welcher die Mitte des Gesichtsfeldes bezeichnet. Nach geschehener Centrierung, welche in der S. 664 angegebenen Weise ausgeführt wird, ist die vor dem Objective befindliche Lupe zu entfernen, zu welchem Zwecke sie an einem Scharniere beweglich ist (vgl. Fig. 678).

Justierung. Um diese zu erleichtern, ist es notwendig, die zu messende Kante (oder Zone) schon nach dem Augenmaße so genau wie möglich normal zum Kreise aufzusetzen; man nimmt zu diesem Zwecke das kleine Tischchen *u* Fig. 674 (nach Lösung der Schraube *v*) ab und befestigt nun mit Wachs den Krystall so, daß die Flächen der zu messenden Zone sich ungefähr im Drehungscentrum der Justierbögen (*r* Fig. 677) befinden, und deren Axe normal zum Tischchen steht, was man dadurch controlliert, daß man dasselbe gegen das Licht hält; außerdem muß eine der vorherrschenden Flächen der betreffenden Zone so orientiert sein, daß sie ebenfalls so genau, wie es mit dem Augenmaße möglich, nach dem Aufsetzen und Festschrauben des Tisches parallel einer der beiden Justierschrauben ist, also entweder in die Ebene des Durchschnittes Fig. 677 fällt oder dazu senkrecht steht. Ist das Tischchen in dieser Weise auf dem Goniometer befestigt und sind vorher die Segmente der Justiervorrichtung in die Mittelstellung gebracht, so erhält man gewöhnlich die reflectierten Bilder beim Drehen schon in das Fernrohr, wenn sie auch (bei Anwendung eines Goniometers mit verticalem Kreise) rechts oder links vom Fadenkreuze das Gesichtsfeld passieren. Sollten sie jedoch noch außerhalb desselben fallen, so muß man durch Sehen neben dem Fernrohre entlang unter Hin- und Herbewegung des Auges die Reflexe suchen, um zu erkennen, ob sie zu weit rechts oder links sind, und dann mit den beiden Schrauben eine erste Correction anbringen; hat man die Bilder aber einmal im Gesichtsfelde des Beobachtungsfernrohres, so ist die genaue Justierung der Kante leicht: man stellt zuerst das von derjenigen Fläche, welche einer Justierschraube parallel ist (s. oben), reflectierte Bild ein und dreht an der andern Schraube, bis es am verticalen Mittelfaden des Fadenkreuzes steht; alsdann stellt man das Bild von einer zweiten Fläche ein und corrigiert dieses mit der ersteren Schraube, wobei die Justierung der ersten Fläche um so weniger geändert wird, je genauer sie dieser Schraube parallel ist; durch eine oder zwei kleine Nachcorrectionen gelingt es dann leicht, zu erreichen, daß die von beiden Flächen, folglich auch von allen übrigen derselben Zone, gelieferten Bilder beim Drehen genau am verticalen Mittelfaden entlang sich bewegen. Ganz ebenso verfährt man natürlich mit den Goniometern, deren Limbus horizontal ist, nur daß hier selbstverständlich die Reflexe der noch nicht justierten Flächen zu hoch oder zu tief erscheinen und die Justierung erst dann erreicht ist, wenn die Mitte des Signalbildes beim Drehen der Goniometeraxe genau am Horizontalfaden des Beobachtungsfernrohres entlang läuft. Ist dies nur für die beiden justierten Flächen, nicht auch für die übrigen der Fall, so sind die Teile des Krystalles nicht vollkommen parallel (s. S. 266), oder die betreffende dritte, vierte, fünfte Fläche liegt überhaupt

nicht in der Zone der beiden ersteren[1]). Eine genaue Justierung auf dem Goniometer ist daher das sicherste Mittel, um zu erkennen, ob eine Krystallfläche in der Zone zweier anderer liegt, und verwendet man zu dieser Prüfung entweder den horizontal gestellten (um 90° gedrehten) Webskyschen Spalt oder das auf S. 655 unter c) beschriebene Signal.

Messung. Sind die obengenannten Bedingungen für Justierung und Centrierung erfüllt, so kann zur Messung geschritten werden. Benutzt man eines der kleinen S. 644 f. beschriebenen Goniometer und als Signal eines der S. 646 f. erwähnten, so stellt man das Fadenkreuz des Fernrohres unter 45°, weil bei dieser Stellung sich die Coincidenz mit dem Bilde des Signales am genauesten erreichen läßt. Während man vorher mit der Scheibe A nur die innere Axe a bewegte, dreht man jetzt mit B zugleich den Kreis, stellt das Bild zunächst durch Drehen mit freier Hand ungefähr ein und bewirkt die genaue Einstellung auf das Fadenkreuz mittels der Feinstellschraube g; alsdann liest man die Stellung des Kreises am Nonius ab, löst die Feinstellvorrichtung, um B wieder frei bewegen zu können, dreht an letzterem, bis das Signalbild der zweiten Fläche ins Gesichtsfeld kommt, und wiederholt mit diesem die gleiche Operation. Kann man alle Flächen der Zone mit einer einzigen Centrierung messen, so dreht man, bis die erste Fläche derselben noch einmal eintritt, und sieht zu, ob man für diese die gleiche Ablesung wie im Anfange erhält, um sich zu vergewissern, daß nicht inzwischen irgendeine Verschiebung vorgekommen ist (s. S. 564). Ist jedoch der Krystall so groß, daß jede Kante einzeln centriert werden muß, so werden natürlich für jede Kante beide Flächen neu eingestellt und abgelesen; die Justierung bleibt aber die gleiche für die ganze Zone.

Bei den horizontalen Goniometern Fig. 677 ist es die Scheibe g, durch deren Drehung die Fläche eingestellt wird, wobei die genaue Coincidenz der Mitte des Signales mit der des Fadenkreuzes nach Klemmung von β mit der zugehörigen Feinstellschraube (G Fig. 678) ausgeführt wird. Benutzt man als Signal, wie es gewöhnlich geschieht, den Webskyschen Spalt, so wird der enge mittlere Teil desselben mit dem verticalen Faden des Beobachtungsfernrohres zur Deckung gebracht.

Nur vollkommen ebene Flächen von einer gewissen Ausdehnung reflectieren das Bild eines Signales ohne jede Entstellung seiner ursprüng-

[1]) In diesem Falle ist sie zu einer der justierten Zone angehörigen Fläche vicinal (s. S. 306). Will man die Position einer solchen Fläche genau bestimmen, so genügt es nicht, ihren Reflex auf den Verticalfaden des Fadenkreuzes einzustellen (welchen er über oder unter der Mitte passiert), da man auf diesem Wege nicht den wahren Bogenabstand der Fläche von der nächsten Fläche der justierten Zone, sondern eine Projection dieses Bogens auf die Ebene des justierten Zonenkreises erhalten würde. Es ist daher nötig, auch noch die Abweichung des Reflexes von dem letzteren zu messen. Dies kann entweder nach einer der weiterhin zu beschreibenden Methoden von Miers und Websky geschehen oder noch einfacher dadurch, daß in dem gewöhnlich gebrauchten Oculare ein Mikrometer mit einer senkrecht stehenden Reihe von Teilstrichen, deren Winkelabstand bekannt ist, angebracht wird. Sehr genau kann diese Messung mit dem in Fig. 687 (S. 677) dargestellten Oculare ausgeführt werden.



lichen Gestalt; hier entspricht also die Genauigkeit der Messung derjenigen Präcision, mit welcher das Signal vermöge der Vergrößerung des Oculares eingestellt werden kann, und der Genauigkeit der Teilung des Kreises. Derartige Flächen, bei denen somit die Präcision des Instrumentes voll ausgenutzt werden kann, sind jedoch verhältnismäßig selten.

Eine Dilatation des Reflexbildes, welche natürlich mit Abnahme der Lichtstärke verbunden ist, tritt bereits ein bei einer vollkommen ebenen Fläche, wenn diese schmal, d. h. durch zwei wenig voneinander entfernte parallele Kanten begrenzt ist; eine solche Fläche wirkt nämlich auf das reflectierte Licht, wie ein schmaler Spalt auf durchfallende Strahlen; es entstehen Interferenzerscheinungen, welche man als »Beugung« des Lichtes bezeichnet. Dieselben bedingen eine Verzerrung des Bildes in der Richtung, welche senkrecht zu den die schmale Fläche begrenzenden Kanten ist, also in derjenigen, in welcher die Messung erfolgt, wenn die Zone jener Kanten justiert ist. Beträgt die Breite der Fläche nicht viel weniger als $\frac{1}{2}$ mm, so ist die Dilatation so gering, daß noch mit genügender Genauigkeit auf die Mitte des verbreiterten Reflexes eingestellt werden kann, besonders, wenn man als Signal den Webskyschen Spalt benutzt; ist die Fläche schmäler, so erscheint nicht nur das Bild in die Breite gezogen, sondern es treten auch zu beiden Seiten desselben gefärbte Nebenbilder auf, deren Abstand voneinander und von der Mitte immer größer wird, je schmäler die reflectierende Fläche ist. Wenn in diesem Falle die Erkennung der einzustellenden Position auch durch das ungefärbte Mittelbild immer noch ermöglicht ist, so wird dieses doch um so schwächer, je mehr Licht auf die seitlichen Beugungsbilder entfällt und je mehr durch Interferenz vernichtet wird, und bei Flächen von einigen hundertsteln Millim. Breite würde man von einem schmalen erleuchteten Spalte als Signal kein Licht mehr erhalten, während man vom Webskyschen Spalte bei Anwendung eines lichtstarken verkleinernden Oculares (δ s. S. 656) und vollständiger Abblendung alles störenden Nebenlichtes im verdunkelten Raume noch einen äußerst schwachen und breit verwaschenen Reflex des oberen und unteren breiten Teiles erblickt, dessen Einstellung natürlich nur ganz angenähert erfolgen kann. Die seitlichen Lichtmaxima eines derartigen Beugungsbildes unterscheiden sich von normalen Reflexen benachbarter, wenig geneigter Krystallflächen durch ihre Färbung und dadurch, daß ihr Winkelabstand vom Mittelbilde und voneinander abhängt vom Incidenzwinkel des Lichtes, weil, wenn dieser größer ist, d. h. die auffallenden und die von der Fläche reflectierten Strahlen einen spitzeren Winkel mit der Krystallfläche bilden, die letztere in der Richtung des Fernrohres gesehen schmäler erscheint, also so wirkt, als ob ihre Breite geringer sei. Ändert man also den Einfallswinkel des Lichtes durch Änderung der Stellung des Beobachtungsfernrohres gegen den Collimator — und aus diesem Grunde sind die S. 649—660 beschriebenen horizontalen Goniometer so eingerichtet, daß man unter sehr verschiedenen Incidenzwinkeln beobachten kann —, so ändern sich auch

jene Abstände, sobald es sich um secundäre, durch Interferenz entstandene Beugungsbilder handelt, während die normalen Reflexbilder benachbarter Krystallflächen natürlich bei der Messung stets dieselben Winkeldistanzen ergeben. Sind zwei benachbarte, einen kleinen Winkel miteinander bildende Flächen beide so schmal, daß sie zusammengesetzte Reflexe liefern, so beeinflussen die von ihnen reflectierten Strahlen sich gegenseitig, so daß die Lichtculminationen des einen Bildes je nach dem Incidenzwinkel die des andern schwächen oder verstärken. Die im letzteren Falle helleren Lichtmaxima, welche man leicht für eigentliche Reflexe von Krystallflächen halten könnte, unterscheidet man von solchen ebenfalls am sichersten durch Änderung des Incidenzwinkels, wobei ihre Winkelabstände sich ändern und ebenso ihre Helligkeit, so daß sie unter gewissen Einfallswinkeln des Lichtes ganz verschwinden. Näheres über die mannigfachen, hierbei vorkommenden Erscheinungen siehe Websky, Zeitschr. f. Kryst. 1879, **3**, 241.

Geben schon vollkommen ebene Flächen, wenn sie nach einer Richtung geringe Dimensionen besitzen, Anlaß zu complicierten Reflexionserscheinungen, so ist dies natürlich noch mehr der Fall mit nicht vollkommen ebenen. Es ist klar, daß die Krümmung einer Fläche in einer bestimmten Zone eine Verzerrung des Reflexbildes parallel der letzteren bewirken muß. Weit häufiger, als eine derartige regelmäßige Krümmung, ist aber eine mehr oder minder unregelmäßige Knickung einer Fläche in verschiedene ebene Elemente, deren jedes ein Reflexbild des Signales liefert. Die infolgedessen eintretende Erscheinung einer Gruppe von mehreren Reflexen im Gesichtsfelde beweist das Vorhandensein von Vicinalflächen (s. S. 306) oder eine Zusammensetzung des Krystalles aus nicht parallelen Teilen (s. S. 266). In letzterem Falle kann man diejenigen gestörten Flächenteile, welche von der zu messenden Kante entfernter liegen, abblenden[1]); da aber auch für die unmittelbar in einer Kante aneinander stoßenden Flächenelemente keine volle Sicherheit für ihre richtige gegenseitige Neigung gegeben ist, so muß in solchen Fällen entweder eine größere Zahl von

1) Czapski empfiehlt zu diesem Zwecke die Anbringung einer sog. »Irisblende« vor dem Oculare des Beobachtungsfernrohres, welche bis auf eine kleine Öffnung zusammengezogen werden kann und die in ihrer Ebene verschiebbar ist; hierdurch können diejenigen Strahlen, welche von andern Teilen einer größeren Krystallfläche herrühren, als derjenigen Stelle, welche man zur Ablesung zu benutzen wünscht, abgeblendet werden. Um hierbei den Krystall zu sehen, benutzt man nicht die gewöhnliche Vorschlaglupe vor dem Objective, sondern eine besondere vor das Ocular vorzuschlagende, durch welche man das vor dem Oculare, im sog. Augenpunkte, entstehende Bild der Fläche betrachtet und nun denjenigen Teil derselben, welcher zur Messung benutzt werden soll, durch Verschieben und Zusammenziehen der Irisblende vollständig einschließt. Alsdann gelangt nach dem Zurückschlagen dieser Lupe nur noch von dem betr. Flächenstücke Licht ins Auge. (Näheres über solche Diaphragmen-Einrichtungen s. auch Pulfrich in Zeitschr. f. Kryst. 1899, **30**, 570.) Derartige Oculare werden in neuerer Zeit auch von Fuess zu seinen Goniometern geliefert.



Krystallen gemessen werden (um im Mittel die einzelnen Störungen möglichst auszugleichen) oder nach einem oder mehreren, annähernd regelmäßig ausgebildeten Krystallen gesucht werden, wenn eine genaue krystallographische Bestimmung erzielt werden soll. Eine wichtige Prüfung betreffs der regelmäßigen Ausbildung eines Krystalles besteht darin, daß die Winkelabstände paralleler Flächen auf ihre Abweichung von 180° untersucht werden; hierdurch gelingt es oft, von mehreren Reflexen einer Fläche denjenigen, welcher dem richtig gelagerten Flächenteile angehört, zu bestimmen, indem man nachweist, daß derselbe, in verschiedenen Zonen gemessen, von der parallelen Gegenfläche, falls diese gut und einfach ausgebildet ist, um 180° absteht. Geben die meisten oder alle Flächen eines Krystalles zusammengesetzte Reflexbilder anstatt einfacher, so ist natürlich eine genaue Messung desselben nicht möglich; aus den Winkelabständen der äußersten Signalbilder in der einer Krystallfläche angehörigen Gruppe von Reflexen läßt sich auf den Grad der Ungenauigkeit der Messungen ein angenäherter Schluß ziehen.

Sind endlich die Flächen eines Krystalles so unvollkommen, daß sie überhaupt kein Signalbild mehr liefern, andererseits aber zu klein, um das S. 635f. erläuterte Verfahren zur Messung matter Flächen zu gestatten, so bleibt zur approximativen Bestimmung ihrer Winkel nur folgender Weg übrig: Man setzt, wenn man eines der kleinen Goniometer Fig. 674 oder 675 benutzt, nach dem Centrieren das Ocular des Fernrohres nicht wieder ein, bzw. man läßt, wenn man mit einem Fuessschen Instrumente arbeitet, die Vorschlaglupe vor dem Objective, so daß man den Krystall deutlich erblickt. Alsdann bewirkt man durch die Justierschrauben, daß die Flächen der zu messenden Zone beim Drehen nacheinander durch das vom Signale ausgehende Licht vollständig erleuchtet erscheinen, womit eine angenäherte Justierung erreicht ist. Die Einstellung jeder einzelnen Fläche erfolgt nun ebenfalls unter Benutzung des Umstandes, daß dieselbe am vollkommensten erleuchtet gesehen wird, wenn die von ihr reflectierten Strahlen genau parallel der Axe des Beobachtungsfernrohres in dieses eintreten. Um diese Stellung möglichst richtig zu finden, dreht man in demjenigen Sinne, in welchem die Messung der Zone erfolgt, bis das Maximum der Beleuchtung der Fläche eintritt, liest diese Stellung am Kreise ab, dreht weiter, bis der Reflex verschwindet, dann wieder zurück, bis das Maximum der Beleuchtung wieder eintritt, und liest diese Stellung ebenfalls ab. Da man bei diesem Verfahren sich der wahren Position von beiden entgegengesetzten Seiten her in gleicher Weise genähert hat, so ist das Mittel beider Ablesungen der wahrscheinlichste Wert der richtigen Einstellung, und die Differenz der beiden Ablesungen — d. h. der Winkel, um welchen man die Krystallfläche drehen kann, ohne daß sie aufhört, vollkommen beleuchtet zu erscheinen — ist offenbar eine kleine Größe, wenn die Fläche recht eben ist, und alsdann liefert diese Methode ein ziemlich genaues Resultat; die in Rede stehende Differenz ist aber um so beträchtlicher und bewirkt eine um

so größere Ungenauigkeit der Messung, je mehr die Fläche gekrümmt oder geknickt ist; im letzteren Falle erscheinen die einzelnen Teile derselben, wenn ihre gegenseitige Neigung eine merkliche ist, nicht gleichzeitig erleuchtet, und man muß alsdann auf diejenigen Teile der Fläche einstellen, welche man ihrer Lage nach für die richtigeren hält. Diese Messungsmethode nennt man die »Schimmermessung« oder »Einstellung auf den allgemeinen Reflex«. Es versteht sich von selbst, daß man dieselbe nur auf die Flächen anwendet, welche kein Reflexbild mehr liefern; besteht also eine zu messende Zone z. T. aus genügend gut spiegelnden Flächen, z. T. aus solchen, welche kein Reflexbild des Signales geben, so wendet man ein gemischtes Verfahren an: man stellt die ersteren Flächen in der gewöhnlichen Weise, welche in allen Fällen die genauere ist, ein, die nicht genügend spiegelnden dagegen durch Wegnahme des Oculares, bzw. Vorschlagen der Lupe, auf Schimmer.

Ganz von der Berücksichtigung auszuschließen sind zwei Arten von Reflexen, denen man bei der Messung einer Zone nicht selten begegnet. Der erste dieser Fälle betrifft die von feingestreiften Krystallflächen gelieferten Bilder. Die Streifung einer Fläche entsteht bekanntlich dadurch, daß zwei verschiedene Ebenen, seien es zwei benachbarte Flächen desselben Krystalles (Combinationsstreifung s. S. 266 Anmerk.) oder gleichwertige Flächen zweier verschiedener Krystalle (Zwillingsstreifung, s. S. 271), vielfach miteinander alternieren. Sind nun die einzelnen Streifen nicht allzu schmal, so geben alle untereinander parallelen Streifen der einen Stellung ein gemeinsames einfaches Reflexbild, diejenigen der andern Stellung, nach erfolgter Drehung des Krystalles um den Winkel der beiden Flächen, ebenfalls ein einziges Bild. Ganz anders wird die Erscheinung, wenn die einzelnen Streifen schmal sind: alsdann treten nämlich die bereits S. 669 erwähnten Beugungserscheinungen auf; bei einer recht feinen und regelmäßigen Streifung der Fläche verschwinden die den beiden sie zusammensetzenden Ebenen entsprechenden Reflexe ganz, und statt ihrer erscheint in einer mittleren Position ein ungefärbtes helles Reflexbild, welches alle Eigenschaften eines normalen, von einer ebenen Fläche gelieferten Signalbildes hat, und zu beiden Seiten desselben eine Reihe von farbigen Nebenbildern, deren Abstände von der Feinheit der Streifung und von dem Incidenzwinkel des Lichtes abhängen. Die bei jeder Incidenz unveränderliche Position des Mittelbildes, welches um so heller und schärfer erscheint, je feiner die Fläche gestreift ist, entspricht nun der Tangentialebene an die parallelen ein- und ausspringenden Kanten, welche die Streifung erzeugen, also einer Ebene, welcher keinerlei krystallographische Bedeutung zukommt, da ihre Lage von der zufälligen relativen Breite der Streifen abhängt. Aus der Theorie der Beugung des Lichtes geht hervor, daß eine derartige Scheinfläche, sobald die Breite der sie zusammensetzenden Streifen nicht allzu groß im Vergleiche zur Wellenlänge des Lichtes ist, genau nach demselben Gesetze, wie eine vollkommen ebene Fläche, ein normales Bild

reflectiert und daneben gefärbte Seitenbilder, deren Abstand nur abhängt von der Feinheit der Streifung und vom Incidenzwinkel der Strahlen. Daraus folgt, daß in diesem Falle in der Reflexion des Lichtes kein Mittel mehr gegeben ist, um die wahre krystallographische Lage der die Scheinfläche zusammensetzenden Ebenen zu bestimmen, und daß feingestreifte Flächen überhaupt von der Messung auszuschließen sind, um so unbedingter, je feiner und regelmäßiger ihre Streifung ist. Nur in dem Falle, daß man eine der Streifung nicht parallele Zone justiert hat, und beim Drehen das gegliederte Lichtband einer gestreiften Fläche, welches dann natürlich eine schräge Richtung hat, das Gesichtsfeld passiert, darf man deren Reflexbild benutzen, indem man die Position einstellt, in welcher der helle Streifen durch die Mitte des Fadenkreuzes geht; denn diese Position gehört zweien Zonen des Krystalles an, also ist die Existenz einer ihrer entsprechenden Fläche, deren Indices rationale sein müssen, unter den die Streifung bildenden wenigstens sehr wahrscheinlich. Näheres über die Interferenzerscheinungen fein gestreifter Flächen s. Förstner, Zeitschr. f. Kryst. 1884, 8, 143f.

Die zweite Art von Bildern, welche bei der Messung einer Zone nicht berücksichtigt werden dürfen, kommen nur bei recht durchsichtigen Krystallen vor. Dieselben entstehen durch Totalreflexion des ins Innere des Krystalles eingetretenen Lichtes an einer vom Beobachter abgewendeten Fläche und Austritt der Strahlen durch eine vordere Fläche; da letzterer mit einer Brechung verbunden ist, sind diese Bilder[1]) farbig und außerdem leicht durch ihre eigentümliche Bewegung zu erkennen, wenn man den Krystall dreht und mit dem Beobachtungsfernrohre in demselben Sinne der Drehung folgt; dieselben werden nämlich an gewissen Stellen, d. h. bei gewissen Incidenzwinkeln, rückläufig. Außerdem sind derartige falsche Reflexe auch dadurch zu vermeiden, daß man die Drehung des Krystalles, um von einer Fläche zur andern zu gelangen, mit vorgeschlagener Lupe (bei den kleinen verticalen Goniometern mit abgenommenem Oculare) vornimmt; man sieht dann sofort, ob die erleuchtete Fläche dem Signale zugekehrt ist[2]) oder nach der entgegengesetzten Seite gelegen und daher eine durch Totalreflexion erleuchtete Innenfläche des durchsichtigen Krystalles ist.

Liegen sehr vollkommene Krystallflächen vor, deren Winkel mit großer Genauigkeit gemessen werden sollen, so kann man die in den übrigen Fällen ganz zu vernachlässigenden Fehler der Kreisteilung des Instrumentes eliminieren durch das sog. Repetitionsverfahren. Diese Methode, bei welcher jede einzelne Kante für sich gemessen werden muß, ist folgende: Man stellt die erste Fläche, wie gewöhnlich, ein und liest ab; nachdem die zweite feingestellt worden ist, löst man die Klemmschraube *f* Fig. 678 und führt durch Zurück-

1) Fällt ein solches Bild mit einem normalen Reflexbilde zusammen und stört dessen Einstellung, so hat man nur nötig, den Einfallswinkel des Lichtes zu ändern, um jenen Reflex in einer andern Richtung aus dem Krystalle austreten zu lassen.

2) Dabei ist zu berücksichtigen, daß das mit der Lupe montierte Beobachtungsfernrohr der horizontalen Goniometer ein umgekehrtes Bild des Krystalles liefert, die beleuchtete Fläche also dem Lichte abgekehrt erscheint!

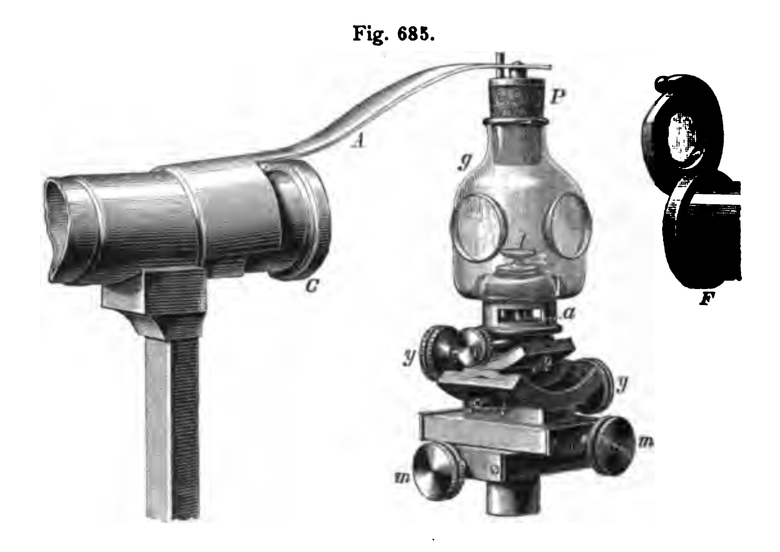


drehen der inneren Axe den Reflex der ersten Fläche an das Fadenkreuz, auf welches man ihn ebenfalls fein einstellt, so daß diese Fläche jetzt genau die Lage zu den Nonien hat, wie vorher die zweite; löst man nun β und dreht in demselben Sinne, wie zuerst, die äußere Axe mit dem Limbus so weit, bis wieder die zweite Krystallfläche eingestellt ist, so gibt die Ablesung dieser Position gegen die Ausgangsstellung das Doppelte des Flächenwinkels. Man kann dasselbe Verfahren nun wiederholen und so durch Ablesen der ersten und letzten Stellung den vier- oder sechsfachen Winkel finden, welcher, durch 4 bzw. 6 dividiert, einen Wert des gesuchten Winkels liefert, welcher von den Teilungsfehlern, namentlich von einer etwaigen Excentricität des Teilkreises unabhängig ist.

Zum Schlusse mögen noch diejenigen Vorkehrungen erwähnt werden, durch welche es möglich ist, Krystalle zu messen, die sich innerhalb eines andern gasförmigen oder flüssigen Mediums, als die gewöhnliche Luft, befinden.

Handelt es sich um krystallisierte Substanzen, welche sich an der Luft verändern, sei es, daß sie Feuchtigkeit anziehen und zerfließen, daß sie Wasser

Fig. 685.



abgeben und verwittern oder sonstige chemische Zersetzung erleiden, so müssen sie entweder mit trockner Luft oder mit Luft, welche mit Wasserdampf gesättigt ist, oder mit einem andern Gase umgeben werden. Besonders zur Untersuchung zerfließlicher Krystalle ist die geeignetste Vorrichtung die von Fuess construierte, welche den von demselben gelieferten horizontalen Reflexionsgoniometern angepaßt ist (s. Fig. 685). An Stelle des Tischchens wird auf die Centrier- und Justiervorrichtung des Goniometers ein kurzer, an drei Seiten durchbrochener Hohlcylinder aufgesetzt, in dessen oberen Teil die kleine Kugel *z* allseitig drehbar eingelassen ist; ihre Drehung, sowie die des darauf befindlichen Tischchens *t* erfolgt durch einen kleinen Schlüssel an dem mit ihr in Verbindung stehenden Stiele *a* und ermöglicht eine angenäherte Justierung des aufgesetzten Krystalles, welche schließlich durch die Justierschrauben *y* vollendet wird. Auf den

sphärisch gewölbten Oberteil des Cylinders ist ein Glasfläschchen mit eingedrücktem Boden so abgeschliffen, daß jener, mit etwas Öl benetzt, das letztere luftdicht abschließt, auch wenn er geneigt oder gedreht wird. Damit hierbei die Stellung des Fläschchens unverändert bleibe, ist auf das Collimatorrohr eine federnde Klammer A aufgesetzt, welche auf den Gummipfropfen P des Fläschchens drückt, während ein zweiter Stift eine Drehung desselben verhindert. Der Ein- und Austritt des Lichtes geschieht durch angesetzte planparallele Glasplatten. Der rinnenförmige Bodenraum des Fläschchens dient zur Aufnahme von Schwefelsäure, Chlorcalcium, Wasser oder dergleichen.

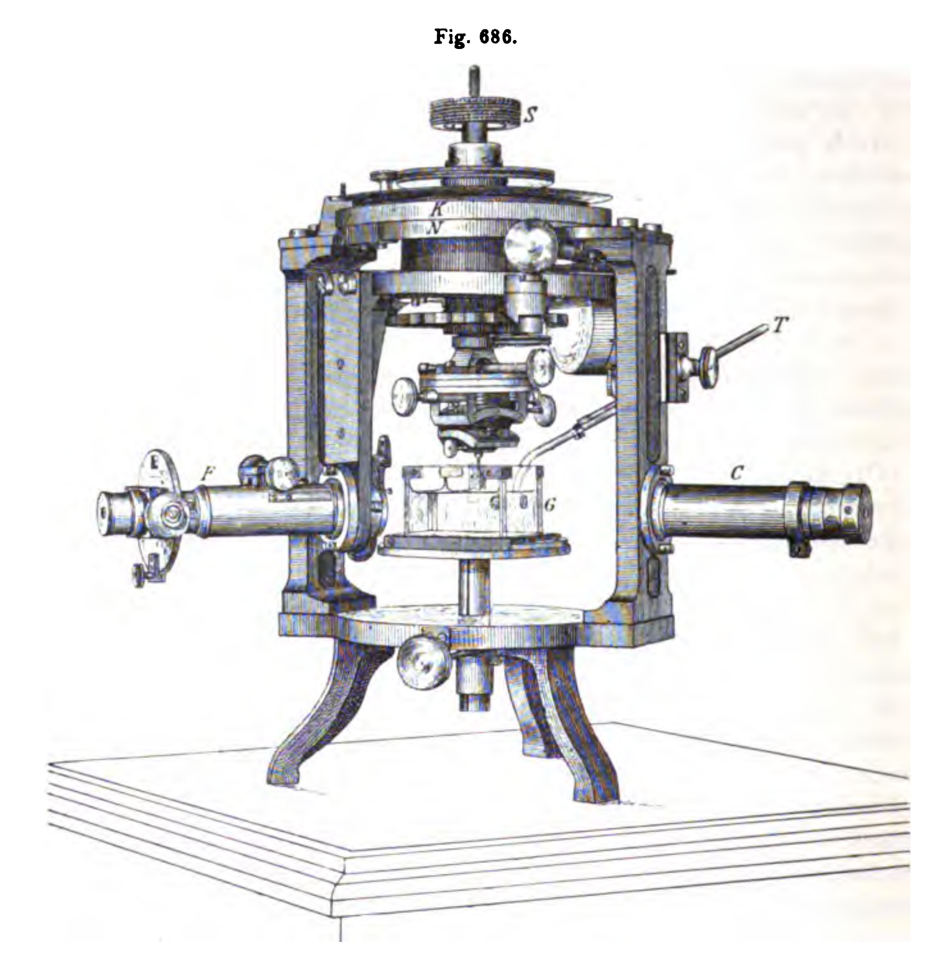
Noch geeigneter zur Messung unbeständiger Krystalle wären solche Methoden, durch welche die Reflexe einer größeren Zahl von Flächen gleichzeitig photographisch fixiert und aus dieser Aufnahme die Winkel abgeleitet werden können. Ein solches Verfahren nach den Principien der Photogrammetrie hat Schwarzmann beschrieben zum Zwecke der Untersuchung gekrümmter Flächen, der Lichtfiguren geätzter Flächen (s. S. 253) u. a., d. h. für solche Fälle, in welchen innerhalb eines mäßigen Winkelraumes verhältnismäßig viele Reflexpunkte liegen. Anwendungen dieser Methode zur Untersuchung solcher Krystalle, deren Messung auf anderem Wege nicht möglich ist, wurden bisher nicht veröffentlicht[1]).

Die Messung von Krystallen innerhalb einer Flüssigkeit kann entweder dadurch geboten sein, daß dieselben beim Entfernen aus ihrer Mutterlauge sich augenblicklich verändern, oder es kann sich um das Studium des Wachstumes der Krystallflächen in der Mutterlauge handeln. Zu dem letzteren Zwecke, besonders zum Studium der Bildung der Vicinalflächen (s. S. 267), hat Miers (Ztschr. f. Kryst. 1904, **39**, 223 f.) ein eigenes Goniometer construiert, welches in Fig. 686 (S. 676) abgebildet ist. Der Teilkreis K dreht sich auf einer kreisförmigen Platte N, auf welcher die Nonien eingraviert sind und die auf zwei starken verticalen Trägern ruht. Die eine dieser Säulen trägt in einer Durchbohrung den Collimator C, während das Beobachtungsfernrohr F auf das untere Ende eines starken gegenbalancierten Armes montiert ist, welcher um die Goniometeraxe gedreht und in jeder gewünschten Stellung geklemmt werden kann. Die Centrier- und Justiervorrichtung ist am unteren Ende der Axe befestigt und kann durch Drehen von S gehoben oder gesenkt werden. Die Flüssigkeit, in welche der

1) Bereits vor der Publication Schwarzmanns wurden im Laboratorium des Verf. von K. Stöckl Versuche zur photogrammetrischen Messung zerfließlicher Krystalle angestellt; zur Erzielung von Momentphotographien, welche einen größeren Winkelraum umfassen, erwiesen sich jedoch Linsencombinationen als erforderlich, deren Herstellung durch die dafür interessierte optische Firma sich so verzögerte, daß die Versuche vorläufig unterbrochen werden mußten. Es ist aber kein Zweifel, daß die beabsichtigte Wiederaufnahme derselben zum Ziele führen und außerdem es durch ein anderes, viel einfacheres, Verfahren gelingen wird, mittels einer Momentphotographie der Reflexbilder innerhalb eines noch größeren Winkelraumes die Winkel selbst sehr veränderlicher Krystalle wenigstens angenähert zu bestimmen.

Krystall eintaucht, befindet sich in einem, ebenfalls in der Höhe verstellbaren, Gefäße G, welches aus planparallelen Glasplatten, in Messingrahmen montiert, besteht; ihre Temperatur kann an dem Thermometer T abgelesen werden. Das Gefäß wird so eingestellt, daß eine seiner Wände senkrecht zur Collimatoraxe ist, und das Fernrohr F wird gedreht, bis es auf der benachbarten Fläche normal steht[1]). Außerdem ist das Instrument[2])

Fig. 686.



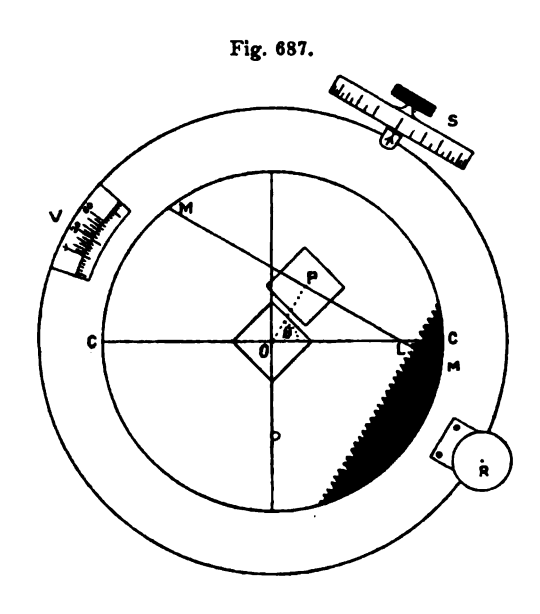
so eingerichtet, daß Krystallträger und Beobachtungsfernrohr unabhängig voneinander und vom Teilkreise gedreht werden können oder jedes der-

1) Ein einfaches Verfahren, die zu einer spiegelnden Fläche senkrechte Stellung eines Fernrohres aufzufinden, wird bei der Messung der Brechungsindices beschrieben werden. Ebenso kann dazu eine andere, später erwähnte, auf der Autocollimation beruhende Methode dienen.

2) Die weiterhin beschriebene Neuconstruction des Kohlrauschschen Totalreflectometers (Fig. 695) von Leiss wird von der Firma Fuess mit einer Einrichtung geliefert, welche ihre Verwendung zu dem Beobachtungsverfahren von Miers ebenfalls gestattet.

selben fest mit dem Teilkreise verbunden werden kann. Um die Richtung und die Größe der Abweichung gleichzeitig im Gesichtsfelde vorhandener Reflexe voneinander oder eine Verschiebung eines Reflexes während des Wachstumes des Krystalles zu messen, d. h. zur Lösung der Hauptaufgabe bei dem Studium der Vicinalflächen, dient ein besonderes Ocular, dessen Einrichtung aus Fig. 687 ersichtlich ist. Es sei das Reflexbild eines aus einer kleinen quadratischen Öffnung (statt deren könnte auch die S. 655 unter c) erwähnte kreisförmige dienen) bestehenden Signales in der Mitte eingestellt. Um den Ort eines zweiten Reflexbildes oder der während des Wachstumes stattgefundenen Verschiebung des ersten zu messen, genügt offenbar die Bestimmung des Abstandes OP und des Winkels Θ. Die Messung von OP erfolgt mittels eines dritten Fadens MM, welcher durch die Mikrometerschraube S im Gesichtsfelde verschoben werden kann; die Verschiebung wird an der geteilten Trommel der Mikrometerschraube abgelesen, während eine Zahnskala bei L die Anzahl der ganzen Umdrehungen derselben registriert. Der bewegliche Faden mit seiner Mikrometervorrichtung ist auf einem kreisförmigen Rahmen C befestigt, welcher einen gezähnten Rand besitzt und um das Centrum O in jedem beliebigen Winkel gedreht werden kann; dieser Rahmen bildet das Futteral einer Kreisteilung, welche durch einen Ausschnitt bei V sichtbar ist und auf der die Drehung des beweglichen Fadens abgelesen werden und dadurch der Winkel Θ bestimmt werden kann; die Schraube R dient zum Klemmen des Kreises.

Fig. 687.



Reflexionsgoniometer mit mehreren Teilkreisen.

Teilt man die Kugeloberfläche, auf welcher sich die Flächenpole befinden, in derselben Weise ein, wie die Oberfläche der Erde (letztere als Kugel gedacht), durch den Meridianen entsprechende größte Kreise und durch diese senkrecht schneidende Parallelkreise, wobei die Ebene des Äquators eine ganz beliebige sein kann, — so ist man imstande, den Ort jedes Flächenpoles durch zwei im Winkelmaße angegebene Coordinaten, welche der geographischen Länge und Breite entsprechen, anzugeben. Die gleiche Methode liegt dem Verfahren der relativen Ortsbestimmung durch

den Theodoliten zugrunde, an dessen horizontalem Teilkreise der Winkelabstand zweier entfernter Punkte, bezogen auf den Horizont, gemessen wird, während der zweite, senkrechte Teilkreis desselben Instrumentes dazu dient, die Höhe jener Punkte über dem Horizonte in Winkelmaß anzugeben.

Diese Methode wurde zum ersten Male angewendet von Miller im J. 1874 zur Messung einer vor dem Lötrohre erhaltenen Platinperle mit zahlreichen Facetten, welche ohne bestimmte Orientierung auf einem kleinen Wollastonschen Goniometer befestigt wurde, worauf dieses so auf dem horizontalen Kreise eines größeren Babinetschen Goniometers aufgesetzt wurde, daß der Krystall sich im Durchschnittspunkte der aufeinander senkrechten Axen beider Instrumente befand (s. Ztschr. f. Kryst. 1883, **7**, 619).

Besondere Instrumente zur Krystallmessung nach dieser Methode, sog. Theodolitgoniometer, mit zwei zueinander senkrechten, geteilten Kreisen wurden in neuerer Zeit unabhängig voneinander construiert von Fedorow, Czapski und Goldschmidt, und seitdem ist eine große Reihe krystallographischer Untersuchungen nach der Theodolitmethode ausgeführt worden. Zu diesen Instrumenten gehört auch das S. 633 beschriebene Anlegegoniometer mit zwei Kreisen (Fig. 665).

Das einfachste zweikreisige Reflexionsgoniometer ist das von Czapski in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1893, **13**, 1 beschriebene. Dasselbe besteht 1) aus einem horizontalen Teilkreise mit einer in der Mitte desselben angebrachten, senkrechten Säule, auf welcher der Krystall in beliebiger Stellung befestigt wird; 2) aus einem verticalen Teilkreise, dessen Axe von einem festen Arme getragen wird und mit welchem ein gebrochenes Fernrohr so verbunden ist, daß es an seiner Drehung teilnimmt. Dieses ist zur Autocollimation eingerichtet, d. h. es dient gleichzeitig als Collimator und Beobachtungsfernrohr, indem die von einem seitlich angebrachten Glühlämpchen kommenden Lichtstrahlen durch ein totalreflectierendes Prisma, an welchem zugleich das Signal angebracht ist, in die Axe des Fernrohres reflectiert werden und nach einer zweiten rechtwinkeligen Reflexion aus dem Objective parallel austreten. Durch Drehung des verticalen Teilkreises mit dem Fernrohre und durch eine solche des horizontalen Limbus (beide Drehungen sind voneinander unabhängig ausführbar und gestatten feine Einstellung) kann es nun für jede Fläche des Krystalles, welche überhaupt den Lichtstrahlen zugänglich ist, erreicht werden, sie zu den aus dem Objektive austretenden Strahlen senkrecht zu stellen, so daß die letzteren von ihr in der gleichen Richtung zurückgeworfen werden und daher ein Bild des Signales im Fernrohre erzeugen. Die Ablesung beider Kreise nach Einstellung dieses Bildes liefert die betreffenden Winkelcoordinaten, welche in der gleichen Weise für alle am Krystalle beobachteten Flächen (mit Ausnahme der nach unten gekehrten und durch die Befestigung verdeckten) bestimmt werden können, ohne daß die Stellung desselben auf dem Krystallträger verändert wird. Bei dieser

Methode fallen also Centrierung und Justierung des Krystalles nebst den dazu nötigen Vorrichtungen vollständig fort.

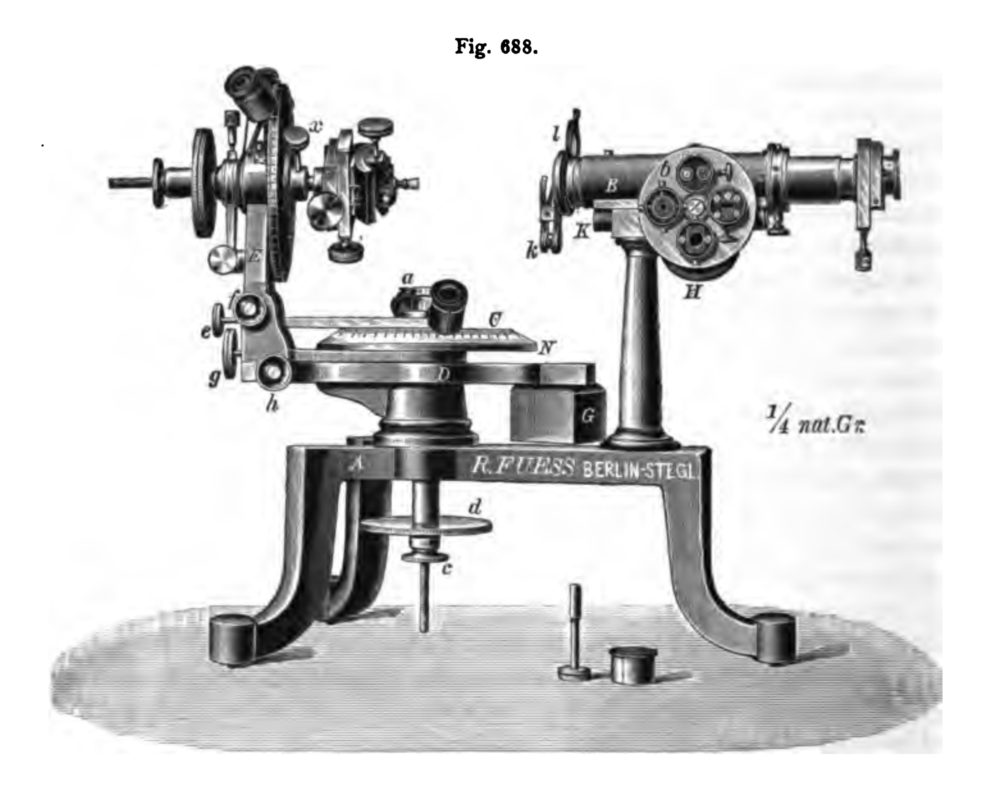
Da jedoch die Berechnung der Winkel zwischen je zwei Flächen aus den Coordinaten derselben sich einfacher und übersichtlicher gestaltet, wenn man nicht von einer beliebigen, sondern von einer Ebene ausgeht, in welcher die Flächennormalen einer bestimmten und besonders wichtigen Zone am Krystalle liegen, so verband Goldschmidt mit seinem Instrumente (s. Zeitschr. f. Krystallogr. 1893, **21**, 210f. und 1898, **29**, 333f.) wieder eine Centrier- und Justiervorrichtung, und zwar mit dem verticalen Teilkreise, mit dessen Axe man daher eine Zone des Krystalles parallel machen kann. Ferner sind dem Instrumente zwei horizontale Fernröhre beigegeben. Durch Drehen des verticalen Teilkreises kann eine beliebige Fläche des aufgesetzten Krystalles zum horizontalen Kreise senkrecht gestellt und dann durch Drehen des letzteren in diejenige Orientierung gebracht werden, in welcher sie die aus dem Collimator austretenden Lichtstrahlen in das Beobachtungsfernrohr reflectiert; die nach der Einstellung des Signalbildes erfolgten Ablesungen beider Kreise bestimmen die Orientierung der Fläche. Stellt man eine Krystallfläche senkrecht zur Axe des verticalen Limbus, so daß das von ihr reflectierte Signalbild beim Drehen dieses Kreises seinen Ort im Gesichtsfelde des Beobachtungsfernrohres beibehält, so kann man mit dem Instrumente die (für die Berechnung des Krystalles wesentlichen) Winkel messen, unter denen verschiedene Zonenkreise einander in dem Pole jener Fläche schneiden, denn diese sind offenbar gleich der Drehung des verticalen Kreises, welche erforderlich ist, um einmal die Flächen der einen, das andere Mal die der andern Zone senkrecht zum horizontalen Kreise zu stellen.

Die aus dem eben angeführten Beispiele ersichtlichen Vorteile des Theodolitgoniometers für die Orientierung an einem flächenreichen Krystalle wurden in der ersten oben citierten Abhandlung auseinandergesetzt, noch eingehender von E. von Fedorow in der wichtigen und umfangreichen Arbeit »Universal-(Theodolit-)Methode in der Mineralogie und Petrographie« (Zeitschr. f. Krystallogr. 1893, **21**, 574), in welcher dieser Autor S. 603f. das von ihm construierte und als »Universalgoniometer« bezeichnete Instrument beschreibt. Dasselbe trägt ebenfalls, um eine bestimmte Zone justieren und dann alle andern Flächen auf dieselbe beziehen zu können, einen Centrier- und Justierapparat am verticalen Kreise, vereinigt aber hiermit den Vorteil des einfacheren Czapskischen Instrumentes durch Benutzung der Autocollimation. Das Fedorowsche Universalgoniometer in der ihm von C. Leiss (Die opt. Instrumente der Firma R. Fuess, Berlin 1899, S. 137f.) gegebenen Form, in welcher es von der genannten Firma geliefert wird, soll im folgenden ausführlicher beschrieben werden:

Das mit drei Füßen versehene Stativ A (Fig. 688) trägt das Fernrohr B, welches mit der unten gezahnten Schiene K parallel seiner optischen Axe verschoben werden kann durch Drehung der (nur zum kleinsten Teile

sichtbaren) Scheibe *H*. An demselben ist eine Revolverscheibe *b* angebracht, welche die vier gebräuchlichsten, S. 655 unter a), b), c), d) beschriebenen Signale trägt. Diese können während der Beobachtung, ohne letztere zu unterbrechen, gewechselt werden, indem die Drehung der Scheibe *b*, welche mit vier Anschlägen versehen ist, gestattet, irgendeines (in der Figur ist es der Webskysche Spalt) in diejenige Orientierung zu bringen, in welcher das Licht einer neben dem Fernrohre aufgestellten Goniometerlampe (oder eines in einer kleinen aufgesetzten Metallkappe befindlichen

Fig. 688.



Glühlämpchens) durch die Öffnung des Signales in das Innere des Fernrohres eintritt. Hier werden die Strahlen durch ein kleines totalreflectierendes Prisma, welches nur einen geringen Teil der freien Öffnung des Fernrohres einnimmt und daher das Zustandekommen der Bilder in der Focalebene desselben nicht verhindert, unter rechtem Winkel reflectiert und treten, da das Signal sich in der Entfernung der Brennweite vom Objective befindet, aus letzterem parallel aus. Vor das Objectiv kann entweder die Linse *l* vorgeschlagen werden, um den Krystall deutlich zu erblicken, oder vermittelst der federnden Klammer *k* eines der schwächeren Objectivsysteme eines Fuessschen Mikroskopes angebracht werden, wodurch es möglich ist, die beleuchtete Fläche zum Studium ihrer Beschaffenheit in geeigneter Vergrößerung zu betrachten (zur scharfen Einstellung

des hierdurch in ein Mikroskop verwandelten Fernrohres dient die früher erwähnte Crémaillère *K* bzw. *H*). Am Oculare befindet sich zu dem bereits S. 670 Anmerk. erwähnten Zwecke eine Irisblende, welche durch zwei Schrauben *z* (deren in der Figur nur eine sichtbar ist) in zwei zueinander senkrechten Ebenen verschoben werden kann. Außerdem kann diese Vorrichtung auch durch ein gewöhnliches Ocular (in der Figur unter dem Stative rechts sichtbar) ersetzt werden. Auf dem Stative *A* ruht ferner ein konischer Aufsatz, in dessen Durchbohrung sich die Axe des Teilkreises *C*[1]) befindet, welche mittels der Scheibe *d* gedreht wird, während *c* nur eine Parallelverschiebung der inneren Axe bewirkt (wie *k* bei den horizontalen Goniometern Fig. 677, S. 652), eine Bewegung, welche nur gebraucht wird, wenn das Instrument als gewöhnliches Reflexionsgoniometer (mit Autocollimation) benutzt werden soll. Alsdann nimmt man nämlich die mit dem verticalen Kreise verbundene Centrier- und Justiervorrichtung, nach dem Lösen der Schraube *x*, von jenem ab und befestigt sie (mit Benutzung des in der Figur unter dem Stative aufgestellten Schlüssels) in gleicher Weise auf dem Ende *a* der Axe des horizontalen Teilkreises. Die Ablesung des letzteren geschieht an dem festen Nonienkreise *N* durch Lupen in derselben Weise, wie an den gewöhnlichen Goniometern, während die Feinstellung mittels der Schraube *f*, nach dem Anziehen der Klemmschraube *e*, erfolgt. Auf dem obenerwähnten conischen Aufsatze dreht sich nun unabhängig vom horizontalen Limbus der Träger *D* des verticalen Teilkreises, welcher durch ein Gegengewicht *G* balanciert ist. Dieser Teil kann ebenfalls mittels der Schraube *g* an dem Stative festgeklemmt und durch *h* feingestellt werden. Da andererseits *D* durch Anziehen der Schraube *e* mit dem horizontalen Teilkreise in feste Verbindung gebracht wird, so kann jede Drehung des Trägers *D* bzw. des Verticalkreises um die Axe des horizontalen Limbus an dem letzteren abgelesen werden. Die an dem linken Ende von *D* befestigte senkrechte Säule *E* trägt endlich einen Apparat, der in allen Teilen so construiert ist, wie das in Fig. 674 abgebildete Goniometer mit verticalem Kreise, und welcher durch Drehung von *D* auf der konischen Axe des Statives rings um den Horizontalkreis geführt werden kann, mit Ausnahme des Segmentes, innerhalb dessen er mit dem Fernrohre in Collision kommen würde. Mit Hilfe der letzterwähnten Bewegung und der Drehung des Verticalkreises (die an zwei, um 90° voneinander abstehenden Nonien durch Lupen abgelesen werden kann) sind nun offenbar alle im vorhergehenden erwähnten Messungen nach der Theodolitmethode ausführbar, und zwar mit derselben Genauigkeit, wie sie das Goniometer Fuess Nr. 2 besitzt.

Wie oben erwähnt wurde, kann das eben beschriebene Instrument auch als einkreisiges Reflexionsgoniometer (mit Autocollimation) verwendet

1) Bei feinerer Ausführung des Instrumentes kann auch statt des offenen Kreises ein verdeckter Silberlimbus geliefert werden, wie ihn die in Fig. 677 und 678 abgebildeten Fuess schen Goniometer besitzen.



werden, indem die Centrier- und Justiervorrichtung auf den horizontalen Teilkreis aufgesetzt wird. Diese Anordnung hat aber, wie schon früher (S. 648 f.) auseinandergesetzt wurde, überhaupt für die Krystallmessungen gewisse Vorteile, daher die Firma R. Fuess in Steglitz bei ihren Neuconstructionen des Theodolitgoniometers zu dem S. 678 erwähnten Czapski-schen Typus zurückkehrte, bei welchem der Krystall auf der Axe des horizontalen Teilkreises befestigt wird. Andererseits wurde aber bei diesen Instrumenten das von Czapski eingeführte System der Autocollimation beseitigt, weil die schiefe Beleuchtung des Krystalles die Aufsuchung kleiner Flächen wesentlich erleichtert und für die Deutlichkeit der einzustellenden Reflexe unbedingt vorzuziehen ist. Dem Beobachtungsfernrohre wurde daher ein unter beliebigem Winkel dazu verstellbarer Collimator hinzugefügt. Diese Neuconstruction wurde von C. Leiss in der S. 679 citierten Schrift S. 146 und in der Zeitschr. f. Kryst. 1899, **31,** 48 beschrieben, dann aber weiter verbessert durch G. Wulff (Zeitschr. f. Kryst. 1902, **37,** 50 f.) und K. Stöckl (ebenda 1904, **39,** 23 f.). Die Einrichtung dieses vervollkommneten und nunmehr der allgemeinsten Anwendung fähigen Apparates ist aus der Fig. 689 zu ersehen.

In dem Dreifußstative ist der horizontale Teilkreis H mittels des Speichenrades k drehbar und kann, nachdem er durch Anziehen der Klemmschraube h fixiert ist, mit h^1 feingestellt werden; die Ablesung erfolgt an den beiden festen Nonien n. Der Krystallträger mit der gewöhnlichen Centrier- und Justiervorrichtung wird mittels eines Zapfens und der Schraube c fest mit der verticalen Axe verbunden; durch Drehen des Griffknopfes a kann er höher und tiefer gestellt und die ihn tragende Axe durch die zunächst über H befindliche Klemmschraube in einer bestimmten Höhe fixiert werden. Der senkrechte Ständer E trägt den verticalen Teilkreis V, dessen Drehung durch die mit Griffknöpfchen versehene Scheibe k^1 erfolgt und an zwei gegenüberliegenden Nonien n^1 (von welchen in der Figur nur der eine sichtbar ist) abgelesen wird; die Feinstellung erfolgt nach Festklemmung der Schraube v durch die Mikrometerschraube v^1. Das dem Krystalle zugewendete Ende der Durchbohrung der Axe des Verticalkreises ist durch eine eingeschraubte Linse, das andere Ende durch das Diaphragma d geschlossen; man erblickt infolgedessen durch d den Krystall und kann ihn leicht in den Schnittpunkt der Axen beider Teilkreise einstellen. Mit dem verticalen Kreise V ist nun das Beobachtungsfernrohr F verbunden, dessen Objectiv dem Krystalle zugekehrt ist und in welchem die eingetretenen parallelen Lichtstrahlen durch ein totalreflectierendes Prisma rechtwinkelig zu ihrer Eintrittsrichtung reflectiert werden; durch Vorschlagen der Lupe vor das Objectiv kann der Krystall sichtbar gemacht werden. Das Collimatorrohr C, welches, wie F durch ein Gegengewicht g, durch g^1 ausbalanciert ist, kann selbständig um die horizontale Axe gedreht und daher unter jeden beliebigen Winkel gegen F bis zur Berührung beider miteinander oder mit dem Stative gestellt und durch die

Schraube f fixiert werden; dieser Winkel kann an dem Teilkreise V mittels des Index i, welcher mit dem Collimatorträger de fest verbunden ist, abgelesen werden. Im Collimator C befindet sich ein Schraufsches Signal, welches durch ein in der Fassung G befindliches Glühlämpchen oder durch eine von Wulff vorgeschlagene Vorrichtung beleuchtet wird. Diese besteht aus einem in Fig. 693 (S. 689) bei III abgebildeten Spiegel γ, welcher mit der Hülse δ am oberen Ende des Collimators festgeklemmt

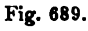
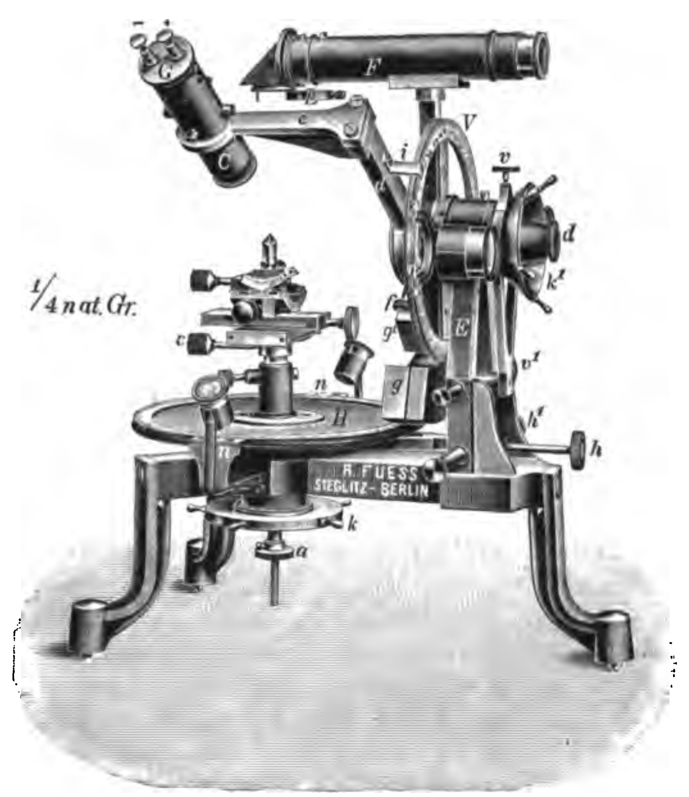


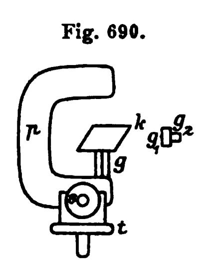
Fig. 689.



wird (nach Wegnahme der Fassung G); in der Verlängerung der horizontalen Axe des Teilkreises V wird in 1—2 m Entfernung eine Gasglühlichtlampe oder helle Petroleumlampe aufgestellt und zwischen ihr und dem Instrumente ein kreisförmiger dunkler Schirm so angebracht, daß die Strahlen der Lampe eben noch auf den Spiegel γ fallen. Wird dieser nun bei irgendeiner Stellung des Collimators C so gestellt, daß er die Lichtstrahlen parallel der Axe des Collimators reflectiert, so wird dies auch bei jeder andern Stellung der Fall sein, da beim Drehen des Collimators um die horizontale Axe von V der Winkel, welchen der Spiegel mit dieser bildet, nicht geändert wird. Die infolgedessen in jeder Stellung der Fernrohre

stattfindende helle Beleuchtung des Signales wird vorteilhaft durch eine an Stelle von G eingesetzte Milchglasplatte gemildert und gleichmäßig gemacht. Will man in einzelnen Fällen nur den mittleren Teil des Signalbildes zur Einstellung verwenden, so kann man im Rohre C eine Irisblende anbringen und mittels des Griffes A in Fig. 693 erweitern oder verengern. Wichtiger ist die Verwendung einer Irisblende zu dem bereits S. 670 (s. d. Anmerk. daselbst) erwähnten Zwecke. Statt dieselbe vor dem Oculare des Beobachtungsrohres F anzubringen, kann man sie auch mit dem Collimator verbinden, indem man vor dessen Objectiv den in Fig. 693 IV abgebildeten Abblender aufsetzt; dieser besteht aus einer durch ein Kugelgelenk drehbaren Irisblende α, welche in der gewünschten Stellung durch die Schraube β festgeklemmt werden kann. Dadurch kann man den aus dem Collimator austretenden Strahlcylinder beliebig einengen und mit demselben nur einen bestimmten Teil einer Krystallfläche beleuchten, wobei natürlich der Krystall durch F mit vorgeschlagener Lupe betrachtet wird; nach dem Wegschlagen der letzteren erblickt man dann in F nur das von diesem Teile der Fläche gelieferte Reflexbild. Durch die zuletzt beschriebenen Vorrichtungen ist nun das Goniometer besonders geeignet zur Untersuchung von Krystallen mit facettierten und vicinalen Flächen, da man die Position jeder einzelnen Facette bequem und genau bestimmen kann, während dies bei dem einkreisigen Goniometer nur mit denjenigen Reflexen der Fall ist, welche in der justierten Zone liegen. Das beschriebene Instrument gestattet die Einstellung aller Flächen der oberen Hälfte des Krystalles und derjenigen der angrenzenden Teile bis etwa 20—30° Abstand von der horizontalen Ebene. Zur möglichst vollständigen Messung beider Hälften eines Krystalles kann man mit Vorteil die Wulffsche Vorrichtung zum Umlegen des Krystalles (Fig. 690) benutzen. Dieselbe besteht aus einem Metallplättchen p mit dem Krystallträger g, dessen horizontaler Durchschnitt daneben abgebildet ist; es ist ein Glassäulchen mit zwei genau aufeinander senkrechten, spiegelnden Flächen g_1 und g_2. Der Krystall k wird nun mit möglichst wenig Wachs im Centrum von p angeklebt und dieses mit der Klemmschraube s auf dem Goniometertischchen t befestigt. Bei der Beobachtung des Krystalles werden auch die Reflexe von g_1 und g_2 eingestellt und deren Coordinaten notiert. Alsdann wird das Plättchen p vorsichtig in der umgekehrten Stellung auf dem Tischchen t befestigt und die untere, nun obere, Hälfte des Krystalles untersucht, wieder mit Einstellung der Reflexe von g_1 und g_2, durch deren Coordinaten die Messungen beider Hälften aufeinander bezogen werden können (Näheres hierüber und über die Prüfung und Correction des Instrumentes s. Wulff a. a. O.).

Fig. 690.



Das zweikreisige Goniometer gestattet an und für sich die Messung eines Krystalles ohne Justierung, da in jeder beliebigen Stellung desselben die Coordinaten φ und ϱ (s. S. 633) jedes eingestellten Flächenpoles

gemessen werden können und dadurch die Position der Fläche bestimmt ist. Infolgedessen ist ein solches Instrument besonders geeignet zur Untersuchung flächenreicher Krystalle, an denen eine vorläufige Orientierung ohne Messung nicht möglich ist. Aber auch in solchen Fällen wird die Lösung der Aufgabe außerordentlich vereinfacht, wenn man eine besonders entwickelte Zone des Krystalles zum Ausgangspunkte der Bestimmung nimmt und auf dem Goniometer justiert. An dem zuletzt beschriebenen Instrumente geschieht dies in folgender Weise:

Der Krystall wird durch die horizontale Axe von d aus anvisiert und angenähert justiert. Alsdann wird das Fernrohr F um einen beliebigen Winkel, z. B. 20°, über die Horizontalstellung seines (in der Fig. 689 verticalen) Trägers hinaus nach abwärts gedreht; dieser Winkel ergibt sich durch Ablesung an den Nonien, da bei der Horizontalstellung des Trägers die Punkte 90° und 270° mit den Nullpunkten der Nonien übereinstimmen. Der Collimator C wird nunmehr unter demselben Winkel (am Index i abzulesen) nach aufwärts gestellt, so daß die von den vertical gestellten Flächen des Krystalles gespiegelten Signalbilder nach und nach im Gesichtsfelde des Beobachtungsfernrohres erscheinen, wenn die verticale Axe des Instrumentes gedreht wird. Alsdann wird die genaue Justierung der Zone vorgenommen, durch welche bewirkt wird, daß alle Signalbilder das Gesichtsfeld von F in gleicher Höhe passieren, was nur der Fall ist, wenn die Normalen der Flächen sämtlich genau in der horizontalen, d. i. der zur verticalen Axe des Instrumentes senkrechten, Ebene liegen. Hebt oder senkt man dann den Collimator noch um so viel, als nötig ist, damit die Signale genau durch die Mitte des Gesichtsfeldes des Beobachtungsfernrohres passieren, so bilden nunmehr die Axen der beiden Fernrohre genau den gleichen und entgegengesetzten Winkel mit jener Ebene. In dieser gegenseitigen Stellung bleiben sie während der ganzen Beobachtung fest angeklemmt. Es werden nun zunächst die Positionen der Pole aller verticalen Krystallflächen an dem Teilkreise H abgelesen; alsdann werden die Reflexe der übrigen Flächen durch gleichzeitiges Drehen von V, mit den beiden fest damit verbundenen Fernrohren, und von H aufgesucht (mit vorgeschlagener Linse vor F) und eingestellt; die Ablesung am horizontalen Teilkreise gibt dann die Winkelcoordinate ϱ, die Ablesung am verticalen den Wert von φ. Besonders einfach gestaltet sich die Aufsuchung der Reflexe der übrigen Flächen, wenn eine zu der justierten Zone senkrechte Ebene am Krystalle vorhanden ist, deren Stellung dadurch erkannt wird, daß ihr Reflexbild beim Drehen der verticalen Axe seine Einstellung im Gesichtsfelde nicht verändert: die Positionen aller Flächen, welche in der Zone jener Fläche mit einer der vertical gestellten Flächen liegen, findet man durch einfaches Drehen der horizontalen Axe und Ablesen des verticalen Teilkreises, da ihr Azimut ϱ (die Ablesung auf dem horizontalen Teilkreise) das gleiche ist, wie das der vertical gestellten Flächen. Trägt man die Resultate der Messung in eine stereographische Projection ein,

und zwar die Pole der justierten Flächen in den Grundkreis, so liefert die Projection ein übersichtliches Bild der gesuchten Zonen- und Symmetrieverhältnisse des Krystalles. Die Projection kann direct zur graphischen Berechnung benutzt werden, wenn man sie auf dem S. 617 erwähnten Fedorowschen Netze mittels der als Radien erscheinenden Meridiane (ϱ) und der das Centrum umgebenden Parallelkreise (φ) anfertigt und alsdann in der S. 618 angegebenen Weise verwendet, wozu auch direct das Fedorowsche Netz dienen kann, da dasselbe auch das dem Wulffschen Netze entsprechende Curvensystem, wenn auch nur von 5° zu 5°, enthält.

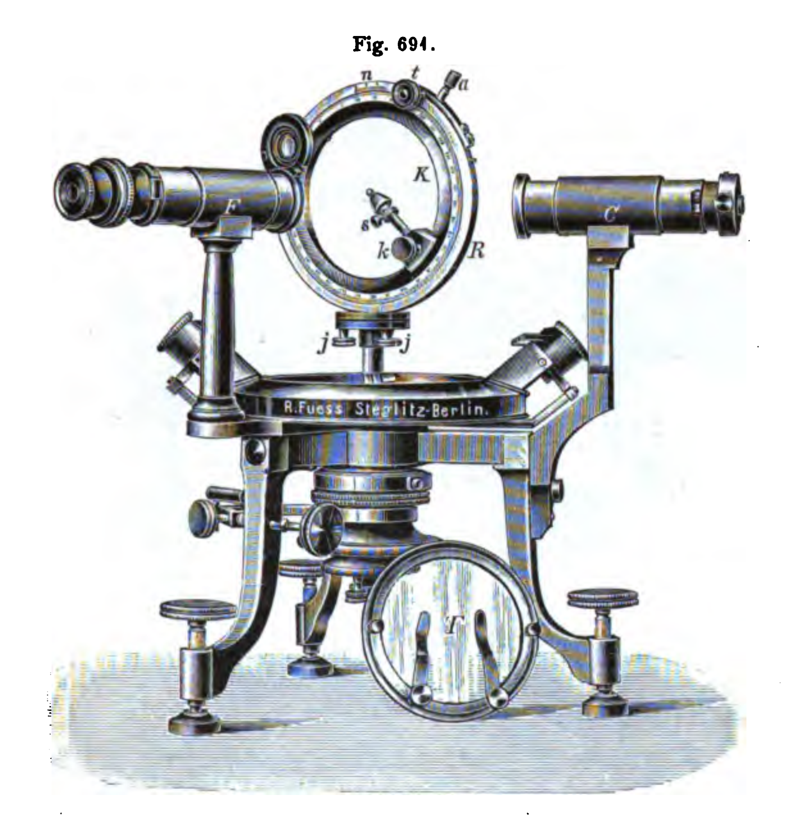
Dem Instrumente kann außerdem eine später zu beschreibende, von Fedorow erfundene Einrichtung beigegeben werden, welche die rein instrumentelle Auflösung der krystallographischen Rechnungsaufgaben mit derselben Genauigkeit wie die Krystallmessung ermöglicht.

Durch eine von Stöber vorgeschlagene Vorrichtung (s. Zeitschr. f. Kryst. 1897, **29,** 25 f.) ist es möglich, ein gewöhnliches Goniometer, z. B. das S. 649 f. beschriebene »Modell 2«, in ein einfaches Theodolitgoniometer umzuwandeln. Zu dem Zwecke wird auf die verticale Axe statt der Centrier- und Justiervorrichtung eine Combination zweier concentrisch ineinander gleitender Ringe KR (Fig. 691) aufgesetzt, von denen der äußere die Nonien (n), der innere die Kreisteilung trägt. An dem inneren Ringe wird an einer beliebigen Stelle der Krystallträger mit der Schraube k angeklemmt. Zur groben Drehung des verticalen Kreises dienen fünf auf der Rückseite von K befindliche Griffe; die Feinstellung wird, nach dem Anziehen der Schraube a, durch den Trieb t bewirkt. Statt des Krystallträgers kann in dem inneren Ringe K die in einen Metallring gefaßte Spiegelglasplatte T eingesetzt und dann das Instrument zur genauen Bestimmung der Schwingungsrichtungen eines Krystalles benutzt werden, wie an einer späteren Stelle gezeigt werden soll.

Die Theodolitmethode liefert nach dem Vorhergehenden die relativen Positionen der Flächen eines Krystalles, bestimmt durch ihre Winkelcoordinaten φ und ϱ. Die Ableitung der Indices einer Fläche aus diesen beiden Größen erfordert indessen meist eine sehr umständliche Berechnung, und die Vorteile der Benutzung des Zonengesetzes (s. S. 311) fallen hierbei fort, da aus den Werten der Coordinaten die Zonenbeziehungen der Flächen im allgemeinen nicht ohne weiteres ersehen werden können und die Messung (mit Ausnahme gewisser Fälle, s. S. 685 unten) ohne Rücksicht auf die Zonenverhältnisse stattfindet. Da nun die letzteren das eigentlich Bestimmende für die Beziehungen sind, in welchen die Flächen eines Krystalles zueinander stehen, so versuchte Herbert Smith diesen Nachteil der Theodolitmethode dadurch zu beseitigen, daß er die Winkel innerhalb einer Zone und gleichzeitig die Orientierung dieser Zone am Krystalle bestimmte (Zeitschr. f. Kryst. 1899, **32,** 209 f.). Zu dem Zwecke fügte er an einem Theodolitgoniometer mit zwei horizontalen Fernrohren zu dem horizontalen Teilkreise A und dem verticalen B noch einen dritten, zu B

senkrechten Teilkreis C hinzu, welcher die Centrier- und Justiervorrichtung mit dem Krystalle trägt und um die horizontale Axe von B gedreht werden kann. Dadurch können die Axen von A und C unter jeden beliebigen Winkel zueinander gestellt werden, während beide unveränderlich auf der Axe von B senkrecht stehen. Hat man auf C eine zum Ausgangspunkte der Entwicklung gewählte Zone justiert, so kann ihr durch die Drehungen des Instrumentes jede beliebige Orientierung im Raume gegeben werden, und man kann dann infolgedessen für jede beliebige andere Zone, die mit Hilfe von B und C parallel zu A gestellt worden ist, auf dem Kreise A den Winkel

Fig. 691.

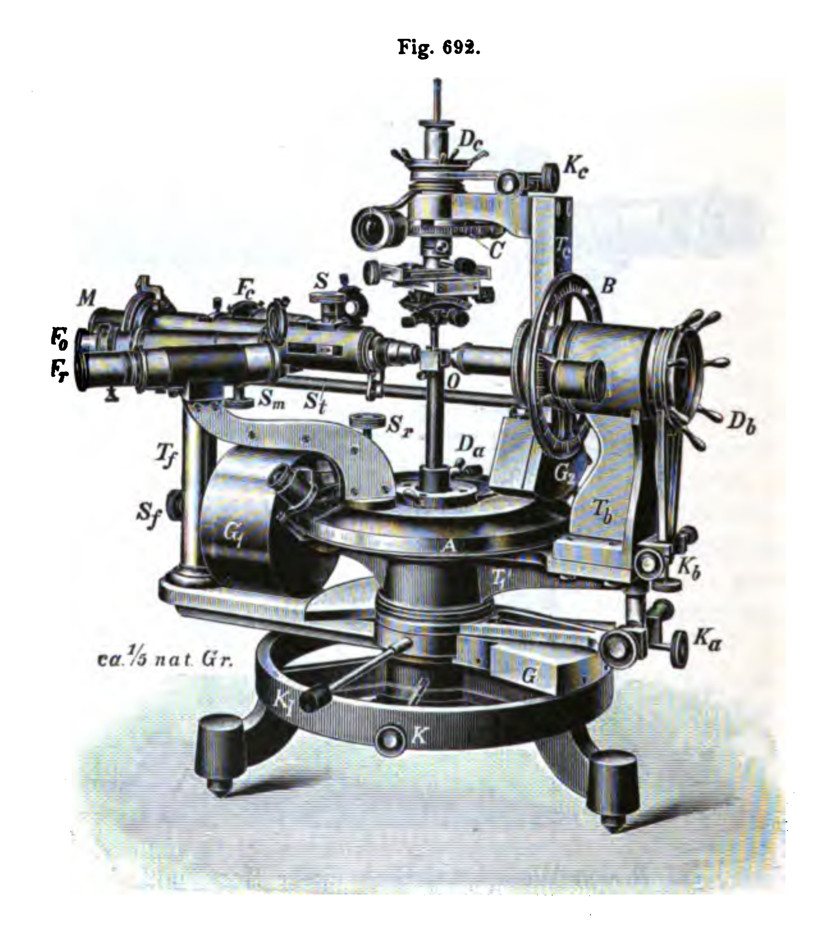


in der Zone, auf B den Winkel zwischen dieser Zone und der Bezugszone, und auf C die Position desjenigen Poles der Bezugszone (auch wenn daselbst keine Fläche vorhanden ist) ablesen, in welchem sie von der andern Zone geschnitten wird. Eine verbesserte Construction des dreikreisigen Goniometers und seine Anwendung beschrieb H. Smith 1904 in Min. Mag. **14,** 1 f.

Das gleiche Princip wandte C. Klein bei dem von ihm »Krystallpolymeter« genannten Apparate an (Sitz. Acad. Berlin 1900, 248; Zeitschr. f. Kryst. **36,** 623), welches aber nicht nur als ein-, zwei- oder dreikreisiges Goniometer benutzt werden kann, sondern auch die Einrichtungen zur

Messung der Brechungsindices und der Axenwinkel und zur optischen Untersuchung im parallelen und convergenten Lichte enthält. Dieses optische Universalinstrument, Fig. 692, hat die Teilkreise A, B, C, welche genau ebenso angeordnet sind, wie bei dem Smith schen Goniometer. Die verticale erste Axe D_a ist unbeweglich, die horizontale zweite D_b kann um jene gedreht werden, und die dritte D_c ist senkrecht zur zweiten und um diese, somit auch um die erste, drehbar. Senkrecht zur ersten Drehungsaxe stehen: der Collimator F_c, das Beobachtungsfernrohr F_o, das Mikroskop

Fig. 692.

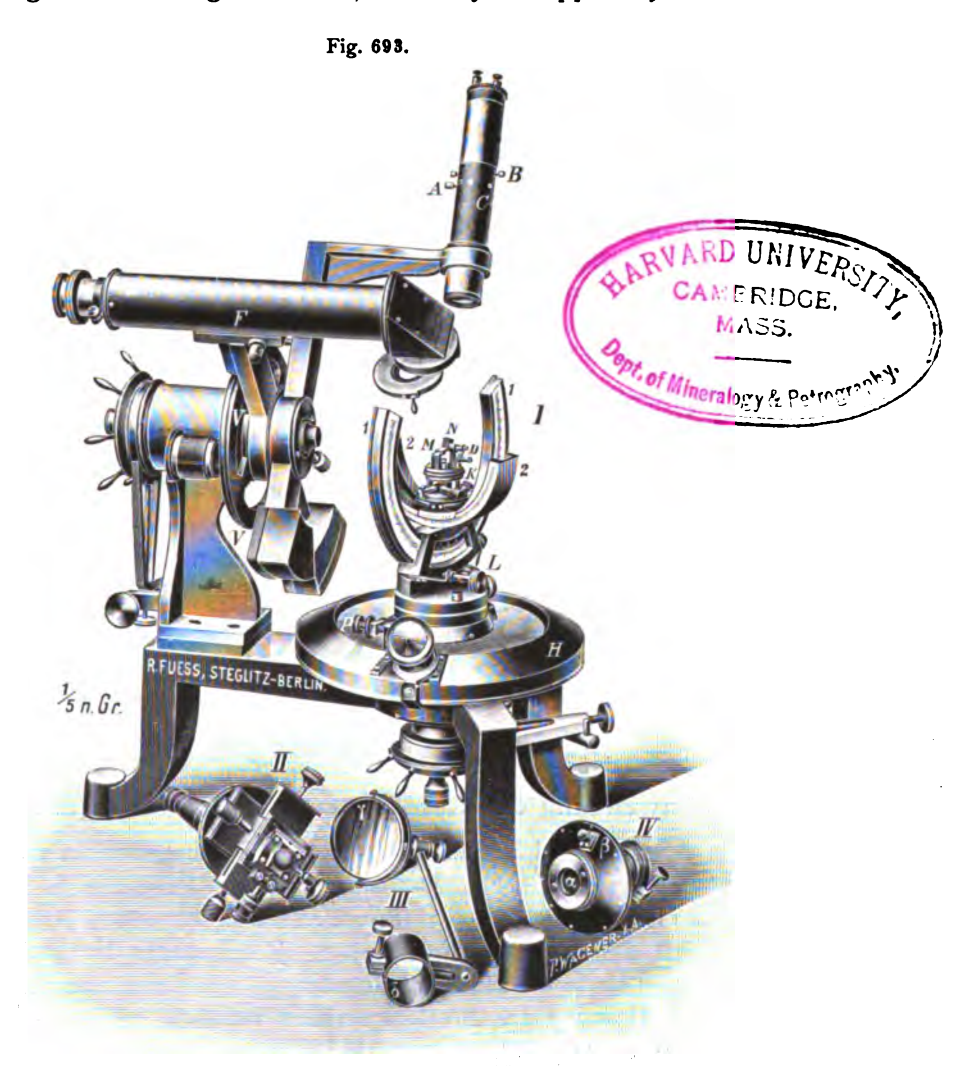


M und ein zweites Fernrohr F_r zum Gebrauche bei spectrometrischen Untersuchungen (die beiden letzteren kann man, wenn sie nicht gebraucht werden, entfernen).

Das den beiden vorbeschriebenen Instrumenten zugrunde liegende Princip dreier Drehungsaxen hatte E. von Fedorow bereits früher für das weiterhin bei den mikroskopischen Untersuchungen zu beschreibende »Universaltischchen« benutzt; i. J. 1900 veröffentlichte derselbe nun die Beschreibung eines »Universalgoniometers mit mehr als zwei Drehaxen« (Zeitschr. f.

Kryst. **32**, **464**) und zeigte, wie mit diesem Instrumente, welches v i e r Teilkreise enthält, die krystallographischen Rechnungsoperationen, d. h. die Auflösung sphärischer Dreiecke, rein instrumentell, ohne jede Rechnung, durchgeführt werden können. Der Apparat ist im wesentlichen ein zweikreisiges »Universalgoniometer«, dessen Justierapparat jedoch so er-

Fig. 693.



weitert ist, daß sehr große Winkelbewegungen ausgeführt und gemessen werden können, bei welchem also zu den beiden ersten Drehungsaxen noch eine dritte und vierte, aufeinander senkrecht, hinzukommen. In das Centrum der letzteren beiden Kreise wird zum Zwecke der instrumentellen Rechnungsoperationen eine Spiegelvorrichtung, der »künstliche Krystall«, gebracht. In Fig. 693 ist dieses Instrument in derjenigen Construction

abgebildet, in welcher es von der Firma R. Fuess geliefert wird und in seiner Anwendung zur mechanischen Auflösung sphärischer Dreiecke ausführlicher beschrieben wurde von K. Stöckl in Zeitschr. f. Kryst. **1904**, **39**, 23f. Es ist das bereits S. 682 f. behandelte Theodolitgoniometer, dessen Centrier- und Justierapparat (s. *II* in der Figur unten) herausgenommen und durch die Vorrichtung *I* ersetzt worden ist, welche den »künstlichen Krystall« innerhalb zweier aufeinander senkrechter Teilkreisbögen enthält. Es muß bemerkt werden, daß die instrumentelle Berechnung sphärischer Dreiecke in gewissen, aber nicht in allen Fällen, auch mit dem dreikreisigen Goniometer von H. Smith (S. 686) ausgeführt werden kann.

Wie man aus dem Vorhergehenden ersieht, ist mit der vielseitigeren Verwendungsfähigkeit der Reflexionsgoniometer auch die Compliciertheit ihrer Construction und damit die Schwierigkeit für den Beobachter gestiegen, sich die zu rascher und genauer Arbeit erforderliche Übung zu verschaffen, abgesehen von der Zunahme der unvermeidlichen instrumentellen Fehler und ihres Einflusses auf die Beobachtungsresultate. Das gewöhnliche einkreisige Goniometer hat allerdings den Nachteil, daß jede Zone des Krystalles für sich justiert werden muß, aber bei der Messung der meisten Krystalle handelt es sich nur um wenige Zonen, und jenem Nachteile steht der Vorteil der weit größeren Einfachheit und Leichtigkeit der Handhabung gegenüber; da außerdem selbst compliciertere Aufgaben, wie die Untersuchung von Vicinalflächen usw., durch die S. 668 Anmerk. und S. 677 angegebenen Methoden auch mittels des einkreisigen Goniometers gelöst werden können, so dürfte dieses auch in Zukunft seine Geltung als das Hauptinstrument des Krystallographen behalten.

Messung der Brechungsindices.

Anwendung des Goniometers als Refractometer.

Einen Apparat, welcher zur Messung der Brechungsindices mittels der Ablenkung (Refraction) der Lichtstrahlen in einem Prisma (s. S. 27) dient, nennt man »Refractometer« oder »Spectrometer«. Es wurde bereits S. 649 erwähnt, daß die den verticalen Kreisen zukommenden Fehlerquellen in noch erhöhtem Maße zur Wirksamkeit gelangen, wenn man jene Instrumente zugleich zur Messung der Brechungsindices benutzt, und es soll daher im folgenden nur die Verwendung horizontaler Kreise ins Auge gefaßt werden.

Um Brechungsindices nach der erwähnten Methode auf einige Einheiten der 4. Decimale genau bestimmen zu können, genügt das Fuesssche Goniometer Nr. 2[1]). Als Signal benutzt man entweder den geradlinigen oder

1) Außerdem kann man, wie weiterhin auseinandergesetzt werden soll, den zum sog. optischen Universalapparate gehörigen horizontalen Teilkreis des Axenwinkelinstrumentes, mit zwei Fernröhren montiert, zur Messung der Brechungsindices benutzen. Die Genauigkeit



besser, wie bei der Krystallmessung, den Webskyschen Spalt, da dieser auch bei abgelenkten Strahlen eine sehr scharfe Einstellung gestattet. Derselbe wird durch eine monochromatische Flamme (s. S. 33f.) erleuchtet, welche am geeignetsten nach dem Vorschlage von Laspeyres hinter einem Glas- oder Glimmerfenster in einem dunkeln Kasten aufgestellt wird; der letztere ist so einzurichten, daß er den von der Flamme entwickelten Dämpfen einen Abzug aus dem Beobachtungsraume gestattet, was besonders bei Anwendung der sehr giftigen Thalliumdämpfe von Wichtigkeit ist. Das Goniometer wird so vor dem Kasten aufgestellt, daß das Signal des Collimators, bzw. die aufgesteckte Beleuchtungslinse, sich unmittelbar vor dem Fenster befindet, und ebenso wird die im Innern befindliche Flamme dem letzteren so viel als möglich genähert.

Das zu untersuchende Prisma wird auf den Krystallträger aufgesetzt, centriert und justiert, und zunächst der brechende Winkel desselben nach der gewöhnlichen goniometrischen Methode gemessen, worauf es ungefähr in diejenige Stellung gebracht wird, welche in Fig. 21 S. 28 dargestellt ist. Alsdann wird die Klemmschraube β, s. Fig. 677, angezogen und damit der hohle Conus e und der Teilkreis f fixiert, dagegen α gelöst, so daß der Nonienkreis d mit dem Beobachtungsfernrohre frei gedreht werden kann. Man richtet nun das letztere auf das erleuchtete Signal des festen Collimators so, daß beide Fernröhre genau 180° miteinander bilden, entsprechend der Richtung BP in Fig. 21, wozu man die Klemmschraube α wieder anzieht und die Einstellung mit der zugehörigen Feinstellschraube vollendet, und liest die Stellung des Nonienkreises ab. Hierbei erhält man, auch wenn das Prisma bereits in seiner richtigen Stellung auf dem Krystallträger sich befindet, doch ein scharfes direct gesehenes Bild des Signales mittels der am Prisma vorbeigehenden Strahlen, weil dieses, wenn es centriert ist, höchstens die Hälfte des Objectives für die erwähnten Strahlen verdeckt. Nach abermaligem Lösen der Klemmschraube α führt man nun das Beobachtungsfernrohr nach derjenigen Seite, nach welcher die Brechung der Strahlen durch das Prisma stattfindet, bis man das abgelenkte Bild des Signales im Gesichtsfelde erblickt. Nunmehr muß man diejenige Stellung

dieses Teilkreises ist bei den älteren Fuessschen Apparaten eine geringere, als die des Goniometers Nr. 2, aber immerhin für viele Fälle noch eine genügende. Ebenso ist auch das S. 657 erwähnte, von Linhof in München construierte, einfachere Reflexionsgoniometer mit horizontalem Kreise für solche Bestimmungen von Brechungsindices, bei denen keine hohe Genauigkeit erfordert wird, anwendbar. Da an diesem Instrumente die eigene Drehung des Prismenträgers, wie sie an dem Fuessschen Goniometer mittels der Scheibe i erfolgt, fehlt, so muß man das Prisma mit dem Kreise drehen, bis das Minimum der Ablenkung erreicht ist, und das Beobachtungsfernrohr darauf einstellen; ist beides mit Hilfe der betreffenden Feinstellschrauben geschehen, so wird nur die zum Beobachtungsfernrohre gehörige Klemmschraube gelöst und dieses mit dem Nonius so weit gedreht, bis es in die Verlängerung des Collimators gelangt, wobei zur Feinstellung auf das Signal wieder die Mikrometerschraube benutzt wird. Das Verfahren ist also nur in der Reihenfolge der Manipulationen von dem oben beschriebenen verschieden.

des Prismas aufsuchen, in welcher dasselbe den durchgehenden Strahlen die kleinste Ablenkung erteilt: sei dieselbe nach links gerichtet, so dreht man mittels der Scheibe *i* Fig. 677 (welche deshalb nicht geklemmt sein darf) das Prisma so, daß das gebrochene Signalbild sich im Gesichtsfelde nach rechts bewegt (die entgegengesetzte Drehung würde eine Zunahme der Ablenkung bewirken); verläßt es dabei noch das Gesichtsfeld, so geht man mit dem Beobachtungsfernrohre nach; bei weiterer Drehung in demselben Sinne wird man nun bald bemerken, daß das Bild sich langsamer bewegt, an einer bestimmten Stelle stehen bleibt und bei weiterer Drehung des Prismas (immer in demselben Sinne) anfängt, sich rückwärts zu bewegen. Die erwähnte Stelle, d. h. diejenige, welche dem Minimum der Ablenkung entspricht, bringt man nun durch Drehen des Beobachtungsfernrohres genau in die Mitte des Gesichtsfeldes und beobachtet, ob bei mehrmaligem Hin- und Herdrehen des Prismas das Signalbild, wenn es seine äußerste Elongation nach rechts erreicht, von dem senkrechten Faden des Beobachtungsfernrohres genau halbiert wird; ist dies noch nicht vollständig der Fall, so wird das Fernrohr durch die Feinstellschraube (F in Fig. 678) noch um die erforderliche Größe bewegt. Ist endlich die vollkommene Coincidenz erreicht, so gibt die Ablesung des Nonius das Minimum der Ablenkung an.

Ist das Prisma einem doppeltbrechenden Krystalle angehörig, so erscheinen natürlich zwei verschieden stark abgelenkte Bilder des Signales, deren jedes für sich durch Drehen des Prismas auf das Minimum der Ablenkung einzustellen und zu messen ist. Die Schwingungsrichtung der beiden Strahlen wird durch einen vor das Beobachtungsfernrohr gehaltenen oder auf dessen Ocular aufgesetzten Nicol leicht erkannt, da hierbei dasjenige Bild verschwindet, dessen Schwingungsebene senkrecht zu der des Nicols steht. Noch bequemer, als durch einen mit der Hand vor das Auge gehaltenen Nicol, kann man die beiden polarisierten Bilder voneinander trennen durch Einsetzen des Nicolschen Prismas in das S. 656 beschriebene, auf den Collimator aufzusteckende Rohr der Beleuchtungslinse, welches mittels Marken die Stellung des Nicolhauptschnittes zu erkennen und durch den viereckigen Ausschnitt auch eine Drehung des Polarisators vorzunehmen gestattet. Diesen Beleuchtungsapparat setzt man überhaupt stets dann auf das Signal auf, wenn man die Brechungsindices eines sehr kleinen, wenig Licht hindurchlassenden Prismas messen will, wobei es also auf möglichste Lichtstärke des Signales ankommt.

Ganz analog ist das Verfahren, wenn man mit dem großen Goniometer Fig. 681 arbeitet: In eines der beiden Fernröhre wird an Stelle des Oculares der Signalspalt eingesetzt und dieses Fernrohr durch Anziehen der an seinem Fuße befestigten Klemmschraube fixiert, während das andere zur Einstellung des directen und des abgelenkten Signalbildes beweglich bleibt. Da sich bei diesem Instrumente jedes der beiden Fernröhre vom Kreise unabhängig bewegt, so kann die Drehung desselben auf dem Limbus mittels

des zugehörigen Mikroskopes abgelesen werden. Die Drehung des Prismas behufs der Einstellung auf die Minimalablenkung geschieht mittels der Scheibe *f*, welche durch *β* geklemmt und mit der zugehörigen Mikrometerschraube fein geführt wird. Die Scheibe *c*, welche mit dem Teilkreise verbunden ist, bleibt während des ganzen Verfahrens durch Anziehen der Klemmschraube *x* fixiert.

Statt der anfänglichen Einstellung des Beobachtungsfernrohres in die Richtung *BP* der Fig. 21 (s. S. 691) kann man auch nach Ablesung der Richtung der abgelenkten Strahlen das Prisma nach der andern Seite drehen und die dann sich ergebende Position der Minimalablenkung einstellen; der Winkel zwischen den beiden abgelenkten Strahlen ist offenbar die doppelte Minimalablenkung, welche daher auf diesem Wege noch genauer bestimmt wird, als durch Messung der einfachen.

Über die zur Bestimmung der optischen Constanten erforderliche Stellung der Flächen eines Prismas ist bereits in der I. Abteilung das Nötige gesagt worden. Allgemein gilt, daß der brechende Winkel desselben nicht so groß sein darf, daß die Incidenz beim Austritte der Strahlen aus der zweiten Fläche den Winkel der totalen Reflexion erreicht oder übertrifft, da in diesem Falle kein Austritt des Lichtes mehr erfolgt[1]). Während aber bei einem einfachbrechenden Krystalle im übrigen die Richtung der beiden Prismenflächen eine ganz beliebige ist, muß bei einem einaxigen Krystalle das Prisma zur Bestimmung von ω und ε eine der beiden S. 74 unter 1) und 2) angegebenen Orientierungen besitzen. Man sieht leicht ein, daß alsdann stets ein Strahl parallel, der andere normal zur brechenden Kante schwingt und, da letztere auf dem horizontalen Goniometer senkrecht steht, das eine der beiden Bilder aus verticalen, das andere aus horizontalen Vibrationen bestehen muß, deren Unterscheidung auf oben angegebene Weise dadurch erfolgt, daß der Hauptschnitt des in den Gang der Lichtstrahlen eingebrachten Nicols einmal senkrecht, einmal horizontal gestellt wird. Zu einem Prisma der ersten Orientierung können zwei natürliche Krystallflächen aus der Zone der Hauptaxe dienen, z. B. zwei einander unter 60° innerem Winkel schneidende Flächen eines hexagonalen Prismas oder die Flächen (100) und ($\bar{1}10$) eines tetragonalen Krystalles (brechender Winkel 45°); zu einem Prisma der zweiten Orientierung zwei gegenüberliegende Flächen einer spitzen hexagonalen oder tetragonalen Pyramide.

Endlich existiert noch eine dritte Möglichkeit, die beiden Hauptbrechungsindices zu messen, nämlich mit Hilfe einer der optischen Axe parallelen und einer dazu geneigten Fläche; in diesem Falle muß aber das Licht auf die erstere senkrecht auffallen. Sind z. B. an einem tetragonalen Krystalle die beiden Flächen (110) und ($\bar{1}\bar{1}1$) groß und eben ausgebildet, und der innere Winkel ihrer Kante zwischen 40° und 60°, so ist ein solches natürliches Prisma geeignet zur Messung der Brechungsindices, denn da es eine zur Hauptaxe normal laufende Kante (parallel einer Zwischenaxe) besitzt, so sind bei senkrechtem Einfallen des Lichtes auf die erste Fläche die Schwingungsrichtungen der beiden Strahlen parallel und senkrecht zur optischen Axe. Ein beispielsweise von den Flächen (100) und ($\bar{1}11$) gebildetes Prisma hat eine zur Hauptaxe geneigte (einer Polkante von {111} parallele) Kante; bei senkrecht auf (100) einfallendem Lichte wird zwar auch eine Zerlegung in parallel und senkrecht zur Axe stattfindende Schwingungen erfolgen, die letzteren sind aber schief gegen die brechende Kante geneigt, was bei der Stellung des Nicols am Goniometer zu berücksichtigen ist. Bei Prismen dieser dritten Art der Orientierung handelt es sich also

1) Oder man muß das Prisma in ein mit einer stark brechenden Flüssigkeit gefülltes, parallelwandiges Glasgefäß bringen (Verfahren von Brögger und Ramsay, Zeitschr. f. Kryst. 1887, **12**, 209).



darum, die Strahlen aus dem festen oder (bei Anwendung des großen Goniometers) festgeklemmten Collimator genau senkrecht auf die Eintrittsfläche des Prismas fallen zu lassen; denn nur in diesem Falle pflanzen sich dieselben im Innern so fort, daß der eine ω, der andere ε zu berechnen gestattet. Das hierzu erforderliche Verfahren, welches ganz allgemein zur Herstellung senkrechter Incidenz der Lichtstrahlen dient, ist folgendes:

Man stellt die betreffende Fläche unter einem beliebigen Winkel, z. B. ungefähr 45°, gegen die feste Collimatoraxe, dreht das Beobachtungsfernrohr, bis das von der Fläche gespiegelte Bild des Signales eingestellt ist, und liest diese Stellung am Nonius ab. Außerdem bestimmt man die Position des Collimators, indem man das Beobachtungsfernrohr auf das Signal direct einstellt und von der abgelesenen Position 180° abzieht oder ebensoviel addiert. Die Differenz dieses Wertes von dem vorher abgelesenen gibt den Winkel zwischen den vom Collimator auf die Fläche fallenden und den von letzterer ins Beobachtungsfernrohr reflectierten Lichtstrahlen; die Hälfte desselben ist der Incidenzwinkel. Fixiert man nun das Beobachtungsfernrohr nebst dem Nonienkreise und dreht das Prisma zusammen mit dem Limbus (so wie man bei einer Krystallmessung verfährt) genau um den so gefundenen Incidenzwinkel im entsprechenden Sinne, so steht alsdann die Fläche exact senkrecht auf den aus dem Collimator austretenden parallelen Strahlen.

Die Berechnung der Refractionsindices aus der Ablenkung des Lichtes in einem Prisma der zuletzt besprochenen Orientierung erfolgt ganz ebenso, wie in dem völlig analogen Falle, welcher bei den zweiaxigen Krystallen S. 103 f. behandelt wurde. In letzterem muß ebenfalls die soeben angegebene Methode, mittels deren man senkrecht auf eine Fläche auffallende Strahlen erhält, angewandt werden, während bei den S. 102 beschriebenen Prismen zweiaxiger Krystalle das gewöhnliche Verfahren der Minimalablenkung zur Anwendung kommt.

Ebenso wie die Beschaffenheit der Krystallflächen den wichtigsten Einfluß ausübt auf die Genauigkeit der goniometrischen Resultate, so ist das gleiche auch der Fall mit der Beschaffenheit derjenigen Flächen, welche bei der Messung der Brechungsindices als Ein- und Austrittsfläche des Lichtes dienen. Benutzt man hierzu natürliche Krystallflächen, so geben dieselben nur dann ein einfaches und scharfes abgelenktes Bild des Signales, wenn sie vollkommen eben sind; jede Krümmung, Streifung oder sonstige Unvollkommenheit derselben documentiert sich durch eine Verzerrung des gebrochenen Bildes, welches je nach der Größe dieser Dilatation mit geringerer Schärfe eingestellt werden kann. Sind die Unvollkommenheiten der Flächen so groß, daß letztere kein einstellbares Bild mehr liefern, oder sind am Krystalle überhaupt keine Flächen in der geeigneten Stellung und von genügender Größe ausgebildet, so hat man die Seiten des zur Messung zu benutzenden Prismas künstlich durch Schleifen herzustellen.

Namentlich bei härteren Substanzen gelingt es leicht, ebene Flächen zu schleifen und denselben einen so hohen Grad von Politur (s. den letzten Abschnitt) zu geben, daß die durch solche Prismen gebrochenen Signalbilder die schärfste Einstellung gestatten. Nur ein Fehler kann bei solchen Schliffflächen vorkommen, besonders wenn sie eine erhebliche Größe besitzen, d. i. eine durch die Methode des Schleifens bewirkte schwach sphärische Krümmung. Ist eine solche recht regelmäßig, so ist sie bei der Messung ohne weiteres nicht zu bemerken, weil ein von zwei schwach kugelförmig gekrümmten Flächen begrenztes Prisma wie eine in den Gang der Lichtstrahlen eingefügte schwache Linse wirkt und, da diese gegen die Axe des Beobachtungsfernrohres geneigt ist, den Ort des in letzterem sichtbaren Bildes verschiebt, ohne an der Schärfe desselben etwas zu ändern. Es ergibt sich also dann eine falsche Einstellung, was man dadurch zu erkennen vermag, daß man mehr als die Hälfte des Prismas abblendet und einmal den nahe der Kante gelegenen Teil der Flächen, das andere Mal den möglichst von der Kante entfernten Teil frei läßt; ist die Fläche sphärisch gekrümmt, so ist der brechende Winkel im ersteren Falle größer, als im zweiten, und man findet daher verschiedene Werte der Ablenkung. Dieser Fehler (Näheres darüber s. W. Voigt, Zeitschr. f. Kryst. 1881, 5, 113) kommt jedoch nur bei großen Prismen und bei sehr genauen Messungen in Betracht, während kleinere Flächen leicht genügend eben geschliffen werden können.

Die Schliffflächen weicherer Substanzen nehmen oft nur sehr unvollkommene Politur an und geben dann nur ganz verwaschene abgelenkte Signalbilder. In solchen Fällen bedeckt man dieselben mit gleich großen Platten von dünnem Spiegel- oder sogenanntem Birmingham-glas (wie es zum Bedecken mikroskopischer Präparate verwendet wird); zur Befestigung derselben bringt man einen Tropfen Canadabalsam auf die Fläche des Prismas und drückt die Glasplatte so fest auf, daß der Balsam eine sehr dünne, gleichmäßig ausgebreitete Schicht zwischen beiden bildet. Ist diese Schicht nicht überall gleich dick, so schließen offenbar die beiden Glasplatten, welche nun als Ein- und Austrittsfläche des Lichtes dienen, nicht genau denselben Winkel ein, wie die beiden Flächen des Prismas; da die letzteren matt sind, also keine scharfen Reflexe liefern, so kann eine exacte Controlle des so entstehenden Fehlers nicht stattfinden. Trotzdem sollte man immer, wenn man gezwungen ist, zu dieser Methode seine Zuflucht zu nehmen, vorher den Winkel der ursprünglichen Flächen, so gut es eben möglich ist, messen, um wenigstens grobe Fehler beim Auflegen der Glasplatten zu vermeiden. Außerdem darf man die letzteren nicht über die Prismenflächen überstehen lassen, da es sonst beim Aufsetzen des Prismas auf den Goniometertisch leicht geschieht, daß die Platten verschoben und dabei der Winkel derselben geändert wird.

Es versteht sich von selbst, daß man zur Bestimmung der Brechungsindices möglichst klare und durchsichtige Krystalle auswählt. Eingewachsene fremde Teilchen, Hohlräume u. a. Unvollkommenheiten der Raumausfüllung im Innern des Prismas entziehen nicht nur dem gebrochenen Signalbilde einen Teil des Lichtes, so daß es weniger hell erscheint, sondern bringen auch Störungen desselben durch Zerstreuung, Beugung und Interferenz der Lichtstrahlen hervor. Es ist daher vorteilhaft, etwaige unreine Stellen des Prismas durch Bedecken mit Stanniol und dergleichen ganz abzublenden, so daß das Licht nur durch den am meisten homogenen Teil des Prismas hindurchgelangen kann. Liegt dieser von der brechenden Kante entfernt, so würde bei genauer Centrierung der letzteren das hindurchgehende Licht ganz am Rande der Objectivlinse, vielleicht teilweise außerhalb derselben auffallen, und deshalb ein wenig helles und unvollkommenes Bild im Fernrohre entstehen. Um dies zu vermeiden, hat man nur nötig, das Prisma parallel sich selbst zu verschieben, bis die betreffende Partie desselben sich genau vor der Mitte der Objectivlinse des Fernrohres, d. h. in der Drehungsaxe des Kreises befindet[1]). Alsdann ist natürlich das Prisma nicht mehr centriert; aber man sieht leicht ein, daß der Gang der Lichtstrahlen vollständig unverändert bleibt, an welchem Orte sich auch Ein- und Austrittsfläche des Prismas befinden, sobald nur die den Collimator verlassenden Strahlen genau parallel sind und das Beobachtungsfernrohr auf Unendlich eingestellt ist. Um auch die Messung des Prismenwinkels bei unveränderter Centrierung und Justierung vornehmen zu können, ist es zu empfehlen, den betreffenden Teil des Prismas so zu centrieren, daß die Drehungsaxe so genau als möglich gleich weit von den beiden Prismenflächen absteht, weil dann auch bei kleinen Abweichungen der Strahlen des Collimators vom Parallelismus der Fehler der Excentricität in Wegfall kommt (s. S. 664 f.).

Die Messung des Prismenwinkels kann man, außer nach der gewöhnlichen goniometrischen Methode, auch mit beweglichem Beobachtungsfernrohre und feststehendem Prisma ausführen. Man stellt nämlich das letztere so, daß es seine brechende Kante dem Collimator zukehrt, dreht das Beobachtungsfernrohr, bis das von der einen Fläche reflectierte Spiegelbild erscheint, und liest ab; dann dreht man das Beobachtungsfernrohr auf die andere Seite, stellt es auf das Spiegelbild der zweiten Prismenfläche ein und liest wieder ab. Die Differenz einer jeden Ablesung von der Winkelposition des Collimators, welche man durch directe Einstellung auf letzteren erhält (s. S. 691), wird halbiert und dadurch der Winkel erhalten, welchen einmal die Normale der ersten, das andere Mal die der zweiten Fläche mit der

1) Ist das Prisma so groß, daß bei dieser Stellung desselben gar keine directen Strahlen mehr aus dem Collimator auf das Objectiv des Beobachtungsfernrohres fallen können, so muß die S. 691 erwähnte Einstellung natürlich vor dem Aufsetzen oder nach dem Abnehmen des Prismas erfolgen.



Richtung des Collimators bildet; die Summe dieser beiden Winkel ist gleich der Neigung zwischen den Normalen der beiden Prismenflächen, d. h. das Supplement des brechenden Winkels. Eine einfache Überlegung lehrt, daß hierbei sogar die Einstellung auf den Collimator überflüssig ist; die Hälfte desjenigen Bogens zwischen den beiden Positionen der gespiegelten Signalbilder, innerhalb dessen der Collimator sich befindet, ist der Winkel zwischen den Normalen der Prismenflächen.

Will man die Brechungsindices für andere Lichtarten messen, als sie die monochromatischen Flammen (Li-, Na-, Tl-Licht) aussenden, so kann dies durch Anwendung von Sonnenlicht und Einstellung der Fraunhoferschen Linien geschehen. Hierzu muß aber das zur Untersuchung dienende Prisma sehr vollkommen sein. Ist dies nicht der Fall oder steht Sonnenlicht nicht zur Verfügung, so muß man weißes Licht in einem Spectralapparate dispergieren und von dem erhaltenen Spectrum einen genügend schmalen Streifen zur Beleuchtung des Collimators des Refractometers verwenden. Ein solcher Apparat zur Beleuchtung mit beliebigem homogenen Lichte, welcher sowohl mit dem Refractometer als mit andern Instrumenten zur optischen Untersuchung der Krystalle verbunden werden kann, wird nach Wülfing von der Firma R. Fuess geliefert und ist ausführlich in dem bereits citierten Werke von Leiss S. 25f. u. in der Zeitschr. f. Instrumentenk. 1898, **18**, 209 beschrieben. Derselbe gestattet sowohl die Anwendung des Sonnenlichtes, wobei die durch Fraunhofersche Linien bestimmten Lichtarten eingestellt werden, als auch die von Bogenlicht, Gasglühlicht usw.; in letzterem Falle muß der verschiebbare Spalt, welcher nur den zu benutzenden Streifen des Spectrums hindurchläßt, auf Wellenlängen geeicht werden, so daß die an einer Trommelschraube gemessene Verschiebung des Spaltes die Wellenlänge des durch den Spalt hindurchgehenden Lichtes zu bestimmen ermöglicht.

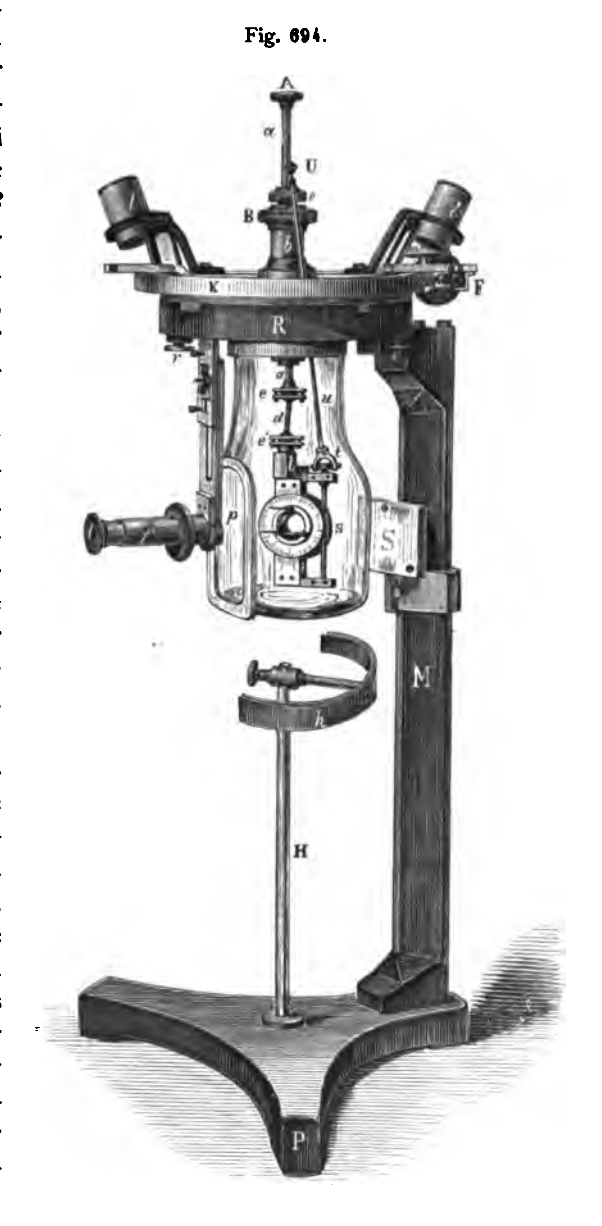
Bestimmung der Brechungsindices durch Totalreflexion.

a) **F. Kohlrauschs Totalreflectometer.** Nachdem das Princip dieses Instrumentes bereits in der ersten Abt. S. 28—30 auseinandergesetzt worden ist, soll nun im folgenden die nähere Beschreibung des Apparates in der Form, wie er von dem Universitätsmechaniker W. Apel in Göttingen geliefert wird, und die Anweisung zum Gebrauche desselben gegeben werden.

Auf einer eisernen lackierten Fußplatte *P*, Fig. 694 ($\frac{1}{4}$ nat. Größe), erhebt sich eine aus gleichem Materiale bestehende Säule *M*; beide Teile sind so abgeschrägt, daß man die Beleuchtungslampe von beiden Seiten dem Apparate beliebig nähern kann. Mit *M* ist der eiserne Ring *R* fest verbunden, und an diesen wird der Teilkreis *K* mittels der Schrauben *r* aufgeschraubt, nachdem derselbe so auf *R* aufgesetzt worden ist, daß zwei parallelepipedische Vorsprünge, von denen einer in der Figur links sichtbar ist, in gleichgestaltete Einschnitte des Ringes *R* eingreifen. Auf dem Limbus befindet sich die mittels des Knopfes *B* drehbare Alhidade mit den beiden, 180° voneinander abstehenden Nonien (Ablesung auf 1′) und den Lupen *l*; die Alhidade kann geklemmt und durch die Mikrometerschraube *F* fein

geführt werden[1]). In der äußeren Axe *b*, welche sich in einer konischen Durchbohrung des Kreises dreht, kann die innere Axe *a* gedreht und mittels des Knopfes *A* auf- und niedergeschoben, endlich in jeder beliebigen Stellung durch Anziehen der Schraubenmutter *c*, welche hierbei den in eine geschlitzte Hülse auslaufenden Oberteil von *B* zusammenpreßt, fixiert werden. Die Axe *a* trägt unten zwei Kugelgelenke *e* und *e'*, die man ziemlich schwer drehbar machen kann, indem man die Schräubchen, durch welche die eine jede der drehbaren Kugeln umfassenden, kleinen Platten verbunden sind, fester anzieht. Am unteren Kugelgelenke *e'* ist entweder eine kleine federnde Klammer zum Fassen der Objectplatte oder der von Apel als »Spitzenplatte« bezeichnete Krystallträger, welcher aus einem einfachen Metallstücke mit zwei Spitzen besteht, angeschraubt; auf letztere wird eine Korkplatte aufgespießt, welche die zu untersuchende Platte mit Gummi arabicum festgeklebt trägt. Um behufs der genaueren Einstellung der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen auch eine Drehung der Objectplatte in ihrer eigenen Ebene zu ermöglichen, kann man nach dem

Fig. 694.



1) W. Apel (s. dessen Preiscourant am Schlusse dieses Buches) liefert auch ein etwas einfacheres, aber für die meisten Fälle vollkommen ausreichendes Instrument mit Ablesung auf 3', ohne Lupen und ohne Feinstellschraube; die Drehung geschieht bei diesem durch zwei senkrechte Messingstifte, welche an Stelle der Lupenträger auf die Alhidade aufgesetzt sind.

Vorschlage von W. Kohlrausch an das untere Kugelgelenk *e'* auch den doppeltknieförmigen Teil *i* (s. Fig.) anschrauben, dessen unterstes und längstes Stück sich zu einem Ringe erweitert, in welchem ein kleiner Teilkreis (durch die auf *i* angebrachte Nonienteilung auf 1° abzulesen) drehbar ist; auf diesem wird die Platte befestigt und mittels eines von außen durch ein Loch in der Kreisplatte *K* eingeführten Drahtes mit dem kleinen Kreise in der Flüssigkeit gedreht. Diese Vorrichtung wurde schließlich von C. Klein in diejenige Form gebracht, wie sie in der Figur dargestellt ist: In die cylindrische Durchbohrung des Kreises kann die kleine Hülse *g* eingeschoben werden, auf deren drei vorstehenden Spitzen der Kork mit der zu untersuchenden Krystallplatte befestigt wird (der Deutlichkeit wegen ist dieser in der Figur weggelassen); die Drehung des kleinen Teilkreises geschieht von außen durch den Schlüssel *u*, welchen man mit dem Knopfe *U* faßt und in die viereckige Öffnung des kleinen Bügels *t* einführt; durch Drehen von *u* wird die Schraube ohne Ende *s* und dadurch der Teilkreis, in dessen gezähnten Rand diese eingreift, gedreht. Die zuletzt beschriebene Vorrichtung ist besonders geeignet, das S. 104 auseinandergesetzte Verhalten einer der Ebene der optischen Axen parallelen zweiaxigen Krystallplatte zu demonstrieren, während man meist mit der einfachen Pincette oder der Spitzenplatte auskommt. Der einfachste und für gewöhnliche Messungen geeignetste Objectträger ist ein ebenfalls bereits von F. Kohlrausch angewendeter; derselbe besteht aus einer direct an *a* angesetzten, geschwärzten Metallplatte von lang parallelepipedischer Gestalt, welche in ihrem unteren Teile einen rectangulären fensterartigen Ausschnitt mit abgeschrägten Seiten besitzt, und deren Rückseite ein für allemal genau centriert und justiert ist; die in die Ebene der letzteren fallende Drehungsaxe wird durch einen, von der Vorderseite aus befestigten, das Fenster senkrecht halbierenden feinen Platindraht markiert; an der Rückseite wird durch eine Feder die Objectplatte, nötigenfalls mit Unterlegung eines Korkes, so angedrückt, daß die spiegelnde Fläche das Innere des Fensters bildet. Diese Einrichtung gestattet schon eine ziemlich gute Einstellung der Platte in eine bestimmte Orientierung und genügt fast für alle Messungen an Stelle des in der Figur abgebildeten Objectträgers, welcher den Nachteil hat, daß er bei einigermaßen schiefer Stellung der Kugelgelenke leicht während der Drehung an die Wand des Gefäßes anstößt, wodurch natürlich die bis dahin vorgenommene Arbeit verloren ist.

Das Eintauchen des betreffenden Objectträgers mit der zu untersuchenden Platte in die stärker brechende Flüssigkeit geschieht nun in der Weise, daß letztere in das vorn mit der planparallelen Glasplatte versehene Glasgefäß bis zu dem engen Teile eingefüllt und dann das Gefäß mit dem Instrumente verbunden wird. Zu dem Zwecke trägt die Metallfassung desselben einen Ring, in dem sich drei durch Schlitze verlängerte Öffnungen befinden, in welche die flachen Köpfe dreier an der Unterseite von *K* befindlicher Schrauben passen; durch eine kleine Drehung bringt man diese

in die seitlichen Schlitze, über deren Rand sie übergreifen und so das Glasgefäß an K festhalten, und zwar in derjenigen Stellung, in welcher die Glasplatte p senkrecht zu dem auf die Drehungsaxe des Kreises gerichteten kleinen Fernrohre f steht. Dieses letztere ist an der Unterseite des Teilkreises mittels eines Metallarmes T befestigt, welcher eine Auf- und Niederbewegung, sowie eine Correction der Richtung desselben gestattet. Es besitzt eine $1\frac{1}{2}$fache Vergrößerung und ein Fadenkreuz, daneben aber auch eine Mikrometerteilung zur genaueren Bestimmung des Abstandes der beiden Grenzen der totalen Reflexion, welche doppeltbrechende Krystalle zeigen. Um die Objectplatte, behufs ihrer richtigen Orientierung, durch das Fernrohr sichtbar zu machen, kann vor dessen Objectiv, ähnlich wie beim Goniometer (S. 656), eine Vorschlaglupe aufgesetzt werden.

Da der Brechungsindex der in dem Glasgefäße befindlichen Flüssigkeit sich mit der Temperatur derselben ändert, so muß diese während der Messung bestimmt werden. Zu diesem Zwecke kann man an einem an der Unterseite des Teilkreises angebrachten Häkchen ein kleines Thermometer anhängen, dessen Stand unmittelbar vor und nach der Messung notiert wird, so daß man in dem Mittel dieser beiden Ablesungen mit genügender Genauigkeit die während der Messung in der Flüssigkeit herrschende Temperatur erhält.

Ehe man zur Messung des Winkels der totalen Reflexion des Lichtes an einer natürlichen oder künstlichen ebenen Fläche eines Krystalles schreitet, hat man diese zuerst zu justieren und auch angenähert zu centrieren, damit auch bei schräger Stellung derselben noch hinreichend Licht in der Axe des Fernrohres einfällt. Bei dem festen Objectträger genügt es, die spiegelnde Fläche direct hinter das in denselben eingeschnittene Fenster zu legen. Bei Anwendung der Kugelgelenke bringt man die Fläche zunächst ungefähr in die erforderliche Lage und Richtung durch eine verticale Schneide, deren Stiel an Stelle von H in die Fußplatte eingesetzt wird, und welche alsdann die Drehungsaxe des Kreises bezeichnet. Die genaue Parallelstellung der reflectierenden Fläche mit der Axe des Kreises wird erreicht mittels des kleinen, aus schwarzem Glase gefertigten Spiegels S, welcher an der Säule M befestigt und der genannten Axe parallel gerichtet ist; die Objectplatte wird nämlich durch die Kugelgelenke so lange justiert, bis das Spiegelbild des Auges in derselben und im Spiegel S in gleicher Höhe erscheint, oder, was noch genauer ist, bis die Spiegelbilder einer entfernten Flamme, welche sich mit beiden reflectierenden Flächen in einer dem Kreise parallelen Ebene befindet, in beiden gesehen gleich hoch erscheinen. Die erwähnte Schneide gestattet, bei der Justierung die angenäherte Centrierung beizubehalten; nach Ausführung der ersteren wird sie wieder entfernt. Will man bei Anwendung des in Fig. 694 dargestellten Objectträgers die Platte in ihrer Ebene drehen und in verschiedenen Stellungen ihre Totalreflexion bestimmen, so muß sie so aufgesetzt werden, daß ihre spiegelnde Vorderfläche (die nicht in Betracht kommende Hinterfläche wird am besten matt geschliffen, damit man in keinem Falle störende Reflexe von derselben erhält) senkrecht zur Drehungsaxe von g liegt; dies erkennt man daraus, daß das Bild eines entfernten Gegenstandes bei ruhendem Auge seinen Ort nicht ändert, wenn man die Platte in ihrer Ebene dreht. Diese Orientierung ist natürlich vor der Centrierung und Justierung auszuführen.

Nachdem der Objectplatte die erforderliche Orientierung gegeben und das Thermometer neben derselben aufgehängt worden ist, wird das mit der stark brechenden Flüssigkeit gefüllte Glasgefäß in der oben

angegebenen Weise an den Kreis angesetzt. Zur Füllung benutzt man am besten α-**Bromnaphtalin**, dessen Brechungsindices nach **Dufet** bei 23,5° C.

für die Linie *B*	1,64923
- - - *C*	1,65219
- - - *D* (*Na*-Licht)	1,66102
- - - *F*	1,68480

betragen und für 1° C. Temperaturzunahme um 0,00046 sich verringern. Befindet sich das gefüllte Glasgefäß an seinem Orte, so steckt man in die Öffnung der Fußplatte den Metallstab *H*, welcher oben das verschiebbare gekrümmte Doppelblech *h* trägt; in dieses wird ein schwarzer Cartonschirm von der Form eines das Glasgefäß zur Hälfte umhüllenden Halbcylinders eingeklemmt, in dessen Mitte in geeigneter Höhe ein Fenster mit ölgetränktem Papiere oder mattem Glase angebracht ist, um das durchgehende Licht in diffuses zu verwandeln. Der Schirm wird nun so gedreht, daß er den Hintergrund des Glasgefäßes, auf den das Fernrohr gerichtet ist, verdunkelt und das Licht einer seitlich aufgestellten monochromatischen Flamme (gewöhnlich wird der größeren Helligkeit wegen Natriumlicht angewendet) in der erforderlichen Richtung durch das Fenster auf die Platte fallen läßt. Man entfernt nun das Fernrohr, bringt das auf große Entfernung accommodierte Auge[1]) nahe an die Glaswand *p* und dreht den Objectträger, bis die Grenze der totalen Reflexion sichtbar wird. Alsdann setzt man das vorher genau auf Unendlich eingestellte Fernrohr wieder ein, bringt, wenn nötig mit Hilfe der Feinstellschraube *F*, die erwähnte Grenze in das Fadenkreuz oder an den mittelsten Strich des Mikrometers im Fernrohre und liest die Stellung der Nonien ab. Hierauf dreht man *H* mit dem Schirme auf die andere Seite des Glasgefäßes und stellt die Flamme so vor denselben, daß beide zu ihrer vorigen Stellung in bezug auf die durch die Axen des Fernrohres und des Kreises bestimmte Ebene symmetrisch stehen, dreht die Platte mittels des Knopfes *B* (gleichzeitig mit den Nonien) ebenfalls nach der entgegengesetzten Seite, stellt die Grenze der totalen Reflexion ein und liest abermals ab. Die Differenz der beiden Ablesungen ist der doppelte Grenzwinkel der totalen Reflexion, aus welchem sich nach S. 30 der Brechungsindex ergibt.

Da die Grenzen der totalen Reflexion bei kleinen oder nicht sehr vollkommen spiegelnden Platten nur schwach sichtbar sind, ist es in allen Fällen zu empfehlen, in einem ganz verdunkelten Zimmer zu arbeiten und zur Ablesung einen **Flürscheim**schen Patentbrenner (s. S. 647) zu benutzen. Auch schwärzt man vorteilhaft die nicht benutzten Flächen der Platte, den Kork, auf welchen sie aufgesetzt wird, usw. mit Tusche, damit

1) Man darf also nicht etwa die Krystallplatte fixieren! Solche, denen die Accommodation des Auges auf Unendlich nicht gelingt, was namentlich bei Kurzsichtigen vorkommt, müssen eine Zerstreuungslinse vor das Auge halten.



dieselben kein Licht in das Fernrohr reflectieren. Die günstigste Stellung des Schirmes und der monochromatischen Flamme, d. h. diejenige, bei welcher die Grenzen am schärfsten hervortreten, muß durch Probieren ermittelt werden. Um die Temperatur der Flüssigkeit nicht unnütz zu steigern, entfernt oder löscht man die Flamme, sobald die Einstellung erfolgt ist; man kann für diesen Zweck einen Bunsenschen Brenner mit Selbstanzünder (ebenfalls Flürscheimsches Patent) benutzen, wie solche mit Vorrichtung zur Einführung des färbenden Metallsalzes (nach Feussner) von Böhm und Wiedemann in München geliefert werden, oder einfacher einen gewöhnlichen Bunsenbrenner, in dessen möglichst weites Rohr eine mit Salzlösung getränkte Rolle von Fließpapier eingesetzt ist.

Was nun die Orientierung der Platten in bezug auf die im Grenzfalle der totalen Reflexion horizontal in denselben sich fortpflanzenden Strahlen betrifft, so ist dieselbe natürlich ganz gleichgültig für eine Krystallplatte des kubischen Systemes, welche nur eine Grenze liefert, — ferner für eine zur optischen Axe senkrechte Fläche eines einaxigen Krystalles, welche stets zwei Grenzen liefert, deren eine dem Brechungsindex ω, die andere ε entspricht. In allen übrigen Fällen erfordert die Bestimmung der Hauptbrechungsindices einer ein- oder zweiaxigen Krystallplatte eine bestimmte Orientierung derselben in bezug auf die Fortpflanzungsrichtung der Strahlen (s. S. 75 und 103 f.). Diese Orientierung kann entweder erfolgen durch eine an der Platte vorhandene Kante, welche so gerichtet wird, daß sie mit dem horizontal in der Grenzschicht sich fortpflanzenden Strahle den erforderlichen Winkel einschließt. Ist dieser 0° oder 90°, d. h. sollen sich die Strahlen parallel oder senkrecht zu einer die Platte begrenzenden Kante fortpflanzen, so gestattet der feste Objectträger eine sehr rasche und genügende Orientierung der Krystallplatte: dieselbe wird nämlich so an dem Träger befestigt, daß die fragliche Kante einen der horizontalen bzw. verticalen Ränder des rectangulären Ausschnittes fast berührt und demselben parallel läuft. Für die meisten Messungen genügt es sogar, das Object an der einfachen Spitzenplatte oder in der Klammer zu befestigen und ihm nach dem Augenmaße die erforderliche Richtung zu geben. Benutzt man den complicierten, in Fig. 694 abgebildeten Objectträger, so kann man durch Drehen der Platte in ihrer Ebene die Stellung aufsuchen, in welcher das Maximum oder Minimum des Abstandes der beiden Grenzen der totalen Reflexion beobachtet wird[1]; da nach S. 104 dieser Abstand die Differenz der beiden gleichgerichteten Radien der Strahlenfläche darstellt, so muß deren größter oder kleinster Abstand immer einer Hauptschwingungsrichtung oder deren Normalen entsprechen, und eine solche Richtung ist es stets, welche bei der Einstellung der Platte in Betracht kommt[2].

---

1) Wobei die Mikrometerscala im Fernrohre gute Dienste leistet.

2) Bei einer einaxigen Krystallplatte von beliebiger Orientierung muß die zur optischen Axe senkrechte Richtung offenbar stets dem Maximum des Abstandes der beiden Grenzen entsprechen. Dadurch kann, auch wenn man die krystallographische Orientierung der Platte

Schließlich kann man eine Krystallplatte auch nach dem Vorschlage von C. Klein durch ihre, im durchfallenden parallelen polarisierten Lichte beobachteten Auslöschungsrichtungen orientieren. Zu diesem Zwecke kann der Teilkreis K von dem Ringe R, nach Lösung der Schrauben r, abgehoben und um 90° gedreht werden, welche Stellung dadurch bestimmt ist, daß die beiden an der Unterseite der Platte vorspringenden parallelepipedischen Stücke in zwei andere Einschnitte von R (deren einer rechts in Fig. 694 sichtbar ist) eingreifen. Ist K in dieser neuen Stellung mittels der Schrauben r wieder befestigt, so ist das Fernrohr f nunmehr so gerichtet, daß der Beobachter die Säule M zur Seite hat. Statt des gewöhnlich benutzten Glasgefäßes wird jetzt ein anderes, welches durch zwei gegenüberliegende planparallele Glasplatten geschlossen ist, angesetzt, und außerdem mit dem Kreise ein zweites, f gegenüberstehendes Fernrohr verbunden; beide Fernröhre werden mit drehbaren Nicols versehen und diese zueinander gekreuzt. Alsdann läßt man Licht durch das eine Fernrohr, von da durch die Hülse g und die darauf befestigte Krystallplatte, welche natürlich auch auf der Hinterseite eine spiegelnde Fläche haben muß und dort nicht mit Kork bedeckt sein darf, endlich durch das vordere Fenster fallen; durch Drehen der Platte in ihrer Ebene wird dann ihre Dunkelstellung zwischen den gekreuzten Nicols und dadurch ihre Orientierung bestimmt.

Das zuletzt beschriebene Verfahren macht natürlich das Totalreflectometer zu einem sehr complicierten und teuern Instrumente, daher es entschieden vorzuziehen ist, die Platte, falls sie keine Kante besitzt, durch welche die Orientierung ermöglicht wird, vorher im gewöhnlichen Polarisationsinstrumente zwischen gekreuzten Nicols optisch zu orientieren und dann in der erforderlichen Richtung auf einer Seite eine Fläche anzuschleifen (oft ist die Herstellung einer orientierenden Randfläche auch durch Spaltbarkeit möglich), oder jener Richtung parallel eine Linie mit dem Diamanten einzuritzen. Welcher dieser Wege für den einzelnen Fall auch als der geeignetste befunden werden mag, immer wird es möglich sein, auch bei Anwendung der einfachen, weiter oben beschriebenen Objectträger die Platte mit einer für die Messungen ausreichenden Genauigkeit zu orientieren.

In welcher Weise eine Krystallplatte von bestimmter krystallographischer Orientierung auf dem Objectträger des Totalreflectometers befestigt werden muß, um die Hauptbrechungsindices zu liefern, ergibt sich in jedem einzelnen Falle aus ihrer krystallographischen Orientierung und aus den allgemeinen Bemerkungen S. 75 und 103f. Ebenso ergeben sich für jeden Fall aus der Orientierung der Platte die beiden Schwingungsrichtungen des in derselben, bei horizontaler Fortpflanzung in der Grenzschicht, doppelt gebrochenen Lichtes. Um einen der Strahlen für sich zu beobachten, hat

nicht kennt, jene Richtung gefunden und somit ω und ε bestimmt werden; dreht man dann die Platte in ihrer Ebene um 90°, so bildet offenbar nun die Fortpflanzungsrichtung der Grenzstrahlen denselben Winkel mit der optischen Axe, wie die Ebene der Platte; von deren Neigung zur Axe hängt aber die Geschwindigkeit des außerordentlichen Strahles ab; es läßt sich daher aus dem für diesen gefundenen Werte ε' die Neigung α der Platte zur Axe berechnen, und zwar nach F. Kohlrausch mittels der Formel:

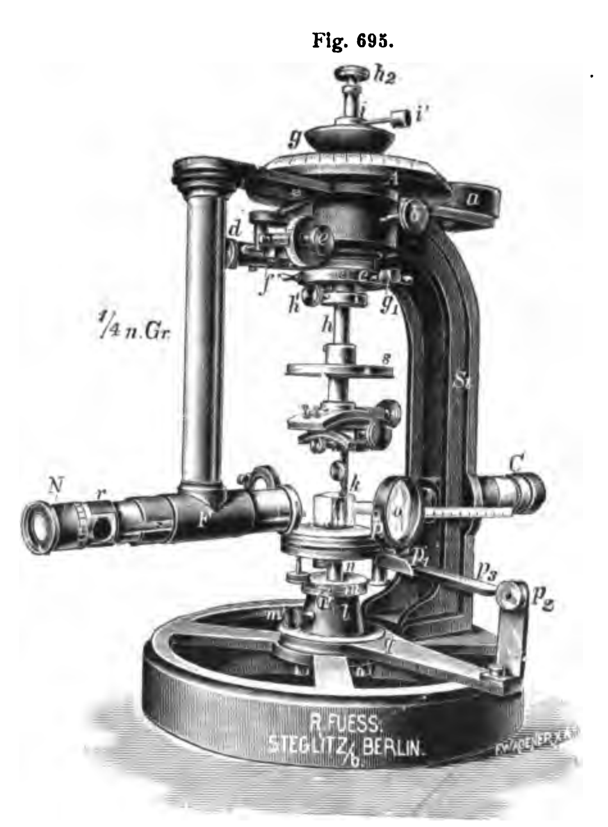
$$\sin^2 \alpha = \frac{\varepsilon'^2 - \omega^2}{\varepsilon^2 - \omega^2}.$$



man einen Nicol so vor das Fernrohr zu halten[1]), daß sein Hauptschnitt parallel der betreffenden Schwingungsrichtung ist, wie sie für das beobachtende Auge erscheint (also ihre Projection auf die Ebene senkrecht zur Sehrichtung); alsdann wird die zweite Grenze, welche dem dazu senkrecht schwingenden Strahle entspricht, vollkommen zum Verschwinden gebracht. Diese erscheint natürlich am schärfsten, und die erste verschwindet, wenn man den Nicol um 90° dreht.

Einen sehr einfachen kleinen Apparat, welcher mit einem horizontalen Reflexionsgoniometer verbunden werden kann und nach der Kohlrausch-schen Methode die Messung der Brechungsindices gestattet, beschrieben Moses und Weinschenk in Zeitschr. f. Kryst. 1896, **26**, 150. Andererseits hat Ch. Soret bereits i. J. 1883 (ebenda **7**, 529) ein allerdings weit complicierteres Instrument construiert, welches die Bestimmung der Brechungsindices durch Totalreflexion für alle Teile des Spectrums gestattet, während das Instrument von Kohlrausch nur für gewisse monochromatische Lichtarten, am bequemsten für *Na*-Licht, verwendet werden kann.

Fig. 695.



Ebenfalls für Licht von beliebiger Wellenlänge verwendbar ist endlich die Neuconstruction des Kohlrauschschen Totalreflectometers von Leiss (Zeitschr. f. Kryst. 1898, **30**, 363 f.), welche außerdem auch als Reflexionsgoniometer (nach der Methode von Miers S. 675 f.) und als Axenwinkelapparat benutzt werden kann. Dieselbe ist in Fig. 695 abgebildet. Der auf einem schweren eisernen Fuße befestigte Ständer *St* trägt das Axen- und Kreissystem des Fuessschen Reflexionsgoniometers Nr. 2 (S. 649 f.), an dessen drehbarem Nonienkreise das durch *a* balancierte Fernrohr *F* befestigt ist; dasselbe kann durch *b*

1) Auf Verlangen wird von M. Apel auch ein Nicol geliefert, welcher mit seiner Fassung auf das Ocular des Fernrohres aufgesetzt und um die Axe des letzteren gedreht werden kann.

festgeklemmt werden. Das Ocular von F kann durch ein geradsichtiges Spectroscop ersetzt werden, welches bei Beleuchtung mit weißem Lichte die Einstellung der Grenze der Totalreflexion auf verschiedene Teile des Spectrums gestattet. Die Drehung des Teilkreises erfolgt durch den mit Griffknöpfen versehenen Ring c, die Klemmung und Feinstellung durch die Schrauben d bzw. e, welche letztere auf ihrer Trommel eine Ablesung auf 10″ ermöglicht (die ganzen Umdrehungen von e werden an einer Scala f abgelesen). Die Centrieraxe wird mittels des über dem Teilkreise befindlichen Knopfes g gedreht und durch die mit g_1 bezeichnete Schraube am Ringe c geklemmt. In derselben ist der Stahlstab h mittels h_2 verschiebbar und kann durch h' festgeklemmt werden. Dieser trägt die Centrier- und Justiervorrichtung, und zwar ist an dem abgebildeten Instrumente der Centrierapparat, welcher hier seltener und nur innerhalb enger Grenzen gebraucht wird, durch eine einfachere freihändige Verschiebungsvorrichtung s ersetzt. Geeignete Krystallträger und Flüssigkeitsgefäße dienen für die Anwendung des Instrumentes zur Bestimmung der Brechungsindices nach der Methode von Kohlrausch bzw. zur Messung der Krystallwinkel nach dem Verfahren von Miers. Im ersteren Falle können selbst kleine und matte Flächen benutzt werden, indem man sie mit der Condensorlinse o, welche durch Gelenke verstellbar ist und mit q auf die andere Seite gebracht werden kann, beleuchtet. Für die Verwendung als Goniometer dient der mit Webskyschem Spalte versehene Collimator C, welcher durch eine Polarisationsvorrichtung ersetzt wird, wenn der Apparat zur Messung des Winkels der optischen Axen verwendet werden soll.

Wie bereits S. 30 auseinandergesetzt wurde, leidet die Methode von Kohlrausch an dem Fehler, daß die bei derselben unvermeidlichen Änderungen der Temperatur der angewandten Flüssigkeit das Resultat sehr stark beeinflussen, so daß es nur einem so geübten Experimentator, wie dem Erfinder der Methode, möglich ist, Brechungsindices auf vier Decimalen genau mittels derselben zu bestimmen. Dieser Mangel fällt fort, wenn statt der Flüssigkeit ein fester durchsichtiger Körper von hohem Brechungsvermögen angewendet wird. Dies geschah bereits sehr viel früher durch Wollaston, doch ist diese Methode für die Untersuchung der Krystalle erst zu einer hervorragend brauchbaren geworden durch die von Abbe erfolgte Einführung einer Halbkugel von stark brechendem Glase.

b) **Abbesches Krystallrefractometer.** Wie aus S. 30—31, woselbst das Princip dieses Apparates bereits erläutert worden ist, zu ersehen, wird mittels desselben der Brechungsindex eines Körpers bestimmt durch die directe Messung des Winkels i der Totalreflexion an der ebenen Grenzfläche zwischen dem Körper und einer Halbkugel von stark brechendem Glase[1]; ist der Brechungsindex der letzteren $= \mu$, so ergibt sich derjenige

1) Allerdings muß, um den vollständigen optischen Contact zwischen den beiden Ebenen herzustellen, zwischen dieselben eine äußerst dünne Schicht einer Flüssigkeit gebracht werden, deren Brechungsindex mindestens höher sein muß, als der der Objectplatte, da sonst an ihr die



des untersuchten Körpers aus der Gleichung: $n = \mu \sin i$. Ein nach diesem Principe Abbes construiertes Krystallrefractometer wurde zuerst von Czapski beschrieben in Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1890, **10**, 246f. und ein kleineres Modell ebenda 1892, **12**, 209f. Die in neuerer Zeit von der Firma C. Zeiss in Jena ausgeführte Neuconstruction rührt von C. Pulfrich her und ist 1899 in der Zeitschr. f. Kryst. **30**, 568f. ausführlich beschrieben und ihre Anwendung erläutert worden; außerdem hat Viola in demselben Bande S. 427f. und 488f. eingehende Mitteilungen über das Verfahren mit dem Apparate und dessen Genauigkeit gegeben. Da das Abbesche Refractometer in der Form, wie es von genannter Firma geliefert wird (Fig. 696), in bezug auf bequemes, rasches und genaues Arbeiten allen andern Apparaten zur Bestimmung der Brechungsindices der Krystalle vorzuziehen ist, so soll dasselbe hier ebenfalls ausführlich beschrieben werden.

Die Halbkugel G besteht aus Jenaer Flintglas, dessen Brechungsindex für die Natriumlinie $(D) = 1{,}89040$ beträgt; die Differenzen der Brechungsindices für die rote Kaliumlinie A und die drei Wasserstofflinien C, F, G' (s. S. 34) sind:

$$\begin{aligned} A - C &= 0{,}01198 \\ C - D &= 0{,}01105 \\ D - F &= 0{,}02890 \\ F - G' &= 0{,}02590. \end{aligned}$$

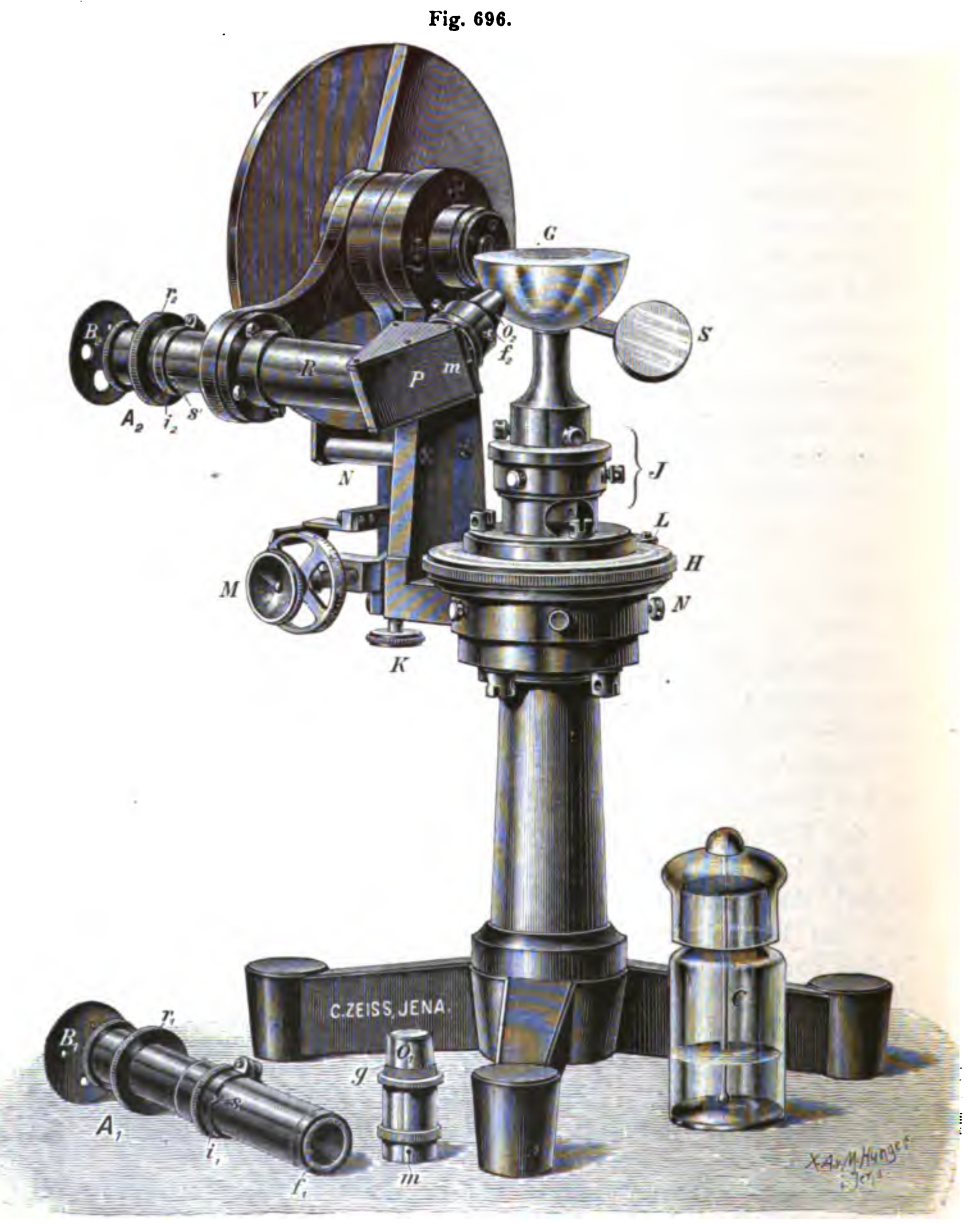
Diese Werte gelten für 20° C. Für 1° Temperaturänderung ist die Änderung derselben: für $C = 1{,}03$, für $D = 1{,}21$, für $F = 1{,}72$, für $G' = 2{,}27$ Einheiten der fünften Decimale.

Durch die Justiervorrichtung J wird erreicht, daß die Halbkugel sich um ihre Symmetrieaxe dreht und daß ihre Rotationsaxe mit der Drehungsaxe des Fernrohres, welche zugleich die Axe des verticalen Teilkreises V ist, sich im Mittelpunkte der Halbkugel, und zwar genau unter rechtem Winkel, durchschneidet; durch denselben Punkt muß auch die optische Axe des Fernrohres gehen. Alle diese (sehr mühsamen) Justierungen werden vor der Ablieferung eines Instrumentes von der Firma sorgfältigst ausgeführt. Der Träger der Halbkugel ruht auf einem kleinen horizontalen Teilkreise H, welcher mittels des Nonius L, dessen Nullpunkt in der Einfallsebene des Lichtes liegt, auf 0°,1 abgelesen werden kann. Der zur Bestimmung des Winkels der Totalreflexion dienende verticale Teilkreis V ist so eingerichtet, daß man den gesuchten Grenzwinkel i sowohl rechts

Totalreflexion früher eintreten würde, als an der darunter befindlichen Halbkugel. Ist diese Bedingung erfüllt, so findet, da jene Schicht planparallel ist, die Brechung der Strahlen genau so statt, als wenn die Objectplatte direct auf der Halbkugel läge, und überträfe der Brechungsindex der Flüssigkeit noch denjenigen der Halbkugel, so wäre überhaupt eine störende Totalreflexion an der Grenze beider nicht möglich. Aus diesem Grunde wählt man möglichst hochbrechende Flüssigkeiten: Bromnaphtalin ($n = 1{,}65$), Kaliumquecksilberjodidlösung ($n = 1{,}72$), Baryumquecksilberjodidlösung ($n = 1{,}78$) u. a.

als links von der Halbkugel (mittels zweier, auf 1′ geteilter Nonien) unmittelbar daran ablesen kann. Die Beleuchtung der Grenzfläche zwischen

Fig. 696.



½ natürl. Größe.

der Halbkugel und der auf derselben befindlichen Krystallplatte erfolgt durch den frei beweglichen Spiegel S von unten oder von oben, je nachdem, welche der beiden S. 30 und 31 erklärten Methoden der Beobachtung

gewählt wird. Das Rohr R des Beobachtungsfernrohres mit der Fassung eines rechtwinkeligen Reflexionsprismas P ist mit dem Teilkreise V fest verbunden. Von den beiden Objectiven O_1 und O_2, deren richtige Stellung nach dem Aufschrauben durch die Marke m gekennzeichnet ist, dient das erstere zur Beobachtung der Grenzcurven der totalen Reflexion an größeren Krystallplatten, das letztere, wenn nur kleine und weniger vollkommene Krystallflächen zur Verfügung stehen. O_1 bzw. O_2 bildet mit der Halbkugel das Objectiv eines auf ∞ eingestellten Fernrohres von 2—3 maliger Vergrößerung bzw. Verkleinerung (in letzterem Falle ist natürlich die Genauigkeit der Einstellung der Grenze im Gesichtsfelde entsprechend geringer). Zu O_1 gehört das Ocular A_1, zu O_2 das Ocular A_2, beide mit Blendscheibe B versehen. Außerdem ist noch ein drittes Objectiv O_3 vorhanden, welches in Verbindung mit dem Oculare A_1 ein schwach vergrößerndes Mikroskop bildet; bringt man dieses vertical über die Halbkugel, so erblickt man in der Fadenkreuzebene desselben ein Bild der Krystallplatte und kann deren Centrierung prüfen, sowie durch Drehen der Halbkugel um die verticale Axe und Ablesen des horizontalen Teilkreises H die Orientierung der die Platte begrenzenden Kanten gegen die Einfallsebene des Lichtes bestimmen. Hierdurch ist man in den Stand gesetzt, die Lichtgeschwindigkeit in den verschiedensten Richtungen innerhalb der betreffenden Ebene zu messen und die krystallographische Orientierung dieser Richtungen mit ausreichender Genauigkeit zu bestimmen.

Während man, wenn nur kleine und unvollkommene Krystallplatten zur Verfügung stehen, zur Beleuchtung Natriumlicht anwendet, kann man bei größeren und besseren Platten auch weißes Licht (z. B. Sonnenlicht) verwenden und die Brechungsindices für verschiedene Farben (Fraunhofersche Linien), d. i. die Dispersion des Krystalles, bestimmen. Zu diesem Zwecke wird statt des Oculares A_1 in das Rohr R ein Ocularspectroscop eingeschoben, welches eine berußte Glasplatte mit zwei in die Rußschicht eingerissenen geraden Linien enthält; von diesen dient eine als Spalt, die andere erscheint als dazu senkrechte, das Spectrum halbierende helle Linie. Man erblickt dann die Grenze der totalen Reflexion, das Spectrum unter einem von der Stellung des Spectroscopspaltes abhängigen Winkel (vorher stellt man sie unter etwa 45°) durchschneidend, und kann nun den Punkt einstellen, in welchem sie den Schnittpunkt der hellen Linie mit einer bestimmten Spectrallinie schneidet[1]). Diese Einstellung geschieht mit der Mikrometerbewegung des Fernrohres, welche an der Trommel M abgelesen wird. Hierdurch kann die Differenz der Brechungsindices für zwei verschiedene Farben erheblich genauer gemessen werden, als der Wert für eine einzelne Farbe bei Anwendung einer monochromatischen

1) Siehe auch Pulfrich, das Totalreflectometer, Leipzig 1890, S. 84, Fig. 15, und Zeitschr. f. Kryst 1899, **30**, 581. Am ersteren Orte ist noch eine ältere Einrichtung, nämlich die Anwendung eines Querfadens statt der hellen Linie beschrieben, an letzterem Orte das Nötige über die mathematische Seite der Methode gegeben.

Flamme. Es kann dieselbe Genauigkeit aber auch auf jede Beobachtung ausgedehnt werden mit Hilfe der von Viola (Zeitschr. f. Kryst. **30**, 438) vorgeschlagenen Differentialmethode. Dazu dient eine Anzahl von Vergleichsprismen aus verschiedenen Glassorten (10), deren Brechungsindices für die verschiedenen Fraunhoferschen Linien mit der Methode des Minimums der Ablenkung sehr genau bestimmt sind, als Vergleichsobjecte. Es wird dann die Differenz der Brechungsindices des Krystalles und des in der Brechbarkeit nächststehenden Glasprismas bestimmt, indem letzteres aufgelegt, das Fernrohr auf die Grenze eingestellt und festgeklemmt, alsdann an Stelle des Glasprismas der Krystall aufgelegt und die dadurch bewirkte Verschiebung der Grenze mit der Mikrometerschraube bestimmt wird.

Da durch die zwischen Objectplatte und Halbkugel gebrachten Flüssigkeiten, sowie durch das Andrücken harter Krystallplatten die Politur der Oberfläche der Halbkugel mit der Zeit leidet, so hat neuerdings die Firma Zeiss eine Vorkehrung getroffen, damit der Beobachter selbst eine Neupolitur vornehmen kann, ohne daß es nötig ist, die Halbkugel von dem Apparate zu entfernen und nach dem Wiederaufsetzen die sehr mühsame Arbeit der genauen Justierung derselben vorzunehmen. In die senkrechte Cylinderfläche der unmittelbar auf dem Horizontalkreise H (s. Fig. 696, S. 706) aufruhenden Scheibe ist ein Schnurlauf eingeschnitten, so daß mit Hilfe irgendeines kleinen Rotationsapparates die Halbkugel in rasche Rotation um ihre verticale Axe versetzt und ihre Oberseite mittels eines mit weichem Leder überzogenen Stempels und feinsten englischen Rotes neu poliert werden kann.

Mit dem Abbeschen Krystallrefractometer, wie es vorstehend beschrieben ist[1]), vermag man die sämtlichen drei Hauptbrechungsindices eines zweiaxigen Krystalles an einer einzigen Ebene desselben zu bestimmen, deren krystallographische Orientierung eine ganz beliebige sein kann. Würde man eine cylindrische Krystallplatte anwenden (s. S. 31, Fig. 24) und deren Mantelfläche ringsum beleuchten, so würde man auf einem unterhalb der Glaskugel horizontal gestellten weißen Schirme die geschlossenen Grenzcurven der totalen Reflexion erblicken[2]). Während diese im Falle einer der Axe parallelen einaxigen Krystallplatte eine Gestalt besitzen, wie sie in Fig. 449 (S. 479) abgebildet ist, und im Falle einer zweiaxigen Krystallplatte parallel der Axenebene wie in Fig. 209 (S. 363), so erscheinen bei einer beliebig orientierten zweiaxigen Krystallplatte zwei Curven wie in Fig. 697, deren jede ein Maximum und ein Minimum ihrer radii vectores besitzt.

---

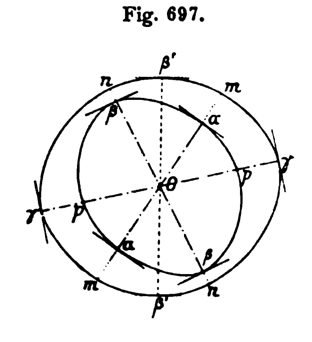
1) Ähnliche Instrumente werden auch von der Firma R. Fuess geliefert, und zwar so eingerichtet, daß auch mikroskopisch kleine Objecte damit untersucht werden können (s. weiterhin S. 711).

2) Apparate zur Projection und photographischen Aufnahme der Grenzcurven, welche nach diesem Principe von Leiss construiert wurden (s. Zeitschr. f. Kryst. **30**, 357), liefert die Firma R. Fuess.



Die diesen entsprechenden vier Werte der Lichtgeschwindigkeit lassen sich nun mit dem Abbeschen Krystallrefractometer sehr genau bestimmen, indem die Messung der Brechungsindices während einer Drehung um 360° in einer größeren Anzahl von Azimuten vorgenommen wird, und da die Drehungswinkel an dem horizontalen Teilkreise H abzulesen sind, so kann man auch die Orientierung der betreffenden Radien feststellen. Von diesen entspricht nun einer, α, dem absoluten Minimum, also dem kleinsten Brechungsindex des Krystalles, der größte, γ, dem absoluten Maximum, also dem größten Brechungsindex, während dem mittleren Brechungsindex β des Krystalles entweder das Maximum β oder das Minimum β' entspricht (Näheres hierüber s. Viola, Zeitschr. f. Kryst. 1899, **31**, 40f., 1900, **32**, 311f., **33**, 30f., 1902, **36**, 245f., 1904, **39**, 179f.).

Fig. 697.



Bereits i. J. 1885 construierte Bertrand (Bull. soc. min. fr. **8**, 375, Ref. Zeitschr. f. Kryst. **12**, 208) ein nur zu rascher und angenäherter Bestimmung der Brechungsindices dienendes kleines Refractometer, in welchem von dem Principe der Halbkugel Gebrauch gemacht wird. Dasselbe besteht aus einem kleinen Metallrohre mit einer schräg abgeschnittenen Fläche, an welcher sich die mit der ebenen Seite nach außen gekehrte Halbkugel befindet; außer den durch die aufgelegten Krystallplättchen hervorgebrachten Grenzen der Totalreflexion erblickt man noch eine Mikrometerscala, welche durch Körper mit bekanntem Brechungsindex geeicht wird und dadurch die Bestimmung desjenigen der untersuchten Platten gestattet.

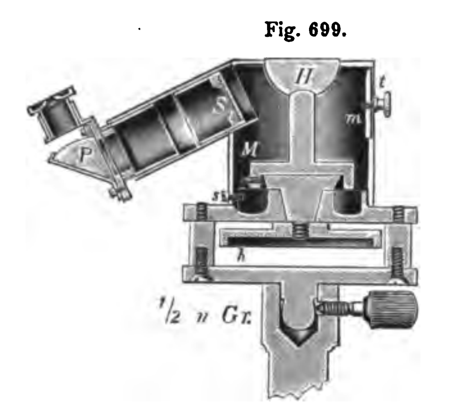
Fig. 698.



Noch praktischer ist die Neuconstruction dieses Apparates durch Leiss (Zeitschr. f. Kryst. 1904, **39**, 47) Fig. 698 und 699. Die Halbkugel H ist durch einen Mantel M umgeben, an welchem das Beobachtungsfernrohr B befestigt ist, und kann durch die geränderte Scheibe h um ihre verticale

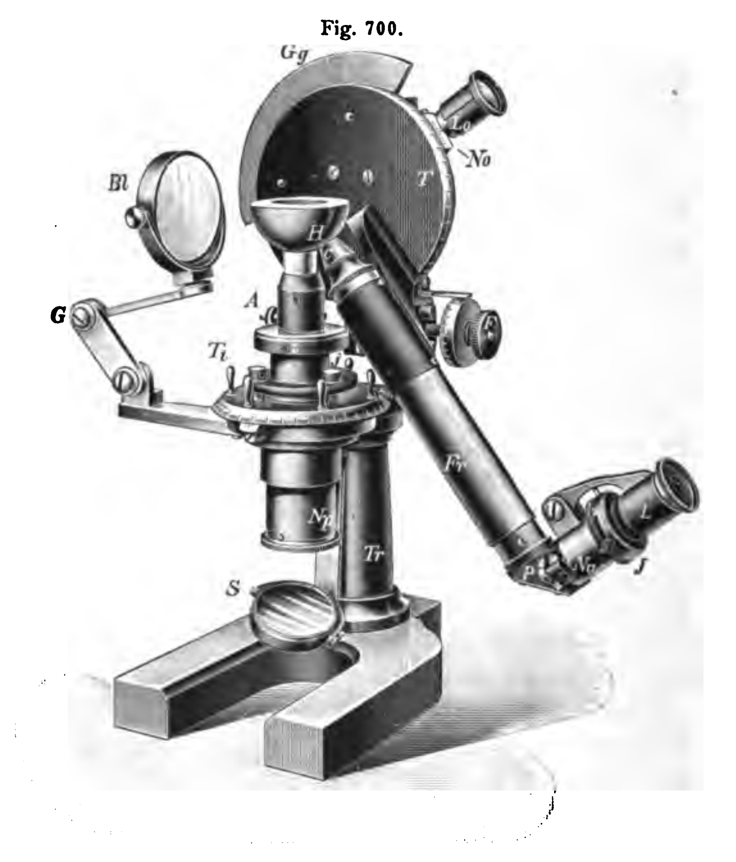
Axe gedreht werden. Die Beleuchtung geschieht entweder von unten durch den Schlitz *t* oder, indem dieser durch den Drehring *m* geschlossen wird, mit streifender Incidenz von oben. *P* ist ein totalreflectierendes Prisma, welches durch Krümmung einer Kathetenfläche zugleich als Lupe dient. Mit Hilfe der im Beobachtungsrohre befestigten beleuchteten Glasscala *S* können die Brechungsindices direct abgelesen werden, und zwar auf einige Einheiten der dritten Decimale genau. Der Apparat kann entweder auf ein Stativ oder eine Handhabe aufgeschraubt werden (s. Fig. 698).

Fig. 699.



Zur Bestimmung der Brechbarkeit von Mineralien, welche sich neben

Fig. 700.

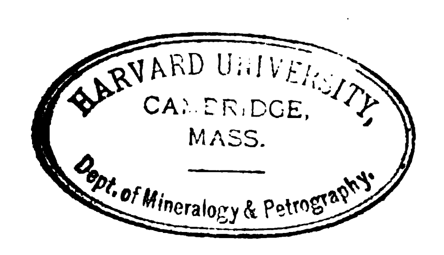


andern in einem Gesteinsdünnschliffe befinden, wurde die Wollaston-sche Methode zuerst verwendet von Wallerant 1897 (s. Zeitschr. f. Kryst.

31, 78 und **39,** 184), indem er den Schliff mit etwas Methylenjodid auf eine Fläche eines Prismas von stark brechendem Glase auflegte und dieses so mit dem Mikroskope verband, daß man den Schliff orientieren kann; alsdann wird durch eine Irisblende der in Betracht kommende Teil desselben abgegrenzt und durch entsprechende Einstellung von Objectiv und Ocular die an ihm entstehenden Grenzen der Totalreflexion sichtbar gemacht.

Vorschläge zur Verbesserung eines derartigen, mit dem Mikroskope verbundenen Instrumentes wurden von C. Klein (Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1898, 317, 1899, 346, 1902, 113 u. 653) gemacht und danach das von Leiss (Zeitschr. f. Instrumentenk. 1902, 331 u. Tschermaks Mitt. 1904, **33,** 51) beschriebene »neue Krystallrefractometer« durch die Firma Fuess ausgeführt. Dieser in Fig. 700 abgebildete Apparat kann sowohl zur Untersuchung mikroskopisch kleiner, als auch größerer Objecte (wie der S. 705 f. beschriebene) verwendet werden.

Das an dem Verticalkreise T angebrachte Beobachtungsfernrohr F_r kann durch Einschalten der Lupe L in ein Mikroskop mit 10facher Vergrößerung umgewandelt und mit diesem das auf die Halbkugel H aufgelegte Object von oben her oder durch die Halbkugel von unten betrachtet werden; die Irisblende J gestattet alsdann die Einschränkung auf den Teil des Objectes, dessen Grenzwinkel der Totalreflexion bestimmt werden soll. Die Beleuchtung des Objectes für die mikroskopische Beobachtung geschieht durch die durchbohrte Axe der Halbkugel mittels des Spiegels S; in N_p befindet sich der Polarisator, in N_a der Analysator. Im übrigen stimmt die Einrichtung des Instrumentes mit der des S. 705 f. beschriebenen überein.



Optische Untersuchung der Krystalle im polarisierten Lichte.

Einleitung.

Wie bereits in der Einleitung zur Krystallberechnung auseinandergesetzt wurde, bieten in allen Fällen, in denen man es nicht mit metallischen, undurchsichtigen Substanzen zu tun hat, die optischen Eigenschaften das wertvollste Hilfsmittel dar, die krystallographische Bestimmung eines Körpers zu ergänzen, bzw. auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Die allgemeinen Principien, welche den Methoden der optischen Untersuchung der Krystalle mittels eines Polarisationsinstrumentes zugrunde liegen, wurden bereits in der I. Abteilung behandelt. Demnach zerfallen die Methoden im wesentlichen in zwei Arten, deren Anwendung auf krystallographische Probleme hier zunächst im allgemeinen erörtert werden soll, während die Beschreibung der zur Ausführung derselben erforderlichen Apparate den Gegenstand der folgenden Abschnitte bilden wird.

a) **Untersuchung im parallelen polarisierten Lichte.** Die erste, nach dieser Methode zu lösende Aufgabe ist der Nachweis einfacher bzw. doppelter Lichtbrechung durch Drehen des Krystalles zwischen gekreuzten Nicols (vgl. S. 42—44), und zwar ist zur Feststellung der ersteren notwendig, daß der Krystall in verschiedenen Ebenen gedreht wird, da ja auch einaxige Krystalle parallel der Basis das Verhalten einfachbrechender Körper zeigen. Ist der Krystall als doppeltbrechend, also nicht dem kubischen Krystallsysteme angehörig, erkannt, so handelt es sich nunmehr um Bestimmung der Schwingungsrichtungen der aus einer bestimmten Fläche desselben austretenden polarisierten Lichtstrahlen. Diese erfolgt nach S. 54 mittels der Einstellung des Krystalles auf seine größte Dunkelheit zwischen gekreuzten Nicols, also der Aufsuchung derjenigen Orientierung, in welcher seine Schwingungsrichtungen den Hauptschnitten der beiden Nicols parallel sind. Um den Winkel einer Schwingungsrichtung (die zweite ist bekanntlich stets senkrecht zur ersten) gegen eine die Austrittsebene des Lichtes begrenzende Kante des Krystalles zu bestimmen, dreht man den letzteren um die Normale dieser Ebene, bis die betreffende Kante dem durch eine gerade Linie im Gesichtsfelde markierten Hauptschnitte eines Nicols parallel ist; die alsdann erfolgte Ablesung an der Kreisteilung des drehbaren Objecttisches, verglichen mit derjenigen bei der Dunkelstellung des Krystalles, liefert den gesuchten Winkel.



Behufs einer ersten Orientierung (vgl. S. 563) kann dieses Verfahren schon mit dem im nächsten Abschnitte beschriebenen Konoskope ausgeführt werden. Geeigneter ist jedoch hierzu ein Mikroskop mit einem im Gesichtsfelde angebrachten Fadenkreuze, dessen beide Arme den Hauptschnitten der beiden Nicols parallel sind; im Falle eines großen Krystalles wendet man eine so schwache Vergrößerung an, daß man die nach oben gekehrte Fläche desselben noch möglichst ganz übersehen kann (das Nähere über die Construction derartiger Mikroskope folgt später). Auf dem drehbaren Objecttische wird der Krystall mit einer Fläche des in Betracht kommenden Paares paralleler Ebenen aufgelegt und so lange gedreht bzw. verschoben, bis die als Ausgangsrichtung gewählte Kante einen Faden ihrer ganzen Länge nach berührend im Gesichtsfelde erscheint; nach Ablesung dieser Stellung wird der Objecttisch gedreht, bis der Krystall vollkommen dunkel erscheint; die hierzu erforderliche Drehung ist offenbar gleich dem Winkel, welchen die nunmehr jenem Faden parallele Schwingungsrichtung des Krystalles mit der erwähnten Kante einschließt. Um die Stellung des Krystalles, welche dem Maximum der Auslöschung des Lichtes entspricht, möglichst genau zu finden, dreht man bis zum Eintritte vollständiger Dunkelheit, liest diese Stellung des Objecttisches an der Kreisteilung desselben ab, dreht alsdann weiter, bis der Krystall wieder eine Aufhellung zeigt, und endlich im entgegengesetzten Sinne wieder bis zum Eintritte vollkommener Dunkelheit zurück; das Mittel der nun erfolgten Ablesung und der vorigen ist der wahrscheinlichste Wert der maximalen Dunkelstellung, da man sich derselben bei dem beschriebenen Verfahren von beiden Seiten her annähert und daher einen einseitigen Fehler der Einstellung möglichst vermeidet. Eine noch genauere Methode der Bestimmung der Schwingungsrichtung ist diejenige des Stauroskopes, welche darauf beruht, daß der zu untersuchende Krystall, wenn seine Orientierung der maximalen Auslöschung des Lichtes entspricht, keine Zerlegung hindurchgehender polarisierter Lichtstrahlen bewirkt und daher das Zustandekommen einer Interferenzfigur, welche von einer andern, mit convergentem Lichte beleuchteten und in den Gang der Lichtstrahlen eingefügten Krystallplatte hervorgebracht wird, nicht stört. Bei geeigneter Wahl der letzteren hat eine sehr kleine Abweichung der Schwingungsrichtungen des zu untersuchenden Krystalles von denen der Nicols bereits eine merkliche Deformation des beobachteten Interferenzbildes zur Folge, daher die Einstellung zu einer äußerst empfindlichen gemacht werden kann. Die Beschreibung derartiger Instrumente und des Verfahrens stauroskopischer Messungen bildet den Gegenstand eines späteren Abschnittes.

Wie aus den in der II. Abteilung behandelten Symmetrieverhältnissen der doppeltbrechenden Krystalle hervorgeht, sind die Schwingungsrichtungen der tetragonalen, trigonalen und hexagonalen Krystalle für die verschiedenen Farben identische, daher zur Bestimmung derselben weißes Licht angewendet werden kann. Infolge der optischen Einaxigkeit der Krystalle

dieser Systeme ergibt sich die Orientierung ihrer Schwingungsrichtungen für jede Fläche[1]) durch diejenige des optischen Hauptschnittes, d. h. der Ebene, welche durch die Normale der Krystallfläche und die optische Axe bestimmt wird. Für alle prismatischen Flächen eines hierher gehörigen Krystalles ist daher eine Schwingungsrichtung parallel der Prismenkante, die zweite dazu senkrecht; für jede Fläche einer trigonalen, tetragonalen oder hexagonalen Bipyramide halbiert eine Schwingungsrichtung den Winkel, welchen zwei benachbarte Polkanten jener Form miteinander bilden, die andere ist parallel der Basiskante; von den Lichtstrahlen endlich, welche aus einer Fläche einer ditrigonalen, ditetragonalen oder dihexagonalen Bipyramide austreten, schwingt eine parallel deren Basiskante, der andere hierzu senkrecht. Hiernach kann also die Bestimmung einer Schwingungsrichtung dazu dienen, eine derartige Form bezüglich ihrer optischen Symmetrie zu prüfen und zugleich auch die richtige Aufstellung derselben ausfindig zu machen, ein Umstand, welcher in gewissen Fällen für die krystallographische Untersuchung von großer praktischer Wichtigkeit ist, wenn nämlich die Messung wegen geringer Differenzen ungleichartiger Flächenwinkel (z. B. die einer, dem regulären Oktaeder sehr nahestehenden, tetragonalen Bipyramide) ein zweifelhaftes Resultat ergeben würde.

Ebenfalls ohne Dispersion sind die Schwingungsrichtungen rhombischer Krystalle auf allen Flächen, welche einer der drei Krystallaxen parallel gehen. Handelt es sich also darum, an einer Pinakoid- oder Prismenfläche eines für rhombisch gehaltenen Krystalles zu prüfen, ob wirklich einer der austretenden polarisierten Strahlen der Kante des Prismas bzw. der Krystallaxe parallel schwinge, so kann auch hier weißes Licht zur Beobachtung benutzt werden. Aber abgesehen von dem Umstande, daß alsdann eine etwa vorhandene Dispersion, welche die Zugehörigkeit des Krystalles zu einem andern Systeme als dem rhombischen beweisen würde, der Beobachtung entgehen müßte, ist in allen Fällen die Anwendung des monochromatischen Lichtes vorzuziehen, weil die Einstellung des Krystalles auf maximale Dunkelheit namentlich im Natriumlichte sich genauer bewerkstelligen läßt, als im weißen Lichte, und also auch kleine Abweichungen vom Parallelismus, welche ebenfalls dem rhombischen Systeme widersprechen würden, leichter erkannt werden.

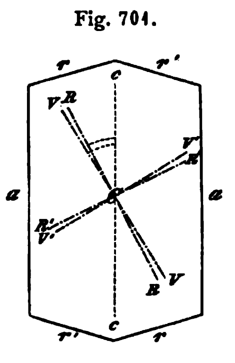
Unentbehrlich ist natürlich die Anwendung homogener Strahlen bei der Untersuchung eines Krystalles aus einem der beiden Systeme niederster Symmetrie, da hier, mit Ausnahme der zur *b*-Axe parallelen Flächen der monoklinen Krystalle, stets Dispersion der Schwingungsrichtungen vorhanden ist, deren Orientierung also immer nur für eine bestimmte Farbe festgestellt werden kann. Lediglich im Falle einer sehr kleinen Dispersion kann die Bestimmung im weißen Lichte ausgeführt werden, ist aber selbstverständlich dann nur eine approximative.

---

1) Mit Ausnahme der Basis, in welcher die betr. Ebene unbestimmt ist und die daher keine ausgezeichneten Schwingungsrichtungen besitzt.

Von besonderer Wichtigkeit ist für das monokline Krystallsystem die Orientierung der Schwingungsrichtungen in der Ebene (010); denn wenn die Richtung einer derselben für eine bestimmte Farbe in bezug auf eine Kante des Krystalles, z. B. die *c*-Axe, gegeben ist, so kennt man die Orientierung aller drei Hauptschwingungsrichtungen für die betr. Farbe, da vermöge der Symmetrieverhältnisse dieses Systemes die zweite in (010) senkrecht zur ersten liegt, und die dritte mit der Normalen zu (010), der *b*-Axe, zusammenfällt. Der Nachweis einer derartigen optischen Orientierung liefert zugleich die sichere Unterscheidung eines monoklinen Krystalles von einem triklinen einerseits, einem rhombischen andererseits. Sei z. B. Fig. 701 der Umriß eines nach {010} tafelförmigen monoklinen Krystalles, welcher außerdem noch von drei zu {010} senkrechten Pinakoiden *a*, *r*, *r'* begrenzt ist, wobei, wie es zuweilen vorkommt, *r* und *r'* nahe symmetrisch zu *a* liegen (Winkel *a*:*r* nahe gleich *a* : *r'*); alsdann steht ein derartiger Krystall einem rhombischen in geometrischer Beziehung sehr nahe, ja er kann sogar durch eine Temperaturänderung vorübergehend genau die Gestalt eines solchen annehmen, da die Winkel *a* : *r* und *a* : *r'* eine ungleiche Änderung durch die Wärme erfahren. Von einem wirklich rhombischen Krystalle können wir einen solchen nun sofort dadurch unterscheiden[1]), daß be jenem die beiden der Tafelebene parallelen Hauptschwingungsrichtungen genau parallel und normal zur Fläche *a*, und zwar identisch für alle Farben, bei einem in Wahrheit monoklinen Krystalle dagegen schief gegen die Fläche *a* liegen und für die verschiedenen Farben nicht zusammenfallen (*RR* in Fig. 701 sei z. B. die eine Hauptschwingungsrichtung für Rot, *R'R'* die andere, *VV* und *V'V'* die entsprechenden für Violett; meist ist allerdings der Winkel der Dispersion *RCV* kleiner, nämlich selten über 2°.

Fig. 701.



Ist außer der Orientierung der drei Hauptschwingungsrichtungen in einem Krystalle auch der Winkel der optischen Axen bekannt, so kann nach S. 107 für jede beliebige Fläche desselben die Lage der Schwingungsrichtungen angegeben werden. Die Kenntnis dieser für möglichst viele Ebenen ist von praktischer Wichtigkeit betreffs derjenigen Mineralien, welche häufig in Gesteinen vorkommen, daher die Erkennung derselben mittels der optischen Eigenschaften ihrer in einem dünnen Gesteinsschliffe beobachteten Durchschnitte, deren Orientierung natürlich eine unbekannte ist, eine häufig wiederkehrende Aufgabe bildet. Aus diesem Grunde wurde von Michel-Lévy für die häufigsten gesteinsbildenden Mineralien die

1) Falls dies nicht etwa schon durch eine Spaltbarkeit, entweder nach *r* oder nach *r'* allein, möglich ist, welche natürlich eine Ungleichwertigkeit dieser beiden Pinakoide beweisen würde.

Auslöschungsschiefe auf den Flächen der Hauptzonen in bezug auf deren Zonenaxe berechnet (Annales des mines 1877; Zeitschr. f. Kryst. **3**, 217 f. und Taf. IV). Hierbei ergab sich z. B. für monoklinen Pyroxen (Augit), dessen Auslöschungsschiefe auf (010) gegenüber der c-Axe (zu welcher die Spaltungsrisse nach {110} und {100} sämtlich parallel verlaufen) = 38° 44′ und dessen Axenwinkel $2V$ = 58° 59′, daß für Flächen, welche der c-Axe parallel sind, also der Zone [010, 100] angehören, die Schiefe mit der Neigung zu (010) allmählich abnimmt, bis sie auf (100), entsprechend den Symmetrieverhältnissen (s. S. 356), gleich Null wird; für die Zone [010, 001] desselben Minerales ergibt sich dagegen, daß die Auslöschungsschiefe gegen die Zonenaxe (Krystallaxe a), welche auf (010) 22° 55′ beträgt, für intermediäre Schnitte zunimmt bis zu einem Maximum (28° 25′) auf einer Ebene, welche mit (010) den Winkel 67° 14′ bildet, und erst dann kleiner wird, um auf (001) den Wert 0° anzunehmen[1]). Wenn man für eine Reihe von Schnitten deren Winkel zu der Ausgangsfläche als Abscissen und die berechneten Werte der Auslöschungsschiefe als Ordinaten aufträgt, so bilden die Endpunkte der letzteren eine Curve, welche die Abhängigkeit der Schwingungsrichtungen von der Orientierung der betr. Krystallfläche innerhalb der Zone mit einem Blicke zu übersehen gestattet. Diese Curven sind von Michel-Lévy a. a. O. für die Hauptzonen von Augit, Hornblende, Feldspat usw. gegeben worden. Noch einfacher und mit einer für die praktische Verwendung in der mikroskopischen Petrographie ausreichenden Genauigkeit können dieselben auf graphischem Wege bestimmt werden mittels der S. 107 Anmerk. angegebenen Vorrichtung.

Da die Orientierung der Schwingungsrichtungen von derjenigen der optischen Axen abhängt, so ist es klar, daß auch umgekehrt die Lage der letzteren und dadurch die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen aus derjenigen berechnet werden kann, welche die Schwingungsrichtungen in Krystallplatten von beliebiger, aber bekannter, Orientierung besitzen. Wichtig ist dies besonders für das trikline System, dessen Krystalle keinem allgemeinen Gesetze der Abhängigkeit der optischen Orientierung von der Krystallform unterworfen sind, bei denen also die Stellung der optischen Hauptschnitte zu den krystallographischen Axen von Fall zu Fall bestimmt werden muß. Nach den zuerst von J. Grailich (»Krystallographisch-optische Untersuchungen, Wien und Olmütz, 1858« S. 26 f.) hergeleiteten Formeln, durch welche man aus den Schwingungsrichtungen der einzelnen Krystallflächenpaare die Lage der Axen der optischen Indexfläche in bezug auf die krystallographischen Axen berechnen kann, ist es nötig, die Schwingungs-

1) Für Gesteinsuntersuchungen folgt hieraus das praktische Resultat, daß man bei Durchschnitten parallel den Flächen dieser Zone unter 90 Fällen 67 mal eine Auslöschungsschiefe zwischen 23° und 28° und nur 23 mal eine solche zwischen 0° und 23° erwarten darf. Zu den obigen Angaben ist noch zu bemerken, daß dieselben sich auf diejenige Wahl der Krystallaxen des Augit beziehen, welche S. 378 für den Diopsid erwähnt ist, bei welcher also die Form o in Fig. 244 das Symbol {$\bar{1}$11} erhält.



richtungen für wenigstens **vier** Paare paralleler Krystallflächen festzustellen, und eindeutig wird das Resultat der Berechnung erst dann, wenn fünf beliebig orientierte Krystallplatten angewendet werden. Da dieser Weg ein sehr umständlicher ist und eine größere Zahl sehr vollkommener Krystallplatten erfordert, ist er bisher bei den wenigen optisch untersuchten triklinen Krystallen nicht eingeschlagen worden; man hat sich vielmehr meistens mit der Bestimmung der Schwingungsrichtungen für ein oder zwei vorherrschend ausgebildete Flächenpaare begnügt und hat die Lage der Hauptschwingungsrichtungen indirect, durch Aufsuchung der Lage der optischen Axen im convergenten Lichte, bestimmt. Weniger umständlich ist die von Dufet bei dem dichromsauern Kalium (S. 350) angewandte Methode, welche später unter »Axenwinkelmessung« erläutert werden wird; diese beruht auf der Bestimmung der Winkel, welche die optischen Axen mit den Normalen zweier beliebiger Platten bilden, deren krystallographische Orientierung bekannt ist. Die einfachste Methode zur Bestimmung der Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen in einem triklinen Krystalle geht von der Messung der Orientierung der Maxima und Minima der Grenzcurven der totalen Reflexion (s. S. 709) in einer einzigen beliebigen, aber bekannten Ebene des Krystalles aus. Wie aus dieser Orientierung diejenige der Hauptschwingungsrichtungen berechnet werden kann, zeigte zuerst Ch. Soret in Zeitschr. f. Krystallogr. 1889, **15**, 44 f. (s. ferner: Lavenir, ebenda **22**, 189, Cornu und Viola, ebenda 1904, **39**, 179 f.).

b) **Untersuchung im convergenten polarisierten Lichte.** Bekanntlich kann die Richtung einer optischen Axe auch im parallelen polarisierten Lichte erkannt werden dadurch, daß eine zu derselben senkrechte Krystallplatte beim Drehen zwischen gekreuzten Nicols die Intensität des Lichtes nicht ändert (vgl. S. 76 und 109), doch ist die Aufsuchung einer solchen Richtung und namentlich die Unterscheidung ein- und zweiaxiger Krytalle unverhältnismäßig leichter im convergenten polarisierten Lichte, entweder mit dem im nächsten Abschnitte zu beschreibenden Konoskope oder mittels eines Mikroskopes derjenigen Construction, deren Schilderung den Gegenstand eines späteren Abschnittes bilden wird. Im Falle eines einaxigen Krystalles ist durch die Beobachtung des Interferenzbildes, welches der optischen Axe entspricht, zugleich die Richtung der krystallographischen Hauptaxe, also die optische Orientierung, gegeben. Bei einem zweiaxigen Krystalle dagegen liefert erst die Aufsuchung der Interferenzbilder beider Axen die Kenntnis der Stellung der optischen Hauptschnitte, welche für die krystallographische Bestimmung von größter Wichtigkeit ist wegen ihrer Beziehung zur Symmetrie der Krystalle.

Handelt es sich um den Nachweis der Zugehörigkeit eines Krystalles zum **rhombischen** Systeme, so sind zunächst die etwa als Krystallflächen vorhandenen oder durch Spaltbarkeit herzustellenden Pinakoide {100}, {010}, {001} zu prüfen. Zeigt ein solches Flächenpaar, im weißen Lichte untersucht, keine Farbenringe, so ist dasselbe entweder der Ebene der optischen

Axen parallel, oder senkrecht zur Halbierenden des stumpfen Winkels derselben; wendet man alsdann monochromatisches (z. B. *Na*-) Licht an, so erscheinen helle und dunkle Streifen, welche im ersteren Falle ein hyperbolisches, im letzteren ein Lemniscaten-System[1]) bilden, in beiden Fällen aber, wenn der Krystall wirklich rhombisch ist, symmetrisch halbiert werden durch zwei, in der Mitte des Gesichtsfeldes einander senkrecht schneidende Gerade, welche genau den beiden der Pinakoidebene parallelen Krystallaxen entsprechen. Bietet der Krystall keine pinakoidalen Flächen dar, so sind die vorhandenen Paare paralleler Prismenflächen zu untersuchen; tritt beim Durchgange der Strahlen durch ein solches Flächenpaar (wenn der Krystall also mit einer Fläche desselben auf dem Objectträger aufliegt) das Interferenzbild einer optischen Axe im Gesichtsfelde auf, so muß dasselbe vermöge der Symmetrieverhältnisse der rhombischen Krystalle in demjenigen Durchmesser des Gesichtsfeldes liegen, welcher der zur Axe des Prismas normalen Ebene entspricht, und beim Auflegen des Krystalles auf das symmetrisch entgegengesetzte Paar paralleler Prismenflächen muß das Bild der zweiten optischen Axe in derselben Ebene, um gleich viel nach der andern Seite von der Mitte des Gesichtsfeldes entfernt, erscheinen; beide Interferenzbilder müssen im weißen Lichte gleiche und entgegengesetzte Dispersionserscheinungen beobachten lassen, während die Weite der Ringe natürlich, je nach der Dicke des Krystalles, in beiden Richtungen verschieden sein kann. Beobachtet man jedoch durch keines der am Krystalle ausgebildeten Flächenpaare ein Axenbild, so müssen aus jenem Platten nach den drei krystallographischen Axenebenen künstlich hergestellt werden; ist der Krystall in der Tat rhombisch, so muß eine derselben zur ersten Mittellinie der optischen Axen senkrecht sein und, sei es in Luft, sei es (bei hohem Brechungsindex und großem Axenwinkel) in Bromnaphtalin, das Lemniscatensystem in einer der Symmetrie des rhombischen Krystallsystemes entsprechenden Orientierung zeigen. Wenn so die Zugehörigkeit des Krystalles zu dem genannten Systeme bestätigt und die optische Orientierung festgestellt ist, kann zur Messung seiner optischen Constanten, d. h. der Hauptbrechungsindices, übergegangen werden. Zu deren Bestimmung können nicht selten natürliche Prismen benutzt werden, wenn der innere Winkel zwischen zwei Flächen eines solchen nicht zu groß ist; da nämlich jedes rhombische Prisma von einem optischen Hauptschnitte halbiert wird, genügt es der S. 101 gegebenen Bedingung und liefert daher zwei Hauptbrechungsindices; das gleiche gilt nach S. 102 für eine Prismen- und eine Pinakoidfläche. Wenn auf diesem Wege β, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der den optischen Axen parallelen

1) Im Falle eines sehr großen Wertes des stumpfen Axenwinkels ist dieses Curvensystem sehr ähnlich einem hyperbolischen; die Unterscheidung beider erfolgt in der Weise, daß man das Interferenzbild so im Gesichtsfelde einstellt, daß ein Arm des Fadenkreuzes die Asymptote der Curven eines Quadranten bildet; die Asymptote des andern ist parallel dem andern Faden, wenn die Curven Hyperbeln sind, schief dagegen, wenn es Lemniscaten sind.



Strahlen, bestimmt ist, so kann offenbar in dem früher erwähnten Falle, daß durch zwei gleichwertige Prismenflächen die Axenbilder sichtbar sind, aus ihrer Ablenkung gegen die Normalen dieser Flächen bzw. aus dem Winkel, welchen die beiden optischen Axen scheinbar nach dem Austritte der Strahlen aus den beiden Prismenflächen bilden, deren wahrer Winkel berechnet werden.

Soll die Zugehörigkeit eines Krystalles zum monoklinen Systeme durch optische Untersuchung im convergenten Lichte bestätigt, bzw. seine optische Orientierung festgestellt werden, so ist zunächst das Pinakoid {010}, wenn es als Krystallform vorhanden oder durch Spaltbarkeit herzustellen ist, zu untersuchen. Für dieses gilt alles, was a. vor. S. über das Verhalten eines rhombischen Pinakoides gesagt wurde, nur mit dem Unterschiede, daß die beiden im Mittelpunkte des Gesichtsfeldes einander schneidenden Geraden, welche das im monochromatischen Lichte sichtbare Streifensystem symmetrisch halbieren, nicht den beiden in der Ebene (010) gelegenen Krystallaxen, sondern den beiden derselben Ebene angehörigen Hauptschwingungsrichtungen parallel sind; deren Orientierung vorher im parallelen Lichte festgestellt wurde. Haben die beobachteten Curven die Form von Lemniscaten (s. Anm. S. 718), so ist die Stellung der zu (010) senkrechten Ebene der optischen Axen bekannt und die Bestimmung der weiteren optischen Constanten ermöglicht. Treten dagegen Hyperbeln auf, so ist (010) selbst Ebene der optischen Axen, und alsdann müssen die den letzteren entsprechenden Interferenzbilder durch Pinakoide, welche der Krystallaxe *b* parallel, also zur Ebene der optischen Axen senkrecht sind, zur Beobachtung gelangen. Ist ein derartiges Flächenpaar zufällig wenig geneigt zur ersten Mittellinie und der Axenwinkel klein, so erscheint das vollständige zweiaxige Interferenzbild im Gesichtsfelde, aber natürlich gegen die Mitte verschoben in der Richtung der Verbindungslinie der beiden Axenpunkte und mit geneigter Dispersion des weißen Lichtes (vgl. S. 122, Fig. 84, in welcher *MM* parallel der Krystallaxe *b*). Im allgemeinen beobachtet man jedoch durch ein Pinakoid der angegebenen Art nur die Interferenzfigur einer optischen Axe, verschoben in demjenigen Durchmesser des Gesichtsfeldes, welcher der Ebene (010) des Krystalles parallel ist, und durch diese Erscheinung kann auch ohne Untersuchung des Pinakoides {010} nachgewiesen werden, daß die optischen Axen in der Ebene desselben gelegen sind. Gelingt es dann, durch ein zweites zu (010) senkrechtes Flächenpaar auch das Interferenzbild der andern optischen Axe zu erblicken, so ist damit die Orientierung derselben angenähert erkannt[1]). Liegen dagegen nur prismatische Formen vor, so kann ein Paar paralleler Flächen einer solchen das Interferenzbild einer optischen Axe nur zeigen, wenn die Ebene der

1) Genau kann dieselbe bestimmt werden, wenn der Brechungsindex β bekannt ist und die Neigung der austretenden, jener Axe im Krystalle parallelen Strahlen zur Plattennormale nach einer später anzugebenden Methode gemessen wird (s. unter »Axenwinkelmessung«).



optischen Axen senkrecht zu (010) ist, und das Ringsystem muß alsdann eine unsymmetrische Lage im Gesichtsfelde besitzen, entsprechend einem irgendwie schiefen Austritte der Strahlen, welche im Krystalle sich der optischen Axe parallel fortpflanzen. Untersucht man dann aber, nach dem Umlegen des Krystalles, dasjenige Flächenpaar, welches zu dem vorigen symmetrisch ist in bezug auf (010), so muß, wenn der Krystall wirklich dem monoklinen Systeme angehört, das Bild der andern optischen Axe in entgegengesetzter Schiefe, symmetrisch zu dem vorigen in bezug auf (010), im Gesichtsfelde erscheinen. Zeigt endlich keines der am Krystalle vorhandenen Paare paralleler Flächen eine Interferenzerscheinung, welche die Orientierung der optischen Axen unzweifelhaft festzustellen geeignet ist, so muß zuerst das Pinakoid {010} künstlich durch Schleifen hergestellt und die beiden demselben parallelen Hauptschwingungsrichtungen bestimmt werden; liefert diese Platte keine Axenbilder, so sind zwei weitere planparallele Platten senkrecht zu jenen beiden Hauptschwingungsrichtungen anzufertigen; da alsdann Schliffe nach allen drei optischen Hauptschnitten vorliegen, muß einer derselben, sei es in Luft, sei es in Bromnaphtalin, sich als senkrecht zur ersten Mittellinie der Axen erweisen. Zur Messung der Hauptbrechungsindices durch Prismen müssen diese aus einem monoklinen Krystalle im allgemeinen künstlich hergestellt werden; nur der Brechungsindex der parallel der Krystallaxe b schwingenden Strahlen kann durch ein natürliches Prisma, welches von zwei, unter entsprechendem Winkel zusammenstoßenden, zu (010) senkrechten Krystallflächen gebildet wird, bestimmt werden. Dagegen genügt nach S. 103 zur Messung aller drei Hauptbrechungsindices mittels Totalreflexion eine einzige Platte, sobald dieselbe nämlich die Bedingung erfüllt, daß ihre Oberfläche parallel der Krystallaxe b ist, welche Richtung vermöge der Symmetrieverhältnisse des monoklinen Systemes zugleich eine Hauptschwingungsrichtung für alle Farben repräsentiert.

Die Bestimmung der optischen Orientierung eines triklinen Krystalles im convergenten polarisierten Lichte kann durch Aufsuchung der Lage der optischen Axen in der Weise erfolgen, daß man denselben nacheinander mit verschiedenen Pinakoiden, eventuell unter Hinzunahme von Spaltungsplatten, auf den Objecttisch des Polarisationsinstrumentes auflegt; ist er einigermaßen flächenreich, so wird man ein oder vielleicht auch zwei Flächenpaare finden, durch welche hindurch das Bild je einer Axe (bei sehr kleinem Axenwinkel auch beide durch ein einziges) noch innerhalb des Gesichtsfeldes gelangt. Berücksichtigt man nun die dabei stattgefundene Brechung, so kann man aus der bekannten Lage der Flächen (am besten durch eine stereographische Projection, s. S. 617) ungefähr diejenige der ersten Mittellinie bestimmen; alsdann schleift man senkrecht zu dieser eine Platte, welche natürlich noch nicht genau richtig ist, daher sie das Interferenzbild nicht centrisch im Gesichtsfelde zeigt, bestimmt die Größe und Richtung der Abweichung und corrigiert danach den Schliff der Platte, bis die Axenbilder genau gleichweit von der Mitte des Gesichtsfeldes

abstehen und ihre Verbindungslinie durch diese geht; da nunmehr die Platte senkrecht zur ersten Mittellinie ist, so gibt die Messung der Winkel, welche sie mit den übriggebliebenen natürlichen Krystallflächen bildet, die Lage jener, und da sie einem optischen Hauptschnitte parallel ist, so sind ihre beiden Schwingungsrichtungen zugleich die zweite und die dritte Hauptschwingungsrichtung; sie liefert also die Richtung der drei Axen der optischen Indexfläche und die Größe des Axenwinkels. Da die richtige Lage der Schliffläche indes doch nur angenähert erreicht wird, so ist die hierdurch zu erzielende Genauigkeit keine sehr große. Ebenso genau, wie durch vollständige stauroskopische Untersuchung (vgl. S. 716), läßt sich die Lage der drei Hauptschwingungsrichtungen auf folgende Art feststellen, wie sie z. B. beim Kupfervitriol und dichromsauren Kalium (S. 349, 350) angewendet worden ist: Wenn man durch zwei oder mehr natürliche oder künstliche Flächen, welche ziemlich kleine Winkel miteinander bilden, dieselbe optische Axe im Gesichtsfelde des Polarisationsapparates erblickt, so kann man den scheinbaren Winkel, welchen sie mit der Normalen jeder dieser Flächen bildet, nach einer weiterhin zu erläuternden Methode messen; da aber die einer optischen Axe parallelen Strahlen den mittleren Brechungsindex β besitzen (vgl. S. 108), so kann man aus jenen scheinbaren die wahren Winkel berechnen, wenn man β kennt. Ein Prisma, welches zu der Bestimmung dieser Constante genügt, ist nun aber bei nur ungefährer Kenntnis der Lage der optischen Axenebene leicht anzufertigen; seine brechende Kante muß normal zur Ebene der optischen Axen sein, was man mit genügender Genauigkeit dadurch controllieren kann, daß dasselbe, wenn es auf den Träger des Polarisationsinstrumentes so (mit Wachs) befestigt wird, daß einmal eine, einmal die andere Fläche oben horizontal, und die brechende Kante dem im Gesichtsfelde befindlichen Verticalstriche des Mikrometers parallel ist, jedesmal eine optische Axe, nach rechts oder links abgelenkt, aber im Horizontalstriche liegend, zeigt. Hat man nun auf die oben angegebene Art die wahren Winkel bestimmt, welche die Richtung der einen optischen Axe mit mehreren Krystallflächen einschließt, so ist dadurch ihre Lage gegen die Krystallaxen gegeben. Bestimmt man nun in genau derselben Weise diejenige der andern optischen Axe, so folgt daraus durch Rechnung die Orientierung der Axenebene und der ersten Mittellinie, d. h. der drei Hauptschwingungsrichtungen. Selbstverständlich ist bei dieser, wie bei der stauroskopischen Untersuchung, die Bestimmung derselben für homogene Farben getrennt vorzunehmen, da sie alle drei dispergiert sind.

Ausführlicheres über das Verfahren zur Bestimmung der optischen Orientierung trikliner Krystalle, welches namentlich durch Dufet ausgebildet worden ist, wird später unter »Axenwinkelmessung« angegeben werden. Wenn es sich zunächst nur um die Aufsuchung der ungefähren Lage der optischen Axen im convergenten Lichte handelt, so können mit großem Vorteil die in einem späteren Abschnitte beschriebenen, mit

dem Polarisationsmikroskope zu verbindenden Drehapparate, unter Eintauchen des Krystalles in eine stark brechende Flüssigkeit, benutzt werden.

Polarisationsapparate.

Die Polarisationsinstrumente für paralleles und convergentes Licht sind bereits in der I. Abt. S. 53—57 dem Principe ihrer Construction nach erläutert worden. Die verschiedenen gebräuchlichen Formen des Konoskopes unterscheiden sich meist nur durch die Zahl und Anordnung der Linsensysteme, welche statt der Sammellinse *n* Fig. 35 und des Objectives *o* ebendaselbst dienen. Der ursprünglichen Nörrembergschen Construction am nächsten steht das in Fig. 702 abgebildete Instrument, welches von dem optischen Institute von Dr. Steeg und Reuter in Homburg[1]) geliefert wird; dasselbe hat den Vorteil eines sehr großen Gesichtsfeldes, so daß selbst bei scheinbaren Axenwinkeln von ca. 130° die Lemniscatensysteme noch zu übersehen sind; nur sind freilich die Bilder nahe dem Rande des Gesichtsfeldes stets weniger vollkommen und daher für feinere Farbenunterschiede, z. B. für Erkennung des Sinnes der Dispersion durch die Säume der Hyperbeln (vgl. S. 119 f.), nicht zuverlässig; endlich ist auch die Polarisation des der Billigkeit wegen angewandten Glassatzes nicht so vollkommen, wie die eines Nicols als Polarisator. Derartige einfache Apparate, wie sie in ähnlicher Weise auch von der Firma Fuess geliefert werden[1]), sind da ausreichend, wo es sich nicht um genauere Bestimmungen, sondern nur um Demonstration der Erscheinungen handelt. Dieselben können auch, wie aus der Figur ersichtlich, mit einer einfachen Vorrichtung zur Messung des Winkels der optischen Axen versehen werden. Etwas kleiner ist das Gesichtsfeld bei dem von Des Cloizeaux (Poggendorffs Ann. d. Phys. 1865, **126**, 387 f.) angegebenen Instrumente, welches jenen in mehrfacher Beziehung vorzuziehen ist, während sein Gesichtsfeld doch groß genug ist, um in allen Fällen zu genügen (bei scheinbarem Axenwinkel von 125° sind noch beide Axenbilder innerhalb desselben sichtbar). Des Cloizeaux verband ferner sein Instrument mit einem zur Messung des Axenwinkels eingerichteten Teilkreise, welchen, mit zwei kleinen Fernröhren montiert, er zugleich zur Messung von Brechungsindices benutzte. Der Verfasser (Poggendorffs Ann. d. Ph. 1872, **144**, 31 f.) vervollständigte diesen Apparat derart, daß er, mit möglichster Benutzung einzelner Teile für mehrere Zwecke, alle Instrumente,

Fig. 702.



1) S. die Preisverzeichnisse am Schlusse.

welche bei krystallographisch-optischen Untersuchungen häufiger gebraucht werden, inclusive eines Goniometers zur Bestimmung der Krystallwinkel und der Brechungsindices, umfaßt. In dieser, von der Firma Fuess ausgeführten Zustammenstellung, welche in neuerer Zeit noch mancherlei Verbesserungen erfahren hat, ist er unter dem Namen »krystallographisch-optischer Universalapparat« so allgemein verbreitet, daß es geeignet erscheint, im folgenden die einzelnen optischen Instrumente in der Form zu beschreiben, wie sie die Teile jenes Apparates bilden und wie sie natürlich auch einzeln bezogen und benutzt werden können.

Fig. 703.

Das Polarisationsinstrument für convergentes Licht ist in Fig. 703 ($\frac{1}{3}$ nat. Größe) im verticalen Durchschnitte dargestellt, bis auf die Teile A, B und C, welche mit ihren Schrauben in Vorderansicht erscheinen. Der einfache Spiegel S wird bei parallelen Nicols um seine Axe so gedreht, daß er, wenn das Instrument nahe am Fenster steht, das Licht eines möglichst hellen Teiles des Himmels in dasselbe reflectiert. Das Rohr f enthält den Polarisator p und die beiden Glaslinsen ee', welche bewirken, daß das ganze auf e fallende Licht in das Instrument gelangt (vgl. S. 53), und ist von einem fest angezogenen Klemmringe f' umgeben, der genau so, wie die Klemmringe der Ocularsysteme bei den Goniometern (s. S. 657), mit einer Nase versehen ist, welche in einen Einschnitt des Rohres g eingepaßt werden muß, wenn f in richtiger Lage in g eingeschoben werden soll; solcher Einschnitte sind zwei, mit 90° und 45° bezeichnet, vorhanden. Statt durch einen Klemmring kann die Stellung, bis zu welcher man f in g einzuschieben hat, auch durch einen auf f festgelöteten Ring bestimmt werden, auf welchem 0°, 45°, 90° durch Marken bezeichnet sind; durch Drehung von f bringt man die betreffende dieser Marken mit einer auf dem festen Rohre g angebrachten Marke zur Coincidenz. Das Sammellinsensystem besteht aus vier planconvexen Linsen n, welche durch Verschraubung miteinander verbunden sind; die Fassung der untersten derselben paßt genau in das Rohr f, so daß das ganze Linsensystem durch einfaches Einsetzen

in den obersten Teil dieses Rohres seine richtige Stellung erhalten und mit *f* zusammen nach abwärts herausgezogen werden kann, wenn man den Spiegel *S* zur Seite geschoben hat. Mit dem Träger *B* fest verbunden ist nun eine kreisrunde Platte, welche an der Stelle unter *h* eine Nonienteilung trägt, und ein kurzes cylindrisches Rohrstück. Auf das letztere wird das oben mit einem gerieften vorspringenden Rande *l* versehene Rohrstück aufgesetzt, dessen unteren Teil der abgeschrägte kleine Teilkreis *hi* bildet, welcher beim Drehen des Rohrstückes auf der festen Nonienplatte schleift. Auf *l* wird oben die kreisförmige, durch einen Messingring gefaßte Glasscheibe *k*, auf der bei der Beobachtung der Krystall liegt, in einer bestimmten Stellung aufgelegt; diese ist dadurch fixiert, daß der Rand jenes Messingringes an einem Punkte einen Einschnitt hat, in welchen genau ein an *l* festgemachter kleiner Stift paßt. Durch Drehen des vorspringenden Wulstes *l* mit zwei Fingern wird also die Krystallplatte in ihrer Ebene gedreht um einen Winkel, welcher mittels des Nonius auf dem Kreise *hi* abgelesen werden kann. Der Träger *B* ist mit seinem hohlprismatischen unteren Teile durch eine Schraube an das dreiseitige Stahlprisma *A*, welches mit einem hufeisenförmigen Fuße das Stativ des Instrumentes bildet, angeklemmt. Das ebenso gestaltete Stück *C*, durch eine Stellschraube, welche in eine Zahnstange des Statives eingreift, auf und nieder beweglich, trägt den Ring *y* und das ebenso bezeichnete, fest damit verbundene kurze Rohr. In letzteres wird das mit einem Klemmringe, dessen Nase in einen mit 90° bezeichneten Einschnitt des Rohres *y* paßt, oder mit Marken versehene Rohr *u* eingeschoben, in welches die vier den Sammellinsen ganz gleichen Objectivlinsen *o* eingeschraubt sind. Da vermöge der kurzen Brennweite dieses Systemes das zu beobachtende Bild ganz nahe über jenen, in der Ebene *r*, zustande kommt, so ist in letzterer eine Glasplatte mit eingerissenen und geschwärzten Linien angebracht, aber nicht bloß mit einem einfachen Kreuze, sondern mit einer Teilung des einen der beiden Arme von einer Seite des Gesichtsfeldes bis zur andern. Dieses »Glasmikrometer« *r* ist daher gleichzeitig mit der Interferenzfigur eines Krystalles deutlich sichtbar; es bildet den unteren Abschluß eines kurzcylindrischen Rohres *x*, welches durch einen bei *α* angedeuteten Schlitz in der Wand des Rohres *u* auf- und niedergeschoben werden kann, wodurch es ermöglicht wird, das Mikrometer auch dann in die Bildebene zu bringen, wenn man durch Abschrauben einer oder mehrerer Linsen *o* die Brennweite des Objektivsystemes geändert hat (s. folg. S.). In *u* ist das Ocularrohr *v* mit der Ocularlinse *t* verschiebbar, aber nicht drehbar, während die Fassung des analysierenden Nicols *q* so in das Ocularrohr eingesetzt wird, daß der kleine geteilte Kreis *t* auf dessen oberstem Rande *s* schleift, und die durch Drehen der Fassung *w* bewirkte Stellung des Nicolhauptschnittes an einer auf *s* angebrachten Marke abgelesen werden kann. Der unter *s* liegende Teil von *v* wird von einem dünnen Messingringe umfaßt, dessen Drehung gestattet, einen in dem Ocularrohre befindlichen horizontalen Schlitz *z* ent-

weder zu schließen oder zu öffnen; der letztere dient dazu, ein lang rectanguläres $\frac{1}{4}$-Undulationsglimmerblatt (s. S. 138) oder einen Quarzkeil (S. 141) zur Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung einzuschieben.

Alle Linsenfassungen des Instrumentes sind mit Marken versehen, welche die für die Centrierung günstigste Stellung der Teile des Apparates bezeichnen. Stellt man die Rohre *f* und *u* so, daß die außen angebrachten Marken auf 90° zeigen oder die Nasen der Klemmringe in die entsprechenden Einschnitte eingepaßt sind, und dreht den Analysator ebenfalls auf 90°, so sind die Nicols parallel, und ihr Hauptschnitt fällt in die Zeichnungsebene; die Einstellung des Analysators auf 0 liefert somit gekreuzte Nicols; die beiden Kreuzarme des Glasmikrometers *r* sind alsdann den Hauptschnitten der beiden Nicols parallel. Außerdem ist der Klemmring *f'*, bzw. der ihn ersetzende feste Ring, so angebracht, daß nach dem vollständigen Einschieben des Rohres *f* die oberste Sammellinse *n* ganz nahe an die Glasplatte *k* heranreicht. Ebenso muß man, um ein großes Gesichtsfeld zu erhalten, das Objektiv *o* dem Krystalle so weit als möglich nähern, und der letztere darf nicht zu dick sein. Hat man es mit einer zweiaxigen Platte, senkrecht zur ersten Mittellinie, zu tun, so kann das Glasmikrometer *r* zu einer schnellen approximativen Bestimmung des scheinbaren Winkels der optischen Axen dienen, indem man deren Ebene der Teilung jenes parallel stellt, die Nicols um 45° dreht, so daß die schwarzen Hyperbeln erscheinen, und den Abstand derselben in Teilen des Mikrometers bestimmt; wieviel Grade des scheinbaren Axenwinkels einem Teilstriche des Mikrometers entsprechen, erkennt man mittels einiger Krystallplatten von bestimmtem Axenwinkel (im Durchschnitte beträgt bei den Fuessschen Instrumenten 1 Teilstrich 6°). Statt dieses gewöhnlichen Mikrometers liefert die genannte Firma auch ein solches, an welchem der Axenwinkel $2E$ unmittelbar abgelesen werden kann.

Das beschriebene Polarisationsinstrument dient hauptsächlich zur Aufsuchung der Lage der optischen Axen, wenn dieselben nicht allzugroße Winkel mit der Plattennormale bilden; durch deren Richtung kann man, im Vergleiche mit dem Habitus der Krystallform, in vielen Fällen sofort das Krystallsystem bestimmen. Will man dabei durch unebene Flächen, z. B. Bruch- oder unvollkommene Spaltungsflächen, beobachten, so hat man dieselben mit einem Tropfen Canadabalsam zu bedecken und dann ein kleines Stückchen sehr dünnen Glases (Deckglas für mikroskopische Präparate) darauf anzudrücken, um die Zerstreuung der Lichtstrahlen an der unregelmäßigen Fläche zu eliminieren. Bei dickeren Platten bleibt der Brennpunkt des Objektives über demjenigen der Sammellinsen, man wird also nur im mittleren Teile des Gesichtsfeldes die Interferenzerscheinungen erblicken; um sie im ganzen Gesichtsfelde zu sehen, welches aber dann einem kleineren Winkel entspricht, kann man eine oder mehrere der Objectivlinsen *o* abschrauben. Bei den neueren von Fuess gelieferten Instrumenten sind die Brennweiten der einzelnen Linsen so gewählt, daß auch nach Entfernung

der obersten des Sammelsystemes und der untersten des Objectivsystemes ein recht großes Gesichtsfeld vorhanden ist. Was die Flächenausdehnung einer zu den Beobachtungen nötigen Platte betrifft, so kann dieselbe sehr gering sein, namentlich wenn man das neben derselben vorübergehende Licht abblendet; so kann man z. B. von einem Glimmerblättchen mit großem Axenwinkel, dessen Oberfläche = $\frac{1}{270}$ Quadratmillimeter (erhalten durch Bedecken einer Glimmerplatte mit Stanniol, in welchem eine entsprechend große Öffnung durch einen Stich mit einer feinen Nadel hergestellt ist), noch ein recht deutliches Axenbild erhalten. Ein so lichtstarkes Instrument ist daher auch geeignet zur Aufsuchung der Axen kleinerer Mineralpartikel in Schliffen feinkörniger Gesteine, falls diese nur noch dick genug sind und durch überklebtes Stanniol das Licht der benachbarten Teile abgehalten wird; doch sind in neuerer Zeit die zur Beobachtung der Interferenzerscheinungen der Krystalle eingerichteten Mikroskope so vervollkommnet worden, daß ihre Anwendung für derartige Zwecke vorzuziehen ist (vgl. den Abschnitt über Mikroskope).

Zur Untersuchung im parallelen polarisierten Lichte kann man dasselbe Instrument benutzen, wenn es sich nur um eine ungefähre vorläufige Bestimmung der Auslöschungsrichtungen eines kleinen Krystalles handelt. Man legt denselben alsdann auf den Krystallträger *k* genau in die Mitte und schraubt den oberen Teil des Apparates so hoch, daß man durch denselben, statt der Brennebene des Sammellinsensystemes, den Krystall deutlich erblickt; durch Vergleichung mit den Kreuzarmen des Glasmikrometers, denen bei richtiger Stellung der Marken die Nicolhauptschnitte parallel sind, kann man leicht annähernd beurteilen, ob in denjenigen Stellungen, in welchen der Krystall beim Drehen dunkel erscheint, gewisse Kanten desselben den Diagonalen der Nicolquerschnitte parallel sind oder nicht.

Will man dagegen einen größeren Krystall im parallelen Lichte untersuchen, das Interferenzbild gepreßter oder gekühlter Gläser, einer Alaunplatte oder dergleichen beobachten, so hat man das Rohr *u* mit seinem gesamten Inhalte zu entfernen und durch das einfache kürzere Rohr *z* (Fig. 707, S. 731) zu ersetzen, in welches oben der Nicol *q* paßt (die unten angesetzte Kappe *δ* dient für die Stauroskopmessung und ist daher für diesen Fall fortzulassen; ebenso ist auf *l* der gewöhnliche Krystallträger *k* zu denken). Ferner hat man das Sammellinsensystem aus dem Rohre *f* zu entfernen und letzteres wieder in die Hülse *g* des Trägers *B* einzuschieben, wie es Fig. 707 zeigt.

Will man Platten, welche eine complicierte Zwillingsbildung oder Zusammensetzung aus verschiedenen, optisch anomalen Partien zeigen, im parallelen Lichte untersuchen, so empfiehlt sich eine mäßige Vergrößerung der Objecte, d. h. die Anwendung eines Mikroskopes.

Von großer Wichtigkeit für die Brauchbarkeit eines Polarisationsinstrumentes ist die Construction der Polarisatoren. Bei dem in Fig. 54 S. 70 abgebildeten Nicolschen Prisma ist die Trennung der beiden Strahlen, also die vollständige Polarisation des hindurchgehenden Lichtes vorhanden

innerhalb eines Kegels von 29° Öffnungswinkel, aber diese Größe des Gesichtsfeldes besteht nur für den dem stumpfen Winkel B nahe liegenden Teil der Austrittsfläche, und nach dieser Seite sind auch alle Strahlen verschoben; da außerdem die bedeutende Länge die Anwendung eines verhältnismäßig großen Kalkspatstückes, dessen Preis ein sehr hoher ist[1]), nötig macht und namentlich für den Analysator oft störend ist, hat man in neuerer Zeit mannigfache Modificationen der Polarisationsprismen in Anwendung gebracht. Ein kleineres Gesichtsfeld besitzen die sogenannten verkürzten Nicolschen Prismen, in welchen der Schnitt in einer andern Richtung geführt ist, ferner das Foucaultsche und das Glansche Prisma, welche statt des totalreflectierenden durchsichtigen Kittes eine planparallele Luftschicht zwischen den beiden Hälften enthalten. Am vollkommensten und deshalb an neueren Instrumenten vielfach verwendet ist das Polarisationsprisma von Hartnack und Prazmowski, welches bis zu einem Gesichtsfelde von 42° gebracht werden kann und, wie die beiden letzterwähnten Constructionen, gerade Endflächen besitzt. Eine vortreffliche Darstellung der optischen Eigenschaften, welche den verschiedenen Arten von Prismen zur Polarisation des Lichtes zukommen, gab H. Feussner in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1884, **4,** 41 f. (s. auch Zeitschr. f. Kryst. **11,** 410). Derselbe und gleichzeitig auch E. Bertrand (s. Zeitschr. f. Kryst. **11,** 179) schlug vor, an Stelle der immer teurer werdenden Prismen von Kalkspat solche von Flintglas zu nehmen und an die Stelle der Lamelle des durchsichtigen Kittes eine solche eines stark doppeltbrechenden Krystalles (dünne Spaltungsplatte von Kalkspat, Natronsalpeter oder dergl.) zu setzen. Bisher scheinen solche Polarisatoren noch wenig in Verwendung gekommen zu sein.

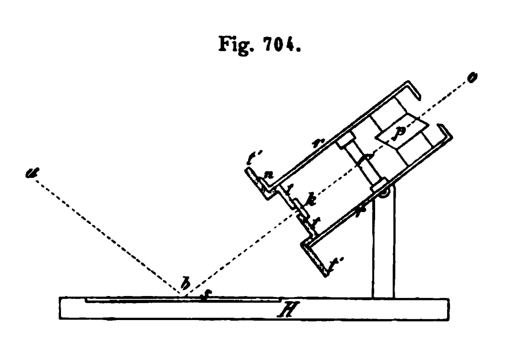
Stauroskop.

Um den Winkel, welchen eine Auslöschungsrichtung mit einer Krystallkante bildet, genauer zu bestimmen, als es mit einem gewöhnlichen Konoskope oder einem Polarisationsmikroskope möglich ist, bedient man sich eines besonderen, von v. Kobell erfundenen Instrumentes, des Stauroskopes, dessen Princip bereits S. 713 erörtert wurde. Dasselbe ist ein Polarisationsapparat für paralleles Licht, wie er Fig. 34 S. 53 abgebildet ist, dessen Krystallträger durch eine undurchsichtige drehbare Metallplatte ersetzt wird, welche in der Mitte eine kleine kreisrunde Öffnung hat. Auf dieser Platte ist eine Anzahl paralleler Geraden so eingeritzt, daß ihre Richtung genau parallel ist der Polarisationsrichtung des Polarisators, wenn

1) Als Ersatz des teuern Kalkspates ist das noch stärker doppeltbrechende Natriumnitrat (S. 479) vorgeschlagen, und es ist L. Wulff durch lange fortgesetzte Krystallisationsversuche gelungen, von diesem Salze so große und klare Krystalle zu erzielen, daß sie zur Herstellung von Nicols wohlgeeignet sind. Leider bietet die Herstellung und Erhaltung gut polierter ebener Flächen dieser sehr weichen und wenig widerstandsfähigen Krystalle gewisse Schwierigkeiten dar.

die Kreisteilung am Rande dieser Metallscheibe auf 0° steht. An dem ursprünglichen Kobellschen Instrumente, Fig. 704 im Durchschnitte dargestellt, ist der untere Nicol durch einen horizontalen Spiegel *s* von schwarzem Glase ersetzt, welcher das vom Himmel in der Richtung *ab* auffallende Licht, ziemlich vollkommen polarisiert, nach *o* hin reflectiert. Auf der Holzplatte *H*, in welche dieser Spiegel eingelassen ist, steht auf einem Fuße drehbar das Rohr *r*, welches vorn einen kleinen Nonius *n* trägt; in das vordere Ende dieses Rohres kann der Krystallträger *t*, welcher am Rande

Fig. 704.



t' an der dem Auge (*o*) zugekehrten Seite eine Kreisteilung besitzt, eingesteckt und darin gedreht werden. Der mit *t* bezeichnete vorspringende Teil desselben ist die obenerwähnte, in der Mitte durchbohrte Metallplatte mit den eingerissenen Linien. Vor dem Einstecken wird nun der Krystall *k* mit einer Ebene des auf seine Schwingungsrichtungen zu untersuchenden Pinakoides auf derselben so aufgeklebt, daß er deren Öffnung ganz bedeckt und daß eine Kante desselben den eingeritzten Linien so genau als möglich parallel ist. Im Innern des Rohres ist ferner eine senkrecht zur Axe geschnittene Kalkspatplatte *C* befestigt, und am Ende der analysierende Nicol *p*. Stellt man nun den drehbaren Krystallträger *t* so, daß der Nonius *n* auf demselben 0° anzeigt, so ist die erwähnte Kante des Krystalles parallel der Schwingungsrichtung des oberen Nicols, also normal zu der des eintretenden Lichtes. Wäre nun jener Kante eine Schwingungsrichtung der Krystallplatte parallel, so könnten die eintretenden Strahlen eine weitere Zerlegung nicht erleiden, sondern würden nach dem Durchgange durch den Krystall noch dieselbe Polarisation besitzen, wie beim Eintritte; sie gehen dann durch den Kalkspat und endlich durch den Analysator; da nicht nur parallele, sondern auch etwas geneigte Strahlen durch das Instrument gelangen, so würde man von der Interferenzfigur des Kalkspates den mittleren Teil, das schwarze Kreuz und die innersten Farbenringe, erblicken, ebenso, als wenn gar kein Krystall auf dem Träger *t* befestigt wäre. Bilden dagegen die Schwingungsrichtungen des Krystalles einen mehr oder weniger großen Winkel mit der erwähnten Kante, so erleidet das eintretende Licht eine Zerlegung im Krystalle; von den beiden entstehenden, senkrecht zueinander polarisierten Strahlen geht jedesmal nur ein Anteil durch den oberen Nicol; dieser Anteil würde, wenn er allein im eintretenden Lichte vorhanden wäre, im Kalkspate das complementäre Interferenzbild mit hellem Kreuze erzeugen, der im oberen Nicol vernichtete Anteil für sich allein dasjenige mit schwarzem Kreuze; es kann also

ebensowenig, als wenn der Kalkspat durch gewöhnliches Licht erleuchtet worden wäre (vgl. S. 42), ein Interferenzbild entstehen. Drehen wir aber nun den Krystallträger mit dem Krystalle, so wird es eine Stellung geben, bei der das schwarze Kreuz mit den Farbenringen wieder sichtbar wird (daher der Name »Stauroskop«); dies ist offenbar diejenige, in welcher eine Schwingungsrichtung des Krystalles parallel der Schwingungsrichtung des eintretenden Lichtes wird; der Winkel, um welchen man gedreht hat, ist demnach die gesuchte Schiefe der Auslöschungsrichtung gegen die vorher eingestellte Kante des Krystalles, falls man nach rechts gedreht hatte, im entgegengesetzten Falle das Complement des zu bestimmenden Winkels. Die Einstellung auf den Punkt, an welchem das Interferenzbild der Kalkspatplatte am deutlichsten erscheint, ist genauer auszuführen, als diejenige auf die größte Dunkelheit des Krystalles, namentlich, wenn man das Instrument mit monochromatischem Lichte beleuchtet, und man wird, wenn die Dispersion eine ziemlich große ist, hierdurch auch constatieren können, ob die Schwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben divergieren. Eine größere Genauigkeit, als etwa bis auf $\frac{1}{2}^{\circ}$—1°, ist indes auch hierbei nicht zu erzielen, und es ist daher von Březina statt der einfachen Kalkspatplatte eine Doppelplatte angewendet worden, welche aus zwei ein wenig schief gegen die Basis geschliffenen Kalkspatlamellen besteht, welche so aufeinander gelegt werden, daß die optischen Axen beider in einer Ebene, aber nach entgegengesetzter Seite geneigt sind. Diese Combination zeigt zwischen gekreuzten Nicols das Interferenzbild Fig. 705, sobald die Ebene, in welcher die optischen Axen der beiden Kalkspate liegen, der Schwingungsebene eines Nicols parallel ist; wird nun die Polarisation des eintretenden Lichtes nur wenig geändert, wird z. B. ein eingefügter stauroskopisch zu untersuchender Krystall, welcher diejenige Stellung hat, daß eine Schwingungsrichtung desselben parallel der eines Nicols ist, um einen sehr kleinen Winkel gedreht, so bewegt sich der Mittelbalken aus seiner verticalen Stellung, und das Bild erscheint wie Fig. 706. Die Stellung des drehbaren Krystalles, in der seine Schwingungsrichtung die erforderliche Orientierung hat, in welcher also der Mittelbalken genau so erscheint, wie in Fig. 705, läßt sich namentlich dann mit großer Schärfe ermitteln, wenn man zweimal die Kreisteilung des Krystallträgers abliest, erstens, wenn der dunkle Mittelbalken ein wenig links, zweitens, wenn er ebensoviel nach rechts gedreht erscheint, und das Mittel beider Ablesungen als Normalstellung annimmt. Mit Hilfe dieser Doppelplatte kann man mit dem Stauroskope die Lage einer Schwingungsrichtung bis auf wenige Minuten genau

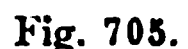




Fig. 706.

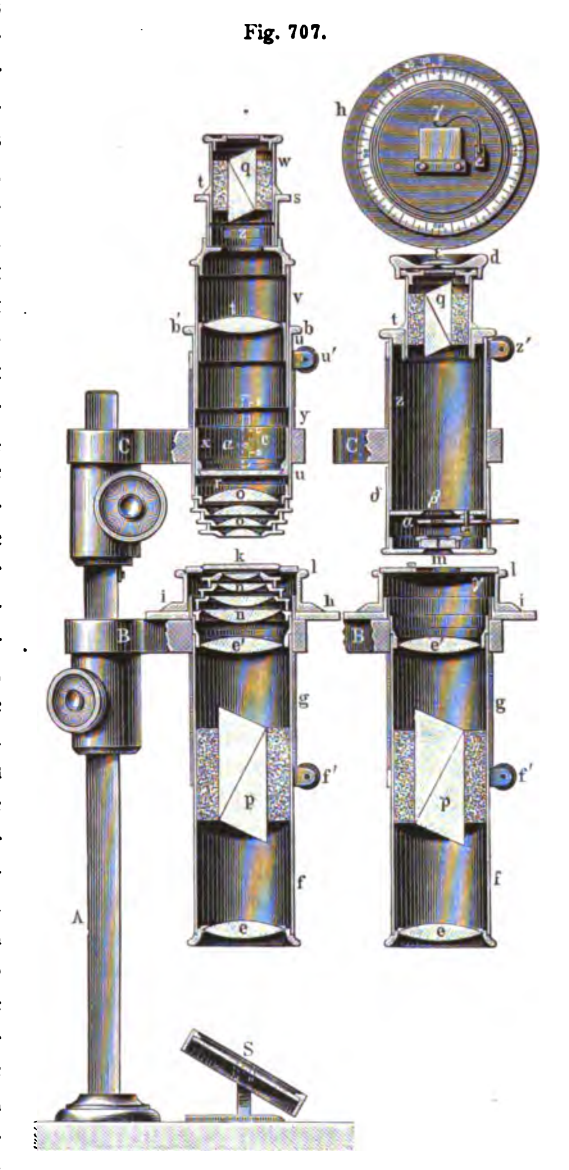


bestimmen, wobei man sich selbstverständlich des einfarbigen Lichtes bedienen muß. Dabei hat man jedoch noch einen Fehler in Rücksicht zu ziehen, welcher dadurch hervorgebracht wird, daß man die als Ausgangsrichtung dienende Kante des Krystalles nach dem Augenmaße nicht genau parallel den auf dem Krystallträger eingeritzten Linien machen kann, wenn man den Krystall auf diesen aufklebt. Offenbar wird aber nur, wenn dieser Parallelismus vollkommen erreicht ist, die Drehung von der Nullstellung bis zu der, bei welcher das Interferenzbild in der richtigen Weise auftritt, genau gleich dem Winkel zwischen der Schwingungsrichtung und der betr. Kante des Krystalles sein; eine exacte Bestimmung der Orientierung der Schwingungsrichtungen im Krystalle kann also nur erreicht werden, wenn die Richtung der Krystallkante mit der gleichen Genauigkeit gemessen werden kann, mit welcher die Einstellung der Schwingungsrichtung erfolgt. Dies ist der Fall bei der vom Verf. angegebenen Construction des Stauroskopes, welche von Fuess ausgeführt wurde und sich außerdem dadurch von der älteren unterscheidet, daß an Stelle der Březinaschen Doppelplatte die von Calderon (Zeitschr. f. Kryst. 1878, **2**, 68 ff.) vorgeschlagene Platte zur Einstellung der Schwingungsrichtungen benutzt wird. Dieselbe besteht in einem künstlichen Zwillinge von Kalkspat, in der Weise hergestellt, daß man ein Rhomboeder nach der kurzen Diagonale durchschneidet, von jeder Hälfte eine keilförmige Partie abschleift und beide mit den Schliffflächen aneinander kittet. Durch Abschleifen des ein- und ausspringenden Winkels erhält man eine planparallele Platte, halbiert durch die Trennungsebene der beiden Kalkspatstücke, welche Ebene, von oben gesehen, als eine äußerst feine gerade Linie erscheint. Die beiden Hälften dieser Platte zeigen genau den gleichen Grad der Auslöschung, wenn die Nicols des Instrumentes gekreuzt sind und der Hauptschnitt des einen genau der Trennungslinie der Doppelplatte parallel ist. Fügt man eine Krystallplatte, deren Schwingungsrichtung abweicht, in den Gang der Lichtstrahlen ein, so werden die beiden Hälften wieder ungleich erhellt bzw. gefärbt erscheinen, und erst wenn der Krystall so weit gedreht ist, daß seine Schwingungsrichtungen genau mit denen der Nicols zusammenfallen, ist die Gleichheit der beiden Hälften der Doppelplatte wiederhergestellt.

Als Stauroskop dient die in Fig. 707 (rechts) dargestellte Zusammensetzung des verticalen Polarisationsinstrumentes, in welcher dasselbe für paralleles Licht eingerichtet ist. Da jede Abweichung der Sehrichtung von der Axe des Apparates wieder eine Ungleichheit der beiden Plattenhälften hervorbringt, so kommt es bei dieser optischen Einstellung hauptsächlich auf den Parallelismus der Strahlen an. Es wird deshalb auf die gewöhnliche, über dem Analysator befindliche Kappe eine andere (ε) mit ganz kleiner Öffnung oder eine Irisblende gesetzt. Auf das Rohr z wird ein Messingrohr δ aufgeschoben, welches unten durch die Doppelplatte geschlossen ist und eine Diaphragmenschraube α enthält, mit deren Hilfe man je nach der Größe des zu untersuchenden Krystalles das Gesichtsfeld einschränken kann; diese

Scheibe trägt Öffnungen von 1—10 mm Durchmesser und kann, da sie mit ihrer Drehungsaxe mit dem festen Diaphragma β verbunden ist und durch einen Schlitz des Messingrohres herausragt, an diesem Teile leicht gedreht werden. Statt des Krystallträgers k wird nun der Träger γ, ebenfalls mit einer am Rande befindlichen Durchbohrung in den Stift des Rohres l passend, aufgesetzt; derselbe, über dem Instrumente noch einmal, von oben gesehen, gezeichnet, besteht aus einer Messingplatte mit rectangulärem weiten Ausschnitte, neben welchem mit zwei Schräubchen eine Stahlplatte aufgeschraubt ist, deren nach der Mitte zu gerichtete Seitenfläche nach unten abgeschrägt ist, während die obere Kante derselben eine sehr wenig von einer Geraden abweichende Wellenlinie darstellt, von welcher zwei Punkte, rechts und links dem Ende genähert, am meisten nach der Mitte des Instrumentes zu hervorragen (eine so schwache Krümmung ist deshalb gewählt worden, um die Abnutzung der vorspringenden Stellen auf ein Minimum zu reducieren). Wenn man also an diese Schneide der Platte eine zur Ebene des Krystallträgers verticale ebene Fläche anlegt, so wird diese nur in zwei Punkten von jener berührt; die Verbindungslinie

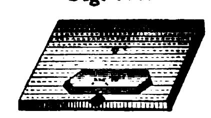
Fig. 707.



dieser beiden Punkte ist genau parallel der Geraden zwischen den Punkten 90° und 270° auf dem Teilkreise hi, mit welchem die Platte γ ja in fester Verbindung steht. Auf letztere wird nun eine kleine rectanguläre, aus Spiegelglas verfertigte Platte so aufgelegt, daß sie den viereckigen Ausschnitt von γ völlig bedeckt und zugleich durch eine kleine Feder mit

einer Seitenfläche an die Schneide der aufgeschraubten Stahlplatte gegengedrückt wird. Diese Seitenfläche ist genau senkrecht zur Oberfläche geschliffen und poliert. Aus dem Bisherigen folgt nun, daß die von der rechtwinkeligen Seitenfläche gebildete Kante der Glasplatte, wenn diese in der erwähnten Weise befestigt ist, genau parallel sein muß der Verbindungslinie zwischen den Punkten 90° und 270° am Teilkreise, welche der beiden großen Flächen auch nach oben gekehrt sei. Auf die Glasplatte wird der Krystall mit möglichst wenig Canadabalsam aufgeklebt. Zu diesem Zwecke wird die Glasplatte herabgenommen, die Krystallkante, mit welcher man die Schwingungsrichtung vergleichen will, ungefähr parallel und möglichst nahe an diejenige Kante der Glasplatte, mit welcher letztere an der Stahlplatte anliegt, gebracht und so der Krystall angekittet (s. Fig. 708).

Fig. 708.



Möge die Oberfläche der Glasplatte mit v', deren rechtwinkelige Seitenfläche mit v'', die Oberfläche der Krystallplatte mit w', die Randfläche, welche die erwähnte Kante mit ihr bildet, mit w'' bezeichnet werden. Es wird nun die Glasplatte mit dem Krystalle auf den Tisch eines Reflexionsgoniometers aufgesetzt und die Kante $v' v''$ centriert und justiert; war der Krystall vorher fest angedrückt, so muß seine Fläche w' parallel v' sein, also die von beiden gelieferten Reflexbilder des Collimatorsignales im Fernrohre zusammenfallen; das von der andern Krystallfläche w'' reflectierte Bild[1]) wird jedoch nur dann in der Zone $v' v''$ liegen, wenn die Kante $w' w''$ wirklich genau der Kante $v' v''$ parallel ist. Statt diesen Parallelismus herzustellen, was ein langes Probieren erfordern würde, verfährt man in einfacherer Weise so, daß man den Winkel bestimmt, um welchen der von w'' reflectierte Strahl von der Ebene abweicht, in der die Reflexion von v', v'', w' stattfindet, und aus diesem Winkel berechnet, wieviel die beiden Kanten gegeneinander gedreht sind.

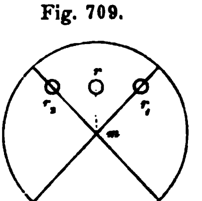
Für die Bestimmung dieser Correction kann jedes Reflexionsgoniometer benutzt werden, wenn das Fernrohr bei Anwendung des schwächsten Oculares ein so großes Gesichtsfeld hat, daß nach dem Justieren der Flächen v' und v'' das Bild von w'' noch im Gesichtsfelde sichtbar ist, wenn selbst die Krystallkante um 2—3° schief angelegt worden war. Daraus, ob dasselbe zu hoch oder zu tief ist, ersieht man, nach welcher Seite die Kante $w' w''$ gegen diejenige $v' v''$ gedreht ist; und wieviel die Abweichung des von w'' reflectierten Strahles aus der Reflexionsebene der justierten Flächen beträgt, kann man durch ein feines, in der Brennebene des Fernrohres befestigtes Glasmikrometer (s. S. 668 Anmerk.) bestimmen, von dem vorher durch Messung festgestellt worden ist, welchem Winkel ein Teilstrich desselben

1) Wenn die Krystallplatte sehr dünn, die Fläche w'' also sehr schmal ist, kann es kommen, daß der vorspringende Teil der Glasplatte die Spiegelung an w'' ganz verhindert. Für solche Fälle benutzt man eine Glasplatte, wie sie in Fig. 708 abgebildet ist, an welcher ein Stückchen der vorspringenden Kante ausgeschliffen ist, um den Lichtstrahlen den Zugang zur Fläche w'' zu gestatten.



entspricht. Dreht man das Mikrometer so, daß seine Teilung vertical aufrecht im Gesichtsfelde, dessen Mittelpunkt dem Nullpunkte jener entspricht, steht, so gehen die Reflexbilder der beiden justierten Flächen beim Drehen genau durch den Nullpunkt, das der Fläche w'' nicht; man stellt letzteres nun auf die Teilung ein, liest an dieser die Abweichung in Strichen und (durch Schätzung) deren Teilen ab und findet durch Umrechnung in Winkelwert den Winkel δ, die Abweichung des von w'' reflectierten Strahles von der Ebene der übrigen. Um aus δ die gesuchte Größe α, d. i. den Winkel, welchen die Kante $w' : w''$ mit $v' : v''$ bildet, zu berechnen, bedarf es der Kenntnis des Einfallswinkels der Strahlen bei der Reflexion und des Winkels der Flächen $w' : w'' = \gamma$. Der letztere muß durch Messung bestimmt sein; was den ersteren betrifft, so macht man denselben $= 45^\circ$, d. h. man stellt die optische Axe des Fernrohres auf dem Goniometer genau normal zum Collimator, indem man erst auf diesen direct einstellt und dann das Beobachtungsfernrohr genau um 90° dreht. Um die Justierung der Kante $v' v''$ des Glases und die Abweichung des Reflexes aus der Zone recht genau bestimmen zu können, stellt man alsdann den Webskyschen Spalt horizontal. Benutzt man das S. 655 angeführte Signal c, so kann man die Abweichung aus der Zone auch ohne Glasmikrometer nach einer von Websky (Zeitschr. f. Kryst. 1880, **4**, 568) vorgeschlagenen Methode bestimmen: Das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres wird unter 45° gestellt (s. Fig. 709), was durch einen entsprechenden Kerb, in den die Nase des Klemmringes geschoben wird, genau erzielt werden kann; nachdem die Zone $v' v''$ so justiert ist, daß die Reflexe beim Drehen durch die Mitte des Fadenkreuzes passieren, stellt man das Reflexbild der abweichenden Fläche w'' einmal in den einen Faden (Position r_1), das andere Mal in den zweiten Faden (Position r_2) ein; die zwischen diesen beiden Positionen abgelesene Drehung des Krystallträgers mißt den halben Bogen $r_1 r_2$ und somit den gesuchten Abstand $rm = \delta$.

Fig. 709.



Hat man bei der Messung des Winkels δ nach einer der beiden angegebenen Methoden das Beobachtungsfernrohr und den Collimator senkrecht zueinander gestellt, so folgt die gesuchte Correction α aus den Winkeln δ und γ nach der Formel (s. Websky, Zeitschr. f. Kryst. **4**, 567; Liebisch, ebenda **7**, 304):

$$\sin \alpha = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma \sqrt{2}} .$$

Zu größerer Bequemlichkeit ist die folgende Tabelle berechnet worden, welche gestattet, die gesuchte Correction α für bestimmte Werte von γ und δ unmittelbar abzulesen, bzw. sehr einfach zu interpolieren.

Tabelle der Correction α für die Stauroskopmessung.

	$\gamma = 20^\circ$	$= 25^\circ$	$= 30^\circ$	$= 35^\circ$	$= 40^\circ$	$= 50^\circ$	$= 60^\circ$	$= 70^\circ$	$= 80^\circ$	$= 90^\circ$
$\delta = 0^\circ 10'$	0°21′	0°17′	0°14′	0°12′	0°11′	0° 9′	0° 8′	0° 8′	0° 7′	0° 7′
0 20	0 41	0 33	0 28	0 25	0 22	0 18	0 16	0 15	0 14	0 14
0 30	1 2	0 50	0 42	0 37	0 33	0 28	0 24	0 23	0 22	0 21
0 40	1 23	1 7	0 57	0 49	0 44	0 37	0 33	0 30	0 29	0 28
0 50	1 43	1 24	1 11	1 2	0 55	0 46	0 41	0 38	0 36	0 35
1 0	2 4	1 40	1 25	1 15	1 6	0 55	0 49	0 45	0 43	0 42
1 10	2 25	1 57	1 39	1 26	1 17	1 5	0 57	0 53	0 50	0 49
1 20	2 45	2 14	1 53	1 39	1 28	1 14	1 5	1 1	0 58	0 57
1 30	3 6	2 31	2 7	1 51	1 39	1 23	1 13	1 8	1 5	1 4
1 40	3 27	2 47	2 21	2 3	1 50	1 32	1 22	1 15	1 12	1 11
1 50	3 48	3 4	2 36	2 16	2 1	1 42	1 30	1 23	1 19	1 18
2 0	4 8	3 21	2 50	2 28	2 12	1 51	1 38	1 30	1 26	1 25
2 10	—	3 38	3 4	2 40	2 23	2 0	1 46	1 38	1 33	1 32
2 20	—	3 54	3 18	2 53	2 34	2 9	1 54	1 45	1 41	1 39
2 30	—	4 11	3 32	3 5	2 45	2 18	2 2	1 53	1 48	1 46
2 40	—	—	3 46	3 17	2 56	2 28	2 11	2 0	1 55	1 53
2 50	—	—	4 1	3 20	3 7	2 37	2 19	2 8	2 2	2 0
3 0	—	—	4 15	3 42	3 18	2 46	2 27	2 15	2 9	2 7

Beispiel: Werde ein Mikrometer angewendet, dessen Teilstriche einen Winkelabstand von $18' 30''$ besitzen; seien die Flächen v' und v'' so genau justiert, daß das Signalbild auf dem Nullstriche steht, wenn es in die Mitte eingestellt wird, und sei die Abweichung des Reflexes von $w'' = 3{,}3$ Teilstrich, d. h. $\delta = 1^\circ 1'$; sei der Winkel $w' : w'' = \gamma$ mit Vernachlässigung der Minuten $= 54^\circ$, so folgt aus der Tabelle die Correction α

für $1^\circ 1' = 0^\circ 56'$ (Columne 50°)
- - $= 0\ 50$ (- 60°),

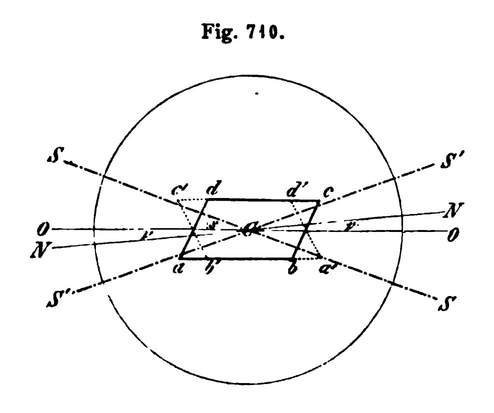
der Wert für die zu interpolierende Columne 54° ist also

$$\alpha = 0^\circ 54'.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß man die Lage der Kante des Krystalles gegen die Nullrichtung des Nonius am Instrumente ebenso genau bestimmen kann, wie man Krystallwinkel zu messen imstande ist. Würde man die Schwingungsrichtung des unteren Nicols ganz genau jener Richtung parallel machen können, welche den Nullpunkt mit dem Mittelpunkte des festen Nonienkreises verbindet, so gäbe die Drehung des Teilkreises (mit der Krystallplatte) von 0 bis zu der Position, wo die optische Einstellung erkennen läßt, daß eine Schwingungsrichtung des Krystalles parallel der des Polarisators ist, unmittelbar den Winkel der ersteren mit der Nullrichtung des Kreises und — nach Zufügung der Correction α — denjenigen mit der Krystallkante. Jenen Parallelismus herzustellen, ist jedoch mittels der am Instrumente angebrachten Marken, bzw. Klemmringe, nicht so genau möglich, als es die Messung erfordert. Der hierdurch hervorgebrachte Fehler läßt sich aber leicht eliminieren, wie folgende Betrachtung zeigt.

Sei in Fig. 710: OO die Richtung 90°—270° an dem drehbaren Kreise, wenn dieser genau auf 0 gestellt ist (wie es die obere Fig. 707 darstellt), und sei das Rohr f so eingeschoben, daß die Schwingungsrichtung des einen der beiden gekreuzten Nicols nicht genau parallel OO sei, vielmehr die Richtung NN habe, welche mit OO den unbekannten Winkel v einschließt; sei ferner der ausgezogene Rhombus $abcd$ die Krystallplatte, deren eine Kante ab genau parallel OO[1]), SS deren Schwingungsrichtung, so ist der Winkel $s = SCO$ derjenige, welcher mittels des Stauroskopes gefunden werden soll. Dreht man nun den Krystall bis zur Gleichheit der beiden Hälften der Calderonschen Doppelplatte, d. h. bis $SS \parallel NN$, so ist der abgelesene Drehungswinkel $SCN = s + v$, also um v größer, als der gesuchte. Legt man nunmehr die Platte um, so daß die vorher oben befindliche Fläche unten zu liegen kommt, die vorher OO parallele Kante ab es auch jetzt ist, der Krystall also die durch den punktierten Umriß $a'b'c'd'$ bezeichnete Stellung hat, bei welcher $S'S'$ dessen Schwingungsrichtung ist, und dreht wieder bis zum Eintritte gleicher Auslöschung der Doppelplatte, d. h. bis $S'S' \parallel NN$, so ist der abgelesene Drehungswinkel $S'CN$, d. h. $s - v$, also um v zu klein gegen den gesuchten. Addiert man aber die beiden, so gefundenen Drehungen

Fig. 710.



$$s + v,$$
$$\text{und } s - v,$$

so erhält man $2s$, d. h. das arithmetische Mittel beider ist der gesuchte Winkel s.

Hieraus ergibt sich nun folgendes Verfahren zur Bestimmung des Winkels, welchen eine Schwingungsrichtung mit einer Kante eines Krystalles bildet:

Das Polarisationsinstrument für paralleles Licht wird derart eingerichtet, wie es Fig. 707 (rechts) darstellt; der Polarisator wird so gestellt, daß seine Schwingungsrichtung ungefähr parallel der Richtung 0° auf dem Nonienkreise ist, der Analysator genau senkrecht dazu, also auf vollständige Dunkelheit. Alsdann wird die Kappe δ, welche die Calderonsche Doppelplatte enthält, über das Rohr z geschoben: letzteres hat unten einen Schlitz, in welchen das Ende eines in δ sitzenden Schräubchens paßt; dadurch wird die Kappe an der Drehung verhindert und in derjenigen Stellung

1) Dieser Parallelismus braucht nicht erfüllt zu sein, wenn nur die Abweichung davon bekannt ist; diese ist aber die vorher besprochene Correction α.

festgehalten, in welcher die beiden Hälften der Doppelplatte genau den gleichen Grad der Auslöschung zeigen. Alsdann wird die Glasplatte mit dem aufgeklebten Krystalle, an welcher Combination vorher die Correction α festgestellt worden ist, auf den weiten Ausschnitt der in Fig. 707 oben dargestellten Platte vorsichtig aufgesetzt, wobei man die Feder γ etwas zurückzieht, und nun der vorher auf 0 gestellte Kreis gedreht bis zum Eintritte des gleichen Grades der Auslöschung der beiden durch die Halbierungslinie der Doppelplatte getrennten Hälften des Krystalles. Diese Stellung wird am genauesten so gefunden, daß man diejenigen Positionen abliest, welche eben noch eine Ungleichheit der beiden Hälften erkennen lassen, einmal, wenn die rechte, das andere Mal, wenn die linke heller erscheint, und daß man von diesen beiden Ablesungen, welche nur um Bruchteile eines Grades verschieden sein sollen, das Mittel nimmt. Diese Operation wird zweckmäßig 5—6 mal wiederholt und von den erhaltenen Resultaten das arithmetische Mittel genommen. Alsdann wird die Glasplatte mit dem darauf befestigten Krystalle abgehoben und vorsichtig, um den letzteren nicht zu verschieben, umgelegt, so daß die Oberfläche mit dem Krystalle nach unten und die Fläche v'' wieder an die Stahlschneide angedrückt liegt, der Krystall sich also in dem rectangulären Ausschnitte der kreisförmigen Platte befindet. Damit er hierbei nicht an den Rand des Ausschnittes anstößt, muß er etwas von der Kante $v':v''$ entfernt sein (s. Fig. 708). Nach dem S. 731 über die Construction der Stahl- und der Glasplatte Bemerkten sieht man leicht ein, daß durch diese Manipulation der Krystall ganz genau so gedreht worden ist, wie es Fig. 710 darstellt; wiederholt man also jetzt die Einstellungen durch Drehen nach der andern Seite ganz in derselben Weise, nimmt von deren Mittel und dem zuerst erhaltenen die halbe Summe und corrigiert endlich die resultierende Zahl noch mit dem Werte von α in positivem oder negativem Sinne, je nach der Seite, nach welcher die Krystallkante $w':w''$ schief angelegt war, so hat man den gesuchten Winkel, welchen die Schwingungsrichtung mit jener Kante einschließt.

Die Calderonsche Doppelplatte hat vor der S. 729 beschriebenen Březinaschen den Vorteil, daß man den Krystall während der ganzen Operation im Instrumente erblickt. Was die Genauigkeit der Einstellung bei Anwendung der einen oder der andern betrifft, so hängt diese wohl von der Beschaffenheit des Auges ab, d. h. von der Empfindlichkeit des einzelnen Beobachters für geringe Unterschiede der Helligkeit oder für kleine Ortsveränderungen in einer Interferenzfigur. Will man mit der Březinaschen Platte arbeiten, so bedarf man schwach convergierenden Lichtes, um die in Fig. 705 abgebildete Interferenzerscheinung zu sehen. Man schraubt zu dem Zwecke von dem verticalen Polarisationsinstrumente Fig. 703 nur die drei untersten Objectivlinsen o ab und behält die oberste größte derselben im Rohre u[1]). Auf das letztere wird dann von unten

1) Da nunmehr die Bildebene des Objectives viel höher liegt, als vorher, muß man das Ocularrohr v so weit als möglich herausziehen, um ein scharfes Interferenzbild zu erhalten.



die, die Doppelplatte enthaltende, Kappe aufgeschoben, welche eine ähnliche Gestalt hat, wie δ in Fig. 707, aber kürzer ist und keine Diaphragmen enthält. Durch Drehen dieser Kappe gibt man der Doppelplatte die erforderliche Stellung gegen die Hauptschnitte der vorher sorgfältig gekreuzten Nicols und führt die optische Einstellung des zu untersuchenden Krystalles nach S. 729 aus. Da hierbei kein Licht neben dem Krystalle vorübergehen darf, wird die S. 732 beschriebene Glasplatte durch eine solche von schwarzem Glase ersetzt, in welcher sich eine Öffnung befindet; die Krystallplatte wird so aufgeklebt, daß sie diese (in Fig. 708 durch einen punktierten Kreis angedeutete) Öffnung vollständig verdeckt. Das ganze übrige Verfahren ist natürlich das gleiche, wie bei Anwendung der Calderonschen Platte.

Über die Prüfung und Justierung des Stauroskopes s. Laspeyres, Zeitschr. f. Kryst. 1882, 6, 429. Derselbe Autor hat ferner eingehende Untersuchungen darüber angestellt (ebenda 1884, 8, 97), wie eine noch größere Genauigkeit der stauroskopischen Messungen durch Anwendung eigens construierter Polarisatoren zu erzielen sei.

In einfacherer Weise, als mit dem Stauroskope, kann die Bestimmung der Schwingungsrichtungen nach Stöber (Zeitschr. f. Kryst. 1897, 29, 29 f.) auch ausgeführt werden mit der S. 686 beschriebenen Vorrichtung (s. Fig. 691). Zu diesem Zwecke werden Fernrohr F und Collimator C mit Nicols versehen und senkrecht zur Ebene des Verticalkreises gestellt; der Hauptschnitt des Collimatornicols wird möglichst genau senkrecht zum horizontalen Teilkreise gestellt und der Nicol von F gedreht, bis das Bild des Signales (es wird das Punktsignal c S. 655 benutzt) verschwindet. Alsdann wird an Stelle des Krystallträgers die Spiegelglasplatte T (Fig. 691 unten) in den Verticalkreis eingesetzt und die auf einem Objectglase befindliche Krystallplatte mittels der beiden Federklammern festgehalten. Die genaue Verticalstellung der zur Messung zu benutzenden Krystallkante wird (ohne Stauroskopcorrection) dadurch bestimmt, daß der von der betreffenden seitlichen Fläche des Krystalles (w'' Fig. 708) gelieferte Reflex durch geeignete Drehung des Verticalkreises und des Fernrohres F in das Fadenkreuz des letzteren gebracht wird; diese Stellung des Verticalkreises wird abgelesen, dann das Fernrohr wieder dem Collimator parallel gestellt, darauf der Verticalkreis gedreht, bis das durch den Krystall gesehene Signalbild verschwindet, und diese Stellung abgelesen. Die Umklappung der Krystallplatte zur Correction der Nicolstellungen (S. 735) erfolgt durch halbe Umdrehung des Verticalkreises und daher infolge der Einrichtung des Instrumentes genau um die Verticalrichtung, welcher die Krystallkante parallel gemacht worden ist.

Da die stauroskopische Untersuchung fast nur bei monoklinen und triklinen Krystallen vorgenommen wird, bei denen die Schwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben dispergiert sind, so versteht es sich von selbst, daß das Instrument hierbei mit homogenem Lichte erleuchtet werden muß. Am besten verwendet man einen Bunsenschen Brenner, dessen Rohr oben eine plattgedrückte Form besitzt, so daß das Gas aus

einem etwa 30 mm langen und 3 mm breiten Schlitze austritt; man erhält dann eine etwa 40 mm breite und hohe Flamme, welche man in ihrer ganzen Flächenausdehnung färbt, indem man in den unteren Teil derselben von jeder Seite her eine, an einem Platindrahte befindliche Perle von geschmolzenem schwefelsauren Lithium (rot), schwefelsauren Natrium (gelb) oder schwefelsauren Thallium (grün) einführt. Diese Flamme stellt man dann möglichst nahe vor dem Spiegel des Polarisationsinstrumentes auf und dreht diesen so, daß ihr Bild gerade in die Mitte des Gesichtsfeldes reflectiert wird[1]).

Optischer Universalapparat.

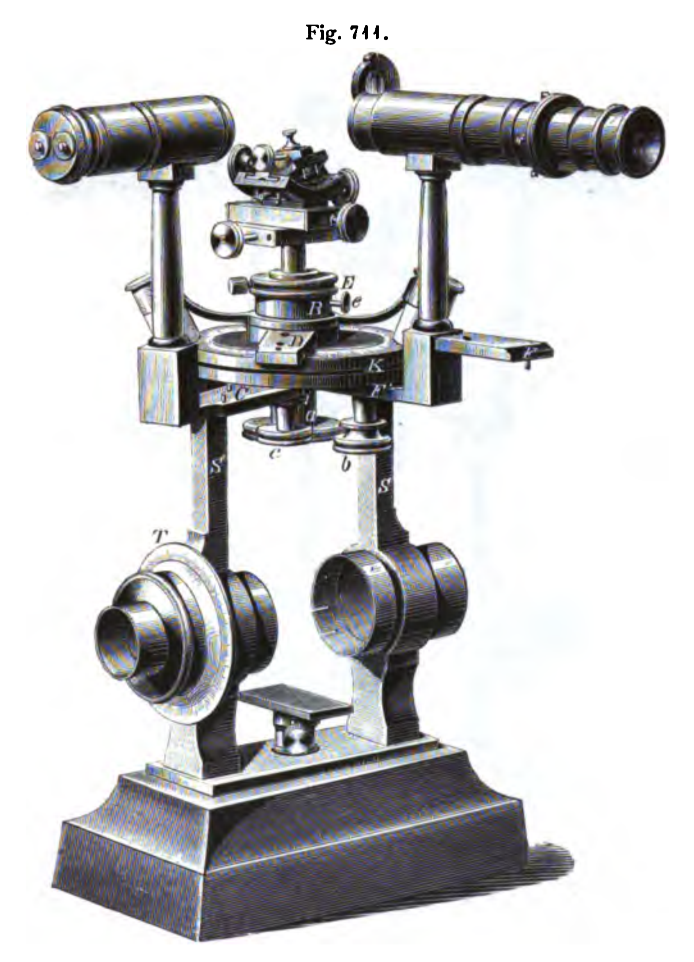
a) **Einrichtung als Goniometer und Refractometer.** Wie bereits S. 723 angeführt wurde, bildet das in Fig. 703 dargestellte Konoskop, wie es von der Firma Fuess geliefert wird, zugleich einen Teil eines krystallographisch-optischen Universalapparates, mit welchem alle wichtigen, bei der Untersuchung von Krystallen vorkommenden Arbeiten ausgeführt werden können. Für mehrere derselben, namentlich für die Axenwinkelmessung, ist statt des verticalen Statives (Fig. 703) ein anderes vorzuziehen, in welches die optischen Teile in horizontaler Richtung eingeschoben werden können und das außerdem einen Teilkreis trägt; da letzterer mittels der Nonien eine Ablesung auf 1′ gestattet, kann dieses Stativ zu einem sehr brauchbaren kleinen Goniometer benutzt werden, welches in Fig. 711 in perspectivischer Ansicht ($\frac{1}{3}$ nat. Gr.) abgebildet ist. An den festen Teilkreis K wird von unten her der Arm F' eines Beobachtungsfernrohres (mit Vorsatzlupe zum

1) Wie bereits S. 691 erwähnt wurde, ist es bei derartigen Arbeiten zu empfehlen, den Bunsenschen Brenner unter einen Abzug zu stellen, welcher mit dem Schornstein in Verbindung steht. Für die monochromatischen Flammen hat H. Laspeyres in der Zeitschr. f. Instrumentenk. 1882, 79, eine sehr praktische Lampe beschrieben, mit welcher ein senkrechtes Metallstück mit drei horizontalen Armen verbunden ist, an deren Ende sich je eine Rolle von Platindraht oder Platingaze (für das Thalliumsalz seiner leichten Reducierbarkeit wegen ein Bündel Asbestfasern) befindet, welche mit dem geschmolzenen Salze getränkt werden und, in die Flamme gebracht, die ganze Breite derselben intensiv und andauernd färben. Eine einfache Drehung der Arme genügt, um die Färbung durch Natrium mit der durch Lithium oder Thallium zu vertauschen. Will man diese breite monochromatische Flamme auch zu andern Zwecken (Bestimmung der Schwingungsrichtung unter dem Mikroskope, Messung der Brechungsindices, des Winkels der optischen Axen usw.) benutzen, so empfiehlt sich die folgende Einrichtung: Der Brenner mit der erwähnten Vorrichtung ist mittels eines knieförmigen Trägers an einem Holzstück befestigt, welches zwischen zwei an der Wand unter dem Abzugskasten angebrachten Holzschienen verschiebbar ist und durch eine Schraube in der gewünschten Höhe geklemmt werden kann. Der knieförmige Träger ist so hoch, daß der Brenner sich in dem unten offenen Abzugskasten befindet, und zwar dicht an einem an der Vorderseite angebrachten, ziemlich hohen Glas- und Glimmerfenster, vor welchem der Apparat aufgestellt wird; je nach dessen Höhe wird die Flamme hinter dem Fenster in die erforderliche Höhe gestellt. Um sie anzünden und die Färbung derselben regulieren zu können, hat der Abzugskasten an der Seite eine Tür. Das Innere in der Nähe des Fensters wird zweckmäßig mit Asbestpappe ausgefüttert, damit man die Flamme der Vorderseite ohne Gefahr möglichst nähern kann. Brenner der beschriebenen Art mit dem knieförmigen Träger liefern Böhm und Wiedemann in München (s. Preisverz. am Schlusse).



Centrieren) mittels der Schraube *b* angeschraubt; die radiale Stellung des Armes *F'* wird durch zwei kleine Stellstifte, welche in zwei entsprechende Öffnungen der Unterseite des Kreises passen, bestimmt. In den Konus *E* (vgl. auch den Durchschnitt Fig. 714 S. 744) wird eine cylindrische Axe eingeschoben, welche oben eine vollständige Fuesssche Centrier- und Justiervorrichtung trägt und durch die kleine, im obersten Teile von *E* befindliche Schraube in der erforderlichen Höhe fixiert wird; an das untere Ende

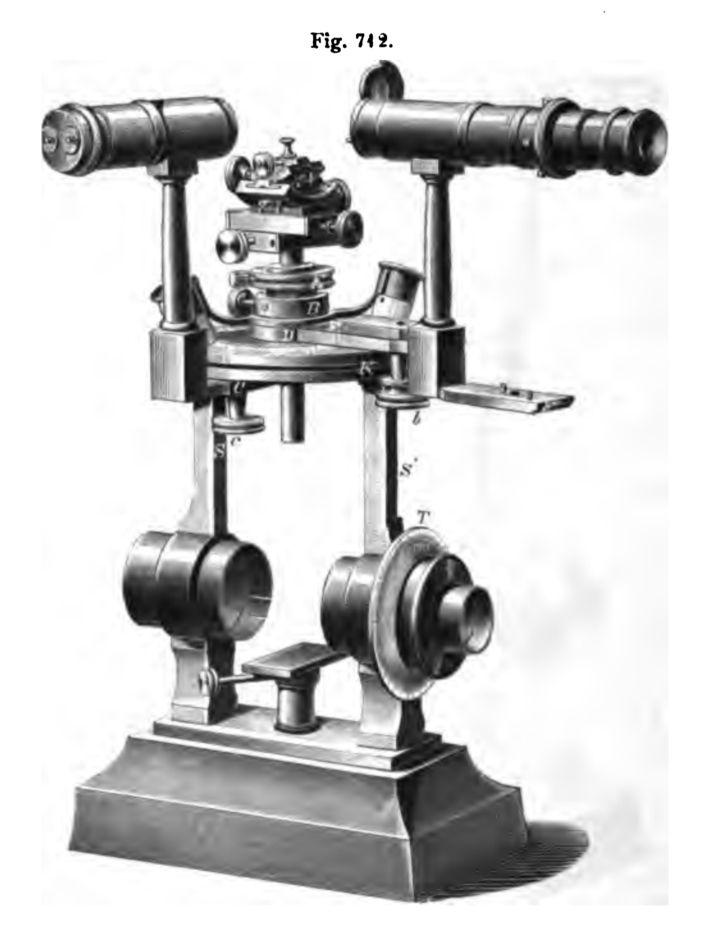
Fig. 711.



von *E* wird dagegen ein stärkerer Cylinder *a* mit einer am Rande gekerbten Scheibe zu bequemerer Drehung angeschraubt; mit diesem bewegt man beim Centrieren und Justieren den Konus *E* (nachdem man die Schraube *e* gelöst hat) und mit ihm die innere Axe, auf welcher sich der Krystall befindet. Beginnt man die eigentliche Messung, so hat man *e* wieder anzuziehen und den Arm *D* mittels der daran befestigten Klemmschraube (in der Figur der Deutlichkeit wegen fortgelassen) zu drehen; der Träger des Fernrohres ist so construiert, daß er der Klemmschraube freien Durchgang

gestattet, daher man D und somit den Krystall ungehindert um 360° drehen kann. Mittels einer zweiten Durchbohrung des Kreises wird der mit einem Webskyschen Spalte ausgerüstete Collimator fest mit dem Teilkreise verbunden. Zu dem Zwecke wird in die weite Öffnung des Trägers C eine in der Fig. mit i bezeichnete runde geschwärzte Messingscheibe eingelegt, durch diese die Schraube c hindurchgesteckt und in die Kreisplatte eingeschraubt, wobei man dem Arme C und damit dem Collimator eine möglichst genau radiale Richtung zum Kreise geben muß.

Fig. 712.



Will man das Goniometer zur Messung von Brechungsindices benutzen, so wird, wie Fig. 712 zeigt, der Träger des Beobachtungsfernrohres umgekehrt aufgesetzt, d. h. der Arm F auf dem beweglichen Arme D festgeschraubt; steckt man zu dem Zwecke das Fernrohr in entgegengesetzter Richtung in seine Hülse, so hat es nunmehr genau die gleiche Lage, wie in Fig. 711, nur daß es jetzt mit D und den Nonien um den Mittelpunkt des Kreises K drehbar ist, und daher seine Drehung abgelesen werden kann. Das Prisma, dessen Brechungsindex gemessen werden soll, wird,

wie in der Zusammensetzung Fig. 711, auf den Tisch der Centrier- und Justiervorrichtung aufgesetzt; seine Drehung muß aber jetzt unabhängig gemacht werden von derjenigen des Armes D und des Beobachtungsfernrohres. Dies ist dadurch erreicht, daß der Arm C des Collimators jetzt in anderer Weise an den Kreis angeschraubt wird, als vorher, nämlich so, daß die beiden in Fig. 711 sichtbaren Stellstifte in zwei entsprechende Öffnungen an der Unterseite der Kreisplatte K eingreifen und daher der weite kreisförmige Ausschnitt von C, in welchen vorher die Metallplatte i gelegt war, unter die Mitte des Kreises kommt; in diesen mit Schraubengewinde versehenen kreisförmigen Ausschnitt wird der Konus E eingeschraubt[1]). Da der Arm C der Unterseite des Kreises unmittelbar anliegt, so berührt der Konus E, selbst wenn er ganz fest eingeschraubt wird, noch nicht sein Lager, die Hülse B, ist also jetzt von deren Drehung vollkommen unabhängig. Dabei bleibt aber die innere Axe für sich immer noch drehbar (und zwar dadurch, daß man das kleine, im Konus E befindliche Schräubchen löst), so daß man das aufgesetzte Prisma bequem centrieren, justieren und in diejenige Stellung bringen kann, in welcher es das Minimum der Ablenkung zeigt.

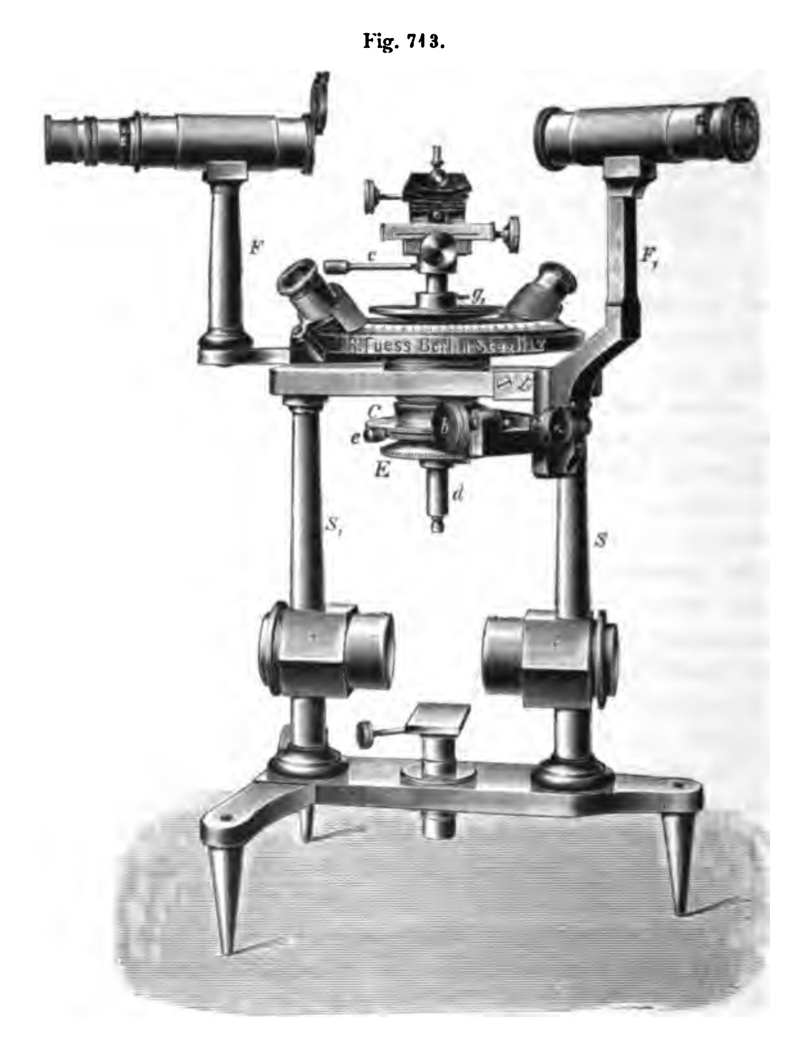
Das soeben beschriebene Goniometer kann zugleich zur Bestimmung der Correction α bei der Stauroskopmessung (s. S. 733) dienen, und zu diesem Zwecke das Beobachtungsfernrohr mit einem feinen Strichmikrometer versehen werden. Um dessen Strichwert in Winkelmaß zu bestimmen, d. h. ausfindig zu machen, welchen Winkel zwei Bündel paralleler Strahlen miteinander einschließen, deren Bilder im Gesichtsfelde einen Abstand von 1 Teilstrich haben, wählt man die in Fig. 711 dargestellte Zusammensetzung des Goniometers, setzt auf den Krystallträger einen Körper mit einer vollkommen ebenen spiegelnden Fläche, z. B. eine der zum Stauroskope gehörigen Glasplatten, auf, bringt diese Fläche durch Centrieren genau über den Mittelpunkt des Kreises und justiert sie, so daß beim Drehen derselben das von ihr reflectierte Bild des Collimatorsignales längs der horizontalen Mittellinie des Mikrometers durch das Gesichtsfeld des Fernrohres läuft. Alsdann dreht man den Arm D, wie bei einer gewöhnlichen Krystallmessung, stellt das Bild des Signales auf zwei benachbarte Teilstriche des Mikrometers und liest beidemal den Nonius ab. Die Differenz beider Ablesungen ist, wie eine einfache Betrachtung lehrt, die Hälfte des gesuchten Winkels. Da man den Strichwert des Mikrometers nur ein für allemal bestimmt, und der Fehler der Messung durch die Multiplication mit 2 verdoppelt wird, so stelle man alle Striche von — 5 bis + 5 ein, so daß man die Ablesungen für 10 gleich große Intervalle erhält, und nehme von diesen das arithmetische Mittel.

1) Bei der Zusammensetzung des Instrumentes muß der Konus E herausgenommen werden, ehe man den Collimator anschraubt, und darf erst, wenn dies geschehen, wieder eingesetzt werden.



Bei der Bestimmung des Stauroskopcorrection hat man, wie S. 733 auseinandergesetzt wurde, die beiden Fernröhre unter einem Winkel von genau 90° zu stellen. Zu diesem Zwecke bedient man sich der Zusammenstellung des Instrumentes als Refractometer Fig. 712, richtet das drehbare Beobachtungsfernrohr direct auf das Collimatorsignal und liest die entsprechende Position am Nonius ab; dann dreht man dasselbe seitlich, bis die Nonien

Fig. 713.



eine um 90° größere, bzw. kleinere Ablesung liefern, und klemmt es in dieser Stellung fest; durch Drehen der inneren Axe, welche die Centrier- und Justiervorrichtung trägt, werden dann die von der Stauroskopplatte und dem aufgesetzten Krystalle gespiegelten Signalbilder in das Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohres gebracht. Übrigens können auch durch geeignet angebrachte Bohrungen in der Kreisplatte beide Fernröhre mit letzterer

unter einem Winkel von 90° (statt 45°, wie es Fig. 711 darstellt) fest verbunden und diese Zusammenstellung des Instrumentes als Goniometer benutzt werden.

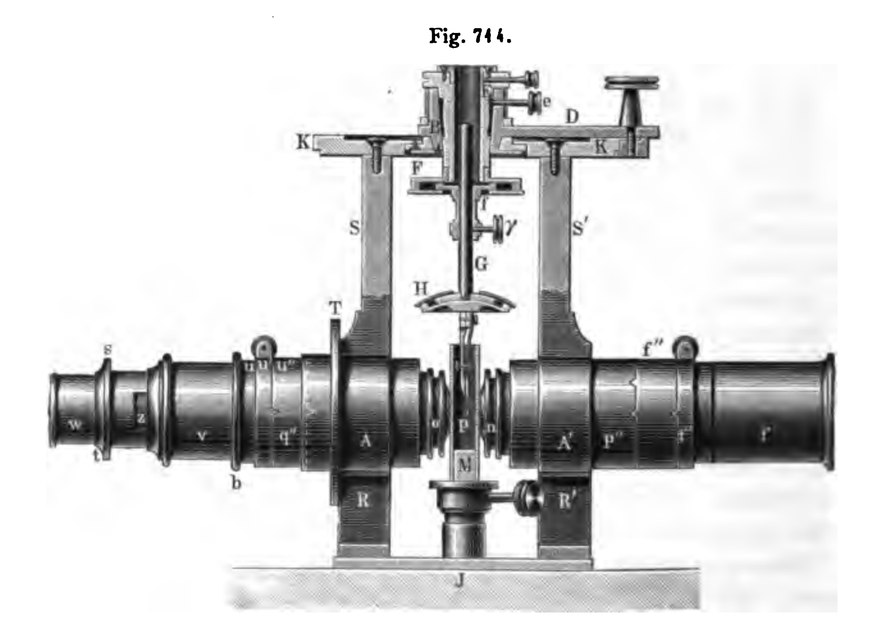
In neuerer Zeit liefert die Firma Fuess den »krystallographisch-optischen Universalapparat« in einer Form, welche gestattet, alle im vorhergehenden erwähnten goniometrischen Methoden in derselben Weise und mit der gleichen Genauigkeit auszuführen, wie mit dem horizontalen Reflexionsgoniometer Nr. 2 derselben Firma (S. 649 f.). Die hierzu erforderliche Zusammenstellung ist aus Fig. 713 zu ersehen. Die Axe *d* kann mittels eines Schlüssels und des Schräubchens *g'* in jeder beliebigen Höhe fixiert werden. Der feste Collimator *F'* und das bewegliche Beobachtungsfernrohr *F* sind dieselben, wie bei dem gewöhnlichen Fuessschen Goniometer (Fig. 677 S. 650) und können mit den gleichen Signalen und Ocularen ausgestattet werden. Wie bei jenem Instrumente ist auch hier das Beobachtungsfernrohr mit dem Nonienkreise verbunden; die gemeinsame Drehung beider kann durch eine in der Figur nicht sichtbare Schraube, welche von rückwärts durch die obere Querverbindung der beiden Säulen SS_1 des Statives geht, in jeder Stellung arretiert werden. Die Drehung des Teilkreises erfolgt mittels der Scheibe *C*, die Feinstellung desselben, nach Anziehen der Klemmschraube *a*, durch die Mikrometerschraube *b*. Endlich ist auch hier, wie bei dem Goniometer Modell Nr. 2, unabhängig von jenen Bewegungen der Krystallträger für sich drehbar durch die Scheibe *E*, so daß ein auf dem Instrumente befindliches Prisma auf das Minimum der Ablenkung eingestellt werden kann; die betreffende Axe, in deren Durchbohrung sich *d* befindet, kann fixiert werden durch das Schräubchen *e*, welches den gleichen Zweck erfüllt wie *l* in Fig. 677. Die Vergleichung dieser Figur mit der a. vor. S. zeigt die Übereinstimmung beider Instrumente in allen wesentlichen Punkten und erleichtert den Einblick in die durch Fig. 713 dargestellte Construction.

b) **Einrichtung des optischen Universalapparates zur Axenwinkelmessung.** Um den Winkel der optischen Axen in Luft oder in einer stark brechenden Flüssigkeit zu messen (s. S. 130 f.), werden die optischen Teile des Polarisationsinstrumentes Fig. 703 in das in Fig. 711 f. abgebildete horizontale Stativ so eingeschoben, wie es in Fig. 714 (s. f. S.) dargestellt ist. Die Nicols beider Teile werden so gestellt, daß ihre Schwingungsrichtungen mit der Horizontalebene 45°, miteinander 90° bilden, welche Stellungen durch Einpassen der Nasen an den Klemmringen *u'* und *f'* in entsprechende Einschnitte der festen Rohrstücke *q''* und *p''* gegeben sind. Zwischen Objectiv- und Sammellinsen muß genügender Zwischenraum bleiben, um die zu untersuchende Krystallplatte frei umdrehen zu können. Der Durchschnitt Fig. 714 zeigt die weite Durchbohrung des horizontalen Teilkreises *K*, in der sich der Ring *B* dreht, welcher mittels des Armes *D*, der am Ende durch eine Schraube am Kreise festgeklemmt werden kann, bewegt wird. Außerdem sind an *B* zwei diametral entgegengesetzte Arme mit Nonien



angebracht, beide rechtwinkelig zu D. Der Ring B ist innen konisch ausgebohrt und umfaßt den ringförmigen Konus E, welcher durch die kleine Schraube e festgeklemmt werden muß, wenn man den Axenwinkel messen will. Auf das Ende von E wird von unten her die kreisförmige Metallscheibe F aufgeschraubt, welche auf ihrem verdickten Rande eine federnde, kreisförmig ausgeschnittene, dünnere Platte trägt, so daß in dem zwischen beiden befindlichen Raume die Scheibe f und mit ihr die den Krystall p tragende Pincette horizontal verschoben werden kann. Diese Verschiebung dient zum Centrieren der Krystallplatte; man läßt G durch Lösen der Klemmschraube γ so weit nieder, bis man, durch das Instrument blickend, die Interferenzfigur am besten sieht, also eine klare, zur Messung geeignete Stelle des Krystalles sich in der verlängerten Axe des Rohres u be-

Fig. 744.



findet; dann zieht man das letztere in dem Rohre A so weit zurück, daß man den Krystall selbst deutlich erblickt, und centriert ihn, ebenso wie einen Krystall bei einer Goniometermessung, durch Hin- und Herschieben von f in seiner Ebene, bis die zur Messung zu benutzende klare Stelle desselben bei jeder Drehung der Pincette und des Konus E stillsteht. Nähert man jetzt wieder die Objectivlinsen o der Platte und stellt durch Drehung derselben die beiden Axenbilder im Gesichtsfelde des Instrumentes ein, so wird man finden, daß diese nicht in die Mitte zu bringen sind, weil die Ebene der optischen Axen des Krystalles noch nicht genau horizontal gestellt ist; entweder sind beide zu hoch oder zu niedrig, oder ihre Verbindungslinie ist nicht parallel dem Horizontalstriche im Mikrometer, d. h. die Platte ist noch zu justieren. Dies geschieht mittels der Kugelverschiebung

des Teiles H der Pincette; H bildet nämlich ein kreisförmiges Segment einer Kugeloberfläche, auf deren verdicktem Rande ein zweites, concentrisch mit dem ersten und in der Mitte mit weitem kreisförmigen Ausschnitte versehen, aufgeschraubt ist. Zwischen beide ist die kreisrunde, ebenfalls ein Kugelsegment bildende, kleinere Scheibe, welche das untere Ende von G bildet, eingeklemmt; man kann demnach den unteren Teil der Pincette nach jeder beliebigen Richtung um einen gewissen Winkel neigen. Dabei ist das Drehungscentrum dieses Kugelgelenkes (des sog. Petzvalschen Trägers) einige Millimeter unter dem Ende der Pincette, an welcher Stelle sich die Krystallplatte befindet, deren Centrierung also durch das Neigen derselben nach irgendeiner Seite keine erhebliche Änderung erfährt. Den unteren Teil von H bildet nun die eigentliche Pincette zum Halten des Krystalles p, welcher zu dem Zwecke auf ein Glasstückchen mit Canadabalsam aufgekittet ist (um bei möglichst genäherten Linsen o und n die Platte frei umdrehen zu können, ist es notwendig, dieses Glasstückchen nicht breiter zu nehmen, als die Breite des Krystalles in der Ebene der optischen Axen beträgt). Die Pincette, aus stark vernickeltem Stahle gefertigt (um nicht zu rosten, wenn sie in Flüssigkeiten verwendet wird), besteht aus einer nicht federnden Hälfte (in Fig. 714 links), mit einer verhältnismäßig großen ebenen verticalen Fläche, auf welche die den Krystall tragende Glasplatte mittels der horizontalen Schneide der andern, federnden Hälfte fest gepreßt wird; infolgedessen behält die Platte stets die Lage jener ebenen Fläche. Es versteht sich von selbst, daß man die Krystallplatte auf dem unteren Teile des lang rectangulären Glasstückchens so aufkittet, daß ihre Axenebene so genau als möglich senkrecht zur Längsrichtung des letzteren steht; denn wenn man alsdann das Glasstück so in die Pincette einklemmt, daß seine Längsrichtung vertical ist, so bedarf es zur Justierung der Platte nur noch einer kleinen Correction.

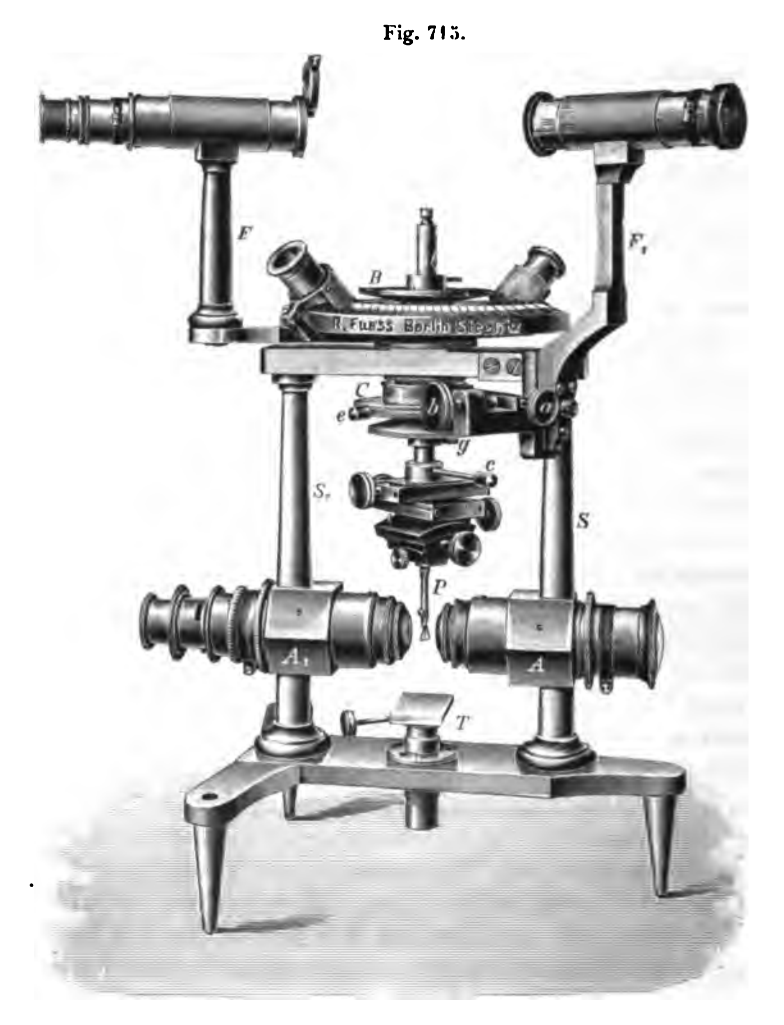
Bei den in neuerer Zeit gelieferten optischen Universalapparaten hat die Firma Fuess der Vorrichtung zur Messung des Winkels der optischen Axen die in Fig. 715 (s. f. S.) abgebildete Form gegeben (die beiden Fernröhre F und F^1 dienen zu der S. 743 auseinandergesetzten Verwendung des Instrumentes als Goniometer bzw. Refractometer und kommen daher hier nicht mehr in Betracht). Das auf drei Metallfüßen ruhende Stativ trägt in A und A_1 die wegen der abweichenden Brennweiten der Linsen jetzt etwas kleineren, optischen Teile des verticalen Polarisationsinstrumentes in derselben Weise, wie in Fig. 714[1]). Statt des Petzvalschen Trägers ist jedoch die Axe d (s. Fig. 713) mit der Fuessschen Centrier- und Justiervorrichtung umgekehrt eingesetzt, so daß sie durch die Schraube g mittels eines

1) Außer den drei, 45° voneinander entfernten Kerben sind ferner zwei Führungsschlitze vorhanden, um die beiden Rohre bei der für die Centrierung der Krystallplatte (s. S. 744) nötigen Verschiebung in A und A_1 in orientierter Lage zu erhalten. Die in diesen Schlitzen laufenden, die Drehung der optischen Teile verhindernden, kleinen Schraubenköpfe sind in der Figur am oberen Rande der Rohre sichtbar.



Schlüssels in beliebiger Höhe festgeklemmt werden kann; an dem Ende derselben wird statt des gewöhnlichen Krystallträgers die zum Tragen der Axenplatte bestimmte Pincette *P* fixiert. Die Centrierung und Justierung der Krystallplatte erfolgt hier also genau so wie bei einer Krystallmessung, wobei die erforderlichen Drehungen mittels der Scheibe *B* oder der entsprechenden, unmittelbar über der Centriervorrichtung befindlichen ausge-

Fig. 715.



führt werden. Diese beiden Scheiben sind fest verbunden durch eine zweite, durchbohrte Axe, welche durch Anziehen des Schräubchens *e* mit der Scheibe *C* und dem Teilkreise in feste Verbindung gelangt, so daß die mittels *C* erfolgte Drehung der Krystallplatte und des Kreises an den festen Nonien abgelesen werden kann. Durch Hinzufügung einer Klemmschraube *a* und einer Feinstellschraube *b* kann die im folgenden erwähnte Einstellung der Axenbilder noch genauer erfolgen, als bei dem einfacheren, in Fig. 714

abgebildeten Instrumente. Dementsprechend ist der, wie bei den Fuessschen Goniometern Nr. 2, schräggestellte Limbus (welcher auch, wie bei jenen, verdeckt geliefert werden kann) größer und feiner geteilt, so daß bei der Ablesung noch halbe Minuten geschätzt werden können.

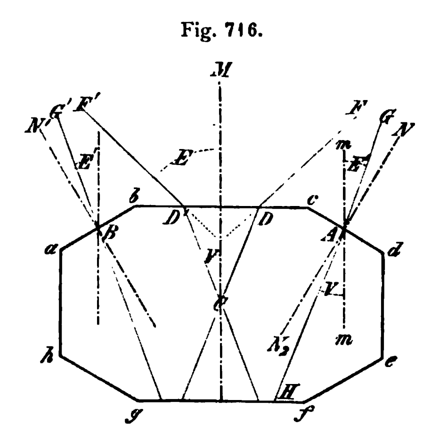
Bei der einfachen Messung des Axenwinkels in Luft hat man das in Fig. 714 gezeichnete Ölgefäß *M* wegzulassen, und, wie schon bemerkt, mit den Linsen *o* und *n* so nahe an die Krystallplatte heranzugehen, als es möglich ist, ohne daß dieselbe beim Herumdrehen an einen der beiden Teile anstreift. Je größer die Breite der Platte, desto weiter muß der Abstand der Linsen bleiben, desto kleiner ist das Gesichtsfeld; doch bleibt dieses selbst bei sehr großen Platten immer noch genügend, um bei einiger Übung schnell die Lage der Axen aufzufinden, wenn man nur den Krystall in der S. 745 angegebenen Weise nahezu richtig eingesetzt hatte, wozu man ihn vorher im verticalen Instrumente zu betrachten hat. Nach der Centrierung und Justierung nimmt man nun die Messung so vor, wie es S. 131 (vgl. Fig. 93) angegeben wurde, während man zur Beleuchtung die S. 738 erwähnte breite Flamme eines nahe vor das Rohr *f* (Fig. 714) gesetzten Bunsenschen Brenners benutzt, welche einmal durch Lithium-, die andern Male durch Natrium- und Thalliumsulfat gefärbt wird. Die Drehung der Pincette geschieht bei dem in Fig. 714 abgebildeten Apparate durch den Arm *D*, indem man dessen Klemmschraube faßt, und die Ablesung mittels der dazu rechtwinkeligen Nonien. Will man ein möglichst genaues Resultat erzielen, so stelle man bei jeder Farbe die schwarze Hyperbel nicht nur auf den mittelsten Strich des Mikrometers, sondern auch auf mehrere benachbarte ein, aber gleich viel zu beiden Seiten (z. B. — 2, — 1, 0, + 1, + 2), und nehme das arithmetische Mittel; ganz ebenso verfahre man bei der Einstellung der zweiten Axe: die Differenz der beiden Mittel ist der gesuchte scheinbare Axenwinkel $2E$. Die Einstellung einer Hyperbel auf einen Mikrometerstrich kann am genauesten ausgeführt werden, wenn die Ringe der Interferenzfigur ziemlich klein, aber doch noch deutlich sichtbar sind; weit weniger genau, wenn dieselben so eng sind, daß man sie nicht deutlich sieht, sondern nur die hyperbolischen dunkeln Büschel erblickt, ebenso, wenn die Platte so dünn ist, daß ganz breite, dann auch stets sehr verwaschene Interferenzstreifen auftreten. Hat man also in bezug auf die der Platte zu gebende Dicke freie Wahl, so schleife man sie so, daß recht deutliche, aber nicht zu breite Lemniscaten entstehen.

Es ist S. 131 gezeigt worden, daß man den wahren Axenwinkel $2V$ aus dem gemessenen scheinbaren, $2E$, berechnen kann, wenn man den mittleren Brechungsindex β kennt. Ist dies nicht der Fall, so muß man zwei Platten, eine senkrecht zur ersten, die andere senkrecht zur zweiten Mittellinie, haben und deren Messung in einer stark brechenden Flüssigkeit vornehmen (s. S. 133 f.). Es gibt indessen einen Fall, in welchem man den wahren Axenwinkel $2V$ mit einer einzigen Platte

durch Messung in Luft bestimmen kann, und dieser soll jetzt erörtert werden.

Sei Fig. 716 der Durchschnitt eines rhombischen Krystalles parallel der Ebene der optischen Axen, und sei der Krystall demnach gebildet von den beiden Pinakoiden, welche normal zu den beiden Mittellinien stehen (von denen das zur zweiten Mittellinie senkrechte übrigens auch fehlen kann), und einem Prisma. Man wird alsdann in den meisten Fällen sowohl durch das Pinakoid bc (fg) beide Axenbilder sehen, als auch je eine durch ein Paar paralleler Prismenflächen. Centriert man also im Axenwinkelapparate die Mitte der Fläche bc, so kann man den scheinbaren Winkel $2E$ messen, welchen DF mit $D'F'$ macht (wenn CD und CD' die Richtungen der wahren optischen Axen des Krystalles sind). Centriert man darauf einen Punkt des Krystalles, welcher auf der Geraden CM so weit nach rückwärts gelegen ist, daß beim Drehen einmal die Prismenfläche ab, das andere Mal cd gerade in die Mitte des Gesichtsfeldes kommt, wenn die Richtung der gebrochen aus derselben austretenden, den optischen Axen parallelen Strahlen, d. i. AG bzw. BG', mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt, — so kann man durch Einstellung der Axenbilder, welche durch die beiden Prismenflächen sichtbar sind, den Winkel messen, welchen der Strahl AG mit BG' einschließt. Werde dieser Winkel mit $2E'$ bezeichnet, ferner der Winkel, welchen die Normalen zu den beiden Prismenflächen, AN und BN', bilden, mit $2P$, und seien $2E$, $2E'$ und $2P$ gemessen worden, so ist daraus der wahre Axenwinkel $2V$ zu finden, wie folgende Betrachtung lehrt:

Fig. 716.



Bekanntlich ist

$$\beta \cdot \sin V = \sin E \qquad (1)$$

und, da

$$\frac{\sin GAN}{\sin HAN_2} = \beta \text{ und } mm \perp bc,$$

$$\beta \cdot \sin (P - V) = \sin (P - E'). \qquad (2)$$

Dividiert man Gleichung (1) durch (2), so folgt:

$$\frac{\sin V}{\sin (P - V)} = \frac{\sin E}{\sin (P - E')}.$$

Um diese Gleichung auf eine Form zu bringen, welche eine leichte Berechnung der Unbekannten V gestattet, setzen wir

$$\frac{\sin E}{\sin (P - E')} = p;$$

dann ist:

$$\sin V = p \cdot \sin P \cdot \cos V - p \cdot \cos P \cdot \sin V,$$

durch $\cos V$ dividiert:

$$\operatorname{tang} V = p \cdot \sin P - p \cdot \cos P \cdot \operatorname{tang} V, \quad \text{d. h. } \operatorname{tang} V = \frac{p \cdot \sin P}{1 + p \cdot \cos P};$$

für p seinen Wert eingesetzt und gekürzt, folgt

$$\operatorname{tang} V = \frac{\sin E}{\cos E' - \operatorname{cotang} P (\sin E' - \sin E)}.$$



In allen andern Fällen, als dem soeben besprochenen, bedarf es zu der directen Bestimmung des Winkels der optischen Axen zweier Platten, welche senkrecht zur ersten, bzw. zur zweiten Mittellinie geschliffen sein müssen. Um den Axenwinkel derselben in einer stark brechenden Flüssigkeit zu bestimmen, bedient man sich des Fig. 714 im Querschnitte sichtbaren Gefäßes *M*. Dasselbe besteht aus einem parallelepipedischen Glasstücke mit einem Einschnitte, an welches zu beiden Seiten dünnere planparallele Glasplatten angekittet sind; dieses Gefäß füllt man mit der Flüssigkeit (z. B. Bromnaphtalin) und setzt es auf den zwischen den beiden Säulen *RR'* befindlichen Träger, welcher in einer Hülse nach oben und unten verschiebbar ist. Hat das Gefäß die richtige Stellung, so schiebt man die optischen Teile des Instrumentes derart an dasselbe heran, daß Sammel- und Objectivlinse dessen Wände berühren. Da es, besonders bei kleinen Krystallen, wünschenswert ist, ein möglichst großes Gesichtsfeld zu haben, d. h. die Linsen denselben möglichst nähern zu können, so empfiehlt es sich, ein so schmales Ölgefäß zn nehmen, wie es in Fig. 714 gezeichnet ist. Bei einer großen Platte dagegen kann man eher auf ein weites Gesichtsfeld verzichten, weil diese leichter zu centrieren und zu justieren ist, und kann daher für solche ein zweites Flüssigkeitsgefäß verwenden, weit genug, um sie darin umdrehen zu können, d. h. etwa mit dem doppelten Abstande der beiden Glaswände von dem des ersten. Übrigens sind, wie bereits S. 745 erwähnt wurde, in den neueren Fuessschen Apparaten die Brennweiten der Linsen so gewählt, daß man auch nach Wegnahme je der am Flüssigkeitsgefäß nächsten Linse der Systeme *o* und *n* noch ein recht großes Gesichtsfeld hat und doch ein weiteres Gefäß einfügen kann.

Zur Messung des Axenwinkels in höherer Temperatur bringt man an Stelle des Flüssigkeitsgefäßes ein metallenes Luftbad, d. h. einen parallelepipedischen Kasten, von etwa 22 cm Länge und 5 cm Höhe, mit zwei, bis 300° geteilten Thermometern und einer in der oberen Fläche befindlichen Öffnung zur Einführung der Pincette mit dem Krystalle; jene kann aldann mit einem die Pincette umfassenden Metallscheibchen wieder geschlossen werden. Dieser Kasten wird (mit seiner Längsrichtung senkrecht zur Zeichnungsebene der Fig. 714) an Stelle des Gefäßes *M* so auf den Träger aufgesetzt, daß ein an seiner Unterseite befindlicher dicker Messingstift in eine Öffnung des Trägers eingreift und durch die in Fig. 714 sichtbare Schraube festgeklemmt wird. Der Kasten wird von seinen beiden, etwa 10 cm auf beiden Seiten des Axenwinkelapparates hervorragenden Enden durch zwei Flammen erhitzt. In der Mitte der beiden großen Wände befindet sich je ein Fenster, durch eine eingesetzte planparallele Glasplatte gebildet, an welche die Linsen des Instrumentes von beiden Seiten nahe herangeschoben werden. Um auch hier bei kleinen Krystallen den Vorteil eines großen Gesichtsfeldes zu haben, andererseits aber auch große Krystalle frei umdrehen zu können, ist die Weite des mittleren Teiles veränderlich, indem die beiden Metallscheiben, in welche je ein rundes Plan-

glas eingesetzt ist und durch eine kleine Feder festgehalten wird (um es austauschen zu können, wenn es ja einmal durch zu schnelles Erhitzen springen sollte), in röhrenförmigen Ansatzstücken, welche in das Innere des Kastens hineinreichen, mittels eines Schlüssels hineingeschraubt und dadurch einander genähert oder so weit herausgeschraubt werden können, bis sie sich in einer Ebene mit den Seitenwänden des Erhitzungskastens befinden. Man schraubt die beiden Fenster für jede Messung in denjenigen gegenseitigen Abstand, welcher den Dimensionen der Krystallplatte entspricht, bringt den Kasten durch Verschiebung des Trägers in die richtige Höhe, führt die Platte mit dem untersten Teile der Pincette hinein und centriert und justiert ganz ebenso wie in freier Luft; alsdann schließt man die obere Öffnung und erhitzt das Luftbad von unten her durch zwei kleine Flämmchen, bis der Stand der Thermometer constant geworden ist; etwa eine halbe Stunde später notiert man denselben und führt die Messung des Axenwinkels ganz so aus wie bei gewöhnlicher Temperatur. Verträgt der Krystall einen höheren Wärmegrad, so vergrößert man nun die Flammen und wiederholt den Versuch.

Um sich davon zu überzeugen, daß die zur Messung des Axenwinkels benutzte Platte normal zur Mittellinie der Axen sei, genügt es in den meisten Fällen, daß man sie auf den Krystallträger des verticalen Polarisationsinstrumentes auflegt und sieht, am besten in homogenem Lichte, ob der Mittelpunkt des Lemniscatensystemes mit demjenigen des Gesichtsfeldes (dem Nullpunkte des Mikrometers) zusammenfällt. Will man jedoch genau ermitteln, ob beide optische Axen denselben Winkel mit der Normalen der Platte einschließen, was der Fall sein muß, wenn diese genau senkrecht zur Mittellinie ist, so kann man dies durch die sog. Gaussche Spiegelvorrichtung auf folgende Weise: In das Ocularrohr des Axenwinkelapparates Fig. 714 (bzw. 715) wird nach Wegnahme des Nicols *w* ein den Fuessschen Apparaten beigegebenes, geschwärztes kleines Rohr so eingeschoben, daß ein Ausschnitt, welcher an einer Seite desselben befindlich ist, gerade mit einem der beiden rectangulären Schlitze des Ocularrohres coincidiert; jenes Rohr enthält eine kleine Spiegelglasplatte, welche man von vorn mittels eines in die Fassung einzusteckenden Stahlstäbchens drehen kann. Läßt man nun das Licht einer seitlich aufgestellten Flamme durch den Schlitz *z* fallen und von dem unter 45° Neigung aufgestellten Spiegel parallel der Axe des Instrumentes reflectieren, bis es an die Oberfläche der Krystallplatte gelangt, so wird es hier (besonders wenn man hinter die Platte mattes schwarzes Papier schiebt) in derselben Richtung zurückgeworfen, wenn jene polierte oder mit Glas bedeckte Oberfläche genau senkrecht zur Axe des Linsensystemes steht. Man wird also im andern Falle das von der Platte reflectierte Bild der Glasmikrometerstriche neben dem direct gesehenen Bilde erblicken und beide durch Drehen der Krystallplatte (mittels des Armes *D* Fig. 714) zur Deckung zu bringen haben. Nachdem man bei dieser Stellung den Nonius abgelesen, hat man einzeln

die Einstellungen der beiden Axen vorzunehmen; ist die Platte genau senkrecht zur Mittellinie, so ist die erstere Einstellung das Mittel zwischen den beiden letzten[1]). Dieselbe Methode ist auch anwendbar, wenn man zu dem S. 721 oben angeführten Zwecke die scheinbare Abweichung eines durch eine Fläche sichtbaren Axenbildes von der Normalen der Fläche messen will. Man kann diese Bestimmung, gemäß einem älteren Vorschlage von Neumann, noch genauer, als es mit dem Axenwinkelapparate möglich ist, ausführen mit dem Fuessschen Goniometer Nr. 2, wobei man folgendermaßen verfährt: Die Krystallplatte wird zuerst justiert, und zwar mit derjenigen Schraube des Justierapparates, zu welcher senkrecht sie auf dem Goniometer befestigt ist; alsdann wird das Signal des Collimators durch ein Rohr mit einer einfachen Linse ersetzt und auf dieses das Beleuchtungsrohr mit eingeschobenem Nicol (s. S. 656), dessen Hauptschnitt auf 45° gestellt wird, aufgesetzt; ebenso wird vor dem Oculare γ ein drehbarer Nicol angebracht und mit dem ersteren gekreuzt. Durch Drehen der justierten Platte in ihrer Ebene mit Hilfe der zweiten Justierschraube kann man bewirken, daß die Strahlen, welche einer optischen Axe parallel durch die Platte gehen, in die horizontale, dem Limbus parallele Ebene fallen, also beim Drehen der inneren Axe in die Richtung des Collimators gebracht werden können. Richtet man alsdann das mit dem Nicol montierte Beobachtungsfernrohr ebenfalls auf den Collimator (welche Position vor dem Wegnehmen des Signalspaltes genau bestimmt worden ist), so erblickt man die dunkle Hyperbel mit dem innersten Teile der Interferenzringe und kann die erstere, durch Klemmung der Axe und Feinstellbewegung, mit dem Fadenkreuze zur Deckung bringen. Indem man die Platte in ihrer Position fixiert läßt, hat man nun die Klemmschraube am Nonienkreise zu lösen und diesen mit dem Beobachtungsfernrohre zu drehen, bis das von der Rückseite gespiegelte Bild des inzwischen wieder eingesetzten Collimatorsignales im Fernrohre erscheint. Diese Position, am Kreise abgelesen und mit der des Collimators verglichen, ergibt die Richtung der Normalen der Platte, welche letztere selbstverständlich genau planparallel sein muß. Daß man in der soeben beschriebenen Zusammensetzung das Goniometer Nr. 2 auch als einen sehr genauen Axenwinkelapparat benutzen kann, folgt aus dem Gesagten von selbst.

Eine sehr bequeme Methode zur Bestimmung des Winkels zwischen der scheinbaren Richtung einer optischen Axe und der Normalen zur Austrittsfläche des Lichtes, d. h. zur allgemeinsten Lösung der Frage nach der Stellung der Ebene der optischen Axen in einem triklinen Krystalle (vgl. S. 721) gab Dufet an: In den Axenwinkelapparat wird statt des

1) Es ist klar, daß eine solche Prüfung ganz unnötig ist, wenn die Platte von natürlichen Krystallflächen gebildet wird, welche vermöge der Symmetrie des Krystalles die erforderliche Lage haben müssen, oder wenn nur eine derartige Fläche vorhanden ist, weil man alsdann die zweite, durch Schleifen herzustellende, mit dem Goniometer auf ihren Parallelismus mit der ersten prüfen kann.



planparallelen Ölgefäßes eine cylindrische Cuvette von mattem Glase eingesetzt, welche vorn (nach dem Beobachter zu) eben geschliffen und poliert ist und mit einer stark brechenden Flüssigkeit (Bromnaphtalin) gefüllt wird. Da in diese Cuvette von rückwärts zerstreutes Licht eindringt, so kann man nicht nur das Interferenzbild einer optischen Axe durch eine eingefügte Krystallplatte beobachten, sondern auch die Grenzen der totalen Reflexion an derselben, wie bei dem Kohlrauschschen Totalreflectometer (S. 700). Das Mittel der Einstellungen dieser Grenzen von beiden Seiten liefert aber die Richtung der Normalen der Platte, und wenn letztere so justiert ist, daß das beobachtete Axenbild ebenfalls eingestellt werden kann, ist dadurch der Winkel, welchen die demselben entsprechenden Strahlen mit der Normale der Platten einschließen, gegeben. Oft zeigt ein Pinakoid eines triklinen Krystalles (z. B. eine Spaltungsplatte, vgl. 215) in Bromnaphtalin sogar die Bilder beider Axen und gestattet daher, den Winkel einer jeden derselben zur Plattennormalen zu messen. Wird alsdann nach derselben Methode auch der Winkel bestimmt, welchen eine der beiden optischen Axen nach dem Austritte der Strahlen aus einer andern Fläche des Krystalles, deren Orientierung zur ersten natürlich bekannt sein muß, mit deren Normalen bildet, so kann die vollständige optische Orientierung berechnet werden, wenn der mittlere Brechungsindex und der wahre Winkel der optischen Axen bekannt sind. Die letzteren Größen können unter Anwendung der gleichen Methode festgestellt werden mit einer ungefähr senkrecht zur ersten Mittellinie der optischen Axen geschliffenen Krystallplatte, deren Axenebene horizontal gestellt wird, indem der Winkel der Totalreflexion der senkrecht schwingenden Strahlen (aus welchem die mittlere Lichtgeschwindigkeit folgt) und außerdem die Neigung der beiden optischen Axen zueinander und die jeder derselben zur Plattennormalen gemessen werden (H. Dufet, Bull. soc. franç. d. Minéralogie 1890, **13**, 341; Zeitschr. f. Kryst. **21**, 287).

Der zum Universalapparate gehörige, in Fig. 714 (S. 744) dargestellte Axenwinkelapparat kann auch zur Messung der durch eine Krystallplatte hervorgebrachten Drehung der Polarisationsebene des Lichtes benutzt werden. Zu diesem Zwecke werden aus dem Rohre *f* die Sammellinsen *n* entfernt, um paralleles Licht zu erhalten, und das Rohr *u* mit seinem gesamten Inhalte herausgezogen. Statt des letzteren wird auf das links von *T* hervorragende feste Rohrstück eine dem Apparate beigegebene Kappe aufgesetzt, welche in den Fig. 711 und 712 mit abgebildet ist, und in diese das Nicolrohr *w* so eingesetzt, daß Analysator und Polarisator das Maximum der Dunkelheit zeigen, d. h. so genau als möglich gekreuzt sind. *T* besitzt eine Kreisteilung, auf welcher diese Stellung mittels einer am Rande der Kappe angebrachten Nonienteilung abgelesen werden kann; ist dies geschehen, so wird letztere wieder entfernt und das Rohr *u* ohne Nicol, aber mit der S. 750 beschriebenen kleinen Spiegelglasplatte, eingesetzt. Die nunmehr in der Pincette befestigte Krystallplatte wird jetzt mit Hilfe des dort beschriebenen Verfahrens genau senkrecht zur Axe des Instrumentes



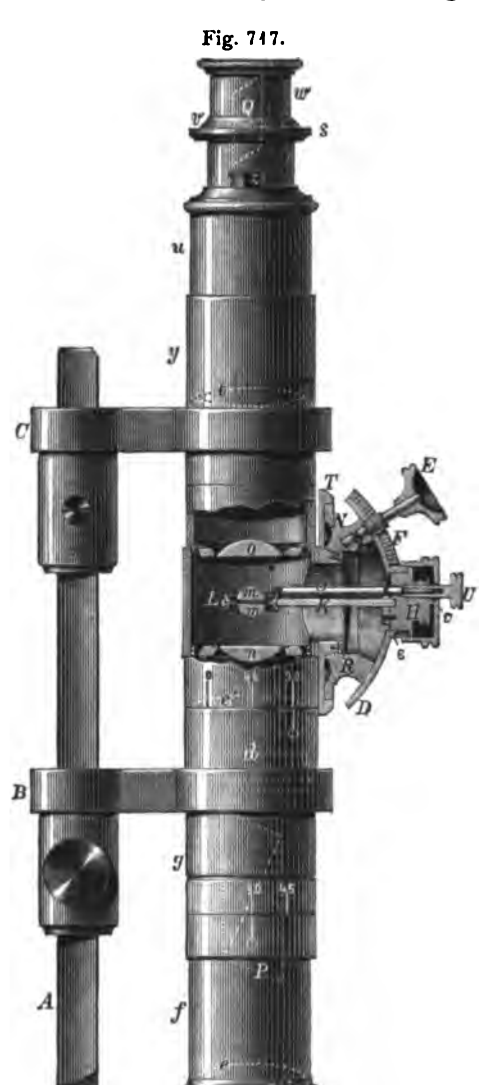
gerichtet, weil sonst die Strahlen dieselbe in einer schiefen Richtung, in welcher sie eine größere Dicke besitzt, durchsetzen würden. Nachdem dies geschehen und das Rohr *u* wieder durch die Kappe mit dem Nicol ersetzt worden ist, erscheint jetzt durch die in den Gang der Lichtstrahlen eingefügte optisch active Platte das Gesichtsfeld aufgehellt, und man muß um denselben Winkel, um welchen sie die Polarisationsebene dreht, in dem gleichen Sinne die Kappe mit dem Nicol nachdrehen, um wieder Dunkelheit zu erzeugen. Hat man bei Abnehmen und Aufsetzen der Kappe die Stellung des Nicols in derselben nicht verändert, weshalb man sie immer an dem gekerbten Rande des weiteren Teiles anfassen muß, so ergibt die Differenz der Dunkelstellung vor und nach Einfügung der Krystallplatte deren Drehung für das Licht der angewandten, selbstverständlich monochromatischen Flamme. Die Auslöschungsposition findet man am genauesten, wenn man auf den Eintritt der maximalen Dunkelheit einmal von rechts, einmal von links her einstellt und von beiden so erhaltenen Ablesungen das Mittel nimmt.

Adamsscher Polarisations- und Axenwinkelapparat.

Um ein größeres Gesichtsfeld zu erhalten und den Winkel der optischen Axen auch in solchen Fällen noch messen zu können, in welchen derselbe einen sehr großen Wert besitzt, änderte W. G. Adams das Polarisationsinstrument für convergentes Licht dahin ab, daß er die oberste der Sammellinsen *n* des verticalen Apparates (Fig. 703) und die unterste der Objectivlinsen *o* fast halbkugelförmig machte und beide mit der dazwischen eingeklemmten Krystallplatte zu einem für sich drehbaren Ganzen verband, welches die Gestalt einer vollständigen Kugel besitzt. Die Folge davon ist, daß die diametral durch dieses System hindurchgehenden Lichtstrahlen, in welcher Richtung sie auch den Krystall passiert haben, aus der oberen Linse senkrecht zu deren Oberfläche heraustreten und daher keine Brechung erleiden. Klemmt man die Objectplatte derart zwischen die beiden Linsen ein, daß sich zwischen ihr und den letzteren beiderseits eine dünne Schicht einer stark brechenden Flüssigkeit (z. B. Cassiaöl oder Bromnaphtalin) befindet, so werden selbst sehr schief durch den Krystall hindurchgehende Strahlen an der Grenzfläche desselben nicht total reflectiert, und nimmt man für die Linsen stark brechendes Flintglas, so wird, wenn der mittlere Brechungsindex der Platte ein kleinerer als derjenige der Linsen ist, der Axenwinkel beim Austritte in das Glas (durch die zwischenliegende Flüssigkeitsschicht wird er nicht geändert, weil diese planparallel ist) sogar im Verhältnisse zum wahren ($2V$) noch verkleinert. Dreht man nun das System mit der Platte, so kann man jedes der Axenbilder in die Mitte des Gesichtsfeldes bringen und daher mit diesem Instrumente, da beim Austritte der Strahlen aus der oberen Linse des Systemes keine weitere Brechung stattfindet, den »scheinbaren Axenwinkel in Glas« (d. h. in dem stark brechenden Flintglase der Linsen) messen. Da nun durch die fast halbkugel-

förmig gekrümmten Linsen das Gesichtsfeld ein sehr großes wird, so sind durch einen solchen Apparat die optischen Axen, auch wenn ihr Winkel ein so beträchtlicher ist, daß die Platte, im gewöhnlichen Polarisationsinstrumente untersucht, keine Axenbilder mehr zeigen würde, noch der Beobachtung und sogar der Messung zugänglich.

Fig. 717.

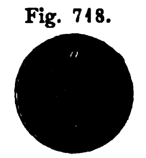


Nach dem vorstehend beschriebenen Principe und nach Angaben von A. Březina construierte der Mechaniker Schneider in Wien ein Instrument, welches die nötigen Drehungen des mittleren Linsensystemes getrennt vorzunehmen und zu messen gestattet, und da die von dem Genannten gelieferten Apparate die ersten waren, welche Verbreitung fanden, so werden dieselben auch vielfach als »Schneidersche Polarisationsinstrumente« bezeichnet. Durch weitere Verbesserungen brachte endlich Fuess die Apparate in diejenige Form, welche jetzt wohl als die vollkommenste anzusehen ist, und in der sie an dieser Stelle beschrieben werden mögen.

An einem Stative von genau derselben Form, wie sie dasjenige des verticalen Polarisationsinstrumentes Fig. 703 besitzt, ist in gleicher Weise ein Spiegel angebracht, und über diesem an zwei Trägern *B* und *C* die optischen Teile des Apparates, welche in Fig. 717 in $\frac{2}{5}$ nat. Größe so abgebildet sind, daß die wichtigste mittlere Partie im verticalen Durchschnitte erscheint. Von dem Spiegel senkrecht reflectiert, treten die Lichtstrahlen in das Polarisatorrohr *f*, welches, dem ebenso bezeichneten in Fig. 703 gleichend, einen großen Nicol *P* enthält und oben durch eine Spiegelglasplatte *d*, unten durch eine Linse *e* geschlossen ist. Wird dasselbe in das mit dem Träger *B* fest verbundene Rohr *g*, welches den Stellungen 0°, 45°, 90° entsprechende Marken trägt, so eingeschoben, wie es die Figur

darstellt, daß nämlich die am drehbaren Rohre *f* befindliche Marke auf 90° gestellt ist, so fällt der Hauptschnitt des Polarisators mit der Zeichnungsebene der Fig. 717 zusammen. Ebenso wie *g* mit *B*, so ist auch das Rohr *y* mit dem Träger *C* in fester Verbindung, während zwischen *g* und *y* das größtenteils im Durchschnitte dargestellte mittlere Rohrstück um die Axe des Instrumentes gedreht und auch ganz herausgenommen werden kann, wenn man, nachdem der Spiegel zur Seite gedreht ist, die Schraube des Trägers *B* löst und letzteren an der dreikantigen Stahlschiene *A* abwärts schiebt (der andere Träger *C* ist an *A* festgeschraubt). Dieses Mittelstück paßt mit einem kurzen vorspringenden Teile, in welchem sich die der unteren *e* correspondierende Linse *e'* befindet, in den oberen Rand des festen Rohres *g* und kann in diesem gedreht werden, so daß die auf letzterem angebrachte Marke mit einer der Marken 0°, 45°, 90° des drehbaren Mittelstückes zur Coincidenz gebracht werden kann. Über *e'* befindet sich die Sammellinse *n* und in entsprechender Entfernung vom oberen Ende die Objectivlinse *o*, auf deren Unterseite durch Einritzen und Schwärzen das in Fig. 718 dargestellte Liniensystem angebracht ist, welches als Fadenkreuz dient. Zwischen die beiden zuletzt erwähnten Linsen wird nun die kugelförmige Linsencombination *m* mit der Krystallplatte in sogleich zu beschreibender Weise eingefügt. In den obersten Rand des Mittelstückes paßt wieder der untere des festen Rohres *y* mit einem angesetzten kurzen Teile von etwas geringerem Durchmesser, so daß nach dem Hinaufschieben des Trägers *B* bis zum vollständigen Ineinanderpassen der drei Rohre das mittlere durch *g* und *y* so festgehalten wird, daß es nur um die Axe des Instrumentes drehbar ist. In das obere feste Rohr *y* wird das die Ocularlinse *t* enthaltende, nicht drehbare Rohr *u* eingeschoben, dessen oberster Teil zu demselben Zwecke, wie am gewöhnlichen verticalen Polarisationsinstrumente, einen Schlitz *z* besitzt, welcher je nach Bedarf geöffnet oder geschlossen werden kann. Auf dem oberen Rande *s* des Ocularrohres, welcher eine Marke trägt, schleift die auf einer konischen Fläche *v* angebrachte Teilung des eingesetzten Rohres *w*; der im Innern des letzteren befindliche Analysator *Q* ist mit dem Polarisator gekreuzt, wenn der Nullpunkt der Teilung mit der Marke zusammenfällt.

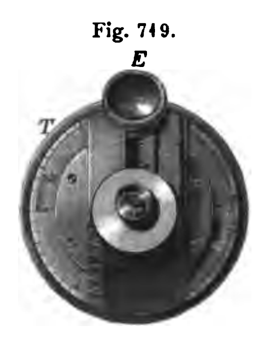
Fig. 718.



Das Eigentümliche des Apparates gegenüber dem gewöhnlichen verticalen Polarisationsinstrumente ist nun die Construction des in Fig. 717 im Durchschnitte dargestellten Mittelstückes. Mit dem zu ihm gehörigen, bereits beschriebenen Rohrstücke ist seitlich ein senkrechter Teilkreis *T* fest verbunden, dessen Axe in die Zeichnungsebene fällt, welcher daher in einem senkrechten Durchschnitte durch die Mitte erscheint, eine Stellung, welche durch Drehen des mittleren Rohres bis zur Coincidenz der Marken genau bewirkt werden kann. In die Fläche dieses Teilkreises ist eine drehbare Scheibe *N* eingelassen, welche an zwei gegenüberliegenden Stellen eine Nonienteilung zur Ablesung des Kreises (auf 1') besitzt. *T* hat in der

Mitte einen weiten Ausschnitt, welchen ein nach außen konisch abfallender kurzer Cylinder umgibt; der auf diesen aufgeschraubte Ring hält die ringförmig in *T* eingelassene Nonienscheibe *N* in der breiten, kreisförmigen Rinne des Teilkreises fest. Die Drehung dieser Scheibe erfolgt durch den fest damit verbundenen breiten Knopf, dessen Gestalt aus dem Durchschnitte *R* ersichtlich ist. Das hohle Innere desselben ist bedeckt mit einer Messingplatte, welche die Gestalt eines kreisförmigen Stückes der Fläche einer Kugel hat, deren Centrum in der Mitte des Linsensystemes *m* liegt. Von dieser mit vier Schräubchen auf dem dicken Rande von *R* befestigten Platte ist, wie man aus der von rechts aufgenommenen Ansicht Fig. 719 ersehen kann, der mittlere Teil herausgeschnitten, und zwischen den beiden abgeschrägten Seitenflächen der zurückgebliebenen Stücke eine schienenartige Platte *D* von derselben Krümmung, aber größerer Länge mittels des mit dem Knopfe *E* verbundenen kleinen Zahnrades verschiebbar. Wie aus der nebenstehenden Figur hervorgeht, trägt diese bogenförmige Schiene auf einer Seite ein Stück Kreisteilung, so daß vermittelst der an dem festen, links anliegenden Stücke angebrachten Marke der Winkelwert der durch die Schraube *E* bewirkten Verschiebung der Schiene *D*, d. h. ihrer in der Ebene des Durchschnittes Fig. 717 stattfindenden Drehung um das Centrum der Linsen *m*, gemessen werden kann. Wenn die Marke auf 0 steht, so befindet sich *D* in der durch Fig. 717 wiedergegebenen Stellung, von welcher aus nach beiden Seiten der Schiene *D* eine Drehung von je 11° gestattet ist. In der Mitte trägt dieselbe nun einen cylindrischen Aufsatz, mit einem Schraubengewinde, auf welches die Kappe *v* aufgeschraubt ist; die in Fig. 719 sichtbare Oberseite der letzteren hat einen schlitzförmigen Ausschnitt, durch welchen der kleine Schlüssel *U* gesteckt werden kann. Zieht man diesen heraus und schraubt die Kappe ab, so erblickt man den mit dem Schlüsselloche versehenen Messingcylinder *H*, dessen vorspringender engerer Teil einen doppelten gekerbten Rand zeigt. *H* paßt in den cylindrischen Aufsatz der Schiene *D* nur in einer durch einen kleinen Stift ε bestimmten, Stellung und trägt das in das Innere des Instrumentes hineinragende Stahlstück *K*; dieses läuft am Ende in einen Ring *L* aus, welcher die durch Verschraubung miteinander verbundenen Fassungen der Linsen *m* so umgibt, daß das Linsensystem mit der darin enthaltenen Krystallplatte in dem Ringe um die senkrechte Axe des Instrumentes gedreht werden kann. Diese Drehung erfolgt von außen mittels des Schlüssels *U* und des Stahlstäbchens *O*, dessen Ende ein kleines Zahnrad bildet, welches in den gezähnten oberen Rand der Linsenfassung eingreift.

Fig. 719.



Der Gebrauch des Instrumentes ist nun folgender: Nachdem man den Schlüssel *U* herausgezogen und die Kappe *v* abgeschraubt hat, zieht man den Messingcylinder *H* und mit ihm das mittlere Linsensystem vorsichtig

heraus, legt dasselbe umgekehrt auf eine weiche Unterlage und schraubt die untere (jetzt nach oben gekehrte) Linse *m* heraus; auf die dadurch frei gewordene obere Seite der andern Linse legt man nun die zu untersuchende Krystallplatte, deren Dicke nicht viel über einen Millimeter betragen darf, und klemmt sie durch Wiedereinschrauben der ersten Linse zwischen beiden mit schwachem Drucke ein; um ein Verschieben derselben zu vermeiden, ist es gut, sie am Rande, wo sie auf der Fassung der Linse aufliegt, an dieser mit etwas Wachs zu fixieren. Platten von geringerer Dicke, als der Abstand der zusammengeschraubten Linsen beträgt, bedeckt man mit einem oder mehreren Glasplättchen von der erforderlichen Größe, damit sie nach dem Zusammenschrauben fest zwischen den Linsen liegen. Um beim Drehen Totalreflexion zu vermeiden, ist es in allen Fällen zu empfehlen, zwischen Linsen und Krystall, bzw. auch zwischen diese und die eingelegten Glasplatten, dünne Öl- oder Bromnaphtalinschichten zu bringen. Nachdem so die zu untersuchende Platte gut eingeklemmt zwischen den Linsen angebracht ist, wobei man bei einem kleinen Präparate nur darauf zu achten hat, daß es genau im Centrum des Linsensystemes *m* liegt, bringt man dieses wieder an seinen Platz im Innern des Instrumentes, indem man den kleinen Stift *ε* (an der Seite von *H*) in den entsprechenden Ausschnitt des an *D* angebrachten kurzen Rohrstückes eingreifen läßt, dann die Kappe *v* wieder aufschraubt, wodurch *H* in seiner Lage festgehalten wird, und den Schlüssel *U* einsetzt. Hat man die obenerwähnten Stellungen der Marken, bei denen der Hauptschnitt des unteren Nicols mit der Zeichnungsebene der Fig. 717 zusammenfällt und der obere dazu gekreuzt ist, hergestellt, so erblickt man nun im Instrumente das Interferenzbild, etwa so wie Fig. 77 S. 114, mit irgendeinem Winkel der Ebene der optischen Axen gegen die Nicolhauptschnitte, je nach der zufälligen Orientierung, welche man der Krystallplatte beim Einklemmen zwischen die Linsen gegeben hatte. Durch Drehen derselben in ihrer Ebene mittels des Schlüssels *U* bringt man nunmehr die Mittelpunkte der beiden Ringsysteme in diejenige Lage, bei welcher ihre Verbindungslinie senkrecht zur Ebene des Durchschnittes in Fig. 717 ist; diese Richtung ist im Gesichtsfelde durch eine der beiden gestrichelten, nicht bis zur Mitte reichenden Linien des festen Fadenkreuzsystemes Fig. 718 gegeben; man hat also den Schlüssel *U* so lange zu drehen, bis beide Axenpunkte mit der erwähnten Linie zusammenfallen. Steht die Ebene der optischen Axen nicht senkrecht zur Oberfläche der Krystallplatte, so kann man durch die Drehung der letzteren in ihrer Ebene die Verbindungslinie der beiden Axenpunkte wohl parallel der erwähnten Linie des Fadenkreuzes stellen, aber nicht mit ihr zusammenfallen lassen; um das letztere zu erreichen, muß man schließlich der Schiene *D* mittels des Knopfes *E* die erforderliche Drehung erteilen und dadurch das centrale Linsensystem so weit neigen, daß die Ebene der optischen Axen senkrecht steht. Ist die Coincidenz jener beiden Linien hergestellt, d. h. fällt der horizontale schwarze Balken des Interferenzbildes, Fig. 76 S. 113, mit

der erwähnten Fadenkreuzlinie zusammen, so dreht man das ganze Mittelstück um 45° (bis zur Einstellung der betreffenden Marken) und erhält nun die Hyperbelfigur Fig. 78 S. 114. Hierbei ist aber die Verbindungslinie der beiden Axenpunkte unverändert im gleichen Faden und senkrecht zur Drehungsaxe der Scheibe *N* geblieben; dreht man also jetzt die letztere mittels des breiten Knopfes *R*, so gelingt es, die Scheitelpunkte jeder der beiden dunkeln Hyperbeln auf den Schnittpunkt der beiden durchgehenden Linien des Fadenkreuzsystemes einzustellen. Die zwischen beiden Einstellungen erfolgte und am Kreise *T* abgelesene Drehung der Scheibe *N* ist nach Früherem gleich dem Winkel der beiden optischen Axen in dem stark brechenden Flintglase der centralen Linsen. Der Brechungsindex der letzteren wird bei der Lieferung jedes Instrumentes angegeben; in dem Falle, daß auch der mittlere Brechungsindex des Krystalles bekannt ist, kann man dessen wahren Axenwinkel berechnen. Um etwaige Excentricitätsfehler bei der Messung zu eliminieren, kann man auch die Nonienscheibe *N* so weit drehen, daß die untere Linse nach oben gerichtet ist, alsdann von neuem den Axenwinkel beim Austritte der Strahlen aus dieser messen und aus beiden Werten das Mittel nehmen.

Auch zur Messung des Winkels zwischen je einer optischen Axe und der Normalen der Krystallplatte (vgl. S. 750) kann der Apparat gebraucht werden. Man nimmt zu diesem Zwecke den Nicol ab und ersetzt ihn, wie im Axenwinkelapparate (s. a. a. O.), durch eine schräggestellte Spiegelglasplatte, welche die Strahlen einer seitlich aufgestellten Flamme in der Axe des Instrumentes abwärts reflectiert; das von der Krystallplatte oder der ebenen Fläche der unteren Linse *m* gespiegelte Bild des Fadenkreuzes erkennt man durch Drehen des Linsensystemes um eine seiner beiden horizontalen Drehungsaxen, bringt es durch die entsprechenden Bewegungen der Scheibe *N* und des Knopfes *E* mit dem direct gesehenen Fadenkreuze zur Deckung und liest diese Stellung, bei welcher die Normale der Platte genau mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt, am Teilkreise *T* ab. Alsdann setzt man den Analysator wieder ein, dreht mittels des Schlüssels *U* die Platte in ihrer Ebene so weit, daß das Bild einer optischen Axe in die zur Axe des Nonienkreises *N* senkrechte Linie des Fadenkreuzes fällt, und bringt dasselbe dann durch Drehen von *N* in die Mitte des Fadenkreuzes. Die hierzu erforderliche, am Kreise *T* abgelesene Drehung ist offenbar der scheinbare Winkel (nach der Brechung in Glas) zwischen der Plattennormalen und der optischen Axe.

Der Hauptvorteil des Instrumentes besteht aber in seiner Verwendbarkeit zur Aufsuchung der optischen Axen in Krystallen, welche im Nörrembergschen Apparate dieselben nicht mehr im Gesichtsfelde erkennen lassen. Will man sich z. B. über die Lage der optischen Axen orientieren an einem monoklinen Krystalle, welcher nach einem der Axe *b* parallelen Pinakoide dünn tafelförmig ist, und zeigt dieser im gewöhnlichen Polarisationsinstrumente nur dunkle, beim Drehen der Platte das Gesichtsfeld



durchlaufende Büschel, welche die Lage der Axenebene zweifelhaft lassen, so bringt man denselben in der angegebenen Weise in das vorstehend beschriebene Instrument und beleuchtet letzteres mit monochromatischem (Natrium-) Lichte. Man nimmt dann Interferenzcurven wahr, welche in bezug auf die der Ebene (010) des Krystalles entsprechende Linie rechts und links gleichgestaltet sind. Durch Drehen der Platte in ihrer Ebene (mit dem Schlüssel *U*) bringt man zunächst jene Linie in die zur Drehungsaxe der Scheibe *N* senkrechte Richtung und dreht die letztere (und somit den Krystall um seine *b*-Axe nach beiden Seiten; tritt hierbei kein Axenbild in das Gesichtsfeld, so ist anzunehmen, daß die Ebene (010) nicht diejenige der optischen Axen ist. Alsdann dreht man die Krystallplatte in ihrer Ebene um 90° und bewegt wieder den Nonienkreis nach beiden Seiten, nachdem man die Platte durch Drehung der Schiene *D* das eine Mal nach der einen, das andere Mal nach der andern Seite geneigt hat; ist die Ebene der optischen Axen senkrecht zu (010) und nicht allzu schief gegen die Normale der Platte geneigt, so gelangen bei einer dieser Stellungen der Schiene *D* die optischen Axen durch Drehung von *N* ins Gesichtsfeld. In diesem Falle erblickt man auch bei horizontaler Stellung der Platte den Mittelpunkt des Lemniscatensystemes, aber in der Ebene (010) verschoben.

Ist die Abweichung dieses Punktes von der Mitte des Gesichtsfeldes nicht so groß, so kann sie durch Verschiebung der Schiene *D* auf Null gebracht werden; alsdann liefert die Einstellung der beiden Axenbilder, durch Drehen der Nonienscheibe, sogar eine approximative Messung des Winkels der optischen Axen, trotz der Schiefe der Platte zur Mittellinie.

Literatur:

W. G. Adams, Proceed. Phys. Soc. **1**, 152; Phil. Magaz. 1875, 50 und 1879 [5] **8**, 275. S. auch Zeitschr. f. Kryst. **5**, 381.

E. Schneider, Carls Repert. f. Exper.-Physik **15**, 774 [1879].

F. Becke, Tschermaks min. u. petrogr. Mitteil. 1879, **2**, 430.

Spectralapparate zu krystalloptischen Untersuchungen.

Bei den zur Charakteristik einer krystallisierten Substanz gehörigen optischen Bestimmungen wird entweder weißes Tageslicht verwendet, wie zur approximativen Bestimmung der Schwingungsrichtungen und Aufsuchung der optischen Axen (s. S. 559), zur Schätzung der Doppelbrechung nach der Polarisationsfarbe (s. S. 45) usw. — oder es wird das Licht einer monochromatischen Flamme (am meisten die durch Helligkeit und Constanz ausgezeichnete Natriumflamme, s. S. 738) benutzt, wie bei der genauen Bestimmung der Schwingungsrichtungen, der Axenwinkelmessung usf. Handelt es sich aber darum, das optische Verhalten eines Krystalles auch für Licht anderer Wellenlängen zu bestimmen, so muß man mit dem betreffenden, zur Messung verwendeten Instrumente einen Spectralapparat derart verbinden, daß die verschiedenen Lichtarten des dadurch erzeugten

Spectrums getrennt zur Beleuchtung des Meßinstrumentes benutzt werden können. Einen derartigen, speciell für krystallographische Zwecke geeigneten Spectralapparat, dessen Verbindung mit dem Refractometer bereits S. 696 besprochen wurde, liefert die Firma Fuess; derselbe wurde von Wülfing construiert und beruht auf der von Lippich zur Bestimmung des Drehungsvermögens eingeführten Anordnung, unterscheidet sich aber dadurch von letzterer, daß die beiden Fernröhre eine feste Stellung besitzen und daher während der Messungen keine Veränderungen in der Aufstellung des Apparates und der Lichtquelle vorzunehmen sind (s. Wülfing, Tschermaks min.-petr. Mitt. 1896, **15**, 74 f.; Leiss, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1898, **18**, 209 f. und »Die opt. Instr. d. F. Fuess«, Leipzig 1899, S. 25 f.).

Verbindung des Spectralapparates mit dem Axenwinkelapparate. Es wurde zuerst von Kirchhoff (Poggendorffs Ann. d. Phys. 1859, **108**, 567) eine Methode angegeben, um die Winkel der optischen Axen für die verschiedenen Fraunhoferschen Linien zu messen. Zu dem gleichen Zwecke construierte V. von Lang eine Combination des Spectralapparates mit dem Axenwinkelapparate (Zeitschr. f. Kryst. 1878, **2**, 492) und R. Fuess den von Liebisch im Jahrb. f. Min., Geol. usw. 1885 beschriebenen »großen Axenwinkelapparat«, mit dessen Collimator die Spectraleinrichtung verbunden ist. Ein Nachteil dieses Apparates besteht darin, daß man den größten Teil des Spectrums im Gesichtsfelde hat und die betreffende Farbe nur in der senkrechten Mittellinie des letzteren erscheint; die auftretenden Interferenzerscheinungen entsprechen daher rechts und links von jener Linie andern Wellenlängen, und infolgedessen erscheinen bei einigermaßen großer Dispersion der Axen keine Lemniscaten. Eine gleichmäßige Erleuchtung des ganzen Gesichtsfeldes mit möglichst monochromatischem Lichte erreichte Tutton durch den von ihm nach einer Idee von Abney angegebenen und von Troughton und Simms in London construierten Spectralapparat, welcher in Zeitschr. f. Kryst. 1895, **24**, 455 f. ausführlich beschrieben und in seiner Combination mit den Fuessschen Refractometern und Axenwinkelapparaten erläutert und abgebildet ist. Von dem durch ein stark dispergierendes Prisma hervorgebrachten Spectrum wird durch einen zweiten Spalt nur ein schmaler, nahezu einfarbiger Streifen hindurchgelassen und mit diesem das ganze Gesichtsfeld beleuchtet. Das gleiche gilt von dem obenerwähnten Wülfingschen Spectralapparate, welcher ebenfalls mit denselben Instrumenten, sowie mit den im folgenden Abschnitte zu beschreibenden Mikroskopen zu krystalloptischen Untersuchungen verbunden werden kann.

Spectralapparate zur Bestimmung der Lichtabsorption und des Drehungsvermögens. Die älteste Methode zur quantitativen Bestimmung der Absorption des Lichtes für die verschiedenen Farben des Spectrums ist die folgende, von Vierordt angegebene: Der Spalt eines Spectralapparates ist in zwei Teile geteilt, so daß jede Hälfte desselben für sich weiter oder enger



gestellt und die Breite einer jeden an der Trommel der zur Verstellung benutzten Mikrometerschraube abgelesen werden kann. Vor den einen Spalt wird nun die zu untersuchende Platte gebracht und derselbe so weit geöffnet, daß das ihn passierende Licht nach der Absorption in der Platte die gleiche Helligkeit besitzt, wie das durch die andere, engere Spalthälfte frei hindurchgegangene Licht. Um hierbei die Untersuchung für eine einzelne Farbe

Fig. 720.



vornehmen zu können, ist im Oculare des zum Spectralapparate gehörigen Beobachtungsfernrohres ein Schieber mit Schlitz angebracht. Durch letzteren erblickt man dann nur einen schmalen Streifen des Spectrums, dessen obere Hälfte von dem durch die Platte bedeckten Spalte, dessen untere Hälfte von dem freien Spalte erleuchtet ist, und kann nun leicht durch Änderung der ersten Spaltweite beide Hälften gleich hell machen. Aus dem an den Mikrometerschrauben abgelesenen Verhältnisse der beiden Spaltweiten kann die Stärke der Absorption berechnet werden (Vierordt, Anwendung der Spectralanalyse zur Photometrie der Absorptionsspectren, Tübingen, 1873; H. W. Vogel, Practische Spectralanalyse, Nördlingen 1878).

Noch genauer und für die Untersuchung der Absorptionsverhältnisse in Krystallen besonders geeignet ist das von Glan construierte Spectralphotometer, welches von Schmidt und Hänsch in Berlin[1]) geliefert wird. Dasselbe ist Fig. 720 in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Größe dargestellt. Der kurze Spalt des Collimatorrohres C, durch welchen das weiße Licht eines starken

1) S. Stallschreiberstr. 4. Der Preis des Instrumentes ist 450 Mark.

Petroleum- oder Gasglühlichtbrenners eintritt, ist durch ein quer übergelegtes schmales Metallplättchen in zwei Hälften geteilt. Vor die eine derselben wird, wie bei dem vorigen Apparate, die absorbierende Platte gebracht; die beiden Hälften haben aber hier gleiche und constante Breite. In dem Collimatorrohre befindet sich ferner ein doppeltbrechender Körper (ein sogenanntes Rochonsches Quarzprisma), welcher von jeder der beiden rechteckigen Spalthälften ein doppeltes Bild entwirft; bei richtiger Stellung des Instrumentes erscheinen in der Mitte des Gesichtsfeldes das ordentliche Bild der einen Hälfte und das außerordentliche der andern unmittelbar übereinander, um die Vergleichung ihrer Helligkeit zu erleichtern. Aus dem doppeltbrechenden Prisma gelangen die Strahlen in einen im verstärkten Teile von C befindlichen Nicol, welcher mittels des Griffes G drehbar ist, und dessen Drehung an dem Kreise k abgelesen werden kann. Stellt man den Nicol auf 0°, so fällt sein Hauptschnitt mit dem des doppeltbrechenden Prismas zusammen, und das ordentliche Bild ist vollkommen verschwunden; durch Drehung des Nicols ruft man dasselbe wieder hervor und findet leicht diejenige Stellung, in welcher beide Bilder gleich hell erscheinen. Sei der hierzu erforderliche und am Kreise k abgelesene Drehungswinkel $= \alpha$, so ist das Verhältnis der Intensitäten des durch den oberen und des durch den unteren Spalt gegangenen Lichtes $= \tan^2 \alpha$. Um die so erhaltene Bestimmung der Absorption für jede Farbe einzeln vornehmen zu können, gehen die Strahlen durch das Prisma P und bringen in dem Beobachtungsfernrohre F ein Spectrum hervor, von welchem durch einen Schlitz des Schiebers H nur der der betreffenden Farbe entsprechende, schmale Streifen beobachtet wird. Durch eine im Rohre S angebrachte Scala, welche, von einer Flamme beleuchtet und an dem Prisma P gespiegelt, gleichzeitig im Fernrohre F gesehen wird, kann die Stelle im Spectrum, welche man beobachtet, näher bestimmt werden. Auch kann man die Stellung des Beobachtungsfernrohres an dem Kreise K ablesen, wie bei einem Refractometer.

Bodländer benutzte den Glanschen Apparat zur Messung der Drehung der Polarisationsebene in optisch activen Krystallen, indem er das Rochonsche Prisma und das Plättchen, welches den Spalt in zwei Hälften teilt, entfernte und hinter dem letzteren eine Quarzdoppelplatte anbrachte, welche in der oberen Hälfte aus Rechtsquarz, in der unteren aus Linksquarz, beide gleich dick, besteht. Das Licht eines Petroleum- oder Gasbrenners, durch eine Linse parallel gemacht und durch einen Nicol polarisiert, fällt, nachdem es durch Spalt und Doppelplatte gegangen ist, auf den drehbaren Nicol des a. vor. S. abgebildeten Apparates. Werden die Hauptschnitte beider Nicols gekreuzt und die Grenze der beiden Hälften der Quarzplatte senkrecht zur Kante des Prismas gestellt, so erscheint in der oberen und unteren Hälfte des beobachteten Spectrums dieselbe Farbe ausgelöscht, nämlich das im Rechts- und im Linksquarz um 180° gedrehte Gelb, und daher ein senkrecht durchgehender schwarzer Streifen. Fügt man nun vor dem Spalte

eine optisch active Platte in den Gang der Lichtstrahlen ein, welche das mittlere Gelb um α^0 rechts dreht, so wirkt diese so, als ob der Rechtsquarz um ebensoviel dicker, der Linksquarz dünner geworden wäre; man muß den Nicol am Ende des Collimatorrohres um α^0 nach rechts drehen, um den dunkeln Streifen in beiden Hälften des Spectrums wieder an derselben Stelle zu sehen (G. Bodländer, Über das optische Drehungsvermögen isomorpher Mischungen aus den Dithionaten des Bleies und des Strontiums, Dissert. Breslau 1882, s. auch Zeitschr. f. Kryst. **9**, 309)[1]).

Einen andern, speciell für die Messung des Drehungsvermögens bestimmten Apparat hat später Glan beschrieben (»ein Spectrosaccharimeter« Sitzber. d. k. Acad. d. Wissensch. München 1891, ref. in Zeitschr. f. Kryst. **23**, 280). Derselbe hat die folgende Construction: Weißes Licht fällt durch den Spalt eines Collimators und tritt aus dessen Objective parallel aus; nachdem es durch einen Polarisator geradlinig polarisiert ist, passiert es ein Diaphragma, dessen kreisrunde Öffnung zur Hälfte mit einer sehr dünnen, zur Axe senkrechten Quarzplatte, welche die Polarisationsebene nur wenige Grade dreht, bedeckt ist. Gegenüber befindet sich der drehbare, mit Teilkreis versehene Analysator, dann ein Flintglasprisma und endlich das Beobachtungsfernrohr, in welchem ein Bild des Spectrums erzeugt wird; durch einen im Focus desselben befindlichen zweiten Spalt wird von

1) Das soeben beschriebene Verfahren zur Bestimmung des Drehungsvermögens ist nur eine Modification der älteren Brochschen Methode, welche besonders genaue Resultate liefert, wenn man sehr dicke Platten zur Verfügung hat. Man läßt alsdann Sonnenlicht, durch einen Nicol polarisiert, auf den Krystall fallen, welcher vor oder hinter dem Spalte angebracht wird (das Rochonsche Prisma wird auch bei diesem Verfahren aus dem Rohre *C* entfernt). Hat man ursprünglich durch Dunkelstellung die beiden Nicols gekreuzt, so löscht der Analysator alle Farben aus, welche durch die dicke Krystallplatte genau um 180° oder ein Vielfaches davon gedreht werden, im Spectrum erscheinen also an Stelle dieser Farben dunkle Streifen. Durch approximative Bestimmung der Drehung an einigen dünnen Platten läßt sich nun leicht für einen bestimmten Streifen angeben, wieviel mal 180° die Drehung der betreffenden Farbe beträgt. Stellt man darauf durch Drehung des Fernrohres *F* den verticalen Faden eines an Stelle des Schiebers *H* in dasselbe eingesetzten Fadenkreuzes auf eine Fraunhofersche Linie von stärkerer Brechbarkeit ein und dreht den Analysator in demselben Sinne, wie der Krystall dreht, so werden nunmehr stärker brechbare Strahlen ausgelöscht, der dunkle Streifen wandert nach der Seite des Violett und kann also ebenfalls mit dem Fadenkreuze zur Deckung gebracht werden. Die hierzu nötige Drehung α ist der Winkel, welchen die Schwingungsrichtung der eingestellten Fraunhoferschen Linie mit der des Polarisators und der um $n \cdot 180^0$ gedrehten, vorher ausgelöschten Farbe bildet; die Drehung für die eingestellte Linie beträgt also $n \cdot 180^0 + \alpha^0$. In derselben Weise kann man einen bestimmten dunkeln Streifen nach und nach auf alle Fraunhoferschen Linien einstellen und die Drehung für die ihnen entsprechenden Wellenlängen bestimmen (über einige Abänderungen der Brochschen Methode behufs noch genauerer Messung s. V. von Lang, Sitz.-Ber. d. Wien. Acad. **74** (2), 209, und R. Lüdtke, Poggendorffs Ann. d. Phys. **137**, 271).

Eine angenäherte Messung der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes ist, wie S. 752 gezeigt wurde, auch mit dem S. 743 f. beschriebenen Axenwinkelapparate des krystallogr.-optischen Universalapparates möglich.



diesem Bilde nur ein nahezu einfarbiger schmaler Streifen hindurchgelassen. Zieht man das Ocular weiter aus, so erblickt man das durch das Objectiv hervorgebrachte Bild des Diaphragmas, welches zur Hälfte mit der Quarzplatte bedeckt ist, und zwar in derjenigen Farbe, welche vom zweiten Spalte durchgelassen wurde. Die beiden Hälften dieses Bildes erscheinen nur dann gleich hell, wenn die Polarisationsebene des Analysators den Winkel halbiert, welchen die Polarisationsebenen des Lichtes in beiden Hälften miteinander bilden, oder wenn sie auf dessen Halbierender senkrecht ist. Man stellt nun den Analysator auf genau gleiche Helligkeit beider Hälften, fügt die zu untersuchende Krystallplatte zwischen das Diaphragma mit der Quarzplatte einerseits und den Analysator andererseits ein und bestimmt die Drehung des Analysators, welche erforderlich ist, um die Gleichheit der Helligkeit beider Hälften wiederherzustellen. Diese ist gleich der Drehung, welche die Polarisationsebene des Lichtes von der bestimmten Farbe, auf die der Spalt des Beobachtungsfernrohres eingestellt war, in der eingefügten Krystallplatte erfahren hat.

Die S. 760 erwähnte Anordnung eines Spectralapparates zur Messung der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes von Lippich ist beschrieben in Sitz.-Ber. d. Wien. Acad. 1885, **91**, 1081, und 1896, **105**, 317; Zeitschr. f. Instrumentenk. 1896, **14**, 326; siehe ferner: Landolt, das optische Drehungsvermögen, 2. Aufl., Braunschweig 1898, S. 314 f., woselbst alle neueren, namentlich auf der Einführung der sog. »Halbschattenpolarisatoren« (über diese siehe besonders Lippich, Zeitschr. f. Instrumentenk. 1892, **12**, 333) beruhenden Verbesserungen der Methoden zur Bestimmung der Polarisationsebene ausführlich beschrieben sind.

Für den gleichen Zweck liefert die Firma Fuess ein »Universalspectrometer« nach Liebisch, welches außer zur Messung der Brechungsindices als Spectrophotometer nach Glan, zur Bestimmung der Constanten des durch Reflexion an Krystallen elliptisch polarisierten Lichtes mit dem Babinetschen oder einem andern Compensator (s. später unter »Mikroskop-Attributen«)[1]), zur Messung des optischen Drehungsvermögens nach den Methoden von Broch, Lüdtge und Bodländer, endlich auch als Totalreflectometer benutzt werden kann (s. C. Leiss, die optischen Instrumente der Firma R. Fuess, Leipzig 1899, S. 21 f.).

Mikroskope zu krystallographisch-optischen Untersuchungen.

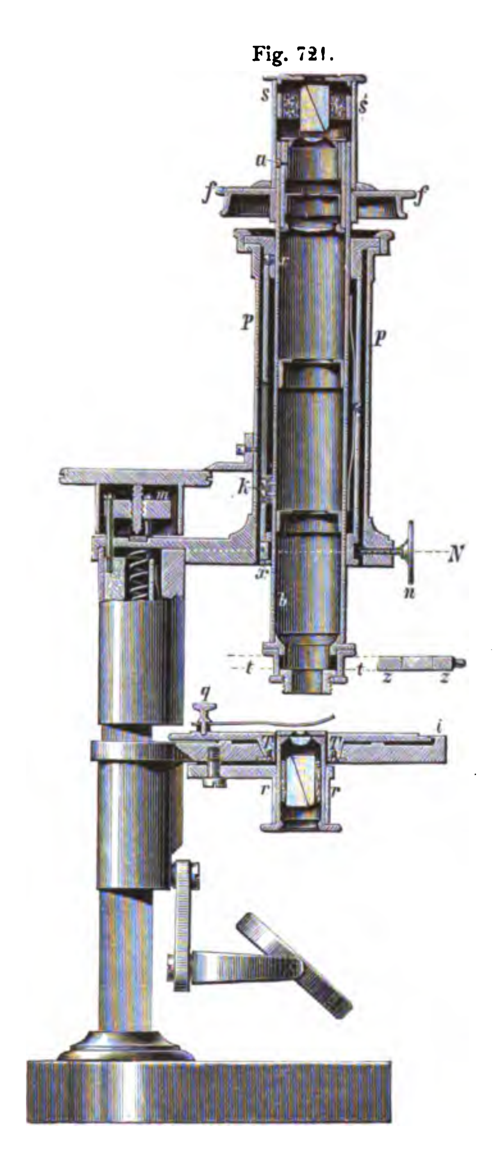
Die Haupterfordernisse eines derartigen Mikroskopes sind nach S. 54 ein drehbarer Objecttisch, dessen Drehung an einer Teilung abgelesen werden kann, und zwei davon unabhängige, in gekreuzte Stellung zu

1) Die »Vorrichtung zur Untersuchung der Polarisation des Lichtes durch Reflexion an ebenen Flächen nach Liebisch« kann auch für sich geliefert und mit jedem der größeren Spectrometer und Reflexionsgoniometer benutzt werden. Statt des Krystallträgers derselben kann auch der Stöbersche Verticalkreis (s. Fig. 691 S. 687) dienen.



bringende Polarisatoren behufs der Prüfung der Krystalle im polarisierten Lichte. Im folgenden soll nun zuerst das älteste, von Fuess construierte und noch vielfach verwendete Polarisationsmikroskop beschrieben werden, welches in Fig. 721, größtenteils im Durchschnitte, in $\frac{2}{3}$ nat. Größe abgebildet ist.

Fig. 721.



Das Stativ des Instrumentes besteht aus einer hufeisenförmigen Fußplatte und einem dreiseitigen Stahlprisma, an welchem zwei Träger sitzen, deren unterer sowohl den drehbaren Spiegel, als den Objecttisch und das fest mit letzterem verbundene Rohr *r* trägt. In dieses wird von unten das Polarisatorrohr, das oben durch eine Linse geschlossen ist, eingeschoben und so gedreht, daß der Nullpunkt der auf demselben angebrachten Teilung mit einer auf *r* befindlichen Marke coincidiert; bei dieser Orientierung fällt der Hauptschnitt des darin befindlichen Prazmowskischen Prismas (s. S. 727) in die Zeichnungsebene der Fig. 721. Über der festen Trägerplatte, an deren Unterseite *r* angeschraubt ist, befindet sich eine um die senkrechte Axe des Instrumentes drehbare Platte, der eigentliche Objecttisch *T*, dessen gekerbter Rand ringsum frei vorragt, so daß er leicht mit den Fingern gedreht werden kann; nur in der Ebene der Zeichnung greift die feste Platte nach vorn über mit einem Fortsatze, auf dessen Oberfläche eine Marke zur Ablesung der auf der drehbaren Scheibe *T* befindlichen Teilung angebracht ist. Mittels der durch *q* angeschraubten Federn kann man das untersuchte Präparat auf dem drehbaren Tische festhalten. Der obere Träger, an dessen Arme der Tubus des Mikroskopes befestigt ist, kann durch eine Feinstellschraube auf und nieder bewegt werden. Auf dem Stahlprisma des Statives sitzen drei dünne Pfeiler (von denen zwei in der Figur sichtbar sind), die

durch den Tubusarm hindurchgehen und die stählerne Mutter *m* tragen, welche die Mikrometerschraube aufnimmt. Die Schraube, mittels deren die letztere gedreht wird, ist am Rande in 500 Teile geteilt; da einer ganzen Umdrehung der Scheibe eine Hebung oder Senkung des Tubus von 0,5 mm entspricht, so kann man behufs Anwendung der Methode des Herzogs von Chaulnes (s. S. 31) eine Verticalschiebung des Mikroskopes auf 0,001 mm genau messen. Die Mikrometerschraube steht mit ihrem gehärteten Ende auf einer in den Tubusarm eingesetzten Stahl- oder Achatplatte; ihr toter Gang wird durch eine im Stahlprisma befindliche und von unten gegen den Tubusarm wirkende Spiralfeder aufgehoben. Die grobe Einstellung des Mikroskopes erfolgt durch einfache verticale Verschiebung des Tubus *b*, welchen man dabei an dem Rande *f* faßt, in der ihn umgebenden Hülse *p*. Letztere ist doppelwandig und so construiert, daß das innere der beiden Rohre, aus denen sie besteht, und welche nur oben miteinander verbunden sind, um zwei zueinander senkrechte horizontale Axen um einen kleinen Winkel gedreht werden kann, und zwar mittels der Schrauben *n*, von denen eine in der Figur sichtbar ist. Dieselben greifen, wie aus dem horizontalen, der punktierten Linie *N* entsprechenden Durchschnitte Fig. 722 hervorgeht, nach zwei zueinander senkrechten Richtungen in den untersten Teil der inneren Hülse *p* ein, und man kann daher mit Hilfe derselben den Mikroskoptubus, dessen horizontalen Querschnitt der innerste Doppelring in Fig. 722 darstellt, so centrieren, daß seine Axe in ihrer Verlängerung nach unten genau den Drehungspunkt des Objecttisches *T* trifft und daher ein in die Mitte des Gesichtsfeldes gebrachter Punkt des Objectes beim Drehen des Tisches seinen Ort im Gesichtsfelde bewahrt. Wie S. 639 auseinandergesetzt wurde, ist die Erfüllung dieser Bedingung notwendig zur Messung ebener Winkel unter dem Mikroskope.

Fig. 722.



Dem Instrumente wurden die Hartnackschen Objective 4, 7 und 9 beigegeben, von welchen das erste, je nach dem Oculare eine 90—200fache Vergrößerung liefernd, am häufigsten gebraucht wird (eine noch schwächere Vergrößerung und noch größeren Abstand vom Objecte erhält man, wenn man die untersten Linsen dieses Objectivsystemes abschraubt). Das Objectiv, in Fig. 721 nicht mit abgebildet, wurde auf das untere Ende des Tubus *b* aufgeschraubt. Über demselben kann man durch einen auf beiden Seiten des Rohres angebrachten Schlitz in der Ebene *tt* den Schieber *z* mit einer sogenannten Biotschen Quarzplatte einführen, von C. Klein zu dem Zwecke empfohlen, um an den Objecten (durch Änderung der empfindlichen Farbe der Quarzplatte) eine schwache Doppelbrechung zu erkennen[1]).

1) Geeigneter sind die S. 138 näher besprochenen Platten, deren man ebenfalls in einer zur Einführung durch jenen Schlitz geeigneten Form bedarf, um die a. a. O. besprochenen

In die obere Öffnung des Tubus *b* wird das Ocularrohr (deren drei beigegeben sind) eingesetzt, dessen Construction aus dem Durchschnitte Fig. 721 und aus der Fig. 723 ersichtlich ist: unten befindet sich eine feste Linse, über dieser das Fadenkreuz oder ein Glasmikrometer und zu oberst eine zweite Linse, deren Abstand durch Verschiebung des Rohres *A* geändert und hierdurch auf das Fadenkreuz scharf eingestellt werden kann. Das vorspringende Schräubchen *a* des Ocularrohres paßt in einen senkrechten Schlitz des Tubus *b*, so daß dem Fadenkreuze hierdurch immer eine bestimmte Stellung gewahrt ist, nämlich diejenige parallel den Hauptschnitten der beiden Polarisatoren, sobald letztere so gedreht sind, daß die Nullpunkte ihrer Teilungen mit den Marken der festen Rohre coincidieren[1]). Auf das Ocular kann schließlich das Rohr *s* mit dem Analysator aufgesetzt werden, welches mit einer Kreisteilung auf der mit dem Tubus fest verbundenen und eine Marke tragenden Platte *f* schleift. Fällt der Nullpunkt der Teilung mit der Marke zusammen, und ebenso derjenige am Polarisator, so sind beide Nicols gekreuzt, und es findet zugleich die soeben erwähnte Coincidenz ihrer Hauptschnitte mit den Linien des Fadenkreuzes statt.

Fig. 723.



Ein einfacheres, ebenfalls von derselben Firma in den Handel gebrachtes Mikroskop unterscheidet sich von dem in Fig. 721 abgebildeten dadurch, daß der Tubus nicht mit der Hand frei verschoben und mit einer Mikrometerschraube feingestellt werden kann, sondern nur eine einzige, weniger feine Einstellung durch einen Trieb vorhanden ist, dessen Construction der in Fig. 724 dargestellten gleicht.

Mit derartig construierten Mikroskopen können folgende Arbeiten ausgeführt werden:

Messung von Kantenwinkeln nach S. 639 (ohne Nicols);

Bestimmung des Pleochroismus farbiger Krystalle nach der Methode von Tschermak (S. 171), wozu der untere Nicol allein erforderlich ist[2]);

Erkennung der Doppelbrechung und Bestimmung der Schwingungsrichtungen optisch anisotroper Krystalle zwischen gekreuzten Nicols nach S. 713 oder stauroskopisch durch Einfügung einer senkrecht zur Axe geschnittenen Kalkspatplatte. Für die erstere Aufgabe sind die in der Anmerkung[1]) d. vor. S. (s. unten) angeführten Mittel zu benutzen; in gewissen Fällen

---

Untersuchungen auszuführen, nämlich eine Viertelundulations-Glimmerplatte, eine Gypslamelle, welche Rot I. Ordnung zeigt, und ein Quarzkeil mit den Farben II.—IV. Ordnung.

1) Diese Orientierung der Hauptschnitte der Kalkspatprismen erleidet mit der Zeit kleine Änderungen, wahrscheinlich durch Contractionen der Korkfassungen, und muß daher von Zeit zu Zeit durch Bestimmung der Schwingungsrichtung einer Krystallplatte (z. B. eines rhombischen Krystalles von prismatischer Ausbildung) geprüft werden. An größeren Mikroskopen neuerer Construction hat Fuess auch eine Correction dieses Fehlers vorgesehen.

2) Für den gleichen Zweck hat neuerdings Fuess auch ein besonderes Dichroskopocular construiert (s. C. Leiss, die optischen Instrumente der Firma R. Fuess, Leipzig

kann aber auch mit Vorteil die von Fedorow in seinen »krystall-optischen Untersuchungen« (Zeitschr. f. Kryst. **22**, 264) vorgeschlagene Methode der Beobachtung zwischen parallelen Nicols dienen, da alsdann sehr dünne Krystallschnitte statt des Grau oder Weiß erster Ordnung complementäre Farben von großer Lebhaftigkeit und Empfindlichkeit zeigen.

Um möglichst genau paralleles Licht für optische Bestimmungen im Mikroskope zu erhalten, benutzt Fedorow einen Satz dünner Glasplättchen in Verbindung mit einem von ihm neu construierten Polarisator (s. Zeitschr. f. Kryst. 1903, **37**, 413, u. 1905, **40**, 297).

Eine wesentliche Erweiterung, welche namentlich für petrographische Untersuchungen von großer Wichtigkeit geworden ist, hat die Anwendung des Polarisationsmikroskopes dadurch erfahren, daß man dasselbe, wie S. 57 bereits kurz erwähnt wurde, zugleich als Konoskop benutzen und somit die Interferenzerscheinung beobachten kann, welche ein in einem Präparate befindlicher, in die Axe des Instrumentes eingestellter, mikroskopischer Krystall im convergenten polarisierten Lichte hervorbringt. Zu diesem Zwecke müssen zunächst die aus dem Polarisator austretenden Strahlen stark convergent gemacht werden durch den Condensor, eine kleine, in Fassung befindliche Linse, welche über der das Polarisatorrohr *r* (Fig. 721) abschließenden Linse aufgelegt wird. Das Interferenzbild kann nach einer der beiden folgenden Methoden hervorgebracht werden:

Nach dem Verfahren von Lasaulx legt man, wie es in Fig. 721 dargestellt ist, auf die den oberen Teil des Polarisatorrohres abschließende Linse noch eine zweite kleinere, dem Instrumente beigegebene, welche die auf die Präparate fallenden Lichtstrahlen noch stärker convergent macht; um die entsprechend divergenten Strahlen wieder zu vereinigen, muß man als Objectiv auch eines der stärkeren, wenigstens Nr. 7, anwenden und mit diesem den zu untersuchenden Krystall genau in die Mitte des Gesichtsfeldes einstellen. Um nun nicht das eingestellte Object, sondern das von ihm hervorgebrachte Interferenzbild zu sehen, entfernt man jetzt das Ocularrohr aus dem Tubus *b* und setzt dann den Analysator wieder auf. Liegt der eingestellte Krystall so, daß die einer optischen Axe entsprechenden Strahlen noch in das Gesichtsfeld fallen, so erscheint in der kleinen hellen Öffnung, welche man jetzt im Mikroskope erblickt, die dunkle Hyperbel (bzw. bei einaxigen Krystallen das schwarze Kreuz) und gewöhnlich auch ein oder mehrere Farbenringe. Dieses Interferenzbild, welches man besonders gut sieht, wenn man das Auge etwas über den Analysator erhebt, kann man (nach einem Vorschlage von Bertrand) noch vergrößern durch Einsetzen eines dem Mikroskope beigegebenen, mit einer Linse versehenen Tubus in das Rohr *b*.

1899, S. 220). Ein Mikrodichroskop von besonders einfacher Construction, bei dessen Anwendung der Polarisator des Mikroskopes entfernt wird, gab Fedorow an (Zeitschr. f. Kryst. 1903, **37**, 413); dieses wird ebenfalls von der Firma Fuess geliefert.



Die zweite Methode der Umwandlung des Polarisationsmikroskopes in ein Konoskop ist diejenige von Bertrand, welche es unnötig macht, jedesmal zur Beobachtung der Interferenzfigur eines eingestellten Krystalles den Analysator abheben, das Ocularrohr herausziehen und dann den Analysator wieder aufsetzen zu müssen. Der Genannte zeigte nämlich, daß es genügt, über dem Objective des Mikroskopes (ohne sonst an letzerem etwas zu ändern) eine achromatische Linse von 3—4 cm Brennweite einzufügen, um statt des eingestellten Krystalles die von demselben erzeugte Interferenzfigur zu sehen. Nach diesem, offenbar ein rascheres und bequemeres Arbeiten ermöglichenden Principe werden nun in neuerer Zeit alle für krystalloptische bzw. petrographische Untersuchungen bestimmten Mikroskope construiert, wie sie außer R. Fuess in Deutschland besonders W. & H. Seibert in Wetzlar, Voigt & Hochgesang in Göttingen und Carl Zeiss in Jena liefern. Die Constructionen dieser verschiedenen Firmen unterscheiden sich nur durch die Einrichtungen der Beleuchtung und des Condensors, bzw. die Vorrichtungen zur Ein- und Ausschaltung des letzteren, sowie durch die Methoden der Centrierung, des Wechselns der Objective und andere constructive Einzelheiten.

Fig. 724.



Die Bestimmung eines mikroskopischen Krystalles wird offenbar wesentlich erleichtert, wenn man von der Untersuchung desselben im parallelen polarisierten Lichte, wobei man ihn in die Mitte des Gesichtsfeldes einstellt, unmittelbar, ohne das Auge vom Oculare zu entfernen, zu der Hervorrufung des zugehörigen Interferenzbildes im convergenten Lichte übergehen kann. Es ist daher an allen neueren Instrumenten die Einrichtung getroffen, daß der (gewöhnlich aus zwei Linsen bestehende) Condensor zwischen Polarisator und Object nach Belieben ein- und ausgeschaltet werden kann.

Dem im Eingange dieses Abschnittes beschriebenen früheren Instrumente der Firma Fuess entspricht in seinen optischen Leistungen das neue einfache Mikroskop Modell IVa derselben Firma, welches in Fig. 724 abge-

bildet ist. Hier besteht der Condensor aus zwei Linsen, von denen die untere fest mit dem Polarisator verbunden, die obere centrisch auf jene aufgelegt ist und leicht von oben abgenommen werden kann, um den Übergang von convergentem zu parallelem Lichte zu bewerkstelligen. Meist genügt es aber für diesen Zweck, das ganze Condensorsystem mit dem Polarisatorrohre zu senken; dies geschieht durch einfaches Niederdrücken des Hebels *h* infolge der Drehung in Scharnieren, von welchen eines (*d*) in der Figur sichtbar ist. Statt dieser Vorrichtung kann auch eine solche angebracht werden, welche die Ein- und Ausschaltung des Condensors vorzunehmen gestattet, während das Object eingestellt bleibt, und die bei allen übrigen neueren Fuessschen Mikroskopen vorhanden ist. Bei dieser Construction ist der Polarisator ebenfalls mit einer schwachen Condensorlinse, welche nur zur besseren Beleuchtung dient, fest verbunden; über diese können zwei weitere Linsen von kürzerer Brennweite, deren obere in dem mittleren Ausschnitte des Objecttisches in Fig. 725 sichtbar ist, eingeschaltet werden; beide Linsen sitzen in einer gemeinsamen Fassung am Ende eines Hebels, welcher in dem inneren Hohlraum des etwas erhöhten Objecttisches mittels eines aus dem seitlichen Schlitze herausragenden Knöpfchens gedreht werden kann einerseits bis zur centrierten Einschaltung des Condensors, andererseits bis zum seitlichen Verschwinden unter die Deckplatte des Objecttisches; während dieses Wechsels zwischen parallelem und convergentem Lichte bleibt also das Präparat unverändert auf dem drehbaren Objecttische. Die grobe Einstellung des Tubus geschieht mittels einer Triebführung (*G* Fig. 724), die feine durch eine ähnliche Einrichtung am Stative, wie sie S. 765 beschrieben wurde. Am unteren Ende des Tubus befinden sich zwei Schrauben *c* zur genaueren Centrierung der Objectivsysteme, und unmittelbar darunter (links in Fig. 724 sichtbar) ein Schlitz zum Einschieben der Viertelundulations-Glimmerplatte, des Quarzkeils usw. Die Objective werden nicht an das untere Ende des Tubus angeschraubt, sondern durch eine federnde Objectivklammer *k* gehalten, welche eine schnelle Auswechselung der verschiedenen Vergrößerungen gestattet; um ein Objectiv einzusetzen, hat man mit der linken Hand das Ende von *k* mit der Spiralfeder zusammenzudrücken, mit der rechten das Objectiv in die geöffnete Kammer einzuschieben und dann die Feder nachzulassen, wobei sich der konische Oberteil des Objectivsystemes von selbst centriert in eine konische Ausbohrung des unteren Tubusendes hineinlegt. Unmittelbar über den Centrierschrauben kann der Analysator, in der rechteckigen Fassung *N* befindlich, ein- oder ausgeschoben werden, während in beiden Fällen der Tubus licht- und staubdicht geschlossen bleibt. Weiter oben befindet sich ein zweiter Schieber *g* (s. Fig. 725), welcher ebenfalls zwischen zwei Anschlägen beweglich ist, indem er beim Einschieben an die Rückseite des verschiebbaren Auszugsrohres *R*, beim Herausziehen an einen federnden Anschlag *f* trifft; dieser trägt die Bertrandsche Linse, welche mit dem zugehörigen Ramsdenschen Oculare Nr. 4 ein 5-fach vergrößerndes

Hilfsmikroskop[1]) zur Betrachtung der von den stärkeren Objectiven erzeugten Axenbilder darstellt. Das genannte, zur Messung der Axenwinkel mit einem Glasmikrometer ausgerüstete Ocular befindet sich in dem verschiebbaren Auszugsrohre in bestimmter Entfernung von der Bertrand-schen Linse, kann aber auch unter Ausschaltung der letzteren als selbständiges Ocular bei der Beobachtung im parallelen polarisierten Lichte benutzt werden. Außerdem kann an den neueren Instrumenten auch eine von Tschermak vorgeschlagene Einrichtung angebracht werden, welche gestattet, den Polarisator ohne die Beleuchtungslinsen auszuschalten.

Fig. 725.



Das in Fig. 725 abgebildete Mikroskop ist das Modell III der Firma Fuess. Das Stativ desselben ist umlegbar und besitzt außer der groben Triebbewegung noch eine Feinstellung mittels Mikrometerschraube, welche, wie in Fig. 721, oben mit einer Teilung versehen ist (vgl. S. 766). Die orientierte Verschiebung des für sich auch drehbaren Polarisators durch Trieb, der Objecttisch mit der vorher beschriebenen Ein- und Ausschaltungsvorrichtung *b'* des Condensors zur Erzeugung convergenten Lichtes, die Objectivklammer *k*, der ein- und ausschiebbare Analysator *N*, der Schieber *g* mit der Bertrandschen Linse und dem federnden Anschlage *f*, endlich

1) Welches vielfach auch als »Amicisches Hilfsmikroskop« bezeichnet wird, weil Amici schon früher eine analoge Linsencombination bei dem gewöhnlichen Konoskope anwandte.

das Auszugsrohr R, in welches die Oculare eingeschoben und dem eventuell auch ein zweiter drehbarer Analysator aufgesetzt werden kann, sind dieselben, wie bei dem Instrumente Modell IV, ebenso die optische Ausrüstung, nur daß diesem noch ein stärkeres Objectiv (Nr. 9) beigegeben wird. Außerdem können mit demselben mehrere der im folgenden Abschnitte beschriebenen Nebenapparate verbunden werden.

Fig. 726.

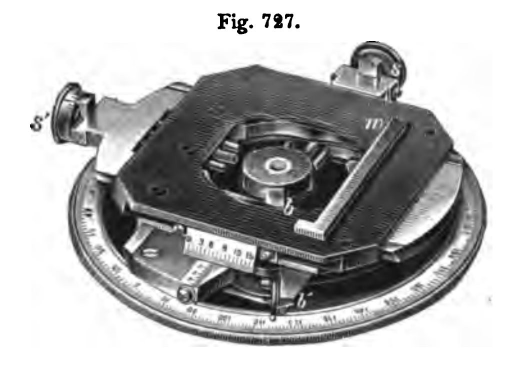


Zur Aufnahme aller Arten von Nebenapparaten eingerichtet ist endlich das große Mikroskop Modell I der genannten Firma, welches in der Fig. 726 wiedergegeben ist. Der Drehungspunkt des umlegbaren Statives liegt hier so hoch, daß auch bei horizontaler Stellung des Tubus, wenn das Instrument z. B. direct gegen eine monochromatische[1]) Flamme gerichtet wird, ein bequemes Arbeiten möglich ist. Die Teilung des drehbaren Objecttisches (s. auch Fig. 727) gestattet durch zwei feste Nonien die Ablesung einzelner Minuten; in den Rand desselben ist ein feiner Zahnkranz eingeschnitten, in welchen ein Trieb *a* eingreift, mittels dessen der Tisch langsam gedreht und mit größerer Sicherheit eingestellt werden kann, als mit freier Hand, während ein Ausrücken dieses Triebes durch den Hebel *h* es ermöglicht, ihn auch frei zu drehen. Auf der Tischplatte ist nun

1) Bei derartigen großen Instrumenten ist es auch möglich, homogenes Licht von beliebiger Wellenlänge anzuwenden durch Anbringung eines Abbeschen Spectropolarisators unter dem Objecttische. Dieser bildet gewissermaßen einen Spectralapparat, in welchem das seitlich eintretende, durch einen Nicol polarisierte Licht durch einen Spalt geht,

ein Kreuzschlittentisch befestigt, so daß das aufgelegte Object, dessen Lage durch Anschlag an die abnehmbare Winkelleiste *w* gesichert ist, und welches, wie bei den vorher beschriebenen Mikroskopen, durch zwei in den Tisch einsteckbare Federklammern gehalten werden kann, in zwei zueinander senkrechten Richtungen parallel verschoben werden und die Verschiebung durch passend angebrachte Längsscalen gemessen werden kann. Die eine der beiden hierzu dienenden Schrauben *ss'* gestattet an einer Kopfteilung die Ablesung der Verschiebung auf 0,01 mm. Um die Kreuzschlittenbewegungen nicht zu beschränken,

Fig. 727.



mußte der Ausschnitt in der Mitte für den Condensor, welcher genau so construiert ist, wie an dem vorhergehenden Modelle, und durch den Hebel *b'* ein- und ausgeschaltet wird, sehr groß gemacht werden; doch kann derselbe, wenn es nötig ist, durch eine Einlegeplatte mit engerer Öffnung geschlossen werden. In die feste Platte, welche den drehbaren Objecttisch trägt, wird seitlich ein Schlitten eingeschoben mit der durch Trieb auf- und niederstellbaren, federnden Hülse *H*, welche zur Aufnahme des Polarisators dient, und der durch andere Beleuchtungsapparate ersetzt werden kann; zur Justierung und Einstellung der letzteren dient die Schraube *r*, deren Kopf abnehmbar ist, um bei der Drehung des Tisches nicht zu hindern. Über dem Polarisator kann eine Irisblende eingefügt werden, welche bei sehr durchsichtigen, schwach lichtbrechenden Objecten eine feinere Contourierung durch Beschränkung auf die central eintretenden Strahlen und, wenn sie excentrisch eingestellt wird, die Anwendung schief einfallenden polarisierten Lichtes ermöglicht. Der Tubus des Mikroskopes kann durch Trieb und Zahnstange so weit gehoben werden, daß selbst die schwächsten Objective bis zu 50 mm Focalabstand, zur Orientierung an größeren Objecten, verwendet werden können, während die Feinstellung des Tubus mittels einer Mikrometerschraube erfolgt, an deren Kopfe eine Teilung mit Nonius die Messung der erfolgten Hebung bzw. Senkung auf 0,001 mm gestattet. Objectivklammer *k*, Centriervorrichtung für die Objective, verschließbarer Schlitz zur Einfügung von Compensationsplatten

---

dessen Bild von zwei Prismen in ein Spectrum verwandelt wird; von diesem gelangt in das Gesichtsfeld nur ein schmaler Streifen, dessen Farbe durch eine von der entgegengesetzten Seite beleuchtete Scala genau bestimmt werden kann. Das von Abbe construierte und von der Firma C. Zeiss eingeführte Spectralocular dient zur spectralen Zerlegung der Interferenzfarben doppeltbrechender Krystalle (s. S. 45); eine Beschreibung und Abbildung desselben befindet sich u. a. auch in C. Leiss, die optischen Instrumente der Firma Fuess, Leipzig 1899, S. 221 f.

und einschiebbarer Analysator N[1]) sind die gleichen, wie bei den vorher beschriebenen einfacheren Mikroskopen. Dagegen ist das Auszugsrohr R mit der Bertrandschen Linse durch einen Trieb verstellbar und mit einer Teilung versehen, an welcher diejenige Stellung bestimmt werden kann, in der ein Axenbild ohne Parallaxe erscheint und daher eine Messung des scheinbaren Winkels der optischen Axen mittels eines Mikrometeroculares möglich ist. Als solches dient entweder das S. 767 erwähnte, mit einer Glasmikrometerscala versehene, oder ein mit einem Schraubenmikrometer ausgerüstetes Ramsdensches Ocular. Becke hat die früher von Klein vorgeschlagene Methode der Betrachtung des Interferenzbildes, welches über dem Oculare entsteht, zur Messung des Axenwinkels benutzt, indem er auf das nach Czapski mit einer Irisblende montierte Ramsdensche Ocular ein von ihm »Kleinsche Lupe« genanntes zweites Ocular mit einer Glasmikrometerscala aufsetzte (Tschermaks min. u. petr. Mitteil. **14**, 375). Neuerdings hat Schwarzmann statt des gewöhnlichen Glasmikrometers ein anderes eingeführt, welches gestattet, unmittelbar den scheinbaren Axenwinkel abzulesen (Leiss, die opt. Instrum. der Firma Fuess, Leipzig 1899, S. 159 u. 189). Außer den gewöhnlichen Ocularen 1, 2, 3 werden dem Instrumente noch zwei besondere Oculare zu stauroskopischen Messungen beigegeben. Das eine, in Fig. 728 im Durchschnitte abgebildet, enthält an Stelle des Fadenkreuzes die Calderonsche Doppelplatte (s. S. 730); das kleine Gesichtsfeld, begrenzt durch das dicht über der Doppelplatte befindliche enge Diaphragma c, wird durch die Schnittlinie der Stauroskopplatte in zwei gleiche Hälften zerlegt, deren Trennungsebene mit dem Hauptschnitte des aufgesetzten Polarisators zusammenfällt, wenn der Nullpunkt der Teilung des letzteren mit der am Tubus angebrachten Marke coincidiert. Da die Schnittlinie im Gesichtsfelde wie ein feiner Faden erscheint, so ist man imstande, selbst einen sehr kleinen Krystall damit zu bisectieren und durch Einstellung der gleichen Auslöschung in beiden Hälften eine sehr scharfe Bestimmung seiner Schwingungsrichtungen vorzunehmen. Damit der Beobachter dabei genau in der Axe des Instrumentes hindurchblickt, wird auf das Ocular die mit kleiner Öffnung versehene Kappe d aufgelegt oder eine daselbst angebrachte Irisblende stark zusammengezogen. Statt der Combination der Calderonschen Platte mit einem gewöhnlichen Polarisator kann man auch einen sog. Halbschattenpolarisator anwenden, d. h. ein Nicolsches Prisma, welches in ähnlicher Weise, wie die Calderonsche Platte, aus zwei gegeneinander geneigten Teilen zusammengesetzt ist. Das andere Stauroskopocular ist das von Bertrand (Zeitschr. f. Kryst. 1877

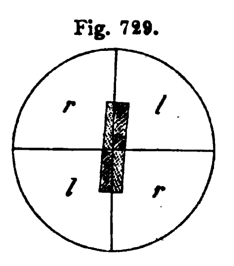
Fig. 728.



1) Dieser kann auch mit einer Drehung um 90° versehen werden, um einen raschen Übergang von gekreuzten Nicols zu parallelen zu ermöglichen.

1, 69) empfohlene, in welchem sich an Stelle des Fadenkreuzes eine aus vier Teilen, zwei rechtsdrehenden *rr* und zwei linksdrehenden *ll*, zusammengesetzte Quarzplatte befindet, deren Trennungsflächen als feine Linien erscheinen (s. Fig. 729) und den Hauptschnitten der Nicols parallel gestellt werden. Ein in die Mitte gebrachter Krystall zeigt nun, wenn seine Schwingungsrichtungen nur um einen kleinen Winkel von denen der Nicolschen Prismen abweichen, deutliche Farbenunterschiede (in der Figur durch verschiedene Schraffierung bezeichnet); daher ist die Einstellung auf Gleichheit in den vier Quadranten so empfindlich, daß ein derartiges Stauroskopocular von manchen Beobachtern dem Calderonschen vorgezogen wird, um so mehr, als die Quarzplatten mit ihrer empfindlichen Farbe auch zur Erkennung schwacher Doppelbrechung dienen können (s. Schrauf, Zeitschr. f. Kryst. 1884, 8, 81). Den bei dem vorigen Mikroskope erwähnten Objectiven kann bei diesem großen Instrumente ein noch stärkeres (Nr. 12 mit homogener Immersion) hinzugefügt werden.

Fig. 729.



Die in vorstehendem beschriebenen Fuessschen Mikroskope haben vor den älteren den großen Vorteil, daß der Wechsel der Anwendung als Bildmikroskop und als Konoskop ohne Unterbrechung der Beobachtung in sehr bequemer Weise erfolgt. Der Übergang von convergenter zu paralleler Beleuchtung kann aber auch, nach dem Vorschlage von Czapski[1]), durch Zuziehen einer unter dem Condensor befindlichen Irisblende, oder noch einfacher (wie schon S. 770 bemerkt wurde) durch Senken der ganzen Condensorvorrichtung, der umgekehrte Übergang also durch Annäherung der letzteren an das Object, bewirkt werden. Entwirft man nämlich mit vollem offenen, dicht unter dem Präparate befindlichen Condensor, also im convergenten Lichte, das Axenbild der zu untersuchenden Stelle im Präparate unter Anwendung der Bertrandschen Linse und zieht dann die erwähnte Irisblende so weit zu oder entfernt das ganze Condensorsystem so weit vom Präparate, daß nur derjenige Teil des Axenbildes Licht empfängt, welcher dieselbe Färbung besitzt, wie die Mitte desselben, so hat man die Bedingungen für die Beobachtung im parallelen Lichte hergestellt und erblickt daher, nach Beseitigung der Bertrandschen Linse, das Bild des Objectes in der betr. Farbe. Nach diesem Principe sind die nach den Angaben von Czapski construierten Mikroskope für krystallographische und petrographische Untersuchungen, welche die bekannte Firma Carl Zeiss in Jena liefert, mit einer Irisblende versehen; von den Fuessschen Mikroskopen, an denen nach S. 773 eine solche ebenfalls angebracht werden kann, unterscheiden sich jene Instrumente ferner durch die Construction des Beleuchtungsapparates (dessen Condensor lichtstärker und größer ist, so daß er auch bei schwachen Vergrößerungen an seinem Platze

1) S. Zeitschr. f. Kryst. 1893, 22, 158.

bleiben kann); betreffs dieser bekanntlich vorzüglichen Instrumente möge auf die Beschreibung derselben in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1891, 11, 94 verwiesen werden. Endlich liefert auch das optische Institut W. und H. Seibert in Wetzlar recht brauchbare mineralogische Mikroskope, an denen nach einem Vorschlage von Weinschenk, welcher den obenerwähnten Übergang zum parallelen Lichte durch einfaches Entfernen des Condensors vom Objecte schon seit längerer Zeit anwendete, diese Bewegung durch einen seitlichen Hebel sehr bequem ausgeführt werden kann. Zu dieser Methode muß bemerkt werden, daß die Senkung des Condensors, bzw. die Einengung der Irisblende, nicht zu groß sein darf, um noch genügend Licht zur Beobachtung im parallelen Lichte auf das Präparat fallen zu lassen.

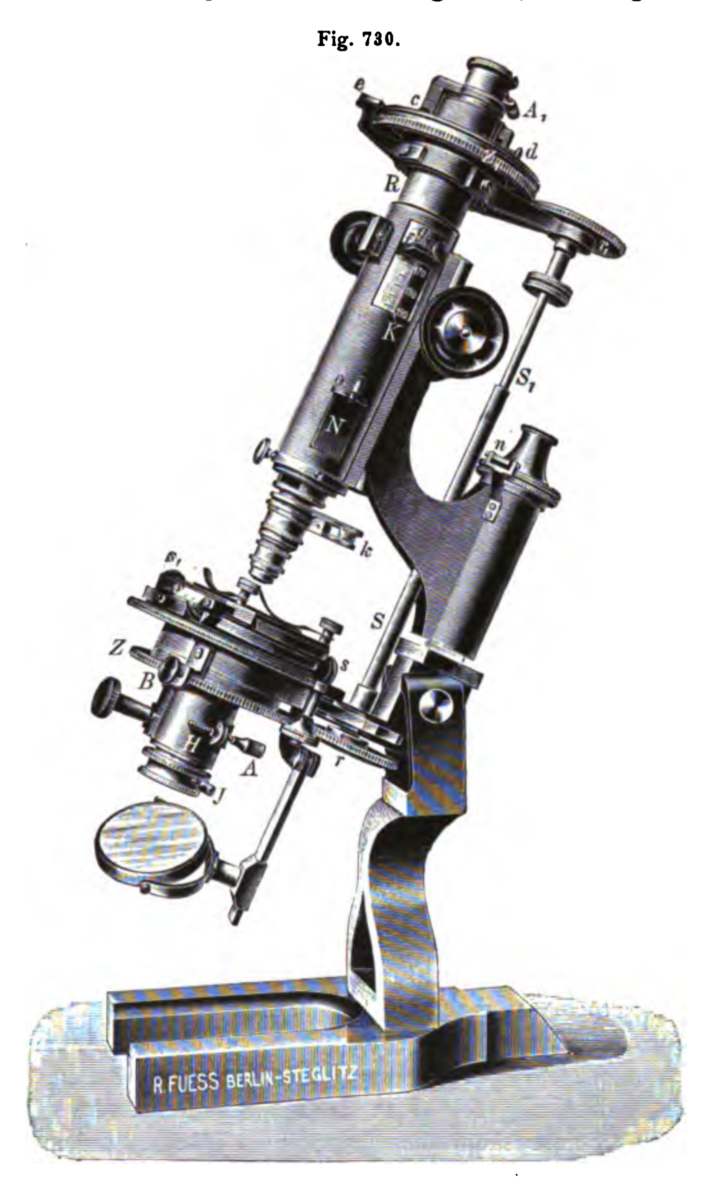
Näheres über die im vorhergehenden beschriebenen Fuessschen Mikroskope sowie die Methoden zu ihrer Prüfung und Justierung findet man in der bereits mehrfach citierten Schrift von C. Leiss, die opt. Instr. der Firma Fuess, Leipzig 1899, S. 183 f. Für das Detail der Constructionen der von den übrigen S. 769 genannten Firmen gelieferten Mikroskope für krystallographische bzw. mineralogische und petrographische Zwecke sei ferner auf die Beschreibungen in den folgenden, von den betreffenden Firmen auf Wunsch gelieferten Verzeichnissen verwiesen:

Preisverzeichnis der Mikroskope und mikr. Hilfsapparate. W. und H. Seibert, opt. Inst. Wetzlar, 1903. — Catalog über krystallographisch-optische Instrumente. Voigt u. Hochgesang (Brunnée), opt.-mechan. Werkst. Göttingen 1903. — Mikroskope und mikroskop. Hilfsapparate. Carl Zeiss, optische Werkstätte. Jena 1902.

Die Schwierigkeit der genauen Centrierung stärkerer Objectivsysteme in bezug auf den drehbaren Objecttisch, d. h. die Erhaltung der Coincidenz des Drehungspunktes eines eingestellten Präparates mit dem Mittelpunkte des Gesichtsfeldes auch beim Wechsel der Vergrößerung, veranlaßte schon früher englische Constructeure von Mikroskopen, den beiden Nicolschen Prismen eine gemeinsame Drehung zu erteilen. Bei dieser Anordnung, welche allerdings die Construction des Instrumentes erheblich compliciert und verteuert, wird also nicht das Präparat zwischen gekreuzten Nicols gedreht, sondern dieses bleibt unverändert in seiner Einstellung, während die gekreuzten (oder auch parallelen) Nicols unter Bewahrung ihrer gegenseitigen Orientierung um beliebige Winkel gedreht werden können. Später hat nun auch Fuess, namentlich mit Rücksicht auf gewisse, von C. Klein angegebene Nebenapparate (s. Mikroskop-Attribute), ein derartiges Instrument construiert (Modell VI), welches in der Ansicht Fig. 730 dargestellt ist. Dasselbe stimmt in den meisten (und deshalb auch in der gleichen Weise, wie in Fig. 726, bezeichneten) Teilen mit dem zuletzt beschriebenen Mikroskope Modell I überein. Die Verbindung der beiden Nicolschen Prismen geschieht mittels zweier ineinander verschiebbarer Stangen SS_1 (um der Verlängerung oder Verkürzung des Mikroskopes beim Heben und Senken des Tubus folgen zu können); die an den Enden derselben befindlichen Zahnräder r und r_1 greifen in die Zähne zweier größerer gezähnter

Scheiben ZZ_1 ein, wobei Vorsorge zur Aufhebung des sogenannten toten Ganges getroffen ist. Wird nun das Gestänge S_1S mittels der kleinen unter r_1 befindlichen, am Rande gekerbten Scheibe gedreht, so erfolgt die gemein-

Fig. 730.



same Drehung beider Nicols um den gleichen Winkel, welcher an einer Kreisteilung auf der Oberseite von Z_1 mit dem Nonius c abgelesen werden kann. Die feste Verbindung des Analysators mit dieser Scheibe kann durch Lösen der Schraube d aufgehoben werden, so daß jener für sich drehbar ist, oder endlich kann derselbe mittels des Scharniers c ganz zur Seite

geschlagen und mit dem einschiebbaren Analysator N und mit drehbarem Tische gearbeitet werden. Wie schon S. 767 Anmerk. [1]) erwähnt wurde, bedingen die Korkfassungen der Nicols häufig Änderungen der Lage der Hauptschnitte zu den Fäden der Oculare und den Teilungen des Instrumentes; an dem vorliegenden Mikroskope ist daher jeder der Nicols in einer zweiten inneren Hülse befestigt, welche durch die Schrauben A bzw. A_1 gegen die äußere um einen kleinen Winkel gedreht werden kann, so daß eine Correction des erwähnten Fehlers möglich ist.

Außer einem kleineren Instrumente derselben Art (Modell VII), welches jedoch keinen drehbaren Tisch besitzt, liefert die Firma Fuess neuerdings ein großes Mikroskop von ähnlicher Construction, wie Fig. 730, mit besonders großem Gesichtsfelde, mit einer Meßvorrichtung zur Bestimmung des Mengenverhältnisses der Gesteinscomponenten in Dünnschliffen und mit einer Einrichtung zur Oberflächenbeleuchtung der Objecte; dieses besonders für Gesteinsuntersuchungen eingerichtete Instrument ist von J. Hirschwald beschrieben im Centralbl. f. Min. 1904, 625 f.

Mikroskop-Attribute.

a) **Goniometer zur Messung mikroskopischer Krystalle.** Die gewöhnliche, S. 662 f. behandelte Methode der Messung von Flächenwinkeln mit dem Reflexionsgoniometer findet ihre Grenze, wenn der zu untersuchende Krystall so klein ist, daß es unmöglich wird, mit demselben so zu operieren, wie es das genannte Instrument erfordert. Man kann sich in solchen Fällen damit begnügen, statt der Flächen- die Kantenwinkel, d. h. die ebenen Winkel, welche die Kanten miteinander bilden, nach einer der S. 638 f. auseinandergesetzten Methoden [1]) zu messen und die Flächenwinkel aus diesen zu berechnen. Für die directe Bestimmung der letzteren unter dem Mikroskope sind Vorschläge gemacht worden von Bertrand (Zeitschr. f. Kryst. 1879, 3, 642), sowie von Thoulet (Ebenda 1880, 4, 222); Fuess construierte zum Aufsetzen auf den Mikroskoptisch einen kleinen Drehapparat, welcher gestattet, die zu messende Kante der Axe des Mikroskopes parallel zu richten, so daß man durch Drehung des Objecttisches um dieselbe den Winkel der beiden Flächen mit Hilfe des Fadenkreuzes oder eines Goniometeroculares messen kann (s. C. Leiss, die opt. Instrum. der Firma Fuess, Leipzig 1899, S. 228). Während die erwähnten Methoden eine ausgedehntere Anwendung noch nicht gefunden haben, gelang es Brögger (Zeitschr. f. Kryst. 1884, 9, 225 f.) auf anderem Wege, Messungen der Flächenwinkel mikroskopischer Krystalle zu erhalten, indem er die feste Verbindung eines Mikroskopes mit einem Goniometer, welche in dem S. 633 erwähnten Hirschwaldschen Mikroskopgoniometer vorliegt, benutzte, den Krystall durch ein zweites, horizontal gestelltes, schwaches Mikroskop

1) Für die S. 640 erwähnte Methode der Messung mit drehbarem Faden hat Leiss ein eigenes »Oculargoniometer« construiert (s. D. opt. Instr. 217). Über die Messung der Kantenwinkel mit einem festen Fadenkreuze s. auch G. Wulff, Zeitschr. f. Kryst. 1890, 18, 277 f.



beleuchtete und die Flächen der unter dem verticalen Mikroskope justierten Zone nach der Methode der »Schimmermessung« (s. S. 672) einstellte; um dieses Verfahren auch ohne das Hirschwaldsche Instrument ausführen zu können, setzte derselbe auf den Objecttisch eines großen Fuessschen Mikroskopes einen kleinen Teilkreis mit einer vereinfachten Centrier- und Justiervorrichtung.

Genauere Messungen der Flächenwinkel mikroskopischer Krystalle können mittels der S. 781 f. beschriebenen Drehapparate ausgeführt werden nach der von Fedorow bei Gelegenheit der Beschreibung seines »Universaltischchens« angegebenen Methode: Auf die ebene Unterfläche des Mikroskopobjectives trägt man ein schwarzes Kreuz auf und beleuchtet dieses von oben nach dem S. 750 angeführten Verfahren; bei der Einstellung auf deutliche Sehweite ist das Kreuz nicht sichtbar, nähert man aber den Mikroskoptubus einer zu dessen Axe senkrechten Krystallfläche bis auf die halbe Distanz, so erscheint durch Autocollimation das Kreuz; die Stellung des Krystalles, in welcher es sich mit dem Fadenkreuze des Mikroskopes deckt, wird am Drehapparate abgelesen. Letzterer dient hierbei als Reflexionsgoniometer mit zwei bzw. drei Teilkreisen (s. S. 677 f.).

Zu der im vorstehenden erwähnten Beleuchtung von oben benutzt man entweder eine über dem Objective unter 45° gestellte Spiegelglasplatte oder (nach Abbe) ein das Objectiv nur zur Hälfte bedeckendes totalreflectierendes Prisma, welche Vorrichtungen seitlich beleuchtet werden. Ein solcher Verticalilluminator ist ferner erforderlich zur Untersuchung von Substanzen im auffallenden Lichte und leistet namentlich gute Dienste beim Studium der Ätzfiguren, deren Messungen nach den vorerwähnten Methoden vorzunehmen sind. Hierbei ist es zuweilen wünschenswert, eine große Focaldistanz und doch nicht zu geringe Vergrößerung zu haben, was durch Combination eines sehr schwachen Objectives (0) mit einem besonders starken Oculare erreicht wird. Alle diese Vorrichtungen können den von der Firma Fuess gelieferten Mikroskopen beigegeben werden.

b) **Vorrichtungen zur Bestimmung der Brechungsindices mikroskopischer Krystalle.** Wenn ein durchsichtiger Körper, welcher von einer stark brechenden Flüssigkeit umgeben ist, im Mikroskope scharf eingestellt und dann der Tubus des letzteren gehoben wird, so erscheint die Mitte des Objectes hell, wenn dessen Brechungsindex größer als derjenige der Flüssigkeit, dagegen dunkel, wenn das Umgekehrte der Fall ist. Dieses auf den Gesetzen der Totalreflexion beruhende Verhalten kann man nun nach Brun zur Bestimmung des Brechungsvermögens kleiner Mineralpartikel benutzen, indem man sich eine Reihe von Vergleichsflüssigkeiten von verschiedener Brechbarkeit herstellt[1]). Ähnliche Verfahren zur Messung der

1) Zur Bestimmung der Brechungsindices der Flüssigkeiten kann man nach Souzo-Brandão dasselbe Princip anwenden, indem man eine Scala von festen Körpern von bekannten Brechungsindices benutzt; die Firma Fuess liefert eine solche Scala von 35 Indicatoren (n = 1,484 bis 1,735).



Brechungsindices wurden schon früher von Exner (s. Zeitschr. f. Kryst. 1888, **13**, 85) und von Becke angegeben, welcher letztere in den Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien 1893, **102** (1), 358 f. eine übersichtliche Darstellung der Beleuchtungsverhältnisse gab, welche bei mikroskopischer Beobachtung der Grenze zwischen zwei verschieden stark lichtbrechenden Substanzen eines Gesteinsdünnschliffes in Betracht kommen, und lehrte, wie man eine Irisblende unter dem Polarisator zur Erkennung kleiner Unterschiede im Brechungsvermögen, auch doppeltbrechender Krystalle, mit Vorteil bei petrographischen Untersuchungen verwenden könne.

Die Methode des Herzogs von Chaulnes (s. S. 31) kann mit jedem Mikroskope ausgeführt werden, dessen Tubus durch eine, mit einer Teilung versehene Mikrometerschraube verstellbar ist, wie die im vorigen Abschnitte beschriebenen. Ihre Anwendung auf doppeltbrechende Krystalle ermöglichte Sorby durch Einfügung eines feinen Gitters mit zwei zu einander senkrechten Liniensystemen, welche, wenn sich ein doppeltbrechender Krystall im Gange der Lichtstrahlen befindet, nicht gleichzeitig sichtbar werden, weil in diesem Falle zwei verschiedene Brennpunkte vorhanden sind. Eine ausführliche Darstellung der Sorbyschen Methode und der von Stokes entwickelten Theorie der hierbei auftretenden Erscheinungen gab Liebisch in der Zeitschr. f. Kryst. 1879, **3**, 309 f. und in seiner »Physikalischen Krystallographie« S. 361 f. (s. auch Hecht im Jahrb. f. Min. **6.** Beilagebd., 265). Eine Vorrichtung zu einer derartigen Messung construierte Fuess als Attribut seines großen Mikroskopes. Die auf voriger S. erwähnte Methode der Messung mikroskopischer Krystalle von Fedorow läßt sich auch zur Bestimmung der Brechungsindices mikroskopischer Krystalle verwenden (s. Zeitschr. f. Kryst. 1894, **22**, 243).

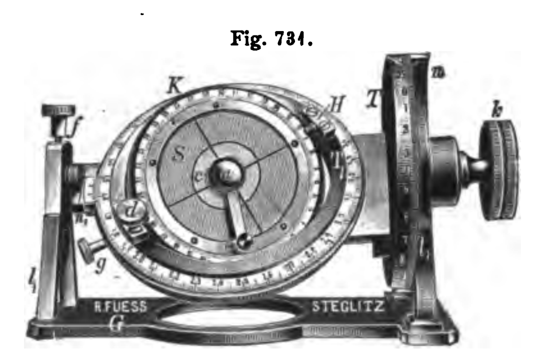
In nächster Beziehung zu den Methoden der Messung der Brechungsindices ihrem absoluten Werte nach stehen diejenigen der Bestimmung ihres Verhältnisses, d. h. der Stärke der Doppelbrechung. Es handelt sich bei diesen wesentlich um Compensation der zu messenden Doppelbrechung durch eine entgegengesetzte von bekanntem Betrage. Hierzu dient der sogenannte Babinetsche Compensator, bestehend aus zwei Quarzkeilen, deren eine Seitenfläche der optischen Axe parallel, deren andere unter einem spitzen Winkel dagegen geneigt ist, welche sich aber dadurch voneinander unterscheiden, daß in dem einen die optische Axe der Schneide parallel, in dem andern dazu senkrecht ist; infolgedessen erfährt ein Lichtstrahl, wenn man die Keile so aufeinanderlegt, daß sie eine planparallele Platte bilden, an derjenigen Stelle, wo beide gleich dick sind, einen entgegengesetzten Gangunterschied von gleichem Betrage, während man durch Verschiebung des einen Keiles gegen den andern mittels einer Mikrometerschraube an dieser Stelle jeden beliebigen Gangunterschied, von Null angefangen, hervorrufen kann. Einen speciell für mikroskopisch-petrographische Untersuchungen bestimmten Compensator construierte Michel-Lévy; dieser enthält nur einen, durch eine Mikrometerschraube verschiebbaren Quarzkeil,

welcher sich zwischen zwei Nicols in einem seitlichen Ansatzrohre des Oculars befindet; das hindurchgegangene Licht wird durch ein kleines, im Ocularaufsatze angebrachtes Prisma total reflectiert, so daß man die betreffende Interferenzfarbe des Quarzkeiles und die des zu untersuchenden Minerales im Gesichtsfelde vergleichen und die erstere durch Verschieben des Quarzkeiles mit der letzteren in Übereinstimmung bringen kann; der Apparat ist so eingerichtet, daß an der Scala der Mikrometerschraube direct der entsprechende Gangunterschied abgelesen wird. Eine einfachere Vorrichtung zur Messung der Doppelbrechung ist der Fedorowsche Glimmercomparator. Derselbe besteht aus 16 übereinander geschichteten Glimmerblättchen von je $^1/_4$ λ Gangunterschied, von denen jedes folgende um 2 mm kürzer ist als das vorhergehende, so daß das Ganze einen Keil bildet, welcher nebeneinander 16 Polarisationsfarben von Grau 1. Ordnung bis Grün 4. Ordnung (Gangunterschied 2040 $\mu\mu$, s. S. 45) liefert. Eigene Oculare mit Compensatoren zur Messung der Doppelbrechung construierte Leiss, in dessen Schrift über die optischen Instrumente der Firma Fuess auch alle vorerwähnten, demselben Zwecke dienenden Vorrichtungen ausführlich beschrieben sind.

Um die Größe der Doppelbrechung für die verschiedenen Farben des Spectrums zu messen, combinierte Hlawatsch den Babinetschen Compensator mit einem Abbeschen Spectralocular (s. S. 773 Anm.) und führte so eine sorgfältige Bestimmung der Dispersion der Doppelbrechung am optisch einaxigen Vesuvian aus (Tschermaks min. u. petr. Mitt. 1902, **21**, 107 f.).

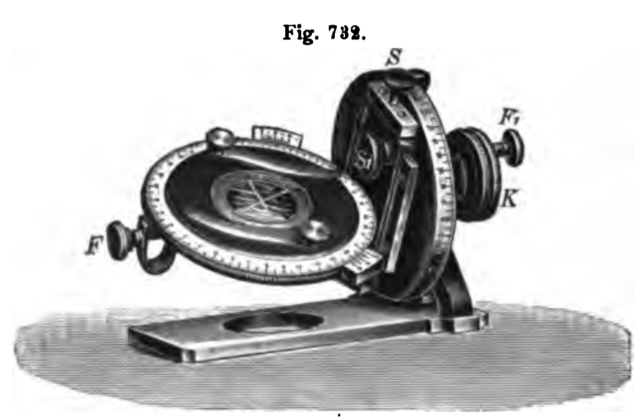
c) **Drehapparate zur optischen Untersuchung mikroskopischer Krystalle.** Um ein Präparat nicht nur, wie es durch den drehbaren Objecttisch geschieht, um die Axe des Mikroskopes drehen zu können, construierte Fedorow ein auf den gewöhnlichen Objecttisch aufzusetzendes »Universaltischchen«, welches gestattet, dem Präparate eine Drehung um zwei zueinander und zur Mikroskopaxe senkrechte Axen zu erteilen und dieselbe zu messen. In der ausführlichen Beschreibung dieses Apparates (Zeitschr. f. Kryst. 1894, **22**, 229 f.) setzte er namentlich die Vorzüge seiner Anwendung auf die optische Untersuchung mikroskopischer Krystalle im parallelen Lichte auseinander. Später vervollständigte er den Apparat noch durch eine dritte Drehaxe und erweiterte dadurch seine Verwendbarkeit (Zeitschr. f. Kryst. 1896, **26**, 240). Die Construction desselben, wie sie von der Firma Fuess (s. auch Leiss, d. opt. Instr. S. 235 f.) geliefert wird, ist aus Fig. 731 zu ersehen. Die Drehung des Teilkreises T um seine hori-

Fig. 731.



zontale Axe erfolgt mittels *k* und kann durch *f* fixiert werden. Die horizontale Verbindung der beiden Ständer $l\,l_1$ trägt den an seinem gezähnten Rande drehbaren zweiten Teilkreis *K*, dessen Drehungsaxe genau senkrecht zu der von *T* ist; derselbe kann mit dem Schräubchen *g* geklemmt werden. Die Nonien zur Ablesung von *T* und *K*, *n* bzw. n_1, sind fest mit dem Stative bzw. der horizontalen Axe verbunden. Innerhalb *K* befindet sich nun ein zweiter Ring, welcher um eine in der Ebene des ersten gelegene dritte Axe *H* drehbar ist, und dessen Stellung durch Anziehen von *d* fixiert wird. In diesem zweiten Ringe ist der Glastisch *S* selbständig drehbar (mittels eines Schlüssels oder der sogleich zu erwähnenden Stifte), und auch diese Drehung kann an der auf dem zweiten Ringe befindlichen Teilung abgelesen werden. Auf dem Glastische liegt das runde Objectglas *c* mit dem zu untersuchenden Präparate. Zur Vergrößerung des Gesichtswinkels und zur Beobachtung der optischen Axen eines im Präparate befindlichen mikroskopischen Krystallschnittes sind dem Apparate zwei Linsen beigegeben, von denen die eine *a* (in der Figur sichtbar) von oben, die andere von unten, mit einer Flüssigkeit wie Glycerin oder dergleichen benetzt, sich an das Präparat anlegt; dieselben sind durch wegklappbare Arme an zwei auf der Fassung des Glastisches befindlichen Stifte befestigt und bilden zusammen mit dem Präparate eine Kugel, welche genau dieselbe Rolle spielt wie die Glaskugel des Adamsschen Axenwinkelapparates (S. 753 f.). Mit diesem Apparate haben seitdem Fedorow und seine Schüler eine Reihe von in der Zeitschrift für Krystallographie publicierten Untersuchungen über das optische Verhalten der in Gesteinsschliffen vorhandenen Feldspatkrystalle, besonders Bestimmungen mannigfacher Zwillingsverwachsungen derselben, ausgeführt. Fig. 732 zeigt einen einfacheren derartigen Apparat.

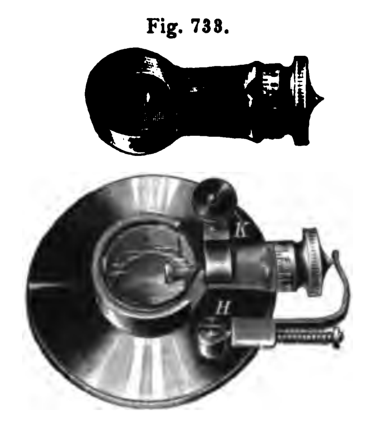
Fig. 732.



Die Methode der Einhüllung eines mikroskopischen Krystalles in eine Flüssigkeit, deren Brechbarkeit der mittleren jenes nahezu gleich ist, wurde in neuerer Zeit namentlich von C. Klein ausgebildet und zur Construction von Drehapparaten verwendet, welche sich sehr vorteilhaft erwiesen haben zur allseitigen optischen Untersuchung von Krystallen (nicht nur mikroskopischen) sowohl im parallelen als im convergenten polarisierten Lichte. Diese Apparate wurden sämtlich von Fuess ausgeführt. Der älteste und einfachste derartige Drehapparat, welcher auf den Tisch jedes Mikroskopes oder Polarisationsinstrumentes aufgesetzt werden kann, ist in

Fig. 733 abgebildet. Ein in zwei verschieden weiten Exemplaren vorhandener Glastrog (der eine ist in der Figur oben apart gezeichnet) wird mit der Flüssigkeit gefüllt und in den Metallring eingesetzt, wo er durch die Klemme K festgehalten wird. Das Object ist auf dem Stielende eines Glasstopfens befestigt, dessen Drehung an dem durch eine Feder festgehaltenen Kopfe auf 1° genau abgelesen werden kann. Besonders geeignet ist diese Vorrichtung, mit welcher auch größere Krystalle, Bruchstücke solcher oder geschliffene Steine untersucht werden können, zur Aufsuchung der Richtung der optischen Axen im convergenten Lichte, sowie zur Bestimmung der Änderung der Schwingungsrichtungen innerhalb der Zone, nach welcher ein Krystall prismatisch entwickelt ist, im parallelen Lichte; für den letzteren Zweck wird der Krystall so befestigt, daß die betreffende Zone der Drehungsaxe des Apparates parallel ist, und die Auslöschungsschiefe beobachtet, welche den verschiedenen Flächen jener Zone zukommt (vgl. S. 716), da beim Austritte der Strahlen aus dem Krystalle in die Flüssigkeit keine merkliche Ablenkung derselben erfolgt. Während diese Vorrichtung nur die Drehung um eine Axe gestattet, kann eine allseitige Drehung des Objectes mit einem ebenfalls sehr einfachen Apparate vorgenommen werden, welchen Fuess besonders für die optische Untersuchung der Edelsteine construierte: In einem am Boden sphärisch geschliffenen Glasgefäße ist eine concentrische Halbkugel von Glas mittels dreier Handhaben um ihr Centrum beliebig drehbar; die ebene Fläche derselben hat eine Ausbohrung, in welcher sich der zu untersuchende Stein befindet, und zwar in jeder Stellung noch unter dem Niveau der in das Glasgefäß eingefüllten, stark brechenden Flüssigkeit.

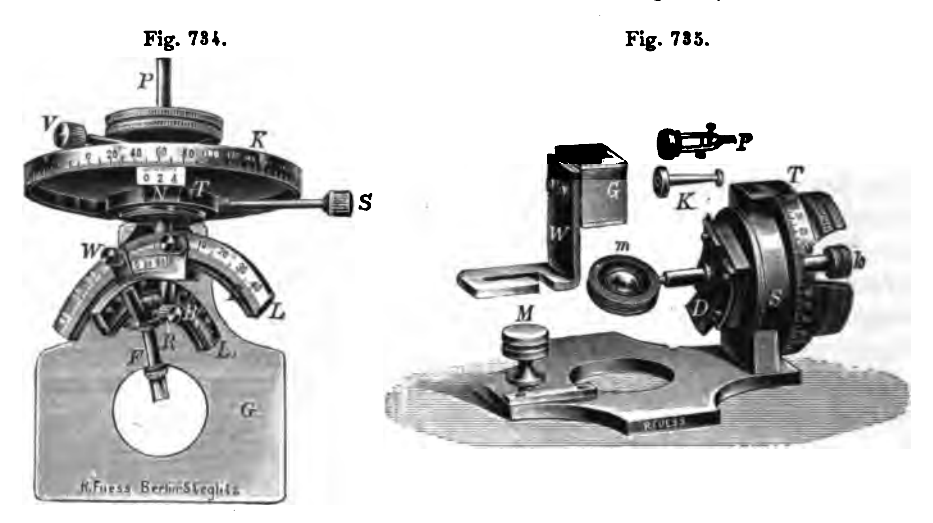
Fig. 733.



Zu genaueren Beobachtungen, sowohl im parallelen, als im convergenten Lichte, geeignet ist der von C. Klein angegebene »Universaldrehapparat« Fig. 734, welcher in Verbindung mit dem großen, in Fig. 730 abgebildeten Fuessschen Mikroskope Modell VI anzuwenden ist. Dieser Apparat, dessen Beschreibung in den Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. Berlin 1895, 91 mitgeteilt ist (s. auch Leiss, d. Instr. S. 232), gestattet, wie aus der Figur ersichtlich, die zu messenden Drehungen um drei zueinander senkrechte Axen in ähnlicher Weise wie die Fuesssche Justiervorrichtung (Fig. 677, S. 652) und kann nicht nur benutzt werden zur Bestimmung der Auslöschungsschiefen der verschiedenen Flächen einer Zone und der Aufsuchung der Richtungen der optischen Axen, sondern auch zur Messung des wahren Axenwinkels an einem beliebig gestalteten Krystalle, welcher zu diesem Zwecke mit einer Flüssigkeit umgeben wird, deren Brechungsindex gleich dem mittleren (β) des Krystalles ist. Zur Axenwinkelmessung nach der

Methode von Adams (S. 753) soll endlich ein kleiner, von Fuess construierter und in nachstehender Fig. 735 abgebildeter Apparat dienen, mit welchem auch das darüber gezeichnete Ölgefäß *G* durch Einschieben bei *M* verbunden werden kann; das System der beiden Halbkugeln (*m*) mit dem da-

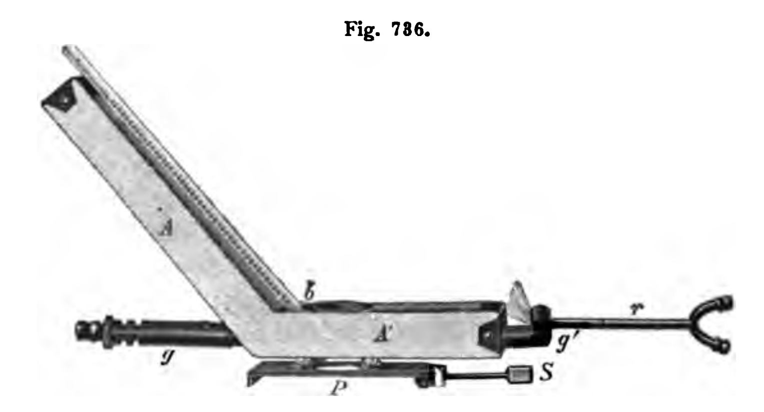
Fig. 734. Fig. 735.



zwischen befindlichen Objecte kann in seiner geränderten Fassung gedreht werden; die Verschiebung der bogenförmigen Schiene *D* erfolgt mittels *k*, während die Einstellung der Axenbilder in das Fadenkreuz des Mikroskopes durch Drehung des Teilkreises *T* geschieht.

d) **Erhitzungsapparate.** Den älteren Fuessschen Mikroskopen wurden Vorrichtungen beigegeben, welche es ermöglichten, ein Präparat auch in

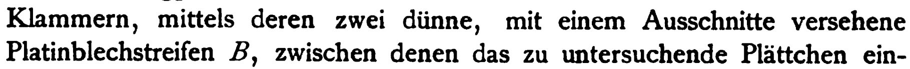
Fig. 736.



höherer Temperatur zu untersuchen. Diese Erhitzungsapparate sind später, namentlich auf Veranlassung von C. Klein, sehr vervollkommnet worden. Fig. 736 stellt einen bis 450° verwendbaren Apparat dar. Die auf dem Objecttische des Mikroskopes zu befestigende Platte *P* trägt auf vier Glasfüßchen den Heizkasten *A'*, in welchem die kleine Flamme des (in der

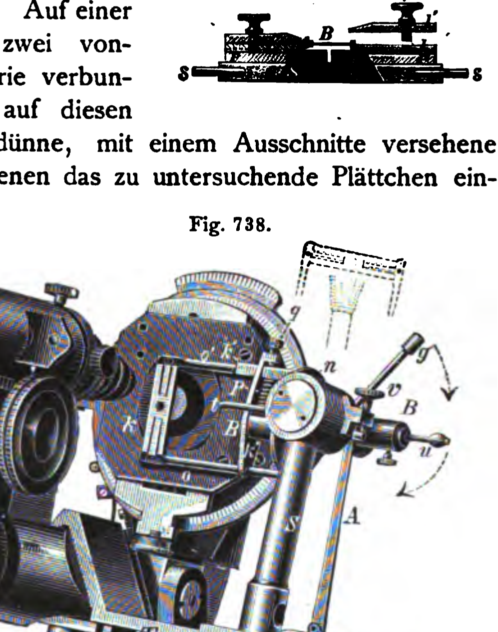
Figur der Deutlichkeit wegen nach rechts herausgeschobenen) Bunsenschen Brenners gg' die Erhitzung erzeugt, während durch r kalte Luft oder Wasserdampf zugeführt werden kann; das Object befindet sich in dem durch Glasplatten geschlossenen Durchbruche bei b und ist von dem hufeisenförmigen Thermometergefäße umgeben; A dient zum Abzuge der Heizgase und ist, wie der Heizkasten, mit Asbestpappe überzogen.

Fig. 737.



Die Construction des zweiten, in Fig. 737 abgebildeten Apparates ist auf die Erhitzung durch den elektrischen Strom (mit regulierbarem Widerstande) gegründet. Auf einer Schieferplatte S befinden sich zwei voneinander isolierte, mit der Batterie verbundene Messingplatten PP' und auf diesen Klammern, mittels deren zwei dünne, mit einem Ausschnitte versehene Platinblechstreifen B, zwischen denen das zu untersuchende Plättchen eingeklemmt ist, eingespannt werden. Die bis zur Rotglut zu steigernde Erhitzung kann durch einen Rheostaten reguliert werden.

Fig. 738.



In Verbindung mit einem der großen Fuessschen Mikroskope Nr. I oder VI, und zwar bei horizontaler Stellung des Tubus, ist in der aus Fig. 738 ersichtlichen Weise zu verwenden ein dritter Erhitzungsapparat mit Gasheizung für Untersuchungen in parallelem und in convergentem Lichte bei hohen Temperaturen. Der Träger T desselben wird mit der Schraube s an der Feinstellsäule des Mikroskopstatives befestigt, belastet also den Objecttisch nicht. Das Gas tritt durch den Schlauch G und den Hahn H in die hohle Säule S, in der Gas- und Luftzutritt durch h_1 reguliert wird, und von da in das Brennrohr B, welches mittels der Handhabe g

bis zu senkrechter Stellung aufgerichtet werden kann; auf diesem ist der verschiebbare Krystallträger *kk'* aufgesteckt. Der letztere ist ähnlich construiert wie bei dem vorigen Apparate, indem auch hier das Präparat zwischen zwei mit einem Sehloche versehenen Platinblechen dadurch gehalten wird, daß die beiden an der Platte *n* befestigten Arme *oo'* durch den Druck einer Spiralfeder *P* auseinandergetrieben und infolgedessen die Platinbleche gespannt werden. Das Object wird durch Verschiebung des Krystallträgers und durch Drehung des letzteren um die im Kopfe der Säule *S* befindliche Axe eingestellt, und die Schraube *v* mit dem darunter befindlichen Anschlage in Berührung gebracht. Bringt man alsdann mittels *g* den Krystallträger in die senkrechte (punktiert angedeutete) Stellung, erhitzt das Präparat und kippt den Träger desselben schnell wieder um, so erscheint es wieder an derselben Stelle im Gesichtsfelde, während gleichzeitig durch das Gestänge *A* die Flamme zum Erlöschen gebracht wird. Das Präparat verliert daher seine hohe Temperatur sehr rasch, der Versuch kann aber beliebig oft wiederholt werden, da beim Aufklappen ein kleines brennendes Flämmchen die Erhitzungsflamme wieder entzündet. Das Rohr *u* führt zu einem Gummigebläse, welches zur Abkühlung oder zur Erzeugung einer Stichflamme benutzt werden kann.

Während die bisher beschriebenen Erhitzungsapparate wesentlich zur Untersuchung von Gesteins- und Krystallschliffen in höherer Temperatur dienen, ist das von O. Lehmann construierte, sog. Krystallisationsmikroskop dazu bestimmt, die Krystallisationserscheinungen in einer Lösung oder einem Schmelzflusse unter willkürlich geänderten Temperaturverhältnissen zu beobachten, um durch Vergleichung derselben auf Identität oder Verschiedenheit chemischer Präparate schließen zu können, und besonders zum Studium der Umwandlungsvorgänge der verschiedenen Modificationen eines Körpers (s. hierüber: O. Lehmann, Molekularphysik mit besonderer Berücksichtigung mikroskopischer Untersuchungen usw. 2 Bde. Leipzig 1888—1889; Derselbe, Die Krystallanalyse oder die chemische Analyse durch Beobachtung der Krystallbildung mit Hilfe des Mikroskopes usw. Leipzig 1891; ferner zahlreiche Abhandl. in der Zeitschr. f. Krystallogr. u. a.). Im folgenden soll nun dieses Instrument zunächst in der älteren Form beschrieben werden, in der es von dem Mechaniker F. Maier in Straßburg i. Els. geliefert wurde.

Das zu den Beobachtungen dienende Mikroskop[1]) ist auf einem eigenen, aus Eisen gefertigten Arbeitstische angebracht, mit welchem alle erforderlichen Nebeneinrichtungen verbunden sind. Dieser Tisch ist in Fig. 740 zur Hälfte (in der Mitte durchschnitten gedacht) abgebildet, nach Abnahme der durch punktierte Linien angedeuteten, viereckigen eisernen Object- und Mikroskop-Trägerplatte *aaaa*, welche durch vier an ihrer Unterseite be-

1) Von Nachet in Paris geliefert und durch besonders große Focaldistanzen der (gewöhnlich ausreichenden) Objective II und III ausgezeichnet.



findliche Stifte auf die Schienen *b*, deren jede zu dem Zwecke mit zwei Löchern versehen ist, aufgepaßt wird. Diese Eisenplatte, *aa* in Fig. 739, trägt nun den Objecttisch *o*, welcher mit drei Füßchen in die Oberseite des Hohlcylinders *p* eingesetzt und mit diesem, sowie mit der daran befestigten geteilten kreisförmigen Scheibe *z* zusammen, durch die Handhabe *y* gedreht werden kann. Die Füßchen des Objecttisches passen in drei Löcher der Oberseite von *p* nur so weit hinein, daß zwischen *p* und *o* noch Raum zum Abzug der Verbrennungsgase der Heizflamme *x* übrigbleibt. Die Kreisteilung auf *z* wird durch eine in der Eisenplatte *a* angebrachte Öffnung *w* abgelesen, welche mit einer als Lupe dienenden Linse geschlossen ist; wenn der Handgriff *y* an den in der Fig. 739 sichtbaren Stift anstößt, zeigt der Index der Teilung genau auf 0°; geht man also bei einer Winkelmessung von dieser Stellung aus, indem man durch Drehung des Oculares einen Faden mit einer Krystallkante zusammenfallen läßt und dann den Objecttisch dreht, bis eine zweite Kante mit demselben Faden zur Deckung gelangt, so gibt die Ablesung unmittelbar den Winkel

Fig. 739.

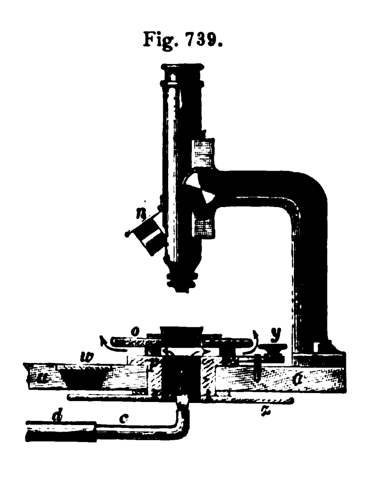
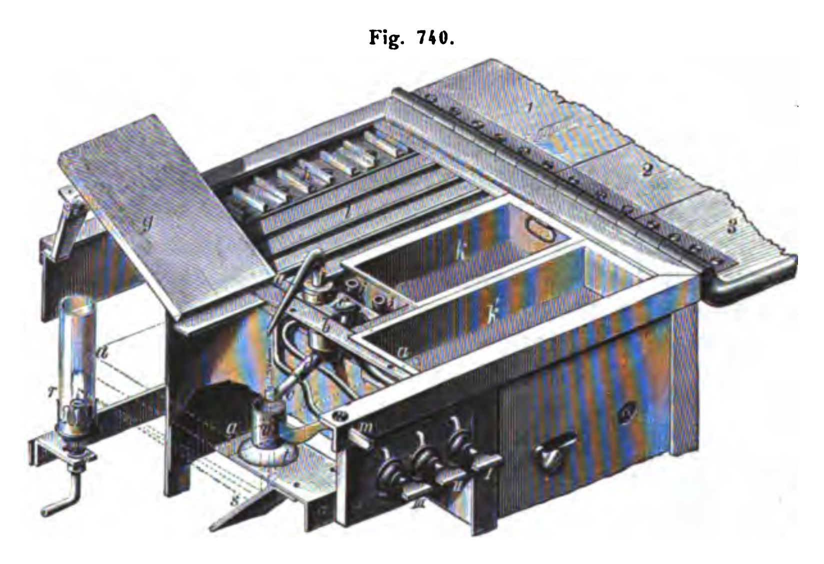


Fig. 740.

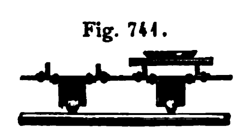


zwischen den beiden Krystallkanten an. Auf die vordere (dem Beobachter zugewendete) Seite der Platte *a* ist der sehr stabile, eiserne Mikroskopträger aufgeschraubt, an welchem der Tubus durch einen Trieb verstellt werden kann. Das Objectiv des Mikroskopes soll möglichst große Brennweite haben, um es den erhitzten Präparaten nicht allzusehr nähern zu müssen,

daher man nur mit mäßigen Vergrößerungen arbeitet. Die Fassung des Polarisators bildet ein kurzes Rohr *n*, welches durch ein Scharnier beweglich in den Tubus eingebracht oder aus demselben entfernt werden kann, ohne die Beobachtung zu unterbrechen. Der untere Nicol befindet sich in einem Rohre *u* (s. Fig. 740), welches an einem beweglichen Arme befestigt ist, dessen Ende als Griff *m* aus dem Tischgestell hervorragt; durch Verschieben dieses Griffes bis zu seiner Arretierung wird der Nicol entweder in die richtige Stellung unter die Mitte des Objecttisches gebracht oder zur Seite geschoben. Zur Beleuchtung dient ein Argandscher Gasbrenner *r*, dessen Licht durch einen Spiegel *s* nach oben reflectiert und durch eine Linse *t* concentriert wird.

Um das zu untersuchende Präparat während der Beobachtung erwärmen zu können, dient das bereits erwähnte Flämmchen *x*; der Brenner *c* ist an einem drehbaren Arme *d* befestigt, welcher durch den Knopf *e* in Bewegung gesetzt werden kann. Letzterer ragt durch einen Schlitz über die hölzerne Tischplatte (in Fig. 740 zur Seite geschlagen) hervor, und man kann mit Hilfe desselben, ohne die Beobachtung zu unterbrechen, das Flämmchen *x* nach Belieben entfernen und wieder unter das Präparat bringen, wobei die richtige Stellung, wie beim Einfügen des Nicolrohres *u*, durch eine Arretierung hervorgebracht wird. In das an der Unterseite der Schiene *b* befestigte Gelenk des Brenners münden zwei Röhren, wovon eine Luft, die andere Gas zuführt, deren Zutritt durch die Hähne I und II an der Vorderseite des Tisches reguliert wird. Wenn man nur schwach erwärmen will, bringt man zweckmäßig über dem Flämmchen eine dünne Glas- oder Glimmerplatte an, welche mittels eines Schiebers an *d* befestigt ist. Das abnehmbare Rohr *f*, durch welches ein mittels des Hahnes III regulierbarer Luftstrom von oben auf die Mitte des Objecttisches gerichtet werden kann, dient dazu, eine momentane Abkühlung des Präparates zu erzeugen. Das schräggestellte Brett *g* kann man dazu benutzen, die durch ein über dem Oculare angebrachtes geneigtes Deckgläschen auf die Fläche *g* geworfenen Bilder zu zeichnen. Zu beiden Seiten des Mikroskopes enthält der Arbeitstisch Blechkästen *kk'*; einen derselben kann man zweckmäßig mit Wasser zum Abwaschen der Objectgläser füllen; die andern dienen zur Aufnahme von Reagenzien, Glasplatten, Tropfgläschen, Pincetten und andern Utensilien. An der hinteren, dem Beobachter abgewendeten Langseite des Tisches ist ein System von Vorwärmern *h* angebracht, deren zwei im Durchschnitte in Fig. 741 dargestellt sind; auf dieselben wird, wie es der rechts abgebildete zeigt, das Objectglas aufgelegt, so daß man stets eine Reihe gleicher Präparate vorgewärmt zur Untersuchung bereit haben kann. Statt dieses Systemes kann man zu demselben Zwecke auch die Hitze der Beleuchtungsflamme benutzen, indem man über dieser einen Aufsatz von Eisenblech mit kleinen Öffnungen zum Auflegen der Präparate

Fig. 741.



anbringt. Im unteren Teile des Tischgestelles befindet sich einerseits ein Glockengasometer zur Lieferung des Luftstromes für die Erhitzungsflamme und für das Rohr *f*, andererseits zum gleichen Zwecke ein Wassergebläse, welches benutzt wird, wenn eine Wasserleitung zur Verfügung steht, in welchem Falle man jedoch die Luft auch noch in den Gasometer eintreten läßt, um den Druck in constanter Höhe zu erhalten. Für Beobachtungen in sehr hoher Temperatur muß man den gewöhnlichen Objecttisch durch einen andern, auf der Unterlage frei verschiebbaren, ersetzen; vorteilhaft umgibt man dann aber auch das Objectiv mit einer Kühlvorrichtung. Bei den gewöhnlich vorkommenden Untersuchungen für chemische Zwecke kommt man jedoch mit der zuerst beschriebenen Einrichtung aus.

Von den neueren Verbesserungen des Krystallisationsmikroskopes (s. O. Lehmann, Zeitschr. f. Instrumentenk. 1890, **10**, 202) mögen erwähnt werden: die von Voigt und Hochgesang in Göttingen ausgeführte Ersetzung des unteren Nicols durch einen Glassatz mit einer sehr einfachen Vorrichtung zum Übergange von polarisiertem Lichte zu gewöhnlichem, ferner Einführung eines einfachen Brenners für schwache und eines Ringbrenners für stärkere Erhitzung des Präparates. Die genannte Firma liefert eigens für die Krystallanalyse eingerichtete Mikroskope, an welchen die zuletzt genannten Verbesserungen angebracht sind (s. Preisverz. am Schlusse).

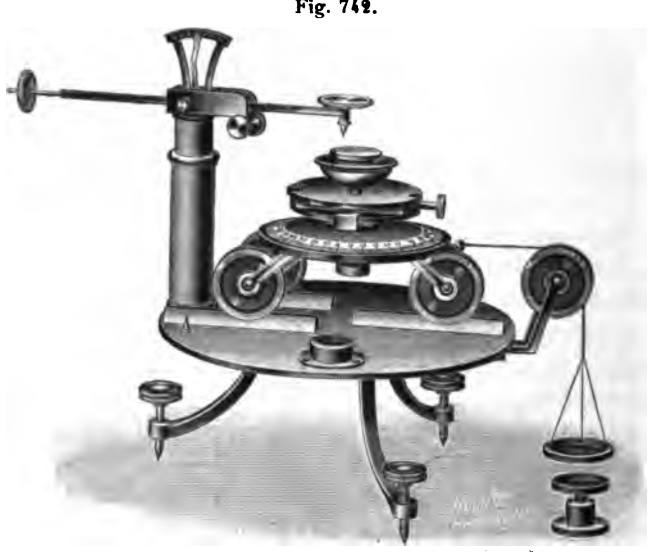
Für die chemische Krystallographie ist von großer Wichtigkeit die Bestimmung der Umwandlungstemperatur der polymorphen und polysymmetrischen Modificationen (s. d. Verfassers Einleitung in die chemische Krystallographie, Leipzig 1904). Falls diese Temperatur unter 300° liegt, ist die geeignetste Methode zur Bestimmung derselben und zum Studium des Umwandlungsvorganges die folgende: Eines der größeren Mikroskope, wie sie in Fig. 725, 726 und 730 abgebildet sind, wird mit einem Objective mit großer Focaldistanz (0) und einem der gewöhnlichen Oculare (oder, wenn stärkere Vergrößerung erwünscht ist, mit dem S. 779 erwähnten besonderen Oculare) versehen und sein Stativ horizontal gestellt. Alsdann wird zwischen Objectiv und Objecttisch der S. 749 beschriebene Erhitzungskasten befestigt und, mit Ausnahme der beiden Fenster, mit Asbestpappe umgeben, um das Mikroskop vor der Erwärmung zu schützen. Das Präparat, auf einer runden Objectplatte befindlich, wird durch die obere Öffnung des Kastens mittels eines Halters eingeführt, welcher von außen eine Drehung des runden Objectglases in seiner Ebene gestattet (wenn das Mikroskop Fig. 730 benutzt wird, genügt eine einfache Einklemmung des Präparates in einem Halter aus Asbestpappe).

Apparate zur Bestimmung der Härte und der Elasticität.
Schneide- und Schleifapparate.

Sklerometer.

Die S. 242 erwähnten Bestimmungen der Härtecurven von Fr. Exner (Untersuchungen über die Härte an Krystallflächen. Gekrönte Preisschr. d. k. Akad. Wien 1873) wurden mit dem von Grailich und Pekárek in

Fig. 742.



den Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien 1854, **13**, 410 beschriebenen Instrumente ausgeführt. Einen nach demselben Principe ausgeführten Apparat, in Fig. 742 abgebildet, liefert die Firma Voigt und Hochgesang in Göttingen (s. Preiscour. am Schlusse). Auf einem Tische, der mit Hilfe dreier Schraubenfüße und einer Dosenlibelle horizontal gestellt werden kann, befinden sich drei parallele Stahlschienen, auf welchen mit drei, in feinen Stahlspitzen laufenden Rollen der Krystallträger durch Auflegen von Gewichten auf die rechts hängende Schale bewegt wird. Derselbe hat eine Kreisteilung und eine Centrier- und Justiervorrichtung. Die die aufgelegte Krystallplatte ritzende Stahl- oder Diamantspitze ist an einem verstellbaren Wagebalken befestigt und wird durch Gewichte belastet.

Zur genaueren Bestimmung der mittleren Härte einer Krystallfläche nach dem Principe des Pfaffschen Mesosklerometers (s. S. 243) construierte Jaggar (Zeitschr. f. Kryst. 1898, **29**, 262 f.) ein Instrument, welches in Verbindung mit dem Mikroskope verwendet und von ihm »Mikrosklerometer« genannt wird; mit demselben wird die Zeit bestimmt, welche das Eindringen einer mit constanter Geschwindigkeit rotierenden und mit bestimmtem Gewichte belasteten Diamantspitze bis zu einer genau gemessenen Tiefe erfordert.

Elasticitätsapparate.

Die S. 218 angeführte Methode der Messung des Dehnungscoefficienten mit Benutzung des Fizeauschen Principes liegt dem von Koch und

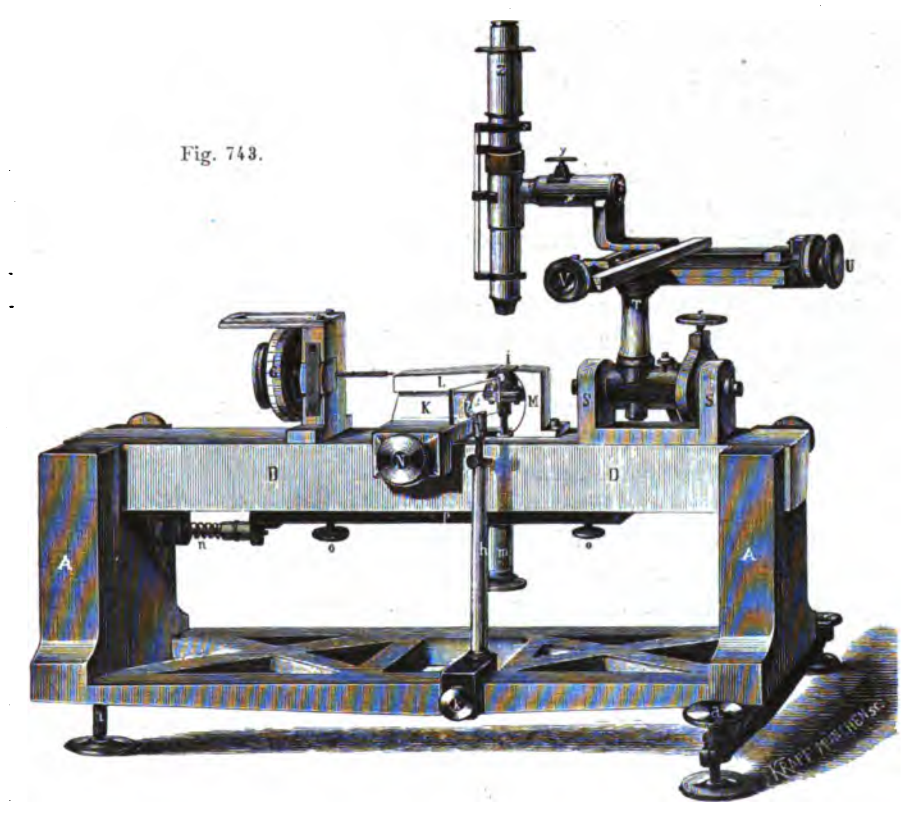


Fig. 743.

Warburg (Wiedemanns Ann. d. Phys. 1878, 5, 521, 1883, **18**, 325) construierten Apparate zugrunde, welcher mit einigen Modificationen auch zu den Untersuchungen von Beckenkamp und Vater diente und von letzterem in der Zeitschr. f. Kryst. 1886, **11**, 551 f. ausführlich beschrieben wurde. Dieser von dem math.-mechan. Institute von F. W. Breithaupt u. Sohn in Cassel gelieferte Apparat, in Fig. 743 abgebildet, kann sowohl zur Bestimmung der Biegung von Stäbchen, als auch zur Untersuchung kreisförmiger Platten behufs Aufsuchung der in ihrer Ebene gelegenen

Minima oder Maxima des Dehnungscoefficienten verwendet werden. Die Krystallplatte wird bei *i* aufgelegt auf zwei Schneiden, deren eine von der obersten Kante des festen Lagers *M* gebildet wird, deren linke, die obere rechte Kante von *L*, sich bei der Belastung dadurch der ersten genau parallel stellt, daß *L* auf der oberen Schneide von *K* reitet. Der Abstand der beiden Schneiden kann durch Verschieben von *K* mittels der Schraube *N* verändert und mit der Mikrometerschraube *G* genau gemessen werden. Zwischen den beiden Lagern befindet sich ein kleines rechtwinkeliges totalreflectierendes Glasprisma *i*, in welches das Licht einer seitlich aufgestellten Natriumflamme durch die davor unter 45° aufgestellte Spiegelglasplatte *l* geworfen wird; die vertical nach oben aus dem Glasprisma austretenden Strahlen werden an der Unter- und Oberseite der dünnen Luftschicht zwischen der aufgelegten Krystallplatte und der oberen Fläche des Glasprismas reflectiert und geben, da die letztere schwach sphärisch convex geschliffen ist, kreisförmige Interferenzstreifen, deren Beobachtung durch das in der Figur vertical gestellte Mikroskop erfolgt, welches zu diesem Zwecke um die Axe *SS* in die horizontale Stellung gedreht und auf die Vorderfläche des Prismas *i* gerichtet werden kann. In verticaler Stellung dient es dazu, die Orientierung der aufgelegten Platte zu prüfen; es ist zu diesem Zwecke mit Oculargoniometer (mit einem festen und einem drehbaren Faden, S. 778 Anm.) versehen und kann mittels der beiden Mikrometerschrauben *V* und *U* um je 4 cm in zwei zueinander senkrechten horizontalen Richtungen bewegt werden, so daß es auch zu andern Zwecken, wie zur Ausmessung von Ätzfiguren, Wärmeleitungsellipsen (s. S. 178) u. dgl. benutzt werden kann, wobei es nur nötig ist, über die Träger *M* und *K* (*L* kann alsdann abgenommen werden) einen einfachen Objecttisch überzustülpen. Bei der Bestimmung der Dehnungscoefficienten erfolgt die Belastung der über *i* befindlichen Platte entweder durch eine aufgesetzte Spitze oder eine übergelegte Schneide, deren Arme mit einer unter dem Apparate aufgestellten Vorrichtung in Verbindung stehen, welche eine ganz allmähliche Zunahme des auf die Platte wirkenden Gewichtes gestattet.

W. Voigt benutzte bei seinen umfangreichen Arbeiten über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle zur Bestimmung der Biegung einen in einfacherer Form zuerst von F. Neumann angegebenen und von ihm wesentlich verbesserten Apparat, für die Torsionsmessungen (s. S. 219) einen zweiten von ihm construierten. Derartige Apparate liefern die Firmen Spindler und Hoyer (Diederichs Nachf.) in Göttingen und Dr. Steeg und Reuter in Homburg (s. Preiscour. am Schlusse).

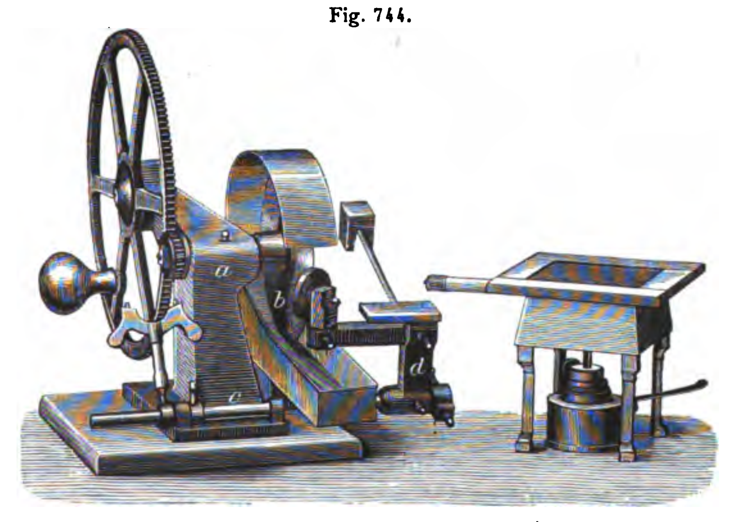
Die in dem oben beschriebenen Apparate von Koch und Warburg benutzte Fizeausche Interferenzmethode diente ursprünglich zur Bestimmung der thermischen Ausdehnung der Krystalle (s. S. 190). Die Empfindlichkeit derselben erhöhte Tutton erheblich bei der Construction seines Compensations-Interferenzdilatometers (Zeitschr. f. Kryst. 1899, **30**, 528 f.), und die Genauigkeit der optischen Teile dieses Instrumentes ver-

anlaßte ihn später, dasselbe mit den nötigen Änderungen auch als »Interferometer« zur Messung der elastischen Biegung in ähnlicher Weise, wie es bei dem in Fig. 743 abgebildeten Apparate der Fall ist, zu verwenden (Zeitschr. f. Kryst. 1904, **39**, 321 f.). Beide Apparate, der letztere von Tutton als Elasmometer bezeichnet, wurden von der Firma Troughton und Simms in London ausgeführt.

Das Schneiden, Schleifen und Polieren der Krystallplatten.

In vielen Fällen liefern natürliche Flächen (oder Ebenen einer deutlichen Spaltbarkeit) schon die zu optischen und andern Untersuchungen erforderlichen Platten, und solche sind, selbst bei nur mittelmäßiger Beschaffenheit der Flächen, den künstlich hergestellten im allgemeinen vorzuziehen, da es niemals gelingt, namentlich nicht bei kleinen Krystallen, eine Ebene genau in der erforderten Lage anzuschleifen. Der günstigste Fall für die Richtigkeit des Schliffes liegt vor, wenn eine von zwei parallelen natürlichen Flächen direct verwendbar ist, wenn es sich also nur darum handelt, die zweite derselben parallel durch Abschleifen herzustellen, sei es, weil sie zu klein ausgebildet oder weil der Krystall zu dick ist.

Fig. 744.



Will man aus einem einigermaßen dicken Krystalle eine Platte herstellen, die abfallenden Stücke aber noch weiter verwenden, so muß man ihn in der erforderlichen Richtung durchschneiden. Ist die Substanz hart, so bedarf es hierzu einer Schneidemaschine, auf welcher der Schnitt durch Andrücken des betreffenden Stückes gegen die Kante einer rasch rotierenden Metallscheibe bewirkt wird. Solche Maschinen werden besonders von den Firmen Fuess in Steglitz und Voigt und Hochgesang in Göttingen in einander ähnlichen Formen geliefert. Im folgenden sollen daher die der ersteren Firma beschrieben werden.

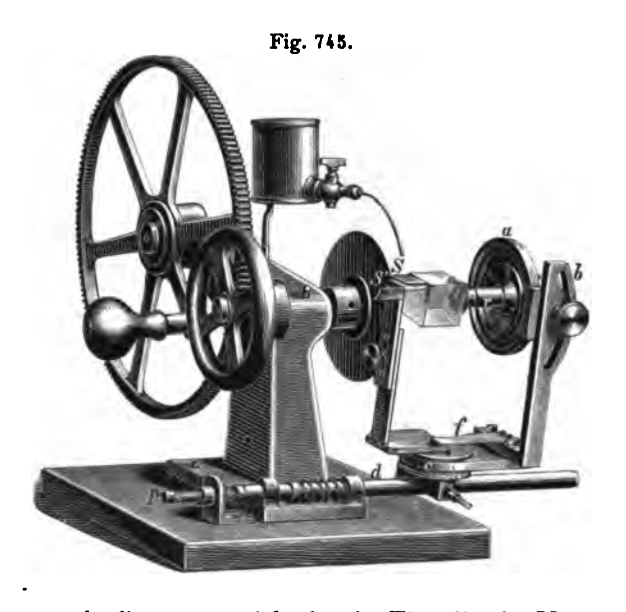
Fig. 744 stellt eine kleine Maschine für Handbetrieb in $\frac{1}{6}$ nat. Gr. dar. Durch Drehen des großen Zahnrades wird die in dem Eisengestell *a* hori-

zontal gelagerte Spindel, an welcher die Schneidscheibe *b* befestigt ist, in schnelle Rotation versetzt. Die Scheibe *b* ist aus Eisenblech (Weißblech) von $\frac{1}{4}$ mm Dicke gefertigt. Der Rand derselben muß genau rundlaufend mit der Spindel abgedreht sein; ferner ist erforderlich, daß die Fläche der Scheibe eine zur Spindelaxe senkrechte Ebene bilde, damit bei der Rotation kein seitliches Schwanken stattfindet. Scheiben, deren Ränder wellenförmig schwanken, sind unbrauchbar, weil sie sich leicht in der Schnittfuge festklemmen. Am Fuße des Eisengestelles *a* befindet sich eine parallel zur Spindel gelagerte, cylindrisch stabförmige Axe *c*, welche in ihrer Längsrichtung verschoben und vermittelst zweier Klemmringe in ihrer jeweiligen Stellung so fixiert werden kann, daß unbehindert ihrer Drehung seitliche Verschiebungen nicht stattfinden können. Die Axe *c* trägt an ihrem rechten weit hervorragenden Ende den Pfeiler *d*, in welchem ein nach links gerichteter horizontaler Arm drehbar eingesetzt ist, welcher den kleinen dreh- und festklemmbaren, senkrechten Pfeiler *e* aufnimmt. An diesen werden nun die zur Befestigung der zu schneidenden Substanzen dienenden, aus flachen oder hohl ausgedrehten Eisenscheiben bestehenden Hilfsstücke angeschraubt, an welche die Krystalle mit Colophoniumkitt oder Siegellack angekittet werden. Das Andrücken der letzteren an den Rand der Schneidscheibe geschieht durch den am rechten Ende der Axe *c* angeschraubten Hebel mit versetzbarem Reitergewicht. Größere Mineralien oder Gesteinsstücke lassen sich nach Abnahme des horizontalen Armes vom Träger *d* auf der Plattform des letzteren mit einer Schraubzwinge, welche der Maschine beigegeben ist, befestigen.

Nachdem in der beschriebenen Weise das Material zum Schnitte vorbereitet ist, läßt man die Maschine rotieren und trägt mit einem Holzspatel reichlich nassen Schmirgel an der Stelle auf den Krystall, an welcher die Schneidscheibe eindringen soll. Dieses Auftragen des Schmirgels aus einem bereit stehenden Gefäße muß während des Schneidens fortgesetzt werden. Der größte Teil des aufgetragenen Schmirgels kommt hierbei nicht zur Verarbeitung und wird in das unter die Scheibe gestellte Blechgefäß fallen, von welchem man indessen, wenn sich genügender Vorrat angesammelt hat, ebenfalls entnehmen kann. Der von der Rückwand des Gefäßes ausgehende, die Scheibe größtenteils umschließende Blechbügel verhindert das Umherspritzen des fortgeschleuderten Wassers. Die passende Schmirgelsorte muß je nach der zu schneidenden Substanz ausgewählt werden — man wird für zarte Mineralien ein feineres, für gröbere Gesteinsstücke ein gröberes Korn nehmen. Zum Schneiden von sehr harten Substanzen verwendet man zweckmäßiger solche Blechscheiben, welche mit Diamantpulver imprägniert sind. Das Verfahren der Herstellung einer Diamantschneidscheibe ist folgendes: In den Rand einer gut laufenden Blechscheibe werden in Abständen von etwa 2 mm mit einem stumpfen Messer kleine Kerben eingeschlagen; darauf drückt man eine Achatplatte, welche mit einem Teige von Diamantpulver und Petroleum bestrichen ist, fest dem Rande der

Scheibe an, läßt diese gewissermaßen sich auf der Achatplatte abrollen und dann die Scheibe auf der Achatplatte einige Male umlaufen, so daß ein Einschnitt entsteht. Die Diamantsplitterchen drücken sich in das weiche Metall ein und bilden so eine Säge mit mikroskopischen Zähnchen. Eine derartig präparierte Scheibe schneidet vorzüglich harte und homogene Mineralien, welche mit Schmirgel schwer zu bearbeiten sind; nur darf man nicht versäumen, fortwährend auf die Schneidstelle Petroleum träufeln zu lassen. Auf weichere Substanzen hingegen ist die Diamantschneidscheibe fast unwirksam.

Fig. 745.



Will man parallel einem Schnitte einen zweiten ausführen, also eine Lamelle ausschneiden, so lüftet man mit einem Schraubenschlüssel (derselbe ist in der Abbildung auf der Schraube des am weitesten links befindlichen Klemmringes aufgesteckt gezeichnet) die Klemmringe der Axe *c* und verschiebt die letztere um die gewünschte Breite der Lamelle.

Will man einen Schnitt von bestimmter krystallographischer Orientierung möglichst genau ausführen, so bedient man sich der in Fig. 745 in Verbindung mit der Schneidemaschine dargestellten Vorrichtung. Die Axe *d*, welche eine feine Verschiebung durch die Schraube *p* gestattet, trägt den verschiebbaren Teilkreis *c*, auf welchem zwei senkrechte Arme befestigt sind. Der rechte derselben bildet oben ein Bogenstück eines zweiten Teilkreises *b*, an welchen ein dritter *a* angeklemmt werden kann. In den Nullpunktlagen stehen alle drei Kreise senkrecht zueinander, *a* parallel, *b* und *c* normal zur Schneidscheibe. Der Krystall wird auf den Träger *r*, welcher behufs der Justierung in zwei zueinander senkrechten Ebenen geneigt und in der erforderlichen Lage an *a* geklemmt werden kann, befestigt. Die Justierung geschieht mittels des Spiegels *S* oder (bei nicht spiegelnden Krystallen) durch die Stahlschneide *S'*, welche beide von dem andern senkrechten Arme über *c* getragen werden (im zweiten Falle wird die Stellung von *S* und *S'* durch Umdrehen vertauscht). Im allgemeinen reichen die Drehungen um zwei der zueinander senkrechten Drehungsaxen (welche einander sämtlich an dem Orte des Krystalles schneiden) um bestimmte Winkel aus, um die gewünschte Ebene des Krystalles der Schneidscheibe parallel

zu machen (s. C. Leiss, die opt. Instr. d. Firma Fuess, Leipzig 1899, 270 f.).

Eine sehr genaue Orientierung einer durch Schleifen herzustellenden Ebene gestattet das von Tutton (Zeitschr. f. Kryst. 1895, **24**, 433 f.) beschriebene und von Troughton und Simms in London construierte Instrument, welches besonders zur Herstellung von Platten und Prismen aus Krystallen chemischer Präparate bestimmt ist; dasselbe wurde später auch für härtere Substanzen eingerichtet und mit einem Schneideapparate verbunden (s. Zeitschr. f. Kryst. 1896, **25**, 78 f.).

Fig 746.

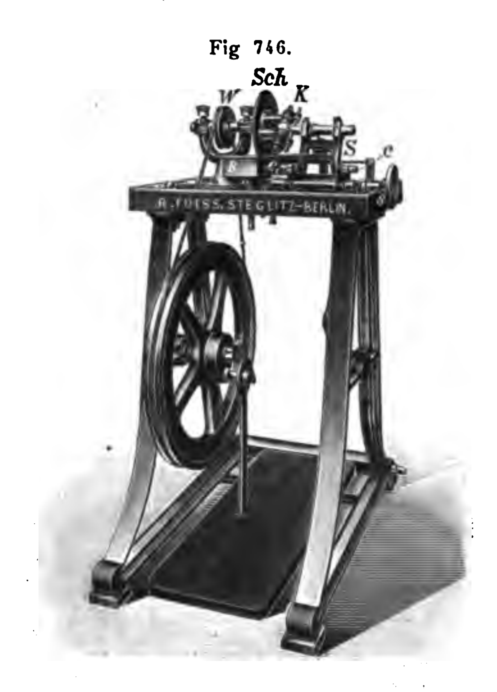


Fig. 746 stellt eine Schneidemaschine der Firma Fuess dar, welche für Fußbetrieb eingerichtet ist, und Fig. 747 eine größere zum Betriebe mit einem Motor. Der Träger *S* mit der Vorrichtung zum Einspannen *K* ist durch die Leitspindel *s* senkrecht zur Schnittfläche verschiebbar. Die zweite Maschine ist zum Einspannen sehr großer Stücke eingerichtet, während mit dem ersteren Modelle auch sehr kleine Krystalle geschnitten werden können.

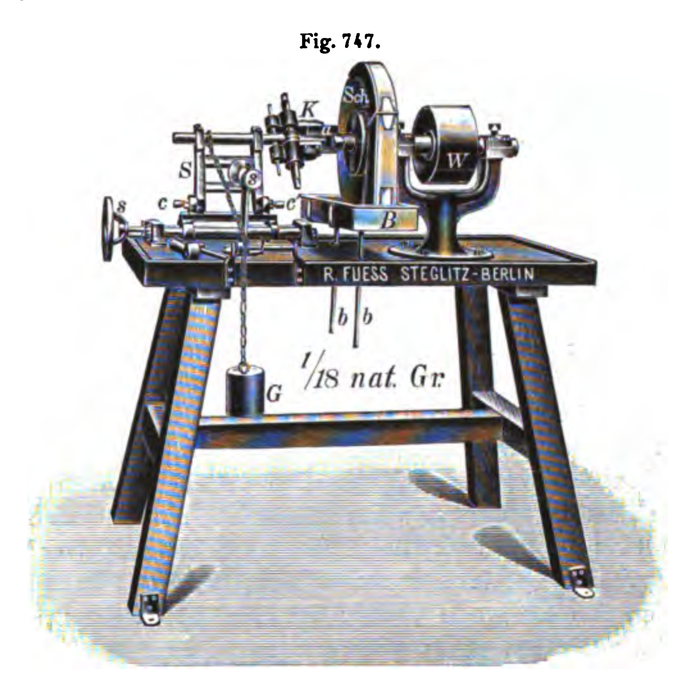
Zum Schleifen und Polieren der Präparate ist die gebräuchlichste Maschine die in Fig. 748 abgebildete derselben Firma, eine Doppeltrittbank für Fußbetrieb mit dem Schleifbecken *B*, in welchem die rotierenden Schleifplatten eingesetzt werden.

Diejenigen, welchen eine Maschine zum Schneiden und Schleifen harter Körper nicht zur Verfügung steht, oder welche einer solchen Arbeit die damit verbundene Mühe und Zeit nicht widmen wollen, erhalten von den optischen Instituten der Herren: Dr. W. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H., R. Fuess in Steglitz bei Berlin, Voigt und Hochgesang in Göttingen, Strübin in Basel, Werlein in Paris u. a. Schliffe jeder Substanz in gewünschter Orientierung angefertigt.

Bei geringerer Härte, wie sie bei der Untersuchung künstlich dargestellter, krystallisierter Körper fast allein vorkommt, kann man das Durchschneiden eines Krystalles leicht durch eine feine Laubsäge bewerkstelligen, deren Sägeblatt sehr schmal sein muß oder durch einen feinen Draht ersetzt wird. Das Sägen muß sehr langsam und vorsichtig ausgeführt werden, und zwar stets unter Benetzung des Sägeblattes oder des Drahtes; wo es

nicht nötig ist, die durchschnittenen Flächen zu conservieren, wende man ein Lösungsmittel der Substanz zum Benetzen an. Bei der Benutzung

Fig. 747.



des Drahtes ist die Verwendung von Schmirgelpulver kaum zu entbehren. Ist der Krystall groß und etwas bröckelig, so kittet man ihn mit einer Mischung von Wachs und Colophonium auf einem horizontalen Brettchen fest, auf welchem seitlich zwei verticale Wände befestigt sind; diese sind mit je einem senkrechten Schlitze versehen, welcher der Säge zwar eine Bewegung vor und zurück, nach oben und unten, aber keine Abweichung nach rechts und links gestattet.

Fig. 748.



Kommt es dagegen auf die abfallenden Stücke nicht an, so stelle man die Fläche zuerst durch vorsichtiges Feilen, oder noch besser Abschaben mit einem Messer, annähernd her und schleife sie alsdann eben. Ist nicht sehr viel Substanz zu entfernen, so beginne man direct mit dem Schleifen.

Ist der Krystall klein, so hat man beim Schleifen eine sicherere Führung nötig, als es das Fassen mit den Fingern gestattet. Man senkt alsdann denselben in Siegellack oder in Gyps, oder faßt ihn mittels Kork in folgender Weise: Ein guter, dichter und weicher Korkstöpsel wird parallel der Cylinderaxe halbiert und die Schnittfläche beider Hälften eben gefeilt; dann werden beide wieder aneinandergelegt und senkrecht zur Schnittfläche vier Stecknadeln durch das Ganze gesteckt; zwischen die beiden, beliebig voneinander zu entfernenden Schnittflächen wird der Krystall so eingeklemmt, daß der abzuschleifende Teil über eine Endfläche des Korkes hervorragt und die anzuschleifende Ebene dieser Endfläche parallel ist. Diese kleine, von Nörremberg angegebene Vorrichtung gestattet selbst bei sehr kleinen Krystallen eine ziemlich sichere Führung, wenn man sie nur durch einen geringen Druck der Finger in ihrer Lage erhält. Das Schleifen selbst wird auf einer matten Glasplatte mit einer Benetzungsflüssigkeit (Öl, Wasser oder Alkohol[1])) ausgeführt; hierzu kann man, wenn die die Umgrenzung der Platte bildenden Flächen nicht intact zu bleiben brauchen, ein Lösungsmittel anwenden, wodurch das Schleifen in hohem Grade beschleunigt wird; andernfalls nimmt man feinen Bimsstein, bei etwas härteren Krystallen feinstes Schmirgelpulver neben dem Benetzungsmittel. Eine leidlich ebene, nicht convexe Fläche zu schleifen, erfordert eine ziemlich große Übung; hat man die Neigung des Krystalles während des Schleifens etwas geändert, so bildet sich eine sehr stumpfe Kante, und es sitzt nur noch ein Teil der Fläche auf der Glasplatte auf; alsdann sehe man zu, welcher der beiden Flächenteile die richtigere Lage hat, und schleife nur diesen fort (indem man auf dieser Seite auf den Krystall drückt), bis er die ganze Fläche bildet.

Auf diesem Wege kann man natürlich nur annähernd ebene Flächen erhalten. Hat man größere Krystalle zur Verfügung und ist also imstande, an die Vollkommenheit der Platten größere Anforderungen zu stellen, so empfiehlt sich die Anwendung der von Fuess construierten Vorrichtung zum Schleifen und Polieren planparalleler Platten Fig. 749. Dieselbe besteht in einer cylindrischen Hülse mit drei Armen a_1, a_2, a_3, welche die Muttern dreier harter Stahlschrauben bilden; in derselben kann ein Cylinder, welcher mit dem Stifte t in einem Schlitze der Hülse gleitet und an seiner Unterseite das zu schleifende Object p mit Canadabalsam oder einer Mischung von Colophonium und Wachs angekittet trägt, auf- und niedergeschoben werden. Die Stahlschrauben werden mit Hilfe des an seiner abgeschrägten Fläche mit einer Teilung versehenen Keiles k so eingestellt, daß ihre Enden in einer zur Unterfläche des Cylinders parallelen Ebene liegen. Die Vorrichtung wird auf der Schleifplatte q so mit der Hand ge-

---

1) Absoluter Alkohol darf nicht verwendet werden beim Schleifen der Krystalle wasserhaltiger Salze, da denselben hierdurch das Krystallwasser entzogen und die Durchsichtigkeit genommen würde.



führt, daß das Object mit der ersteren durch einen leichten Druck auf die obere Fläche des Cylinders stets in Berührung gehalten wird.

Zur Herstellung von Krystallschliffen von genau bestimmter Orientierung construierte Wülfing einen Apparat (Zeitschr. f. Kryst. 1890, **17**, 445 f.), den er später verbesserte (s. Jahrb. f. Min. 1902, **2**, 1 f.), und welcher in der von der Firma Fuess gelieferten Form in Fig. 750 abgebildet ist. Derselbe besteht aus einem Schleifdreifuße, von dessen drei Stützpunkten zwei durch die Stellschrauben *R* und *T* gebildet werden, der dritte durch den Krystall selbst, welcher auf einem mit der Mutter *M* festgeschraubten Krystallträger *k* aufgekittet ist; solcher Krystallträger sind vier, mit verschieden geneigten Endflächen vorhanden. Es wird nun zuerst eine kleine Fläche nach Augenmaß ungefähr in der gewünschten Orientierung an dem Krystalle angeschliffen alsdann dieser mit dem Krystallträger, in dem Halter *H* befestigt, auf das Goniometer gebracht und der Fehler der Schlifffläche bestimmt. Hierauf wird er wieder in dem Schleifdreifuße befestigt und auf diesen der mit dem Griffe *B* abhebbare »Libellendreifuß« aufgesetzt, dessen beide Schrauben *t* und *r* bei einer ganzen Umdrehung eine Neigung um 1° hervorbringen. Mit Hilfe dieser Mikrometerschrauben und der Stellschrauben *R* und *T* kann man die Stellung des Krystalles so corrigieren, daß die nunmehr hergestellte neue Schlifffläche die richtige Orientierung erhält.

Fig. 749.

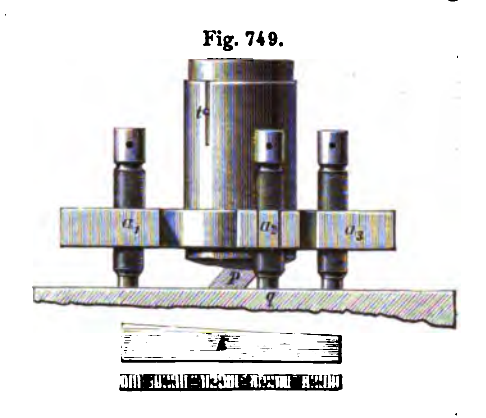
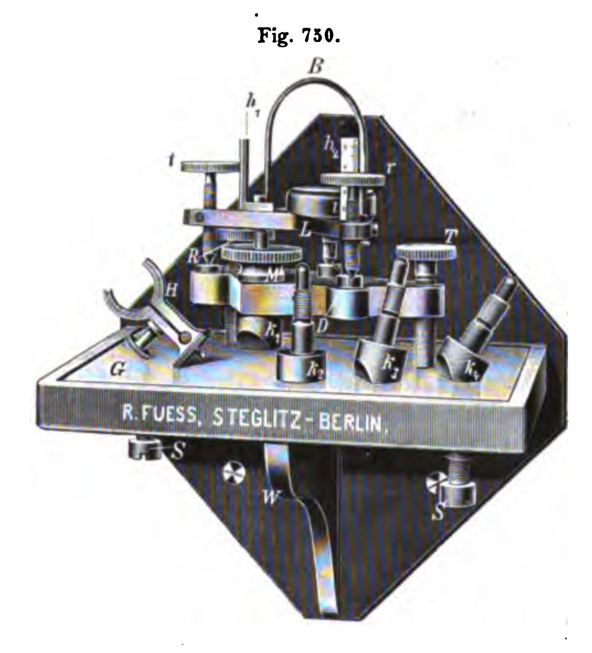


Fig. 750.



Über Apparate von Stöber zur Herstellung planparalleler Platten von bestimmter Orientierung und zum Schleifen von Prismen s. Zeitschr. f. Kryst. 1899, **31**, 180, und C. Leiss, d. opt. Instr. d. F. Fuess, Leipzig 1899, S. 277.

Zur Herstellung eines Dünnschliffes aus einem Gesteine schleift man eine geschnittene Platte oder einen mit dem Hammer geschlagenen Scherben auf der rotierenden Scheibe der Schleifmaschine oder mit freier Hand auf einer ebenen Eisenplatte mit grobem Schmirgel und Wasser auf einer Seite eben; alsdann wird diese Fläche auf einer mattgeschliffenen Glasplatte mit feingeschlämmtem Schmirgel poliert und mit Canadabalsam auf einer starken, quadratischen Glasplatte aufgekittet. Hierzu, wie überhaupt zum Erwärmen, Kitten usw. von Präparaten, dient ein eisernes Stativ mit einem kleinen Flämmchen (wie solche von Desaga in Heidelberg und Böhm und Wiedemann in München geliefert werden) oder der sehr bequeme Erwärmungsapparat von Fuess, welcher in Fig. 744 (S. 793) zur Rechten der Handschneidemaschine mit abgebildet ist. Derselbe besteht aus einem viereckigen Kasten von Zink, dessen Oberfläche von einem Holzrahmen umgeben ist, welcher als Stützpunkt für die Hand dient. Ein in den Kasten eingeführtes Thermometer hat den Zweck, die Temperatur zu ermitteln, welche die zur Verfügung stehende Sorte von Canadabalsam bedarf, um haltbare Präparate zu gewinnen. Das aufgekittete Präparat wird dann abgeschliffen, bis es im durchfallenden Lichte im Mikroskope untersucht werden kann, die zweite Fläche ebenfalls poliert und eventuell, nach Übertragung der dünnen Platte auf ein anderes Objectglas, mit dünnem Deckglase bedeckt.

Zum Polieren der geschliffenen Flächen dient feines, sämisch gegerbtes Leder, weiche Leinwand oder Seide, auf eine ganz ebene Fläche (Holz oder Glas) aufgespannt; als Poliermittel benutzt man am besten englisch Rot (caput mortuum, $Fe^2 O^3$) oder feinstgeschlämmte Zinnasche mit Alkohol oder Äther. Weiche Körper nehmen selten gute Politur an, und hat man sich dann mit den durch den Schliff erhaltenen Flächen zu begnügen, nachdem man sie auf einem ausgespannten Leder ohne Poliermittel ein wenig abpoliert hat; namentlich für die Messung des Axenwinkels in Bromnaphtalin reichen solche Platten fast immer hin. Sind die Flächen zu matt, um ein scharfes Axenbild, ein deutliches Spectrum (bei Prismen) zu liefern, so werden mittels Canadabalsam dünne planparallele Glasplättchen auf dieselben gekittet und möglichst fest angedrückt, damit nicht die Canadabalsamschicht keilförmig werde und Fehler erzeuge (s. auch S. 695). Statt des Canadabalsames kann man auch Mastixlösung in Äther oder eine Mischung beider, welche schneller erhärtet, zum Kitten anwenden.

Was die Genauigkeit betrifft, mit welcher die Orientierung einer künstlichen Fläche herzustellen ist, so kann dieselbe eine sehr verschiedene sein, je nach Umständen. Hat man z. B. von einem Körper festgestellt, daß er einfachbrechend ist, und will seinen Brechungsindex bestimmen, so ist die Stellung der beiden zu schleifenden Prismenflächen ganz gleichgültig; man hat also nur darauf zu achten, daß dieselben recht eben sind und einen passenden Winkel miteinander bilden (bei mittlerer Größe des Brechunngsindex zwischen 40° und 70°). Sind ein Paar geeigneter Ebenen, z. B. zwei

gegenüberliegende Oktaederflächen (Prismenwinkel 70° 32'), als natürliche Krystallflächen vorhanden, so benutzt man diese und bedeckt die übrigen mit einer Schwärze, welche man aus Ruß und einem schnell trocknenden Öle herstellt. Ist der zu untersuchende Körper nach den Messungen tetragonal oder hexagonal, und handelt es sich nur um die Feststellung der optischen Einaxigkeit und des Charakters der Doppelbrechung, hat man also die Basis, wenn diese nicht auftritt, anzuschleifen, so braucht dies nur ganz angenähert zu geschehen; denn die erforderten Bestimmungen lassen sich noch ausführen, wenn selbst die Platte sehr schief geschliffen ist, wenn man nur das Interferenzbild noch in seinem ganzen Umfange im Gesichtsfelde des Polarisationsapparates sieht. Meist genügt hierzu sogar ein unregelmäßiger Splitter des Krystalles, welchen man zwischen zwei Glasplättchen in Canadabalsam einbettet. Will man dagegen die Brechungsindices eines einaxigen Krystalles bestimmen und dazu ein Prisma parallel der Axe verwenden, so muß dieses sehr genau geschliffen sein; ein besonders günstiger Umstand ist hierbei eine vorherrschend prismatische Entwicklung der Krystalle nach der Hauptaxe, indem man alsdann bei hexagonalen Krystallen direct zwei einander unter 60° schneidende Prismenflächen (unter Schwärzung der übrigen), bei tetragonalen eine solche und eine leicht in genügender Genauigkeit herzustellende, künstliche, verticale Fläche verwenden kann. Platten von zweiaxigen Krystallen, welche zur Messung des Axenwinkels dienen sollen, müssen so geschliffen sein, daß ihre Normale nicht mehr als 1° von der Mittellinie abweicht, wenn die Messung auf 2—3' genau ausfallen soll; bei sehr kleinen Krystallen wird man sich allerdings mit einer geringeren Genauigkeit begnügen müssen. Bei monoklinen und triklinen Krystallen genügt es meist (wenn nämlich die Dispersion der Hauptschwingungsrichtungen 1—2° nicht übersteigt), die Schliffe für mittlere Farben richtig anzufertigen und auch für die übrigen zu verwenden. Prismen zur Bestimmung der Brechungsindices müssen auf 1° genau die erforderliche Orientierung haben, sollen die erhaltenen Zahlen durchschnittlich auf 3 Decimalen richtig sein.



Anhang.

Preisverzeichnisse

der Lieferanten von

Apparaten, Modellen, Krystallen und Präparaten.

W. Apel, Inhaber Dr. M. Apel,

Universitäts-Mechanikus in Göttingen.

Totalreflectometer nach F. Kohlrausch, Teilung in 1/1°, Nonienablesung auf 0,05°, Krystallhalter mit doppeltem Kugelgelenk, Klammer und Spitzenplatte, abnehmbarem Fernrohrträger und Richtschneide	Mark 124.—
Dasselbe mit Teilung in 0,5°, Nonienablesung zu 1′, die Alhidade mit Klemmvorichtung, Mikrometerschraube und Lupenträger	- 160.—
Dasselbe mit der von Klein angegebenen Construction (s. S. 702) mit zwei Fernrohrträgern, Glasgefäß mit zwei gegenüberstehenden parallelen Glasplatten, Fernrohren, festem centrierten Objectträger und mit dem drehbaren Kleinschen Objectträger	- 275.—
Kleines Thermometer	- 2.—
Fernrohr mit Fadenkreuz und Ocular-Glasmikrometer	- 15.—
Fernrohr mit halber Ocularlinse und in Glas geätztem Kreuz an Stelle des Objectives	- 8.25
Centrierter Krystallträger ohne Kugelgelenk	- 16.50
Drehbarer Krystallträger nach Klein mit Mikrometerbewegung	- 36.—
Vorstecklupe	- 4.50
Kleiner Trog aus Flintglas	- 14.—
Nicolsches Prisma in Messingfassung, für das Fernrohr passend	- 16.50
Schwarzer Glasspiegel mit Halter und Träger	- 17.50
Blendschirm mit Halter und Träger	- 5.50
Zweites Glasgefäß mit Fassung zum Gebrauch für andere Flüssigkeiten als Schwefelkohlenstoff	- 13.50
Glasgefäß mit zwei parallelen Spiegelglasflächen zum Gebrauche bei durchgehendem Lichte	- 17.—
Anlegegoniometer nach Hauy, mit abnehmbaren Schenkeln aus Stahl, Teilung in 1/1°	- 16.50
Desgleichen mit Scharnier, Teilung in 0,5°	- 27.—
Krystallmodelle aus Holz, 123 Stück, Durchschnittsgröße 5 cm	- 66.—
Krystallmodelle aus Glastafeln zusammengesetzt mit eingezogenen Axen. (Nach besonderem Verzeichnis.)	

Böhm und Wiedemann,

Chem.-physik. Untensilienhandl. u. mechan. Werkstätte, München, Karlsplatz 14.

Strahlenflächenmodelle, deren Axenverhältnisse den von G. J. Pabst (s. S. 96 Anm. u. 808) gelieferten Modellen der Indexflächen entsprechen, in Messingdraht auf lackierten gußeisernen Stativen. Diese nach Angabe von Prof. P. Groth gefertigten und zur Demonstration in Vorlesungen bestimmten Modelle besitzen einen Durchmesser ohne Stativ von etwa 50 cm. Außerdem werden dieselben in halber Größe mit Holzstativ geliefert; die Preise der

letzteren sind im folgenden in ( ) angegeben. Photographien der Modelle stehen auf Wunsch gegen Erstattung der Kosten (à 50 Pf.) zur Verfügung.

a) Strahlenflächen der einaxig negativen Krystalle (s. S. 67) . . . . . Mark 28 (14)
b) - - - positiven - (s. S. 73) . . . . . - 28 (14)
c) - - zweiaxigen Krystalle (s. S. 95) . . . . - 77 (52)
d) - monokliner Krystalle für Rot, Gelb und Blau durch die Hauptschnittcurven dargestellt, zur Demonstration der geneigten Dispersion (s. S. 121 f.) . . . . - 66 (50)
e) desgl. zur Demonstration der horizontalen und der gekreuzten Dispersion (s. S. 124 f.) . . . . - 66 (50)
f) desgl. zur Demonstration der Dispersion eines triklinen Krystalles (s. S. 126) . . . . - 66 (50)

Axenkreuze der sieben Krystallsysteme, mit Durchbohrungen zum Einziehen farbiger Seidenfäden, auf Stativen gleich vorigen; diese Axenkreuze werden in denselben beiden Formaten geliefert, wie die Strahlenflächen-Modelle; Preis zusammen . . . . - 90 (65)
Seidenfäden dazu . . . . - 12 (10)
Mit eingezogenen Seidenfäden . . . . - 110 (88)

Modell zur Erläuterung der **stereographischen Projection**, entsprechend Fig 175 u. 176 (s. S. 316), in Messing auf eisernem, bzw. hölzernem Stative (s. vor.) . . . . - 77 (52)

Anlegegoniometer mit halbem Kreise, in Etuis . . . . - 20.—

Reflexionsgoniometer mit verticalem Kreise (s. S. 645 f.) . . . . - 250.—

Beleuchtungsbrenner hierzu (Flürscheims Patent, s. S. 647) . . . . - 8.—

Bunsenscher Brenner (Flürscheims Patent) mit Kamin und Vorrichtung zur Färbung der Flamme nach Feussner, zur Anwendung am Totalreflectometer (s. S. 701) . . . . - 13.50

Bunsenscher Brenner mit breiter Öffnung und Vorrichtung zur Färbung der Flamme nach Laspeyres (s. S. 738 Anm.) . . . . - 32.—

Derselbe mit langem knieförmigen Arme zur Befestigung an der Wand . . . . - 36.—

Apparat zur Demonstration und Bestimmung der **Schwingungsrichtungen** des polar. Lichtes in zweiaxigen Krystallen (s. S. 107 Anm.), mit gr. Metall-Transporteur und Kreisteilung auf der Schiefertafel . . . . - 52.50

R. Fuess,

Mechanisch-optische Werkstätten. Abteilung I. Steglitz bei Berlin, Düntherstr. 8.

Anlegegoniometer mit abnehmbaren Stahlschenkeln (Fig. 663) . . . . Mark 24.—
do. mit festen Schenkeln (s. S. 632, Fig. 664) . . . . - 30.—
do. mit zwei Kreisen (s. S. 633, Fig. 665.) . . . . - 32.—

Mikroskopgoniometer nach Hirschwald (s. S. 634) . . . . - 500.—

Fühlhebelgoniometer (s. S. 635, Fig. 666) . . . . - 350.—

Leesons Goniometer zum Aufsetzen auf den Mikrostubus (s. S. 640, Fig. 668 u. 669) - 50.—

Kleines Reflexionsgoniometer nach C. Klein (s. S. 647, Fig. 676) . . . . . . - 280.—

Reflexionsgoniometer nach Wollaston (s. S. 641 f., Fig. 673) mit Fernrohr und Degenschem Spiegel . . . . - 170.—

Reflexionsgoniometer mit horizont. Kreise . . . . - 275.—

Reflexionsgoniometer und **Refractometer** (Modell Nr. 2, s. S. 649, Fig. 677 u. 678). Teilung des verdeckten silbernen Limbus auf 15′, der Nonien auf 30″; vier Oculare und vier Lichtsignale; letztere auf Revolverscheibe; Beleuchtungsrohr (s. S. 656) mit Nicolschem Prisma . . . . - 675.—

Dasselbe Instrument (Modell 2a) nach S. 657 vervollständigt . . . . . . - 740.—

Dasselbe mit Nicolschem Prisma zum Aufsetzen auf Ocular γ (s. S. 656) und einem Linsenaufsatze zur Messung des Winkels der optischen Axen . . . - 750.—

Reflexionsgoniometer Modell Nr. 3 (s. S. 657) . . . . - 460.—

Dasselbe Modell Nr. 4 (s. S. 657) mit offenem Limbus . . . . - 340.—

Grosses Reflexionsgoniometer und **Refractometer** (s. S. 658, Fig. 681). Silberner Limbus auf 6′ geteilt, zwei Mikroskope mit Fadenmikrometer, zwei Nicolsche Prismen mit Teilkreisen für die Fernröhre; vier Oculare und ebensoviele Signale, Beleuchtungsrohr mit Nicol . . . . - 1350.—

Dasselbe vervollständigt nach Liebisch . . . . - 1500.—

Erhitzungsapparat zur Messung der Krystallwinkel und Brechungsindices in höherer Temperatur (s. S. 660 f., Fig. 683) . . . . - 250.—

Vorrichtung zum Messen zerfliesslicher Krystalle (s. S. 674, Fig. 685) zu den Goniometern Nr. 2, 2a, 3 und 4 passend . . . . Mark 45.—

Goniometerlampe auf Stativ mit Umschlußmantel für Hell- und Dunkelstellung (s. S. 655, Anmerk.) . . . . - 30.—

Traubes Verdunkelungsvorrichtung zum Goniometer (S. 663 Anm.) . . . . . - 24.—

Theodolitgoniometer (s. S. 679, Fig. 688) . . . . - 750.—

Dasselbe mit verdecktem Silberlimbus von 15 cm Durchmesser, auf 1/4° geteilt, Nonienablesung 30″ . . . . - 950.—

Theodolitgoniometer, Czapskische Anordnung mit vollständigem Centrier- und Justierapparate (s. S. 682, Fig. 689) . . . . - 675.—

Verticalkreis nach Stöber, zum Gebrauche an den Goniometern Modell 2, 2a, 3 und 4 (s. S. 686, Fig. 691) . . . . - 105.—

Krystallpolymeter nach C. Klein (s. S. 688, Fig. 692) . . . . - 2250.—

Dasselbe Instrument, als dreikreisiges Goniometer allein . . . . - 1750.—

Universal-Theodolitgoniometer mit der Einrichtung zur Auflösung sphärischer Dreiecke nach von Fedorow (s. S. 689, Fig. 693) . . . . - 1124.—

Liebischs Totalreflectometer zum Goniometer Nr. 2, 2a, 3 und 4 gehörig, dessen Ocular γ alsdann mit Nicol versehen wird . . . . - 120.—

Dasselbe, als besonderes Instrument . . . . - 280.—

Grosses Totalreflectometer zum Goniometer Modell I passend . . . . - 270.—

Kohlrauschsches Totalreflectometer, in der von C. Leiss vervollständigten Construction (s. S. 703, Fig. 695) . . . . - 400.—

Dasselbe mit Winkelmeßvorrichtung nach Miers . . . . - 485.—

Kleines Refractometer nach C. Leiss (s. S. 709, Fig. 698 u. 699) . . . . . . - 72.—

Dasselbe mit Nicolschem Prisma vor dem Oculare . . . . - 86.—

Neues Krystallrefractometer nach C. Klein (s. S. 710, Fig. 700) . . . . . . - 450.—

Polarisationsinstrument nach Nörremberg (s. S. 722, Fig. 702) für paralleles und convergentes Licht, mit drehbarem geteilten Tische, kleinem Axenwinkelgoniometer und Auszugsrohre zur stärkeren Vergrößerung der Interferenzbilder - 150.—

Dasselbe Instrument, ohne Axenwinkelapparat . . . . - 130.—

Krystallographisch-optischer Universalapparat nach Groth (s. S. 723 f., Fig. 703, 707, 713, 715), bestehend aus:

1) Verticales Polarisationsinstrument für convergentes und paralleles Licht (Fig. 703) nebst Stauroskop mit Calderonscher Doppelplatte (s. S. 727) und empfindlichen Gypsplättchen . . . . - 320.—
2) Axenwinkelstativ, zu dem die optischen Teile des verticalen Instrumentes benutzt werden, neue Form (Fig. 715) mit Centrier- und Justierapparat und zwei Fernröhren zur Benutzung als Goniometer und Refractometer (s. S. 743) . . . . - 400.—
3) Erhitzungsapparat mit zwei Thermometern (s. S. 749) . . . . - 45.—
4) Zwei Ölgefäße (s. S. 747) à 10 Mark . . . . - 20.—
5) Quarzkeil I.—III. Ord. und 1/4 Und.-Glimmerplatte [1] . . . . - 20.—

Zusammen Mark 805.—

Daraus einzeln:

Das verticale Polarisationsinstrument ohne Stauroskop . . . . Mark 260.—
Stauroskop nach Calderon oder Bertrand . . . . - 240.—
Stauroskop mit Halbschattennicol . . . . - 260.—

Adamscher Polarisations- und Axenwinkelapparat (s. S. 753, Fig. 717) . . . . - 310.—

Mikroskope:
a) Kleineres Modell (s. S. 769, Fig. 724) mit Objectiven, Ocularen usw. . . . . Mark 330—380.—
b) Mittleres Modell (Fig. 725) do. . . . . - 583—852.—
c) Großes Modell (Fig. 726) ohne Objective und Oculare . . . . Mark 660.—
d) Dasselbe mit gleichzeitig drehbaren Nicols (Fig. 730) do. . . - 775.—

Goniometer zur Messung mikroskopischer Krystalle (s. S. 778) . . . . - 30.—

Ocularschraubenmikrometer (s. S. 774) . . . . - 65.—

Calderonsches Stauroskopocular (s. S. 774) . . . . - 35.—

Bertrandsches Stauroskopocular (s. S. 774) . . . . - 35.—

Babinetscher Compensator (s. S. 780) . . . . - 90.—

Michel-Lévyscher Compensator (s. S. 780) . . . . - 135.—

Universaltisch mit drei Drehaxen nach von Fedorow (s. S. 781, Fig. 731) . . - 150.—

Einfacher Universaltisch (Fig. 732) . . . . - 90.—

Drehapparat, einfacher (Fig. 733) . . . . - 40.—

---

1) Die Platten zur Bestimmung des Sinnes der Doppelbrechung werden je nach Wunsch orientiert (s. S. XIII: Berichtigungen).

Drehapparat, großer nach C. Klein (Fig. 734) mit Objectiv und Condensor. . Mark 105.—
do. mit Axenwinkelapparat nach Adams (Fig. 735) . . . . - 70.—
Erhitzungsapparat zum Mikroskop (Fig. 736). . . . . - 85.—
do. (Fig. 737). . . . . - 36.—
do. (Fig. 738). . . . . - 90.—
Zwei Kalkspatrhomboeder in Fassung, drehbar zur Demonstration der Doppelbrechung (s. S. 59 f.) . . . . - 70.—
Nicolsche Prismen . . . . Mark 10—100.—
1/4 **Und.-Glimmerplatte** (s. S. 188). . . . . Mark 4.—
Empfindliche Gypsplatte (s. S. 140) . . . . - 10.—
Quarzkeil (s. S. 141) . . . . - 16.—
Apparat zur Demonstration der **Doppelbrechung durch Biegung** (s. S. 226) . . . - 15.—
Presse zur Demonstration der Doppelbrechung durch Druck (s. S. 228). . . . - 15.—
Apparat zur Demonstration der Doppelbrechung durch Erhitzung (s. S. 228). . - 15.—
Dicke Gläser zu den beiden letzteren Apparaten. Das Dutzend . . . . - 9.—
Bückingscher **Druckapparat** (s. S. 231) . . . . - 55.—
Dichroskop mit der Verbesserung von V. von Lang (s. S. 166) . . . . . . - 15.—
Sénarmontscher **Apparat** zur Demonstration der Wärmeleitung . . . . . . - 18.—
Kleine Schneidemaschine für Handbetrieb (Fig. 744) . . . . - 72.—
Dieselbe mit Vorrichtung zur Orientierung der Krystalle (Fig. 745). . . . . - 152.—
Kleine Schneidemaschine für Fuß- und Motorbetrieb (s. S. 796, Fig. 746) Mark 285—333.—
Gresse Schneidemaschine für Motorbetrieb (s. S. 797, Fig. 747) . . . . Mark 400.—
Schleif- und Poliermaschine (s. S. 797, Fig. 748). . . . . - 190.—
Vorrichtung zum Parallelschleifen (s. S. 799, Fig. 749) . . . . - 18.—
Wülfingscher **Schleifapparat zur Herstellung orientierter Krystallschliffe** (s. S. 799, Fig. 750) . . . . - 44.50
Platte von Gusseisen, genau plan gehobelt . . . . - 12.—
Glasplatte in Holzrahmen, zum Schleifen. . . . . - 12.—
Kasten mit Schleifutensilien (verschiedene Sorten Schmirgel, Canadabalsam, Zinnasche, Colophoniumkitt) . . . . - 24.—
Präparierapparat zum Kitten von Dünnschliffen (Fig. 747) mit regulierbarer Spirituslampe, Thermometer und Pincette. . . . . - 28.—
Objectträger von gewöhnlichem Glase . . . . pro 100 Stück - 5.—
do. von Spiegelglas . . . . - 100 - - 10.—
Deckgläser 22 : 23 mm. . . . . - 100 - - 5.—
do. 16 : 16 mm. . . . . - 100 - - 3.—
Glaslineal zum Zeichnen, mit Millimeterteilung . . . . - 9.—
Glasdreieck, rechtwinkelig (eine Kathete mit Millimeterteilung. . . . . - 12.—
Glaskreis in 360° geteilt, als Transporteur zu gebrauchen . . . . - 12.—

Ausführliche Preisverzeichnisse mit Abbildungen werden auf Wunsch gratis versendet.

Dr. F. Krantz,

Rheinisches Mineralien-Contor
Verlag mineralogischer und geologischer Lehrmittel
Bonn am Rhein (Herwarthstraße 36)

empfiehlt sich zur Lieferung von Mineralien, Meteoriten, Gesteinen, Petrefacten, Dünnschliffen von Gesteinen und Petrefacten, orientierten Mineralpräparaten, Gypsmodellen, Edelsteinmodellen, geol. und petrogr. Diapositiven und geologischen Modellen aller Art, sowohl einzeln als auch in systematisch geordneten Sammlungen.

Cataloge, Nr. 1a (Mineralien und Mineralpräparate), Nr. 1b (Krystallmodelle), Nr. 2 (Petrefacten und geolog. Modelle), Nr. 3 (Gypsmodelle), Nr. 4 (Gesteine und Dünnschliffe) stehen auf Wunsch kostenfrei zur Verfügung.

I. Krystallmodelle in Birnbaumholz.

A. **Kleine Sammlungen von je 30 bzw. 50 Modellen** in der Durchschnittsgröße von 5 und von 10 cm = Mark 20.— bzw. 36.— und Mark 55.— bzw. 100.—

B. **Sammlungen von 150 bzw. von 80 Modellen** (Katalog 8), enthaltend die holoedrischen, hemiedrischen und tetartoedrischen Formen, sowie die am häufigsten in der Natur vorkommenden Combinationen. Zusammengestellt von Prof. Dr. C. Hintze.
Preis: 5 cm = Mark 142.— bzw. 72.—. 10 cm = Mark 425.— bzw. 210.—

C. **Übungssammlung von 56 Modellen verzerrter und pseudosymmetrischer Krystallformen.** Diese Sammlung enthält für Übungszwecke besonders geeignete einfache Modelle, die teils die gleichwertigen Flächen in ungleichem Centralabstande zeigen, teils in ihren Combinationsverhältnissen eine pseudosymmetrische Entwicklung darstellen, so daß das

System erst unter Anlegung des Anlegegoniometers festgestellt werden kann. Zusammengestellt von Prof. Dr. J. Hirschwald. Preis: 5 cm = Mark 45.—
Kleine Goniometer aus Messing, für derartige Übungszwecke ausreichend, je Mark 2.50

D. **Systematisch-krystallographische Sammlung von 417 Modellen,** enthaltend sämtliche in dem vorliegenden Lehrbuche (4. Auflage 1905) abgebildeten Krystallformen und Combinationen, zusammengestellt und erläutert im Sondercataloge Nr. 6 (8. Auflage in Vorbereitung) von Prof. Dr. P. v. Groth. Durchschnittsgröße 5 cm = Mark c. 625.—

E. **Petrographisch-krystallographische Sammlung von 100 Modellen** nach H. Rosenbusch: »Mikroskopische Physiographie der petrographisch wichtigen Mineralien« (4. Auflage 1905), zusammengestellt von Prof. Dr. K. Busz. Durchschnittsgröße 5 cm = Mark 95.—

F. **Mineralogisch-krystallographische Sammlung von 928 Modellen zur Erläuterung der Krystallformen der Mineralien,** zusammengestellt von Prof. Dr. C. Hintze (Sondercatalog 5, 3. Auflage). Durchschnittsgröße 5 cm = Mark 1800.—

Alle Modelle sind nach besonderen Preislisten einzeln käuflich, und ebenso können alle Krystallmodelle aus Holz, Glas oder Pappe, die nicht in den Katalogen aufgeführt sind, nach eingesandten krystallographischen Zeichnungen mit Winkelangaben in den Werkstätten der Firma hergestellt werden.

II. Glas-Krystallmodelle.

Diese Modelle sind aus fehlerfreiem Spiegelglas angefertigt; die einzelnen Scheiben sind an den Seiten abgeschliffen, so daß sie in scharfen Kanten aneinander stoßen, wodurch die Modelle sowohl an Richtigkeit als auch an Festigkeit und elegantem Aussehen gewinnen. Die Kanten sind mit schmalen Streifen von schwarzem Calico überklebt. Die Durchschnittshöhe beträgt je nach der Form 15—25 cm.

A. **Kleine Unterrichtssammlung von 15 Modellen** mit eingezogenen farbigen Axen bzw. mit eingeschlossenen Grundformen aus Pappe. Mark 36.—

B. **Sammlung von 30 Modellen,** enthaltend die einfachen Grundformen der sechs Krystallsysteme, mit eingezogenen farbigen Axen. Mark 90.—

C. **Sammlung von 34 Modellen,** enthaltend die einfachen hemiedrischen und tetartoedrischen Formen mit eingeschlossener Grundform aus Pappe. Mark 150.—

D. **Sammlung von 60 Modellen** zur Demonstration einfacher Combinationen holoedrischer, hemiedrischer und tetartoedrischer Formen, der gewöhnlichsten hemimorphen Krystalle, sowie der Zwillingsbildungen (die Zwillingsindividuen drehbar um die Zwillingsaxe), zusammengestellt von Prof. Dr. K. Busz. Mark 300.—

E. **Sammlung von 102 Modellen,** enthaltend die von den 32 möglichen Klassen von Krystallformen bisher beobachteten 30 Klassen; zusammengestellt und erläutert (Sondercatalog Nr. 12) von Prof. Dr. H. Baumhauer. Mark 350.—

F. **Systematisch-krystallographische Sammlung von 81 Modellen** zur Erklärung der Beziehungen der einfachen Formen einer Krystallklasse zu den entsprechenden Formen der übrigen Klassen desselben Systemes (wie zur Ableitung der hemiedrischen und tetartoedrischen Formen aus den holoedrischen), zusammengestellt und erläutert von Prof. Dr. J. Beckenkamp (Catalog 1ᵇ S. 41—47). Mark 300.—

G. **Sammlung von 50 Modellen von einfachen Krystallcombinationen,** mit einfachen Axen; zusammengestellt von Prof. Dr. K. Busz. Mark 250.—

H. **Sammlung von 10 Modellen wichtiger Durchkreuzungszwillinge.** Die verschiedenen einzelnen Krystallindividuen sind durch Glas von verschiedener Färbung zur Anschauung gebracht. Mark 85.—

I. **Sammlung von 58 Modellen mit eingezogenen Symmetrieaxen;** zur Erläuterung der Symmetrieeigenschaften der 32 Gruppen krystallinischer Körper zusammengestellt und erläutert (Sondercatalog XIV) von Prof. Dr. Th. Liebisch. Mark 300.—

K. **Sammlung von 20 Modellen doppeltbrechender Krystalle** mit eingezogenen Elasticitätsaxen und sonstigen Axen, zusammengestellt nach H. Rosenbuschs Mikrosk. Physiographie, von Prof. Dr. U. Grubenmann. Mark 100.—

L. **Sammlung von 6 Plagioklasmodellen** mit eingelegten Glasplatten (Eb. d. opt. Axen) und mit eingezogenen Axen, construiert von Prof. Dr. Weinschenk. Mark 45.—

M. **Sammlung von 4 Modellen zur Veranschaulichung der Dispersion** in rhombischen und monoklinen Krystallen, mit eingezogenen mehrfarbigen Seidenfäden, welche die Lage der optischen Axen und Mittellinien darstellen. Mark 28.—

III. Papp-Krystallmodelle.

Diese Modelle bringen in sehr übersichtlicher Weise die verschiedenen einfachen Formen, Combinationen und Zwillingsverwachsungen zur Anschauung und eignen sich ihrer

Leichtigkeit und Größe (16 bis 25 cm) wegen ganz besonders zu Demonstrationen bei Vorlesungen. Aus starker, mit Leim imprägnierter Pappe hergestellt, die Flächen mit dunkelgelbem, die Kanten mit schwarzem Papier überzogen und lackiert, sind diese Modelle bei höchst elegantem Aussehen von großer Dauerhaftigkeit. Bei den Zwillingen sind die Einzelindividuen durch verschiedene Färbung voneinander abgehoben.

A. **Sammlung von 450 Modellen,** nach den 32 Symmetrieklassen angeordnet von Prof. Dr. K. Vrba (Catalog XI, 2. Auflage, April 1903). Diese Sammlung enthält außer den einfachen Formen, den wichtigsten Combinationen und Zwillingsverwachsungen der Mineralien auch viele Modelle von Laboratoriumsprodukten und reicht vollständig aus, um die morphologischen Verhältnisse und die Ausbildungsweise der Krystalle zur Anschauung zu bringen. Mark 960.—
B. **Kleine Unterrichtssammlungen von 100 bzw. 60 Modellen.** Mark 215.— bzw. 120.—
C. **Sammlung von 115 Modellen** zur Darstellung der hemiedrischen und tetartoedrischen Formen, zusammengestellt von Prof. Dr. J. Beckenkamp (Ergänzungssammlung der systematisch-krystallographischen Sammlung von 81 Glasmodellen). Mark 240.—

Verschiedene krystallographische Modelle.

A. **Modell zur Erläuterung der Kugelprojection** nach Prof. Dr. H. Lenk, einschließlich von sechs mit Flächennormalen versehenen Krystallmodellen. Mark 90.—
B. Colorierte Gummibälle zur Erläuterung der **sphärischen Projection** (Durchmesser 13 cm) nach Prof. Dr. J. Beckenkamp. je Mark 15.—
C. **Neue Axenmodelle** zur Demonstration der Symmetrieverhältnisse der Krystalle, construiert von Prof. Dr. H. Baumhauer. Ein vollständiger Satz zur gleichzeitigen Darstellung von sechs Krystallsystemen, in elegantem Holzkasten. Mark 110.—
D. **Sechs Gypsmodelle der optischen Wellenflächen für Krystalle** (8—9 bzw. 12—8 cm). Mark 38.50
E. **Sechs colorierte Wellenoberflächenmodelle aus Gyps,** construiert von Prof. Dr. L. Duparc. Diese in großem Maßstabe (etwa 16—25 cm Durchmesser) hergestellten Modelle sind nach den drei optischen Hauptelasticitätsebenen zerlegbar und werden durch zweckmäßig eingerichtete Stative zusammengehalten. Mark 120.—
F. **Holzmodelle der optischen Indexflächen** nach Prof. Dr. P. von Groth, aus poliertem harten Holze zum Zerlegen eingerichtet:
   1) Indexfläche für optisch positive Krystalle, mit einem schiefen Schnitte (17 × 14 cm). Mark 13.—
   2) Indexfläche für optisch negative Krystalle, mit einem schiefen Schnitte (16 × 12 cm). Mark 15.—
   3) Indexfläche zweiaxiger Krystalle mit einem Kreis- und einem schiefen Schnitte (23 × 14 × 12 cm). Mark 40.—
   Ein vollständiger Satz dieser drei Modelle = Mark 60.—
G. **Holzmodelle der Indexflächen** zur Erklärung der Theorie der Doppelbrechung und der optischen Eigenschaften der Krystalle nach Prof. Dr. L. Duparc. Diese Modelle sind aus massivem Birnbaumholze in der Höhe von 20 cm hergestellt, auf drei senkrecht zueinander liegende Metallaxen montiert und durch zweckmäßige Stative gehalten. Sie sind nach verschiedenen geeignet orientierten Ebenen durchschnitten, wodurch es möglich ist, die Gesetze der Fortpflanzung der Wellen in den verschiedenen Richtungen zu erkennen.
   Ein vollständiger Satz von acht Modellen = Mark 300.—
H. **Drahtmodelle der optischen Elasticitätsflächen (Indexflächen)** nach den Angaben von Prof. Dr. K. Vrba. Diese Modelle, in der Größe von 26—30 cm, sind aus 3 mm starkem Metalldraht zusammengesetzt und fein lackiert, gleichwertige Richtungen mit gleichen Farben. Der Satz besteht aus drei Modellen, welche die Elasticitätsfläche der positiven und negativen optisch einaxigen, sowie die der zweiaxigen Krystalle darstellen. Mark 45.—
I. **Drahtmodelle der Wellenoberflächen** nach Prof. Dr. K. Vrba. Die Wellenoberfläche der verschiedenen Strahlen ist mit verschiedenen Farben angelegt:
   1) Wellenfläche eines optisch einaxigen positiven Krystalles (26 × 32 cm). Mark 26.—
   2) - - - - - negativen - (32 × 32 cm). Mark 26.—
   3) - - zweiaxigen Krystalles mit drei Hauptschnitten (35 × 35 × 28 cm). Mark 18.—
   4) - - - - - mit eingeschlossenem Ellipsoide (36 × 36 × 25 cm). Mark 52.—
K. **Neue Modelle der Symmetrieebenen aus Eisenblech,** fein lackiert; nach den Angaben von Prof. Dr. K. Vrba. Jedes Modell ist aus einer Anzahl von Blechscheiben zusammengesetzt, welche die Symmetrieebenen der verschiedenen Krystallsysteme in ihrer gegenseitigen Lage repräsentieren, wobei die gleichwertigen durch gleiche Kolorierung gekennzeichnet sind. 5 Modelle (25 × 30 cm). Mark 115.—

L. **Neue Axenkreuze aus Metall,** construiert von Prof. Dr. K. Busz. Vernickelte Messingstäbe sind in einer centralen Kugel eingeschraubt und in regelmäßigen Abständen vom gemeinsamen Durchschnittspunkte aus mit Durchbohrungen versehen, durch die man Seidenfäden ziehen kann, um die Lage bestimmter Flächen anzudeuten. Bei dem Axenkreuze des monoklinen Systemes ist die geneigte a-Axe um die Axe b drehbar, so daß man den Winkel β beliebig verändern kann. Die Verticalaxe ist auf einem gußeisernen Fuße befestigt. Der Satz von sechs Axenkreuzen (38 cm) Mark 80.—, (50 cm) Mark 100.—. Die dazugehörigen Seidenfäden in fünf verschiedenen Farben Mark 3.—

M. **Axenkreuze aus Holz,** ein Satz von sechs Stück (15 cm) Mark 12.—, (25 cm) Mark 17.50

N. **Neue Krystallmodellhalter** für größere Krystallmodelle, construiert von Dr. F. Krantz. Dieselben bestehen aus einem Modellträger und einem hohlen Stative aus Messing (etwa 15 cm hoch) auf gußeisernem Fuße. Die Modellträger sind den verschiedenen Krystallformen angepaßt und ermöglichen dadurch und durch eine zweckmäßige Biegung des Statives eine vollständig freie und übersichtliche Aufstellung der Modelle. Der vollständige Satz besteht aus: einem Universalträger, zwei Keilträgern, zwei Gelenkträgern, zwei dreieckigen Trägern und einem runden Träger und kostet zusammen Mark 40.—

O. **Dreiarmiger Halter für Krystallmodelle aus Glas und Pappe,** construiert von Prof. Dr. K. Vrba, bestehend aus einem gußeisernen Fuße mit Messingsäule (50 cm), an welcher drei Paare von vernickelten Modellhaltern verschiebbar angebracht sind. Je ein Paar hält ein Modell, so daß drei Modelle gleichzeitig in richtiger Stellung nebeneinander verglichen werden können. Ein vollständig armiertes Stativ Mark 12.—

P. **Einfache Modellhalter** für Glas- und Pappmodelle (Catalog 1b S. 76), 10 Stück Mark 15.—
100 - - 120.—

J. Kreittmayr,

Formator d. k. b. Nationalmuseums, München, Hildegardstraße 12.

Gypsmodelle der Dehnungsoberflächen (s. S. 220) von Flußspat (Fig. 131), Quarz (Fig. 132) und Baryt (Fig. 133), mit farbigen Curven . . . . je Mark 5.—

V. Linhof,

Mechaniker, München, Lindwurmstraße 75.

Reflexionsgoniometer mit vertic. Kreise (s. S. 643 f., Fig. 674) . . . . Mark 150.—
do. mit horizontalem Kreise und zwei Fernröhren (s. S. 657 u. 691 Anmerk.) . . . . - 250.—

G. J. Pabst,

Lehrmittelfabrik, Nürnberg, Solgerstraße 16.

Ellipsoidmodelle, Birnbaumholz, poliert, zerlegbar:

a. **Optische Indexfläche zweiaxiger Krystalle,** mit einem Kreisschnitte und einem schiefen Schnitte, nebst einem Drahtmodell (s. S. 106, Fig. 74)
Großes Format (Hauptaxe 25 cm) Mark 30.—

b. **Optische Indexflächen + und — einaxiger Krystalle,** mit einem schiefen Schnitte, großes Format zwei Modelle à Mark 12.— = - 24.—
Genau die gleichen Modelle in kleinerem Formate
a) (Hauptaxe 17 cm) - 26.—
b) entsprechende Größe, 2 Stück à Mark 10.— = - 20.—
Eine Garnitur a und b groß Mark 50.—, klein Mark 42.—.

Krystallmodelle aus Holz, Glas und Pappe in allen Größen und Ausführungen.

M. Schilling,

Verlagsbuchhandlung, Halle a. S.,

(früher L. Brill, Verlagshandlung mathematischer Modelle in Darmstadt.)

Gypsmodelle:

Strahlenfläche einaxig negativer Krystalle (Kalkspat), Durchm. 9—8 cm . . Mark 4.—
Dieselbe für positive Doppelbrechung (Zinnober), Durchm. 9 cm . . . . . - 4.—
Fresnelsche Strahlenfläche zweiaxiger Krystalle, längs eines Hauptschnittes zerlegbar, Durchm. 12—8 cm . . . . - 9.—

Cartonmodelle:

Dreiaxiges Ellipsoid, beweglich, so daß man das Verhältnis der drei Axen nach Belieben ändern kann . . . . - 2.30
Mit Stativ. . . . . - 3.30

NB. Ausführlicher Katalog der mathemat. Modelle auf Verlangen.

W. u. H. Seibert,

Optisches Institut, Wetzlar.

Mikroskope. a) größeres mit vollständig optischer Ausrüstung und zwei Analysatoren	Mark	533.—
b) einfacheres, mit optischer Ausrüstung	-	300.—
Stauroscop-Ocular nach Bertrand	-	30.—
do. Calderon	-	24.—
Babinetscher Compensator	-	75.—

Dr. Steeg und Reuter,

Optisches Institut in Homburg v. d. Höhe.

Polarisationsapparat nach Nörremberg mit großem Gesichtsfelde und Auszugsrohre (S. 722, Fig. 702)	Mark	155.—
Derselbe mit Goniometer zum Messen der Axenwinkel (s. ebenda)	-	180.—
Turmalinzangen	-	12—36.—
Einaxige Krystallplatten, senkrecht zur Axe:		
Apophyllit von verschiedenen Fundorten	-	3—10.—
Amethyst von Brasilien mit Dreiteilung	-	10—30.—
Magnesium-Platin-Cyanür	-	3—12.—
Quarz, Rechts und Links . . . per Paar	-	6— 8.—
Kalkspat 1/2 bis 3 mm dick	-	3— 5.—
Apatit 1/2 bis 3 mm dick	-	3— 5.—
Turmalin in verschiedenen Farben	-	3—12.—
Zweiaxige Krystalle, senkrecht zur ersten Mittellinie:		
Sanidin, mit verschiedener Dispersion	-	3— 6.—
Adular von St. Gotthard (horizontale Dispersion)	-	3— 6.—
Aragonit, dick und dünn . . . per Stück	-	2.5— 5.—
Borax (gekreuzte Dispersion)	-	2.5— 3.5
Brookit (Axenebenen gekreuzt)	-	6—30.—
Weinsaures Kali-Ammoniak-Natron (desgl.)	-	3— 5.—
Dichromsaures Kali	-	2— 3,5
Gyps, 2 Platten, eine ungefaßt zum Erwärmen (geneigte Dispersion)	-	5—12.—
Chrysoberyll verschiedener Dispersion	-	8—20.—
Topas, mit kleinem und großem Axenwinkel	-	4—15.—
Titanit (Sphen)	-	3—15.—
Pleochroitische Würfel und Platten zum Drehen gefaßt:		
Pennin oder Ripidolith	-	4— 6.—
Cordierit	-	10—25.—
Turmalin	-	10—30.—
Topas	-	12—30.—
Epidot	-	6—12.—
Andalusitplatte senkrecht zu einer Axe (Büschel)	-	10—40.—
Epidotplatte	-	5—12.—
Aragonit, idiocyclophanisch	-	10—20.—
Quarzplatte, parallel der Axe ganz dünn	-	5—12.—
Quarzkeil mit den Farben 1.—4. Ordn. (s. S. 49)	-	20.—
Quarzprisma, senkrecht oder parallel zur Axe	-	15—75.—
Kalkspat, senkrecht oder parallel zur Axe je nach Größe und Reinheit	-	20—100.—
Alle Arten Polarisationsprismen, nach Nicol, Hartnack, Foucault, Glan, Thomson, Glazebrook usw.		
Dichroskopische Lupe	-	12.—
Farbige Gläser, rot und blau	-	2.—
Viertelundulations-Glimmerplatten	-	1,5— 4.—
Glimmercombinationen nach Reusch, einaxig, rechts und links drehend . . . per Paar	-	25.—
Sortiment von 16 gekühlten Gläsern . . . per Stück	-	3—10.—
Taschenspectroskop	-	27.—
Krystallplatten mit Absorptionsstreifen	-	2—20.—
Krystallmodelle in weißem und farbigem Glase, in Sammlungen von 18 bis 60 Stück	-	25—80.—

Ausführliche Cataloge senden auf Verlangen gratis und franco
Dr. Steeg und Reuter.

Voigt und Hochgesang (Inh. R. Brunnée).

Opt.-mech. Werkstätte, Göttingen, Unt. Maschstraße Nr. 26.

Mikroskope nach C. Klein mit Vorrichtung zum schnellen Wechsel der Beleuchtung.

a) Großes Modell je nach optischer Ausrüstung . . . . Mark 650—870.—
b) Mittleres Modell - - - - . . . . - 510—566.—
c) Kleines Modell - - - - . . . . - 200—436.—

Mikroskope mit Zahnradübertragung zur gleichzeitigen Drehung der Nicols.

a) Großes Modell mit drehbarem Tische . . . . Mark 758.—
b) Einfaches Modell . . . . - 608.—
Mikroskope neuester Construction (D. R. G. M.) mit rückwärts liegender Triebbewegung, unabhängiger Feinstellung der Objective, sowie Drehung des Innennicols und des Tubus; je nach Ausrüstung . . - 600—1000.—
Axenwinkelapparate . . . . - 100.—
Bertrandsches Ocular . . . . - 35.—
Babinetsches Compensator-Ocular . . . . - 80.—
Schraubenmikrometerocular . . . . - 60.—
Vertical-Illuminator . . . . - 18.—
Quarzkeil I.—III. Ordnung . . . . - 12—16.—
Gypskeil I.—III. Ordnung . . . . - 10—12.—
Glimmerkeil (nach C. von Fedorow) 16 Stufen . . . . - 18.—
Combinationskeil (nach F. C. Wright) . . . . - 20.—

Chemische Mikroskope nach O. Lehmann.

a) Mit Vorrichtungen für Glühtemperatur und Elektrolyse, Polarisator, Analysator im Tubus um 90° drehbar und vollst. optischer Ausrüstung. Mark 500.—
b) Dasselbe Mikroskop mit einfacher Erhitzungsvorrichtung . . . . - 425.—
c) Einfaches Mikroskop nur mit Spiegelpolarisation . . . . - 120—300.—
Polarisationsinstrument nach Nörremberg . . . . - 140.—
Präparierlupe . . . . - 100.—
Reflexionsgoniometer . . . . - 130—260.—
Anlegegoniometer . . . . - 18— 25.—
Sklerometer für Härtebestimmung (s. S. 790, Fig. 742) . . . . - 220.—
Cameras für Mikrophotographie . . . . - 35—400.—
Schneid- und Schleifmaschinen für Hand- wie auch für Fußbetrieb . . . - 60—275.—

Schleif- und Poliervorrichtungen, Objectträger, Deckgläser, Präparatenetuis usw.

Dünnschliffsammlungen von Krystallen und Gesteinen.

Anfertigung orientierter Schliffe nach Angabe.

Carl Zeiss,

Optische Werkstätte, Jena.

Abbesches Krystallrefractometer (Neuconstruction n. Pulfrich) s. S. 705. Mit Mikrometervorrichtung, einem vergrößernden und einem verkleinernden Fernrohre, Mikroskopobjectiv zur directen Beobachtung der Krystalle nebst Schränkchen und Kästchen für die Hilfsapparate . . . . Mark 550.—
Analysator mit Teilkreis auf Stativ . . . . - 50.—
Ocularspectroskop (s. S. 707) . . . . - 35.—
3 Flüssigkeiten mit Fläschchen . . . . - 8.50

Mikroskope. a) Großes Modell, mit Abbeschem Beleuchtungsapparate, Polarisator, zwei Analysatoren usw. . . . . - 500.—
b) Kleines Modell, mit Polarisator, zwei Analysatoren usw. . . . . - 240.—
Bertrandsches Ocular . . . . - 35.—
Ocular-Schraubenmikrometer . . . . - 90.—
Axenbilderocular . . . . - 30.—
Spectralocular . . . . - 200.—

Alphabetisches Register.

C.

D.

L.

M.

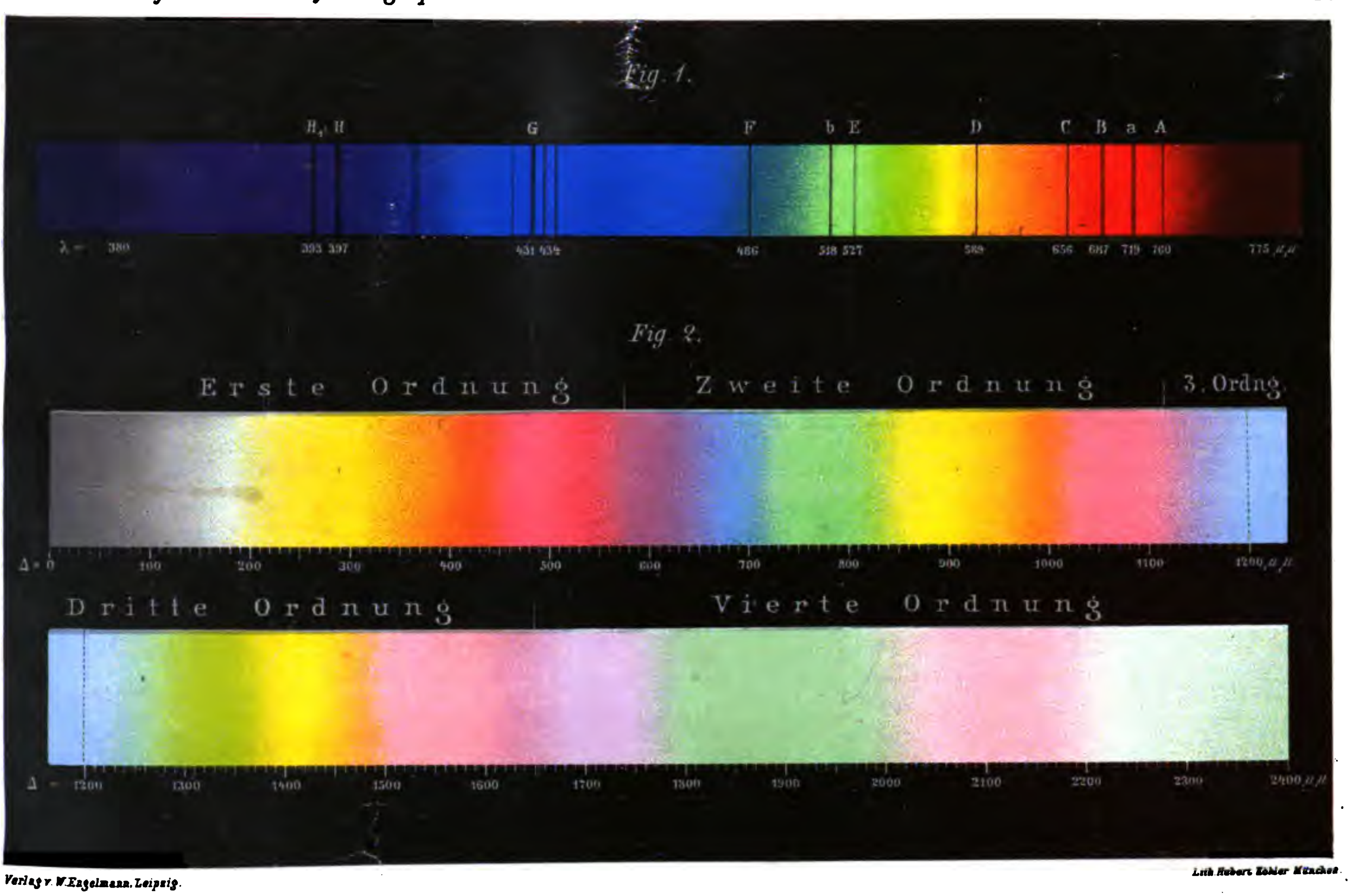
N.

O.

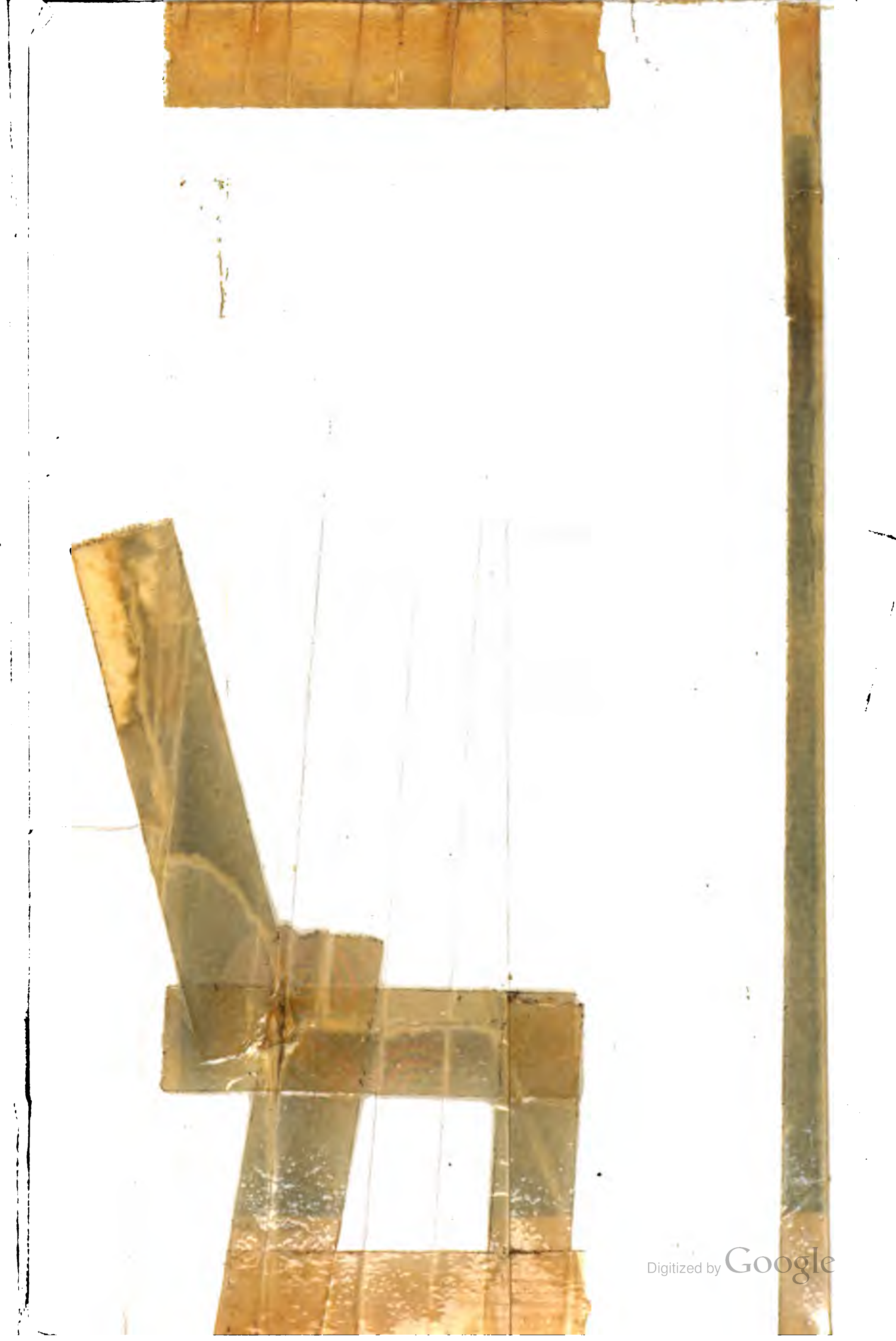
R.

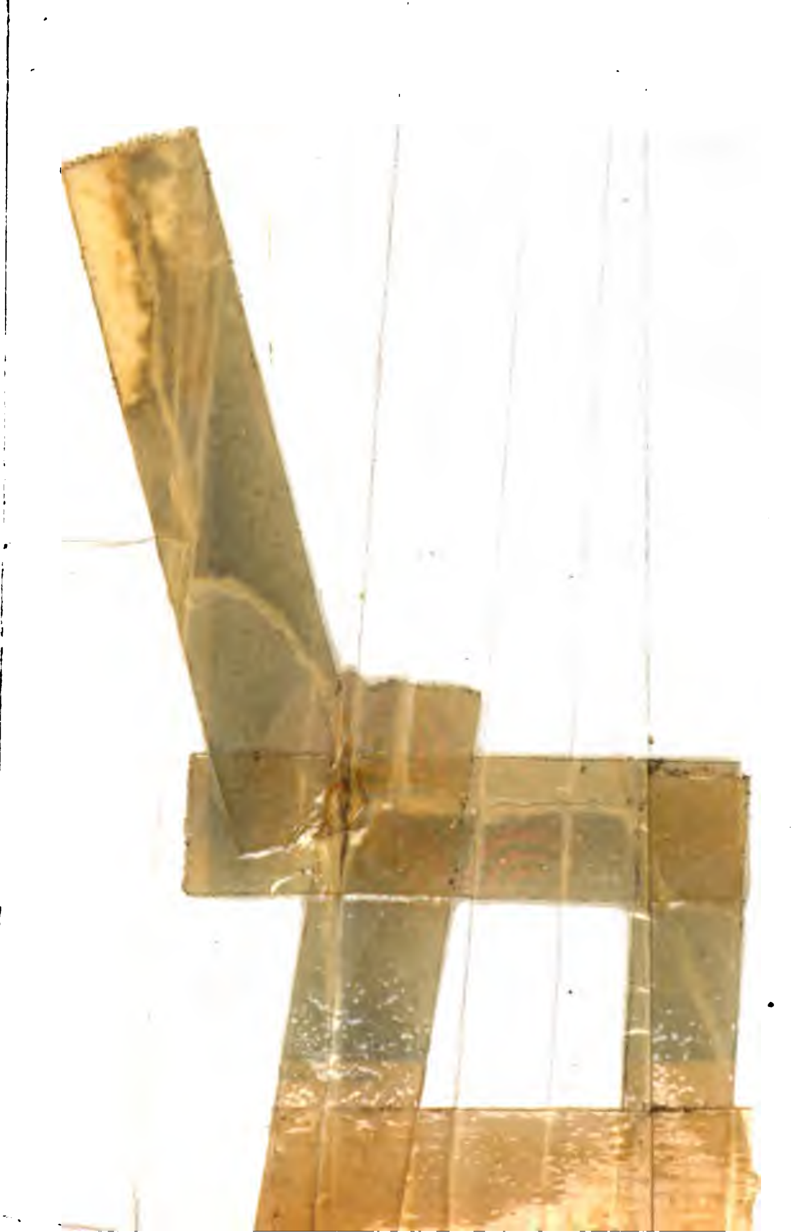
S.

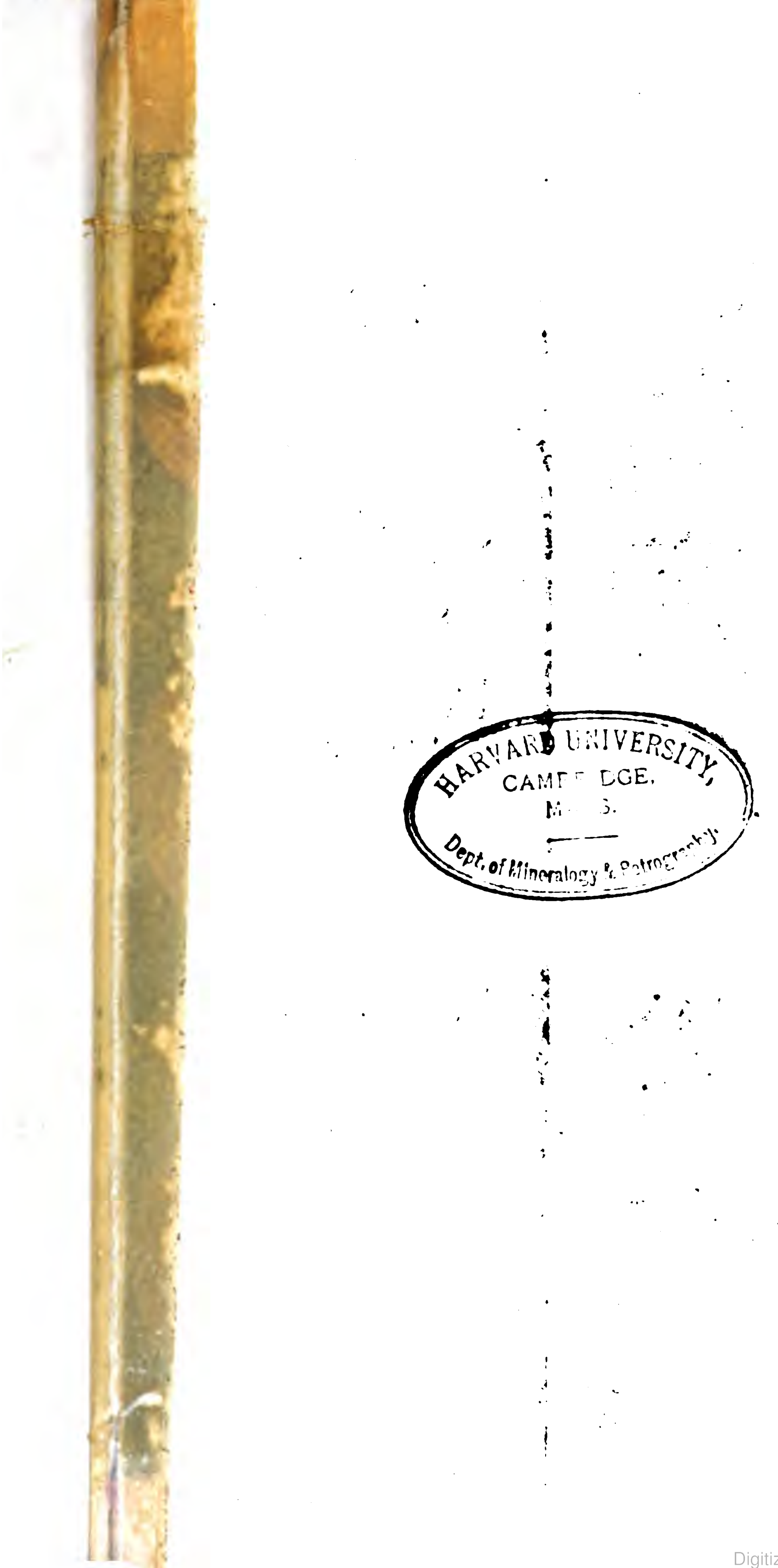
Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

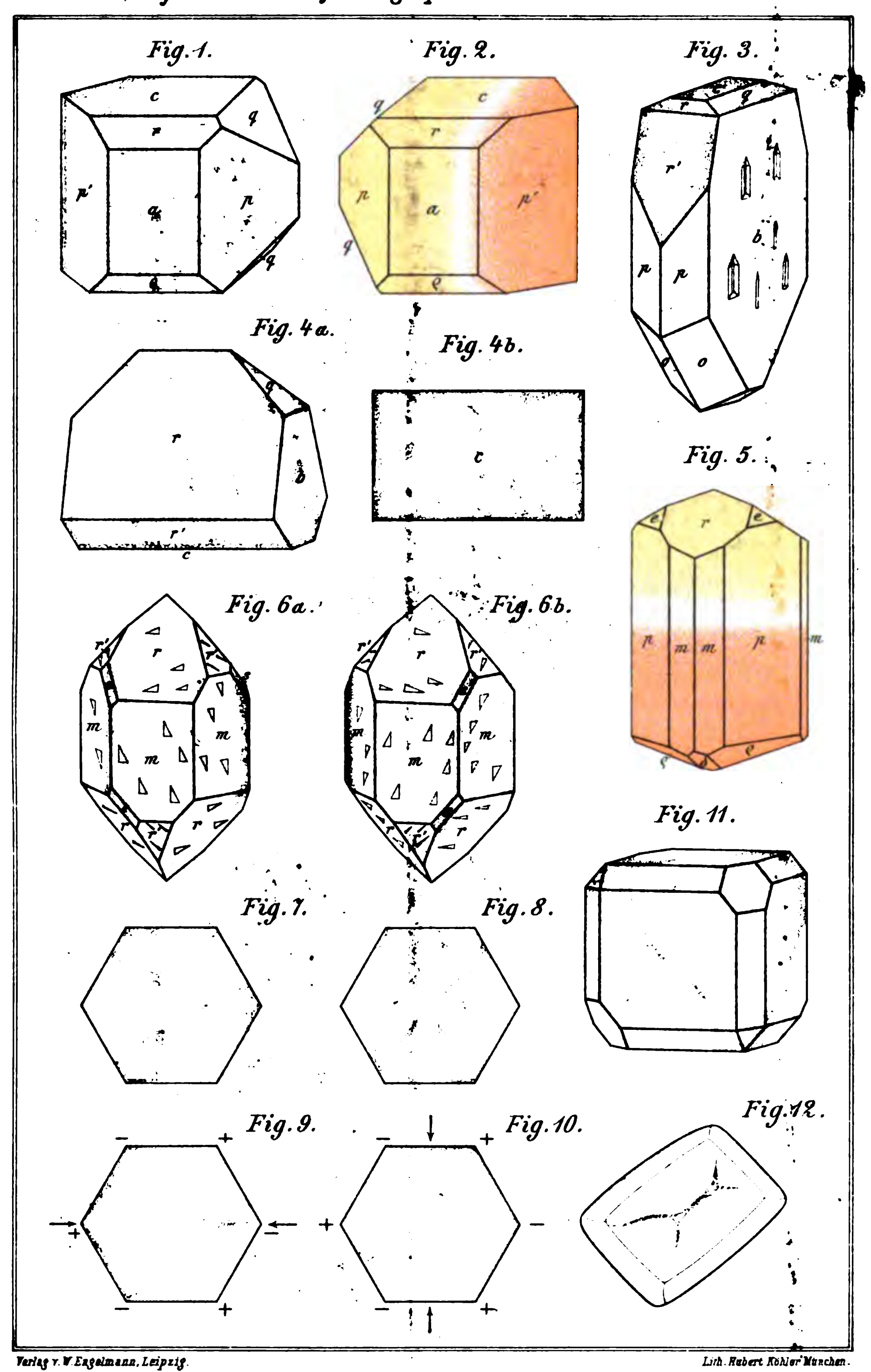


Verlag v. W. Engelmann, Leipzig.
Lith. Hubert Köhler München.









Verlag v. W. Engelmann, Leipzig.
Lith. Hubert Köhler München.


HARVARD UNIVERSITY,
CAMBRIDGE,
MAS
Dept. of Mineralogy & Petrography.



